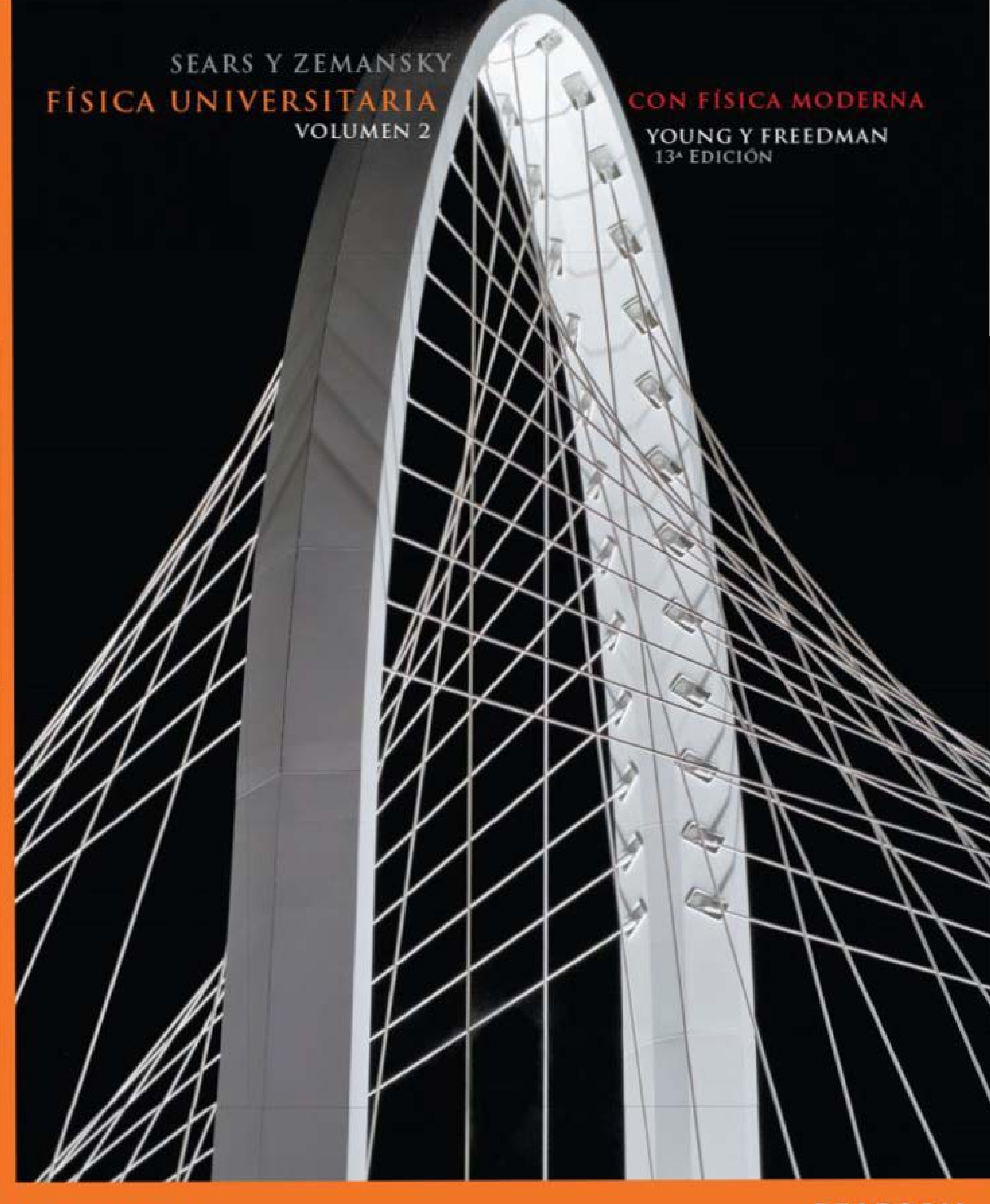


ALWAYS LEARNING

PEARSON

SIMULACIONES PhET (en inglés)

Disponible en el eText de Pearson y en el área de estudio de MasteringPhysics 

La edición en español consta de dos volúmenes. El volumen 1 incluye los capítulos 1 a 20; el volumen 2 incluye los capítulos 21 a 44.

Sección		Página
1.6	Estimation	10
1.7	Vector Addition	13
2.4	*Forces in 1 Dimension	47
2.4	*The Moving Man	49
2.5	Lunar Lander	52
3.2	Maze Game	76
3.3	*Projectile Motion	79
3.4	Ladybug Revolution, Motion in 2D	87
5.2	Lunar Lander	146
5.3	Forces in 1 Dimension, Friction, *The Ramp	149
6.2	*The Ramp	181
6.3	Molecular Motors, Stretching DNA	188
7.3	*The Ramp	222
7.5	*Energy Skate Park	229
9.3	Ladybug Revolution	286
10.6	Torque	326
12.3	Balloons & Buoyancy	380
13.2	Lunar Lander	406
13.4	My Solar System	412
14.2	Motion in 2D	443
14.3	*Masses & Springs	446
14.5	*Pendulum Lab	453
15.8	Fourier: Making Waves, Waves on a String	495
16.6	Sound, Wave Interference	529
17.6	States of Matter	566
17.7	The Greenhouse Effect	570
18.3	Balloons & Buoyancy, Friction, Gas Properties	599
18.6	States of Matter	612
21.2	Balloons and Static Electricity, John Travoltage	691
21.6	*Charges and Fields, Electric Field of Dreams, Electric Field Hockey	708
21.7	Microwaves	711
23.2	*Charges & Fields	761
24.5	Molecular Motors, Optical Tweezers and Applications, Stretching DNA	806
25.3	Resistance in a Wire	825
25.4	Battery Voltage, Signal Circuit	829
25.5	Battery-Resistor Circuit, *Circuit Construction Kit (AC+DC), *Circuit Construction Kit (DC Only), Ohm's Law	834
25.6	Conductivity	838
26.4	*Circuit Construction Kit (AC+DC), *Circuit Construction Kit (DC Only)	866
27.3	Magnet and Compass, Magnets and Electromagnets	891
28.5	Faraday's Electromagnetic Lab, Magnets and Electromagnets	933
29.2	Faraday's Electromagnetic Lab, Faraday's Law, Generator	962
31.3	*Circuit Construction Kit (AC+DC), Faraday's Electromagnetic Lab	1031
32.3	Radio Waves & Electromagnetic Fields	1061
32.5	Microwaves	1070
34.4	*Geometric Optics	1131
34.6	Color Vision	1142
35.2	*Wave Interference	1168
36.2	*Wave Interference	1192
38.1	Photoelectric Effect	1262
38.4	Fourier: Making Waves, Quantum Wave Interference	1274
39.2	Davisson-Germer: Electron Diffraction	1287
39.2	Rutherford Scattering	1294
39.3	Models of the Hydrogen Atom	1297
39.3	Neon Lights and Other Discharge Lamps	1304
39.4	Lasers	1307
39.5	Blackbody Spectrum, The Greenhouse Effect	1310
40.1	Fourier: Making Waves	1328
40.1	Quantum Tunneling and Wave Packets	1337
40.3	Double Wells & Covalent Bonds, Quantum Bound States	1343
40.4	Quantum Tunneling and Wave Packets	1347
41.5	Stern-Gerlach Experiment	1383
42.1	Double Wells and Covalent Bonds	1406
42.2	The Greenhouse Effect	1409
42.4	Band Structure, Conductivity	1417
42.6	Semiconductors, Conductivity	1422
43.1	Simplified MRI	1444
43.3	Alpha Decay	1450
43.7	Nuclear Fission	1464

*Indica un tutorial asociado disponible en la biblioteca de MasteringPhysics.

ACTIVIDADES ACTIVPHYSICS ONLINE™ (en inglés)

www.masteringphysics.com

1.1 Analyzing Motion Using Diagrams
1.2 Analyzing Motion Using Graphs
1.3 Predicting Motion from Graphs
1.4 Predicting Motion from Equations
1.5 Problem-Solving Strategies for Kinematics
1.6 Skier Races Downhill
1.7 Balloonist Drops Lemonade
1.8 Seat Belts Save Lives
1.9 Screeching to a Halt
1.10 Pole-Vaulter Lands
1.11 Car Starts, Then Stops
1.12 Solving Two-Vehicle Problems
1.13 Car Catches Truck
1.14 Avoiding a Rear-End Collision
2.1.1 Force Magnitudes
2.1.2 Skydiver
2.1.3 Tension Change
2.1.4 Sliding on an Incline
2.1.5 Car Race
2.2 Lifting a Crate
2.3 Lowering a Crate
2.4 Rocket Blasts Off
2.5 Truck Pulls Crate
2.6 Pushing a Crate Up a Wall
2.7 Skier Goes Down a Slope
2.8 Skier and Rope Tow
2.9 Pole-Vaulter Vaults
2.10 Truck Pulls Two Crates
2.11 Modified Atwood Machine
3.1 Solving Projectile Motion Problems
3.2 Two Balls Falling
3.3 Changing the *x*-Velocity
3.4 Projectile *x*- and *y*-Accelerations
3.5 Initial Velocity Components
3.6 Target Practice I
3.7 Target Practice II
4.1 Magnitude of Centripetal Acceleration
4.2 Circular Motion Problem Solving
4.3 Cart Goes Over Circular Path
4.4 Ball Swings on a String
4.5 Car Circles a Track
4.6 Satellites Orbit
5.1 Work Calculations
5.2 Upward-Moving Elevator Stops
5.3 Stopping a Downward-Moving Elevator
5.4 Inverse Bungee Jumper
5.5 Spring-Launched Bowler
5.6 Skier Speed
5.7 Modified Atwood Machine
6.1 Momentum and Energy Change
6.2 Collisions and Elasticity
6.3 Momentum Conservation and Collisions
6.4 Collision Problems
6.5 Car Collision: Two Dimensions
6.6 Saving an Astronaut
6.7 Explosion Problems
6.8 Skier and Cart
6.9 Pendulum Bashes Box
6.10 Pendulum Person-Projectile Bowling
7.1 Calculating Torques
7.2 A Tilted Beam: Torques and Equilibrium
7.3 Arm Levers
7.4 Two Painters on a Beam
7.5 Lecturing from a Beam
7.6 Rotational Inertia
7.7 Rotational Kinematics
7.8 Rotoride–Dynamics Approach
7.9 Falling Ladder
7.10 Woman and Flywheel Elevator–Dynamics Approach
7.11 Race Between a Block and a Disk
7.12 Woman and Flywheel Elevator–Energy Approach
7.13 Rotoride–Energy Approach
7.14 Ball Hits Bat
8.1 Characteristics of a Gas
8.2 Maxwell-Boltzmann Distribution–Conceptual Analysis
8.3 Maxwell-Boltzmann Distribution–Quantitative Analysis
8.4 State Variables and Ideal Gas Law
8.5 Work Done By a Gas
8.6 Heat, Internal Energy, and First Law of Thermodynamics
8.7 Heat Capacity
8.8 Isochoric Process
8.9 Isobaric Process
8.10 Isothermal Process
8.11 Adiabatic Process
8.12 Cyclic Process–Strategies
8.13 Cyclic Process–Problems
8.14 Carnot Cycle
9.1 Position Graphs and Equations
9.2 Describing Vibrational Motion
9.3 Vibrational Energy
9.4 Two Ways to Weigh Young Tarzan
9.5 Ape Drops Tarzan
9.6 Releasing a Vibrating Skier I
9.7 Releasing a Vibrating Skier II
9.8 One-and Two-Spring Vibrating Systems
9.9 Vibro-Ride
9.10 Pendulum Frequency
9.11 Risky Pendulum Walk
9.12 Physical Pendulum
10.1 Properties of Mechanical Waves
10.2 Speed of Waves on a String
10.3 Speed of Sound in a Gas
10.4 Standing Waves on Strings
10.5 Tuning a Stringed Instrument: Standing Waves
10.6 String Mass and Standing Waves
10.7 Beats and Beat Frequency
10.8 Doppler Effect: Conceptual Introduction
10.9 Doppler Effect: Problems
10.10 Complex Waves: Fourier Analysis
11.1 Electric Force: Coulomb's Law
11.2 Electric Force: Superposition Principle
11.3 Electric Force: Superposition Principle (Quantitative)
11.4 Electric Field: Point Charge
11.5 Electric Field Due to a Dipole
11.6 Electric Field: Problems
11.7 Electric Flux
11.8 Gauss's Law
11.9 Motion of a Charge in an Electric Field: Introduction
11.10 Motion in an Electric Field: Problems
11.11 Electric Potential: Qualitative Introduction
11.12 Electric Potential, Field, and Force
11.13 Electrical Potential Energy and Potential
12.1 DC Series Circuits (Qualitative)
12.2 DC Parallel Circuits
12.3 DC Circuit Puzzles
12.4 Using Ammeters and Voltmeters
12.5 Using Kirchhoff's Laws
12.6 Capacitance
12.7 Series and Parallel Capacitors
12.8 *RC* Circuit Time Constants
13.1 Magnetic Field of a Wire
13.2 Magnetic Field of a Loop
13.3 Magnetic Field of a Solenoid
13.4 Magnetic Force on a Particle
13.5 Magnetic Force on a Wire
13.6 Magnetic Torque on a Loop
13.7 Mass Spectrometer
13.8 Velocity Selector
13.9 Electromagnetic Induction
13.10 Motional emf
14.1 The *RL* Circuit
14.2 The *RLC* Oscillator
14.3 The Driven Oscillator
15.1 Reflection and Refraction
15.2 Total Internal Reflection
15.3 Refraction Applications
15.4 Plane Mirrors
15.5 Spherical Mirrors: Ray Diagrams
15.6 Spherical Mirror: The Mirror Equation
15.7 Spherical Mirror: Linear Magnification
15.8 Spherical Mirror: Problems
15.9 Thin-Lens Ray Diagrams
15.10 Converging Lens Problems
15.11 Diverging Lens Problems
15.12 Two-Lens Optical Systems
16.1 Two-Source Interference: Introduction
16.2 Two-Source Interference: Qualitative Questions
16.3 Two-Source Interference: Problems
16.4 The Grating: Introduction and Qualitative Questions
16.5 The Grating: Problems
16.6 Single-Slit Diffraction
16.7 Circular Hole Diffraction
16.8 Resolving Power
16.9 Polarization
17.1 Relativity of Time
17.2 Relativity of Length
17.3 Photoelectric Effect
17.4 Compton Scattering
17.5 Electron Interference
17.6 Uncertainty Principle
17.7 Wave Packets
18.1 The Bohr Model
18.2 Spectroscopy
18.3 The Laser
19.1 Particle Scattering
19.2 Nuclear Binding Energy
19.3 Fusion
19.4 Radioactivity
19.5 Particle Physics
20.1 Potential Energy Diagrams
20.2 Particle in a Box
20.3 Potential Wells
20.4 Potential Barriers

SEARS Y ZEMANSKY

FÍSICA UNIVERSITARIA

Volumen 2

CON FÍSICA MODERNA

Décimo tercera edición

HUGH D. YOUNG
CARNEGIE MELLON UNIVERSITY

ROGER A. FREEDMAN
UNIVERSITY OF CALIFORNIA, SANTA BARBARA

COLABORACIÓN DE
A. LEWIS FORD
TEXAS A&M UNIVERSITY

TRADUCCIÓN
Antonio Enríquez Brito
Traductor especialista en ciencias

REVISIÓN TÉCNICA
Gabriela Del Valle Díaz Muñoz
Luz María García Cruz
Héctor Luna García
Ricardo Paez Hernández
José Antonio Eduardo Roa Neri
Alberto Rubio Ponce
Departamento de Ciencias Básicas
Universidad Autónoma Metropolitana-Azcapotzalco
MÉXICO

Antonio Gen Mora
Departamento de Física y Matemáticas
Universidad Iberoamericana
MÉXICO

Ana Yancy Segura Zárate
Dionisio Gutiérrez Fallas
Ernesto Montero Zeledón
Instituto Tecnológico de Costa Rica
COSTA RICA



PEARSON

Datos de catalogación bibliográfica

YOUNG, HUGH D. y FREEDMAN, ROGER A.

Física universitaria con física moderna volumen 2
Décimo tercera edición

PEARSON, México, 2013

ISBN: 978-607-32-2190-0
Área: Ciencias

Formato: 21.5 × 27.5 cm Páginas: 896

Authorized translation from the English language edition, entitled *UNIVERSITY PHYSICS WITH MODERN PHYSICS TECHNOLOGY UPDATE 13th* Edition, by *HUGH D. YOUNG, ROGER A. FREEDMAN, contributing author A. LEWIS FORD*, published by Pearson Education, Inc., publishing as Addison-Wesley, Copyright © 2012. All rights reserved.
ISBN 9780321897961.

Traducción autorizada de la edición en idioma inglés, titulada *UNIVERSITY PHYSICS WITH MODERN PHYSICS TECHNOLOGY UPDATE 13ª* edición por *HUGH D. YOUNG, ROGER A. FREEDMAN, con la colaboración de A. LEWIS FORD*, publicada por Pearson Education, Inc., publicada como Addison-Wesley, Copyright © 2012. Todos los derechos reservados.
ISBN 9780321897961.

Esta edición en español es la única autorizada.

Edición en español
Dirección general: Philip De la Vega
Dirección Educación Superior: Mario Contreras
Editor sponsor: Gabriela López Ballesteros
gabriela.lopezballesteros@pearson.com
Editor de desarrollo: Felipe Hernández Carrasco
Supervisor de producción: Enrique Trejo Hernández
Gerencia Editorial Educación Superior Latinoamérica: Marisa de Anta

DÉCIMO TERCERA EDICIÓN, 2013

D.R. © 2013 por Pearson Educación de México, S.A. de C.V.
Atlacomulco 500-5º piso
Col. Industrial Atoto
53519, Naucalpan de Juárez, Estado de México

Cámara Nacional de la Industria Editorial Mexicana. Reg. núm. 1031.

ISBN 978-607-32-2190-0
ISBN e-book 978-607-32-2189-4
ISBN e-chapter 978-607-32-2188-7

Impreso en México. *Printed in Mexico.*
1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 - 16 15 14 13



www.pearsonenespañol.com isbn 978-607-32-2190-0

CONTENIDO ABREVIADO

ELECTROMAGNETISMO

21	Carga eléctrica y campo eléctrico	687
22	Ley de Gauss	725
23	Potencial eléctrico	754
24	Capacitancia y dieléctricos	788
25	Corriente, resistencia y fuerza electromotriz	818
26	Circuitos de corriente directa	850
27	Campo magnético y fuerzas magnéticas	883
28	Fuentes de campo magnético	923
29	Inducción electromagnética	957
30	Inductancia	991
31	Corriente alterna	1021
32	Ondas electromagnéticas	1051

ÓPTICA

33	Naturaleza y propagación de la luz	1080
34	Óptica geométrica	1114
35	Interferencia	1163
36	Difracción	1190

FÍSICA MODERNA

37	Relatividad	1223
38	Fotones: ondas de luz que se comportan como partículas	1261
39	Partículas que se comportan como ondas	1286
40	Mecánica cuántica	1328
41	Estructura atómica	1364
42	Moléculas y materia condensada	1405
43	Física nuclear	1439
44	Física de partículas y cosmología	1480

APÉNDICES

A	El sistema internacional de unidades	A-1
B	Relaciones matemáticas útiles	A-3
C	El alfabeto griego	A-4
D	Tabla periódica de los elementos	A-5
E	Factores de conversión de unidades	A-6
F	Constantes numéricas	A-7
	Respuestas a los problemas con número impar	A-9

Desarrollo de **habilidades**

El presente texto le permitirá desarrollar las habilidades básicas y avanzadas que le ayudarán a resolver una gran variedad de problemas de física.

Las estrategias para resolver problemas indican a los estudiantes cómo enfocar tipos específicos de problemas.

El **gran conjunto** de ejemplos del texto facilita a los estudiantes la exploración, con exhaustivo detalle, de la solución de problemas desafiantes.

Consistencia

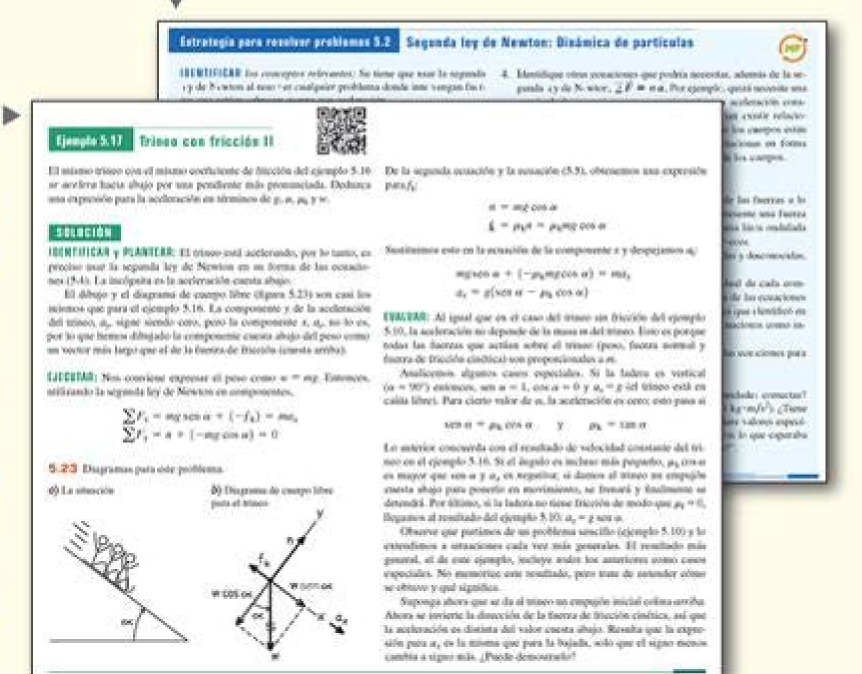
El formato de **Identificar/Plantear/Ejecutar/Evaluar**, aplicado en todos los ejemplos, fomenta en los estudiantes el hábito de solucionar de manera reflexiva los problemas, trascendiendo el aspecto puramente matemático.

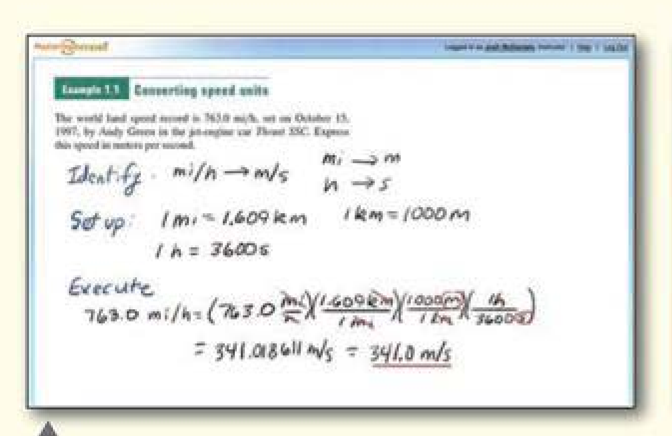
Enfoque

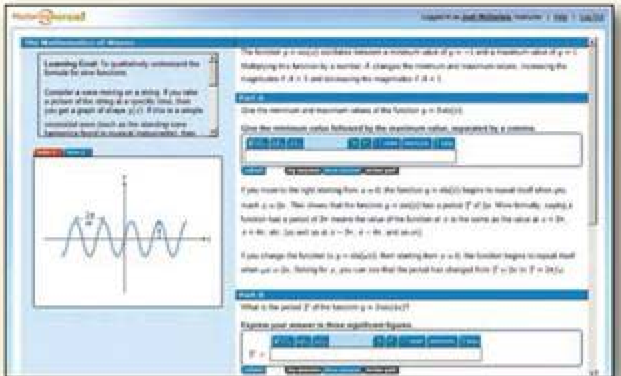
Se revisaron **todos los ejemplos y las estrategias para resolver problemas** para hacerlos más concisos.

Ayuda visual

En la mayoría de los ejemplos se usa con frecuencia un **diagrama manuscrito** que muestra lo que el estudiante debe dibujar.







¡NUEVO! Solución tutorial en video en inglés de todos los ejemplos MasteringPhysics y el eText de Pearson presentan en video soluciones y explicaciones de los ejemplos del libro.

¡NUEVO! Tutoriales de revisión de matemáticas MasteringPhysics ofrece un amplio conjunto de tutoriales en inglés de revisión de tareas de matemáticas, que cubren temas de cálculo diferencial e integral, así como de álgebra y trigonometría.

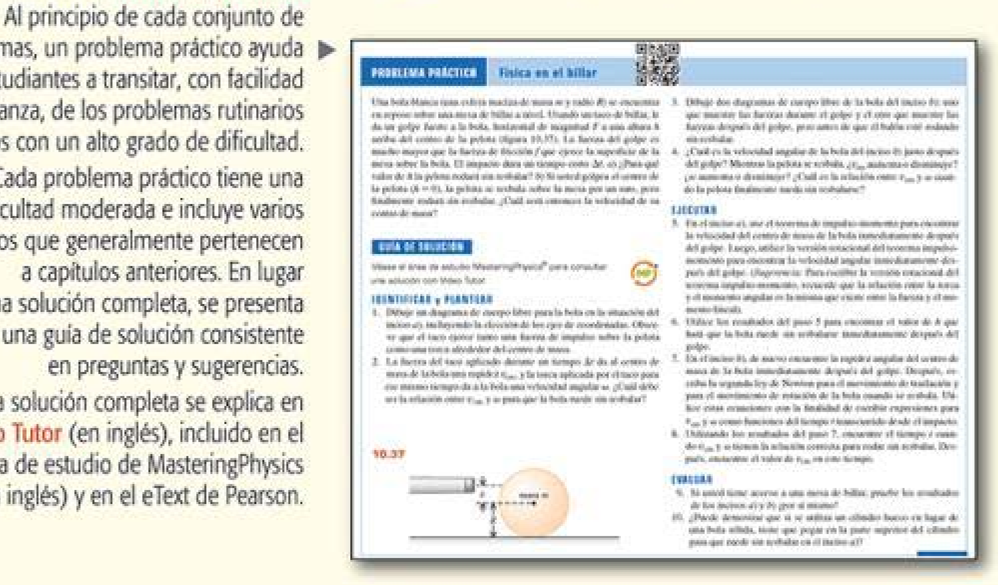
Desarrollo de **confianza**

Desarrolle confianza al resolver problemas mediante diversas opciones de práctica.

¡NUEVO! Problemas prácticos
Al principio de cada conjunto de problemas, un problema práctico ayuda a los estudiantes a transitar, con facilidad y confianza, de los problemas rutinarios a otros con un alto grado de dificultad.

Cada problema práctico tiene una dificultad moderada e incluye varios conceptos que generalmente pertenecen a capítulos anteriores. En lugar de una solución completa, se presenta una guía de solución consistente en preguntas y sugerencias.

La solución completa se explica en Video Tutor (en inglés), incluido en el área de estudio de MasteringPhysics (en inglés) y en el eText de Pearson.



14.95 · PA En la figura P14.95, la esfera superior se suelta del reposo, choca contra la esfera inferior estacionaria y queda unida a ella. Ambas cuerdas tienen 50.0 cm de longitud. La esfera superior tiene una masa de 2.00 kg y está inicialmente 10.0 cm más alta que la inferior, cuya masa es de 3.00 kg. Calcule la frecuencia y el desplazamiento angular máximo del movimiento después del choque.

Figura P14.95



14.96 ·· PA BIO *T. rex.* Modele la pierna del *T. rex* del ejemplo 14.10 (sección 14.6) como dos varillas uniformes con longitud de 1.55 m cada una y unidas rígidamente por un extremo. La varilla inferior tiene masa M, y la superior, $2M$. El objeto compuesto pivota en torno a la parte superior de la varilla de arriba. Calcule el periodo de oscilación de este objeto para oscilaciones de amplitud pequeña. Compare su resultado con el del ejemplo 14.10.

14.97 ·· CALC Una varilla metálica delgada y uniforme con masa M pivota sin fricción sobre un eje que pasa por su punto medio y es perpendicular a la varilla. Un resorte horizontal con constante de fuerza k se conecta al extremo inferior de la varilla, y el otro extremo del resorte se fija a un soporte rígido. La varilla se desplaza un ángulo pequeño Θ con respecto a la vertical (figura P14.97) y se suelta. Demuestre que se mueve en MAS angular y calcule su periodo. (*Sugerencia:* Suponga que Θ es suficientemente pequeño para que las aproximaciones sen $\Theta \approx \Theta$ y cos $\Theta \approx 1$ sean válidas. El movimiento es armónico simple si $d^2\theta/dt^2 = -\omega^2\theta$ y el periodo es entonces $T = 2\pi/\omega$.)

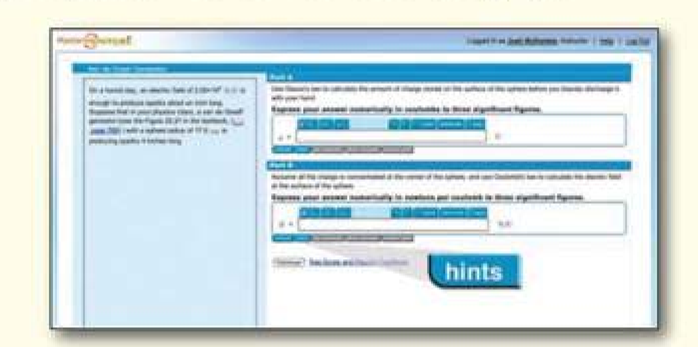
Figura P14.97



A petición de los profesores, los Conjuntos de problemas incluyen ahora un mayor número de problemas relacionados con el campo de la biomédica (BIO), problemas más difíciles que requieren de cálculo (CALC) y más problemas relacionados con material de capítulos anteriores (PA).

Aproximadamente el 20% de los problemas son nuevos o modificados. Estas revisiones se efectuaron con base en datos sobre el rendimiento de los estudiantes en Estados Unidos, obtenidos con MasteringPhysics.

El nivel de dificultad se indica mediante un sistema de clasificación de tres puntos, basado en información obtenida de MasteringPhysics.



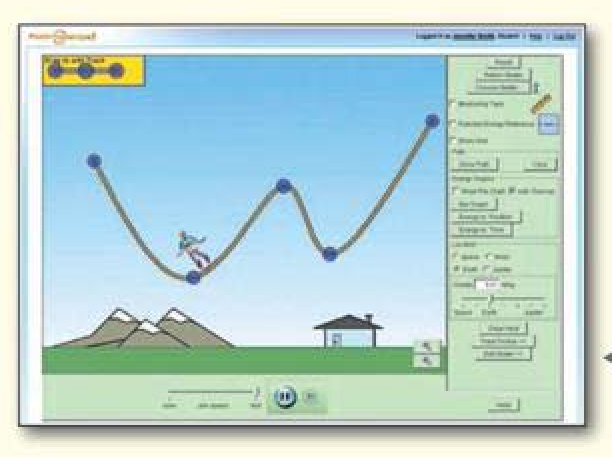
¡NUEVO! Problemas de fin de capítulo mejorados en MasteringPhysics (en inglés) Los problemas seleccionados de fin de capítulo ofrecen ahora apoyo adicional, como sugerencias en las estrategias de solución de problemas, repaso y práctica de matemáticas, y vínculos con el texto. Estos nuevos problemas puente relacionan los tutoriales guiados (en inglés) y los problemas tradicionales que se asignan como tarea.

Física **en la vida diaria**

Profundice el conocimiento de la física estableciendo conexiones con el mundo real.



¡NUEVO! **Aplicaciones de la física** ▶
A lo largo del texto se incluyen fotografías que muestran la aplicación de la física en situaciones reales, con especial énfasis en aplicaciones biomédicas y de interés general.

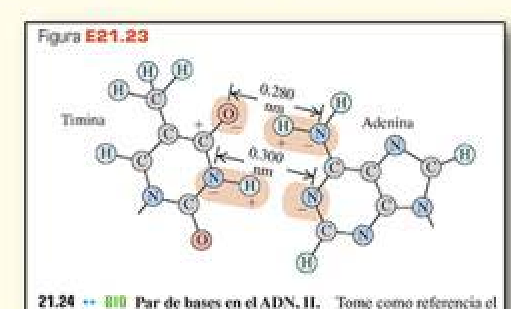


◀ ¡NUEVO! **Simulaciones PhET y tutoriales (en inglés)**
Dieciséis tutoriales PhET facilitan al estudiante realizar conexiones entre los fenómenos de la vida real y la física subyacente. Se presentan 76 simulaciones PhET en el área de estudio de MasteringPhysics y en el eText de Pearson.

También está disponible el repertorio completo de aplicaciones de ActivPhysics (en inglés) y los tutoriales basados en simulaciones.

¡NUEVO! **Demostraciones y tutoriales en video en inglés**
Videos de demostración de "ensayo y error" de conceptos clave de física despiertan el interés del estudiante al solicitarle que realice un pronóstico antes de ver el resultado. Estos videos están disponibles en el área de estudio de MasteringPhysics (en inglés) y en el eText de Pearson. Un conjunto de tutoriales basados en estos videos animan a los estudiantes a resolver problemas relacionados.

Problemas de fin de capítulo basados en el campo de la biomédica ▶
Para satisfacción de los estudiantes de las ciencias médicas, el texto agrega un número considerable de problemas basados en situaciones biológicas y biomédicas.



21.24 •• **BIO** **Par de bases en el ADN, II.** Tome como referencia el ejercicio 21.23. La figura E21.24 muestra el enlace de las moléculas de citosina y guanina. Las distancias entre O—H y H—N son de 0.110 nm. En este caso, suponga que el enlace se debe solo a las fuerzas a lo largo de las combinaciones O—H—O, N—H—N y O—H—N, y suponga también que estas tres combinaciones son paralelas entre sí. Calcule la fuerza *neta* que ejerce la citosina sobre la guanina debido a las tres combinaciones anteriores. ¿Esta fuerza es de atracción o de repulsión?

Obtenga la diferencia con MasteringPhysics®



MasteringPhysics (en inglés) es el sistema tutorial científico, de tareas y de evaluación más efectivo y utilizado, disponible en línea.

¡NUEVO! Tareas prediseñadas
En todos los capítulos del libro, MasteringPhysics ahora incluye tareas prediseñadas que cubren el material con una combinación probada de tutoriales y problemas de fin de capítulo con dificultad regulada. Los profesores pueden usar estas tareas tal como se presentan, o bien, tomarlas como el punto inicial de una modificación.



Libro de calificaciones

- Todas las tareas se califican automáticamente.
- El sombreado rojo identifica a los estudiantes vulnerables y las tareas con alto grado de dificultad.

Aprovechamiento del grupo en las tareas
Haga clic sobre un problema para conocer el paso que se dificulta más a sus alumnos, e incluso las respuestas erróneas más comunes. Compare los resultados de cada etapa con el promedio nacional en Estados Unidos o con su grupo anterior.





Diagnóstico con calificaciones
Esta pantalla le ofrece un diagnóstico semanal en la modalidad de su preferencia. Con tan solo dar un solo clic, la gráfica presenta un resumen de los problemas más difíciles, los estudiantes vulnerables, la distribución de calificaciones e incluso de las mejoras en las calificaciones durante el curso.

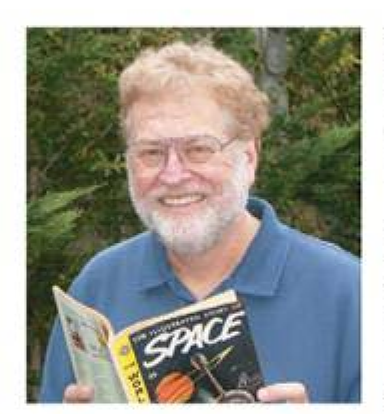
SOBRE LOS AUTORES



Hugh D. Young es profesor emérito de física en la Universidad Carnegie Mellon. Cursó sus estudios de licenciatura y posgrado en esa institución, donde obtuvo su doctorado en teoría de partículas fundamentales bajo la dirección de Richard Cutkosky, hacia el final de la carrera académica de este último. Se unió al equipo docente de Carnegie Mellon en 1956 y se retiró en 2004. También fue profesor visitante en la Universidad de California en Berkeley.

La carrera del profesor Young se ha centrado por completo en la docencia en el nivel de licenciatura. Ha escrito varios libros de texto para ese nivel, y en 1973 se convirtió en coautor de los bien conocidos libros de introducción a la física de Francis Sears y Mark Zemansky. Además de su colaboración en el libro *Física universitaria* de Sears y Zemansky, es autor del texto *College Physics*, de Sears y Zemansky.

El profesor Young cursó un grado de bachiller como ejecutante de órgano en Carnegie Mellon en 1972 y, durante varios años, ha sido organista asociado en la Catedral de San Pablo, en Pittsburgh, ciudad en la que ofrece numerosos recitales. Durante el verano viaja mucho con su esposa Alice, en especial al extranjero y a la zona desértica de los cañones del sur de Utah.



Roger A. Freedman es profesor de física en la Universidad de California, en Santa Bárbara (UCSB). El doctor Freedman estudió su licenciatura en los campus de San Diego y Los Ángeles, y realizó su investigación doctoral en teoría nuclear en la Universidad de Stanford bajo la dirección del profesor J. Dirk Walecka. Se incorporó al cuerpo docente de la UCSB en 1981, después de haber sido durante tres años profesor e investigador en la Universidad de Washington.

En la UCSB el doctor Freedman ha impartido cátedra tanto en el Departamento de Física como en la Escuela de Estudios Creativos, un organismo que da cabida a los estudiantes universitarios altamente dotados y motivados. Ha publicado artículos sobre física nuclear, física de partículas elementales y física de láseres. En los años recientes ha trabajado para hacer de las clases de física una experiencia más interactiva a través de sistemas de respuestas en el salón de clases.

Durante la década de 1970, el doctor Freedman trabajó como rotulista de un libro cómico y colaboró durante algunos años en la organización del San Diego Comic-Con (actualmente la convención más grande de la cultura popular). Ahora, cuando no está en el aula o trabajando afanosamente ante una computadora, el doctor Freedman se dedica a volar (tiene licencia de piloto comercial) o conducir, en compañía de su esposa Caroline, su automóvil convertible Nash Metropolitan, modelo 1960.

A. Lewis Ford es profesor de física en la Universidad A&M de Texas. Cursó la licenciatura en Rice University en 1968, y obtuvo un doctorado en física química de la Universidad de Texas, en Austin, en 1972. Después de cursar un año de posdoctorado en la Universidad de Harvard, se unió en 1973 a la Universidad A&M de Texas como profesor de física, donde ha permanecido desde entonces. El área de investigación del profesor Ford es la física atómica teórica, con especialidad en colisiones atómicas. En la Universidad A&M de Texas ha impartido una amplia variedad de cursos de licenciatura y posgrado, pero sobre todo de introducción a la física.

AL ESTUDIANTE

CÓMO TRIUNFAR EN FÍSICA SI SE INTENTA DE VERDAD

Mark Hollabaugh *Normandale Community College*

La física estudia lo grande y lo pequeño, lo viejo y lo nuevo. Es una disciplina que se ocupa de una gran parte del mundo que nos rodea, desde los átomos y las galaxias, hasta los circuitos eléctricos y la aerodinámica. Es probable que el lector esté siguiendo este curso de introducción a la física, basado en el cálculo, porque lo requiera para materias posteriores que planee tomar en su carrera de ciencias o ingeniería. Su profesor desea que usted aprenda física y goce la experiencia; además, tendrá mucho interés en ayudarlo a aprender esta fascinante disciplina. Por ello, su profesor eligió el presente libro para el curso. También por esa razón, los doctores Young y Freedman me pidieron que escribiera esta sección introductoria. ¡Queremos que triunfe!

El objetivo de esta sección de *Física universitaria* es darle algunas ideas que lo ayuden en su aprendizaje. Se harán sugerencias específicas de cómo utilizar el libro después de realizar un análisis breve de los hábitos generales y de las estrategias de estudio.

Preparación para este curso

Si en el bachillerato estudió física, es probable que aprenda los conceptos más rápido que quienes no lo hicieron, porque estará familiarizado con el lenguaje de esta disciplina. Asimismo, si tiene estudios avanzados de matemáticas, comprenderá con mayor rapidez los aspectos matemáticos de la física. Aun si tuviera un nivel adecuado de matemáticas, encontrará útiles algunos libros como el de Arnold D. Pickar, *Preparing for General Physics: Math Skill Drills and Other Useful Help (Calculus Version)*. Es posible que su profesor asigne tareas de este repaso de matemáticas como auxilio para su aprendizaje.

Aprender a aprender

Cada uno de nosotros tiene un estilo diferente de aprendizaje y un medio preferido para hacerlo. Entender cuál es el suyo lo ayudará a centrase en los aspectos de la física que tal vez le planteen dificultades, y a emplear los componentes del curso que lo ayudarán a vencerlas. Sin duda, querrá dedicar más tiempo a aquellos aspectos que le impliquen más problemas. Si usted aprende escuchando, las conferencias serán muy importantes. Si aprende con explicaciones, entonces será de gran ayuda trabajar con otros estudiantes. Si le resulta difícil resolver problemas, dedique más tiempo a aprender cómo hacerlo. Asimismo, es importante desarrollar buenos hábitos de estudio. Quizá lo más importante que podrá hacer por usted mismo sea programar de manera regular el tiempo adecuado en un ambiente libre de distracciones.

Responda las siguientes preguntas para usted mismo:

- ¿Soy capaz de utilizar los conceptos matemáticos fundamentales del álgebra, la geometría y la trigonometría? (Si no es así, planee un programa de repaso con ayuda de su profesor).
- En cursos similares, ¿qué actividad me ha dado más problemas? (Dedique más tiempo a ello). ¿Qué ha sido lo más fácil para mí? (Inicie con esto; le ayudará a ganar confianza).

- ¿Entiendo mejor el material si leo el libro antes o después de la clase? (Quizás aprenda mejor si revisa rápidamente el material, asiste a clase y luego lee con más profundidad).
- ¿Dedico el tiempo adecuado a estudiar física? (Una regla práctica para una clase de este tipo es dedicar, en promedio, 2.5 horas de estudio fuera del aula por cada hora de clase que reciba. Esto significa que para un curso con cinco horas de clase programadas a la semana, debe destinar de 10 a 15 horas semanales al estudio de la física).
- ¿Estudio física diariamente? (¡Distribuya esas 10 a 15 horas a lo largo de toda la semana!). ¿A qué hora estoy en mi mejor momento para estudiar física? (Elija un horario específico del día y respételo).
- ¿Trabajo en un lugar tranquilo en el que pueda mantener mi concentración? (Las distracciones romperán su rutina y harán que pase por alto aspectos importantes).

Trabajar con otros

Es raro que los científicos e ingenieros trabajen aislados unos de otros; más bien, trabajan de forma cooperativa. Aprenderá más física y el proceso será más ameno si trabaja con otros estudiantes. Tal vez algunos profesores formalicen el uso del aprendizaje cooperativo o faciliten la formación de grupos de estudio. Es posible que desee constituir su propio grupo informal de estudio con miembros de su clase que vivan en su vecindario o residencia estudiantil. Si tiene acceso al correo electrónico, úselo para estar en contacto con los demás. Su grupo de estudio será un excelente recurso cuando se prepare para los exámenes.

Las clases y los apuntes

Un factor importante de cualquier curso universitario es el de las clases. Esto es especialmente cierto en física, ya que será frecuente que su profesor realice demostraciones de principios físicos, simulaciones por computadora o que proyecte videos. Todas estas son actividades de aprendizaje que lo ayudarán a comprender los principios básicos de la física. No falte a clases, y si lo hace por alguna razón especial, pida a un amigo o miembro de su grupo de estudio que le dé los apuntes y le diga lo que pasó.

En clase, tome notas rápidas y entre a los detalles después. Es muy difícil tomar notas palabra por palabra, de modo que solo escriba las ideas clave. Si su profesor utiliza un diagrama del libro de texto, deje espacio en el cuaderno para este y agréguelo más tarde. Después de clase, complete sus apuntes con la cobertura de cualquier faltante u omisión, anotando los conceptos que necesite estudiar posteriormente. Haga referencias a las páginas del libro de texto, número de ecuación o de sección.

Asegúrese de hacer preguntas en clase, o hable con su profesor durante sus horas de asesoría. Recuerde que la única pregunta "fuera de lugar" es la que no se hace. En su universidad quizás haya asistentes de profesores o tutores para ayudarlo con las dificultades que encuentre.

Exámenes

Presentar un examen es estresante. Pero si se preparó de manera adecuada y descansó bien, la tensión será menor. La preparación para un examen es un proceso continuo; comienza en el momento en que termina el último examen. Debe analizar su examen inmediatamente y comprender los errores que haya cometido. Si resolvió un problema y cometió errores importantes, pruebe lo siguiente: tome una hoja de papel y divídala en dos partes con una línea de arriba hacia abajo. En una columna escriba la solución adecuada del problema, y en la otra escriba lo que hizo y por qué, si es que lo sabe, y la razón por la que su propuesta de solución fue incorrecta. Si no está seguro de por qué cometió el error o de la forma de evitarlo, hable con su profesor. La física se construye de manera continua sobre ideas fundamentales y es importante corregir de inmediato cualquier mal entendido. Cuidado: si se prepara en el último minuto para un examen, no retendrá en forma adecuada los conceptos para el siguiente.

PREFACIO

Este libro es el producto de más de seis décadas de liderazgo e innovación en la enseñanza de la física. Cuando en 1949 se publicó la primera edición de *Física universitaria*, de Francis W. Sears y Mark W. Zemansky, su énfasis en los principios fundamentales de la física y la forma de aplicarlos fue un aspecto revolucionario entre los libros de la disciplina cuya base era el cálculo. El éxito de *Física universitaria* en generaciones de varios millones de estudiantes y profesores de todo el mundo da testimonio del mérito de este enfoque y de las muchas innovaciones posteriores.

Al preparar esta decimotercera edición, mejoramos y desarrollamos aún más el texto de *Física universitaria* para asimilar las mejores ideas de la investigación educativa con respecto a la enseñanza basada en la solución de problemas y la pedagogía visual y conceptual; este libro es el primero que incluye problemas mejorados en forma sistemática, y en utilizar el sistema de tareas y enseñanza en línea de mayor uso en el mundo, además de estar probado pedagógicamente.

Lo nuevo en esta edición

- Incluidos en cada capítulo, los **Problemas prácticos** constituyen una transición entre los ejemplos conceptuales y los problemas más desafiantes del final del capítulo. Cada problema práctico posee cierta dificultad y varios conceptos que a menudo incorporan ideas de capítulos anteriores. En lugar de una solución individual, se proporciona un formato como **Guía de solución** que consiste en preguntas y sugerencias que mejoran la capacidad de los estudiantes para plantear y resolver problemas desafiantes con seguridad.
- **Se revisaron todos los ejemplos y estrategias de solución de problemas** para mejorar la concisión y claridad para los estudiantes de la actualidad.
- El **núcleo de los capítulos de física moderna** (capítulos 38 a 41, del volumen 2) se revisó minuciosamente para comunicar una idea más precisa, en lugar del enfoque histórico del material. Los capítulos 42 a 44 también se revisaron de manera significativa.
- **El capítulo de mecánica de fluidos ahora precede a los capítulos de gravitación y movimiento periódico**, de modo que este último aparece inmediatamente antes del capítulo de ondas mecánicas.
- A lo largo del texto, se incluyen **aplicaciones adicionales de ciencias de la vida**, la mayoría en forma de fotografías al margen, con subtítulos explicativos, para ayudar a los estudiantes a ver cómo la física está conectada con los avances y descubrimientos en las ciencias de la vida.
- El **texto se ha simplificado** para manejar un lenguaje más conciso y enfocado.
- **Con los datos de MasteringPhysics, los cambios al contenido de final de capítulo** incluyen lo siguiente:
  - **Del 15 al 20% de los problemas son nuevos.**
  - Se incrementó el número y se elevó el nivel de los **problemas que requieren cálculo**.
  - La mayoría de los capítulos incluyen de **cinco a siete problemas relacionados con ciencias de la vida**.
  - Se incrementó el número de **problemas acumulativos** (aquellos que incorporan conceptos de capítulos anteriores).
- **Más de 70 simulaciones PhET en inglés** se vinculan con el eText de Pearson y se presentan en el sitio web Study Area de MasteringPhysics (con íconos en el texto impreso). Estas poderosas simulaciones permiten al estudiante interactuar productivamente con los conceptos de física que está aprendiendo.
- **Los videos tutoriales en inglés relacionan el contenido clave del texto con la vida cotidiana:**
  - **Docenas de videos tienen demostraciones de "pausa y pronóstico" de conceptos claves de física** e incorporan una evaluación conforme el estudiante progresa, para comprometerlo activamente en la comprensión de las ideas conceptuales clave que subyacen en los principios físicos.

- **Todos los ejemplos del libro se acompañan de una solución en video**, que lleva al estudiante a través del proceso de solución de problemas, ofreciendo un asistente de enseñanza virtual las 24 horas.
- **Hay acceso directo a todos estos videos a través de enlaces dentro de Pearson eText.** Muchos aparecen también en el área de estudio dentro de MasteringPhysics.

Características clave de *Física universitaria*

- **Conjuntos de problemas** profundos y extensos cubren un amplio rango de dificultad y ayudan tanto a comprender la física como a desarrollar habilidad para resolver problemas. Muchos problemas se basan en situaciones complejas de la vida real.
- Este texto ofrece un mayor número de **Ejemplos** que cualquier otro texto del tema basado en el cálculo, lo que permite explorar la solución de problemas desafiantes que no se tratan en otros libros.
- Se aplica un **enfoque de solución de problemas** (consistente en **identificar**, **plantear, ejecutar** y **evaluar**), basado en investigación. Dicho enfoque no solo se aplica en cada problema, sino también en las Estrategias de solución de problemas y en los Manuales de soluciones y las Guías de estudio del estudiante y del profesor. Este enfoque sistemático enseña a los estudiantes a resolver problemas a partir de la reflexión y no solo aplicando las matemáticas de manera directa.
- Las **Estrategias de solución de problemas** preparan a los estudiantes para enfocar tipos específicos de problemas.
- Las **figuras** usan un estilo gráfico simplificado, enfocado en la situación física, e incorporan **notas explicativas**. Ambas técnicas han demostrado tener un efecto muy positivo en el aprendizaje.
- Las figuras que ilustran las soluciones de los ejemplos a menudo tienen la forma de **dibujos a lápiz** en blanco y negro, para simular lo que un estudiante dibujaría al resolver un problema.
- Los párrafos que aparecen bajo el título de **Cuidado** se enfocan en los errores comunes y las áreas problemáticas que enfrentan los estudiantes.
- Las preguntas bajo el título **Evalúe su comprensión** al final de una sección permiten a los estudiantes verificar su conocimiento del tema y usar un formato de clasificación de opciones múltiples para identificar errores comunes.
- Los **resúmenes visuales** al final de cada capítulo presentan las ideas principales en palabras, ecuaciones y diagramas breves, los cuales ayudan a los estudiantes a repasar más efectivamente.

Material complementario para el profesor (en inglés)

Nota: *Por conveniencia, todos los siguientes materiales para el profesor se pueden descargar del área de instructor (Instructor Area), por medio de la barra de navegación de la izquierda de MasteringPhysics (www.masteringphysics.com).*

Los **manuales de soluciones para el profesor**, que elaboraron A. Lewis Ford (Texas A&M University) y Wayne Anderson, contienen soluciones completas y detalladas de todos los problemas de final de capítulo. Todas siguen de manera consistente el método de identificar, plantear, ejecutar y evaluar que se utiliza en el libro. Descárguelas desde MasteringPhysics Instructor Area o desde el Instructor Resource Center (www.pearsonhighered.com/irc).

MasteringPhysics® (www.masteringphysics.com) es el sistema de tareas y enseñanza de física más avanzado, eficaz y de mayor uso en el mundo. Con ocho años de desarrollo, pone a disposición de los profesores un repertorio de problemas de final de capítulo probados extensivamente, así como tutoriales enriquecedores, integrados por varios pasos, que incorporan varios tipos de respuestas, retroalimentación sobre los errores y ayuda individualizada (lo que comprende sugerencias o problemas más sencillos, si así se solicita); todo ello bajo el auspicio de la base de datos más grande del mundo de solución de problemas. Investigación publicada patrocinada por NSF y varios estudios subsiguientes revelan que MasteringPhysics tiene resultados contunden-

tes de enseñanza. MasteringPhysics permite que los profesores elaboren con rapidez una amplia variedad de tareas con el grado de dificultad y la duración adecuados; además, les brinda herramientas eficientes para que analicen las tendencias de la clase y el trabajo de cualquier estudiante con un detalle sin precedente.

MasteringPhysics ofrece retroalimentación instantánea e individualizada y guía para más de 100,000 estudiantes diariamente. Un gran número de herramientas y un sólido soporte hacen a MasteringPhysics rápido y fácil de aprender para profesores y estudiantes. Pruebas extensivas en los salones de clase muestran que, al final de su curso, ocho de cada nueve estudiantes recomiendan MasteringPhysics como el modo preferido para estudiar y hacer tareas.

MasteringPhysics facilita a los profesores:

- Elaborar rápidamente tareas que combinen problemas normales de fin de capítulo y tutoría (mediante problemas tutoriales de varios pasos que ofrecen retroalimentación sobre los errores del usuario, así como problemas más sencillos cuando así se solicite).
- Ampliar las tareas para incluir el rango máximo de actividades disponibles calificadas automáticamente, que van desde problemas numéricos con valores al azar, respuestas algebraicas y dibujos elaborados a mano.
- Elegir un amplio rango de problemas probados a nivel nacional (en Estados Unidos), que brindan estimaciones precisas de dificultad y tiempo de terminación.
- Después de concluida una tarea, se podrán identificar rápidamente no solo los problemas más difíciles para los estudiantes, sino también los tipos de problemas individuales donde los estudiantes tuvieron más dificultad.
- Comparar los resultados de la clase con el promedio mundial del sistema para cada problema asignado, con la finalidad de identificar los temas que se deben incluir en la enseñanza justo a tiempo.
- Verificar a detalle el trabajo de un estudiante particular, incluyendo el tiempo dedicado a cada problema, respuestas incorrectas en cada paso, el tipo de ayuda solicitada y cuántos problemas de práctica realizó.

ActivPhysics OnLine™ (al cual se accede a través del área de estudio dentro de www.masteringphysics.com) ofrece la biblioteca más completa integrada por más de 420 applets probados y actualizados para entrega en la web usando las tecnologías más avanzadas en línea. Además, ofrece un conjunto de applets basados en tutoriales desarrollados por los pioneros de la educación Alan Van Heuvelen y Paul d'Alessandris. Los íconos al margen a través del texto dirigen a los estudiantes a ejercicios específicos para complementar el análisis del libro.

Los ejercicios en línea están diseñados para animar a los estudiantes a confrontar errores, indagar las razones cualitativas de los procesos físicos, experimentar cuantitativamente y aprender a pensar críticamente. El tan aclamado conjunto de ejercicios ActivPhysics OnLine ayuda a los estudiantes a trabajar conceptos complejos y a comprenderlos con más claridad.

El **Banco de pruebas** incluye más de 2,000 problemas de alta calidad, que comprenden respuestas de opción múltiple y de verdadero/falso; también se incluyen preguntas normales de acuerdo con el tipo de tarea. Los archivos de pruebas están disponibles tanto en formato Word como en TestGen (un programa fácil de usar, que permite crear y editar concursos y exámenes). Este recurso se descarga de MasteringPhysics Instructor Area o del Instructor Resource Center (www.pearsonhighered.com/irc).

Material complementario para el estudiante (en inglés)



MasteringPhysics® (www.masteringphysics.com) es el sistema de tareas, enseñanza y evaluación basado en años de investigación sobre cómo resuelven problemas de física los estudiantes y acerca de las áreas donde requieren ayuda. Los estudios revelan que los alumnos que recurren a MasteringPhysics™ mejoran de manera significativa sus calificaciones, en comparación con los que realizan sus tareas de la forma tradicional. MasteringPhysics™ logra esto al dar a los estudiantes retroalimentación instantánea y específica sobre sus respuestas erróneas, proponer a solicitud de ellos problemas más

sencillos cuando no logran avanzar, y asignar una calificación parcial. Este sistema socrático individualizado de tutoría, disponible las 24 horas del día y los siete días de la semana, es recomendado por nueve de cada 10 alumnos a sus compañeros como el modo más eficaz de aprovechar el tiempo para estudiar. Requiere la compra de un código de acceso.

eText de Pearson está disponible a través de MasteringPhysics. Este recurso permite a los estudiantes el acceso al texto dondequiera que haya una conexión a Internet. El eText de Pearson comprende el texto completo, incluyendo figuras que se pueden agrandar para mejorar la claridad. El eText permite a los estudiantes consultar definiciones y términos para ayudarse con el vocabulario y la lectura del material. Los estudiantes también podrán tomar notas en el eText usando la opción de anotación en la parte superior de cada página.

Servicios de enseñanza de Pearson (www.pearsontutorservices.com). Cada suscripción a MasteringPhysics permite al estudiante tener acceso a los servicios de tutoría de Pearson, generados por Smarthinking, Inc. Con su ID y su clave de MasteringPhysics, los estudiantes se comunican con profesores altamente calificados que ofrecen tutoría adicional interactiva en línea sobre conceptos importantes de física. Se aplican algunas restricciones; es una oferta sujeta a cambios.



ActivPhysics OnLine™ (al cual se accede a través del área de estudio dentro de www.masteringphysics.com) ofrece a los estudiantes un conjunto de tutoriales con base en applets (véase párrafos atrás).

Agradecimientos a la edición en español

Pearson Educación agradece a los profesores usuarios de esta obra, y a los centros de estudio, por su apoyo y retroalimentación, elemento fundamental para esta nueva edición de *Física universitaria con física moderna* de Sears y Zemansky.

Argentina

Instituto Tecnológico de Buenos Aires
Jorge O. Ratto

Universidad Católica Argentina
Facultad de Ciencias Agrarias – Ciudad Autónoma de Buenos Aires
Roberto Fratantoni
Facultad de Ingeniería – Ciudad Autónoma de Buenos Aires
Jorge Clot

Universidad de Buenos Aires
María Cristina Menikheim

Universidad Nacional Arturo Jauretche
José Enrique Carrizo

Universidad Nacional de Córdoba
Carlos Andrés Cataldi

Colombia

Escuela Colombiana de Ingeniería Julio Garavito
Andrés Felipe Londoño Sierra
Aura Sofía Morales Mejía
Carlos Andrés Collazos Morales
Carmen Eugenia Fonseca Cuenca
Cecilio Silveira Cabrera
César Alberto Castellanos García
Eduardo Silva Sánchez
Eliseo Pérez Medina
Fabio Vélez Uribe
Germán Ernesto Montoya Vargas
Gonzalo Jiménez Escobar
Guillermo Alfonso Rojas Sánchez
Heindel Ricardo Otero Arévalo
Jaime José Isaza Ceballos
José Raúl Panqueva Sánchez
Julián Camilo Rodríguez Rondón
Luis Alejandro Ladino Gaspar
Luis Fernando Villamarín Guerrero
Olga Lucía Godoy Morales
Rafael Guzmán Escandón
Rodrigo Alonso Bermúdez Cortés
Raúl Alberto Ruiz Fandiño

Escuela de Ingeniería de Antioquia
Amalia Betancur R.
Eugenio Giraldo Tobón
Guillermo Miranda P.
Ricardo Restrepo A.
Walter Ospina M.

Escuela Militar de Aviación Marco Fidel Suárez
Ángel María Cundar Erazo

Pontificia Universidad Javeriana – Bogotá
Beynor Antonio Páez Sierra
Fernando Vega Salamanca
Gustavo Antonio Mejía Cortés

Pontificia Universidad Javeriana – Cali
Alberto Pretel Vega
Carlos Alberto Lozano Zapata
Luis Alfredo Rodríguez Saucedo
Luis Gerardo Pedraza Saavedra

Universidad Autónoma de Occidente
Alexander Osorio Caicedo
David Fernando Ramírez Moreno
Giovanni Medina Vargas
Jesús Roberto Soto
Mónica María Rico Castro
Robert Sánchez Cano

Universidad Católica de Colombia
Álvaro Damián Gómez Granja
Ana Elsa Tenjo Tenjo
Javier Francisco Novegil González Anleo
José Alberto Rodríguez Ortiz
Juan Carlos Palacios Caicedo
Queeny Madueño Pinto
William Andrés Castro López

Universidad De La Salle
Álvaro Mauricio Bustamante Lozano
Carlos Arturo Jiménez Orjuela
César Arturo Torres Leal
César Augusto Ramos Burgos
Daniel Abdon Varela Muñoz
Daniel Felipe Noguera Poveda
Diana Consuelo Jaimes Fuentes
Germán Moncada Méndez
Héctor Alcides Escucha Hernández
Hernán Pineda Rey
Jorge Alberto Dueñas Suaterna
José Arturo Celis Gil
Juan Oswaldo Rodríguez Quitian
Luis Hernando Barbosa
Alejo Martínez Harley
Mauricio Vinasco Téllez
Myriam Herrera Paloma
Óscar Javier Avella González
Ruby Margoth Cuervo Osses

Universidad de Los Andes
Alejandra Catalina Valencia González
Alejandro García Varela
Alonso Botero Mejía
Andrés Fernando Reyes Lega
Andrés Reyes
Beatriz Eugenia Sabogal Martínez
Bernardo Gómez Moreno
Carlos Arturo Ávila Bernal
Carlos Roberto Hernández Rodríguez
Chad Leidy
Ferney Javier Rodríguez Dueñas
Gabriel Téllez Acosta
Jaime Ernesto Forero Romero
Jorge Luis Galán
José M. Rolando Roldán
Juan Manuel Pedraza Leal
Luis Quiroga Puello
Manu Forero Shelton
Natalia Gómez Pérez
Nohora Galán
Yenny Hernández

Universidad de Medellín
Andrés Quintero Zea
Carlos Alberto Rodríguez Ortiz
Carlos Andrés Arredondo Orozco
Gilmar Rolando Anaguano Jiménez
Gloria Eugenia Campillo Figueroa
Jaime Humberto Hoyos Barrios
Jairo Madrigal Argaez
Jorge Alberto Ceballos Robledo
Jorge Hernán Quintero Orozco
José Simón Restrepo Restrepo
Juan Carlos Morales Vega
Leonardo Charry Rodríguez
Luis Fernando Pemberthy Múnera
Octavio Enrique Barrera Arenas
Pablo Andrés Cuartas Restrepo
Paola Andrea Buitrago Cadavid
Sebastián Palomino Ángel
Sandra Milena Vergara Pérez

Universidad EAFIT
Álvaro A. Velásquez T.
Augusto Carmona Valencia
Carlos Alberto Avendaño Pérez
Carlos Mario Cartagena Marín
Claudia Palacio Espinosa
Daniel Velásquez Prieto
Héctor Fabián Betancur Montoya
Jhon Rober Atencio Urieta
Jorge David Caro
José David Rincón Cuéllar
José Ignacio Marulanda B.
Juan Carlos Castrillón Trujillo
Juan Manuel Jaramillo O.
Luciano Ángel Toro
Luis Alejandro Gómez Ramírez
Mario Elkin Vélez Ruiz
Oscar Meneses Cardona
René Restrepo Gómez
Ricardo Andrés Smith Arbeláez
Roberto E. Lorduy Gómez
Víctor Hugo Camargo Suárez
Yhefferson Fernando Gutiérrez Loaiza

Universidad Libre – Bogotá
Álvaro Miguez Pulido
Fernando Rojas Molano
Fredy Mesa Rodríguez
Germán Forero Roncancio
Israel Caicedo Suárez
Jairo Ernesto Sierra
Jorge René Silva
Sara García González

Universidad Militar Nueva Granada
Jairo Bautista Mesa

Universidad Pontificia Bolivariana
Ángel Salazar
Consuelo Arango Vásquez
Fredy Pérez
Héctor Lorduy
Johnson Garzón
José León
Juan Carlos Zapata
Luis Alfonso Bernal
Luz Aída Sabogal
Rosio Elejalde
Rubén Arboleda Vélez

Costa Rica

Instituto Tecnológico de Costa Rica
Ana Yancy Segura Zárate
Dionisio Gutiérrez Fallas
Ernesto Montero Zeledón
Juan Meneses Rímola

Universidad de Costa Rica
Fernando Ureña Elizondo
Horacio Merlos Lacayo
Randall Figueroa Mata

Universidad Hispanoamericana
Jamer Bogantes Hernández

Universidad Latina
María Higinia Esquivel Barrantes

España

Universidad de Oviedo
Roberto Luis Iglesias Pastrana

Universidad de Santiago de Compostela
Juan Manuel Ruso Beiras

Universidad de Vigo
Fernando Ribas Pérez

México

Distrito Federal

Instituto Tecnológico Autónomo de México
Francisco Villa López
Marcelo Carlos Mejía Olvera

Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey
Campus Santa Fe
Martín Pérez

Instituto Politécnico Nacional
ESIME Zacatenco
Fernando Bucio Sánchez
UPIICSA
Arturo Hidalgo Aguilar
Edgar García Manrique
Enrique Jiménez López
Faustino Rafael Netzahuatl Campos
Fausto Cote Gutiérrez
Irma Salas Juárez
Ismael Rodríguez Flores
Jesús Roda Santana
Jesús Velasco
José Enrique González Islas
José María Alfonso Ochoa Cano
Juan Carlos Pacheco Morales
Julio David Cruz Ruiz
Manuel Muñoz Orozco
Rubén Beltrán de Paz
Víctor Manuel Sánchez López
UPIITA
Acsa Zaray Mota
Antonio Aburto Barragán
Israel Reyes Ramírez
Jesús Manuel Picazo Rojas
Roberto Mota Esteves
Rodrigo Pelayo Ramos

Universidad Anáhuac, Campus Norte
Alexander Rechetcov

Universidad del Valle de México
Juan Andrés Aspiazu Fabián

Universidad Iberoamericana
Adolfo Finck Pastrana
Alfredo Sandoval Villalbazo
Anabel Arrieta Ostos
Antonio Gen Mora
Bernardo Cervantes Sodi
Carmen González Mesa
Claudia Camacho Zúñiga
Domitila González Patiño
Enrique Sánchez Aguilera
Fabián Rodolfo Estrada Guerrero
Fausto Cervantes Ortiz
Gustavo Soto de la Vega
Ignacio Santiago Prieto
Jorge Cervantes
José A. Heras
José Jorge Cayente Romero
José Luis Morales Hernández
Lorena Arias Montaño
Lorena Arias Ochoa
Luis Olivares Q.
Luis R. de la Vega Ballesteros
Manuel Flores Bravo
Mauricio Rodríguez
Oliverio Jilrik Mercado
Ricardo Ondarzaronira
Roberto Mota Esteves
Rodrigo Pelayo Ramos
Víctor Velasco

Estado de México

Instituto Tecnológico de Tlalnepantla
Laura N. Palacios Grijalva

Tecnológico de Estudios Superiores de Coacalco (TESCO)
Aurelio Sánchez López
David Sánchez Huitrón

Tecnológico de Estudios Superiores de Ecatepec (TESE)
David Martínez Romero
Edgar Corona Organiche
Eva Valdez Alemán
Jesús Adrián Vargas Castillo
Leticia Vera Pérez
Mauricio Javier Zárate Sánchez
Miguel Ángel González Pérez
Víctor E. Vivanco Cid

Universidad Autónoma del Estado de México
Gustavo Quintana Carapia
Miriam Sánchez Pozos
Raymundo Escamilla Sánchez

Universidad Nacional Autónoma de México
FES Aragón
Mario Yáñez Gutiérrez
Noé González Rosas
Rodolfo Zaragoza Buchain

FES Cuautitlán C-4
Adolfo García Gómez
Ana María Terreros de la Rosa
Baruch Arriaga Morales
Eduardo Carrizales Ramírez
Jesús Felipe Lanuza García
Roberto Reyes Arce
Yolanda Benítez Trejo

Jalisco

Centro de Educación Técnica Industrial, Colomos
Kathya Vidrio Montes

Instituto Tecnológico Superior de Zapopan
Edgar Ignacio Sánchez Rangel

Universidad de Guadalajara
CUCEI
Francisco José De Anda Ramírez
Javier W. Lau Sánchez
Mario Flores Pérez
Marco Aurelio Martínez Aguilera
José Guzmán Hernández
Rubén Bautista Navarro
Vladimir Camelo Avedoy
José Nieves Carrillo Castillo
Faustino Omar García Concepción
Alma Leticia Rodríguez Domínguez
Marisela Elena Rodríguez Santiago
Samuel Rosalio Cuevas
Isabel Sainz Abascal
Adalberto Zamudio Ojeda
CUTONALA
Porfirio Pérez Cisneros

Universidad del Valle de México
Campus Zapopan
Miguel Arturo Barreiro González
Jorge Eduardo Aguilar Rosas
Adolfo Gallegos
Campus Guadalajara Sur
Eduardo Jacobo Arroyo

Michoacán

Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey
Campus Morelia
Orlando González Pérez

Instituto Tecnológico de Morelia
Leonel Magaña Mendoza

Nayarit

Universidad Autónoma de Nayarit
César Arroyo Villa
Rubén Emanuel Peña Santos
Domingo Gómez de la Cruz
Enrique R. Núñez Figueroa

Nuevo León

Universidad Autónoma de Nuevo León
Manuel Banda Puente
Marco Antonio Mendoza García
Nora Elia Rodríguez Elizondo
Rogelio M. de la Rosa Villarreal

Querétaro

Instituto Tecnológico de Querétaro
Adrián Herrera Olalde
Manuel Francisco Jiménez Morales
Mario Alberto Montante Garza

Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey
Campus Querétaro
Juan José Carracero
Lucio López Cavazos

San Luis Potosí

Universidad Autónoma de San Luis Potosí
Alejandro Corpus Cordero

Sinaloa

Escuela Físico Matemáticas Culiacán
Jesús Armando Domínguez Molina

Instituto Tecnológico de Culiacán
Rocío Gómez Sainz

Instituto Tecnológico de los Mochis
Carla Rebeca Mendoza Casanova
Héctor Manuel Barroso Morales

Instituto Tecnológico de Mazatlán
Arturo Astorga Ramos
María Magdalena Cázarez Quintero

Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey
Campus Sinaloa
Juan Bernardo Castañeda
Eduardo Soberanes Lugo

Veracruz

Instituto Tecnológico de Veracruz
Luigi Amalfi Castellanos
Martha Bibiana Arriaga López

Universidad Veracruzana
Mariano Azzur Hernández Contreras
Verónica García Valenzuela

Yucatán

Instituto Tecnológico de Mérida
Alejandro Ulises Rodríguez Padilla
Manuel Jesús Castro Álvarez

Universidad Anáhuac Mayab
Sergio Ricardo Arjona Marrufo

Universidad Marista de Mérida
Francisco Javier Espinosa Faller

Universidad Modelo
Alvar A. Paredes Puerto

Uruguay

Universidad ORT Uruguay
Efrain Buksman

Venezuela

Universidad Católica Andrés Bello
Iván Escalona
Jorge Benedictto
José Manuel Marino
Juan Carlos Lavado
Oscar Rodríguez
Rafael Degugliemo

Universidad Central de Venezuela
Cristian Murati
Freddy Pérez
Leonardo Araujo
Miguel Bosch

Universidad de Carabobo – Valencia
Aníbal Aguilera
Elimar Hernández
María Teresa Cruz
Pedro Salazar
Reymer Romero
Thamara Fernández
Víctor Barrios
Víctor Medina

Universidad de Oriente
Núcleo Barcelona
Eduardo Bass
Lilibeth Rodríguez

Núcleo Nueva Esparta
Cirilo Larez

Universidad José María Vargas
José Ernesto León
Samuel Garaicochea

Universidad Metropolitana
Carmen Sainz
Guillermo Chacin
Luis Álvarez
Mirna Guevara

Universidad Simón Bolívar
Ana Fariñas
Carlos Vásquez
Claudia Colonnello
Dinorah Herrera
Douglas Mundarain
Eduardo Aloma
Elram Figueroa
Esteban Isasi
Félix Rodríguez
Ilich Idler
Jacinto Liendo
Jaime Wong
Jean Pierre Gallinar
Jesús Pineda
Jorge Ovalle
Jorge Stephany
José Ruiz
Luis Emilio Guerrero
Mario Caicedo
Rafael Angulo
Ricardo Castel
Rita Gianvittorio
Sergio Rojas

Agradecimientos

Queremos agradecer a los cientos de revisores y colegas que han hecho comentarios y sugerencias invaluables durante la vida de este libro. El éxito continuo de *Física universitaria* se debe en gran medida a sus contribuciones.

Edward Adelson (Ohio State University), Ralph Alexander (University of Missouri at Rolla), J. G. Anderson, R. S. Anderson, Wayne Anderson (Sacramento City College), Alex Azima (Lansing Community College), Dilip Balamore (Nassau Community College), Harold Bale (University of North Dakota), Arun Bansil (Northeastern University), John Barach (Vanderbilt University), J. D. Barnett, H. H. Barschall, Albert Bartlett (University of Colorado), Marshall Bartlett (Hollins University), Paul Baum (CUNY, Queens College), Frederick Becchetti (University of Michigan), B. Bederson, David Bennum (University of Nevada, Reno), Lev I. Berger (San Diego State University), Robert Boeke (William Rainey Harper College), S. Borowitz, A. C. Braden, James Brooks (Boston University), Nicholas E. Brown (California Polytechnic State University, San Luis Obispo), Tony Buffa (California Polytechnic State University, San Luis Obispo), A. Capecelatro, Michael Cardamone (Pennsylvania State University), Duane Carmony (Purdue University), Troy Carter (UCLA), P. Catranides, John Cerne (SUNY at Buffalo), Tim Chupp (University of Michigan), Shinil Cho (La Roche College), Roger Clapp (University of South Florida), William M. Cloud (Eastern Illinois University), Leonard Cohen (Drexel University), W. R. Coker (University of Texas, Austin), Malcolm D. Cole (University of Missouri at Rolla), H. Conrad, David Cook (Lawrence University), Gayl Cook (University of Colorado), Hans Courant (University of Minnesota), Bruce A. Craver (University of Dayton), Larry Curtis (University of Toledo), Jai Dahiya (Southeast Missouri State University), Steve Detweiler (University of Florida), George Dixon (Oklahoma State University), Donald S. Duncan, Boyd Edwards (West Virginia University), Robert Eisenstein (Carnegie Mellon University), Amy Emerson Missourn (Virginia Institute of Technology), William Faissler (Northeastern University), William Fasnacht (U.S. Naval Academy), Paul Feldker (St. Louis Community College), Carlos Figueroa (Cabrillo College), L. H. Fisher, Neil Fletcher (Florida State University), Robert Folk, Peter Fong (Emory University), A. Lewis Ford (Texas A&M University), D. Frantszog, James R. Gaines (Ohio State University), Solomon Gartenhaus (Purdue University), Ron Gautreau (New Jersey Institute of Technology), J. David Gavenda (University of Texas, Austin), Dennis Gay (University of North Florida), James Gerhart (University of Washington), N. S. Gingrich, J. L. Glathart, S. Goodwin, Rich Gottfried (Frederick Community College), Walter S. Gray (University of Michigan), Paul Gresser (University of Maryland), Benjamin Grinstein (UC San Diego), Howard Grotch (Pennsylvania State University), John Gruber (San Jose State University), Graham D. Gutsche (U.S. Naval Academy), Michael J. Harrison (Michigan State University), Harold Hart (Western Illinois University), Howard Hayden (University of Connecticut), Carl Helrich (Goshen College), Laurent Hodges (Iowa State University), C. D. Hodgman, Michael Hones (Villanova University), Keith Honey (West Virginia Institute of Technology), Gregory Hood (Tidewater Community College), John Hubisz (North Carolina State University), M. Iona, John Jaszczak (Michigan Technical University), Alvin Jenkins (North Carolina State University), Robert P. Johnson (UC Santa Cruz), Lorella Jones (University of Illinois), John Karchek (GMI Engineering & Management Institute), Thomas Keil (Worcester Polytechnic Institute), Robert Kraemer (Carnegie Mellon University), Jean P. Krisch (University of Michigan), Robert A. Kromhout, Andrew Kunz (Marquette University), Charles Lane (Berry College), Thomas N. Lawrence (Texas State University), Robert J. Lee, Alfred Leitner (Rensselaer Polytechnic University), Gerald P. Lietz (De Paul University), Gordon Lind (Utah State University), S. Livingston, Elihu Lubkin (University of Wisconsin, Milwaukee), Robert Luke (Boise State University), David Lynch (Iowa State University), Michael Lysak (San Bernardino Valley College), Jeffrey Mallow (Loyola University), Robert Mania (Kentucky State University), Robert Marchina (University of Memphis), David Markowitz (University of Connecticut), R. J. Maurer, Oren Maxwell (Florida International University), Joseph L. McCauley (University of Houston), T. K. McCubbin, Jr. (Pennsylvania State University), Charles McFarland (University of Missouri at Rolla), James Mcguire (Tulane University), Lawrence McIntyre (University of Arizona), Fredric Messing (Carnegie-Mellon University), Thomas Meyer (Texas A&M University), Andre Mirabelli (St. Peter's College, New Jersey), Herbert Muether (S.U.N.Y., Stony Brook), Jack Munsee (California State University, Long Beach), Lorenzo Narducci (Drexel University), Van E. Neie (Purdue University), David A. Nordling (U. S. Naval Academy), Benedict Oh (Pennsylvania State University), L. O. Olsen, Jim Pannell (DeVry Institute of Technology), W. F. Parks (University of Missouri), Robert Paulson (California State University, Chico), Jerry Peacher (University of Missouri at Rolla), Arnold Perlmutter (University of Miami), Lennart Peterson (University of Florida), R. J. Peterson (University of Colorado, Boulder), R. Pinkston, Ronald Poling (University of Minnesota), J. G. Potter, C. W. Price (Millersville University), Francis Prosser (University of Kansas), Shelden H. Radin, Roberto Ramos (Drexel University), Michael Rapport (Anne Arundel Community College), R. Resnick, James A. Richards, Jr., John S. Risley (North Carolina State University), Francesc Roig (University of California, Santa Barbara), T. L. Rokoske, Richard Roth (Eastern Michigan University), Carl Rotter (University of West Virginia), S. Clark Rowland (Andrews University), Rajarshi Roy (Georgia Institute of Technology), Russell A. Roy (Santa Fe Community College), Dhiraj Sardar (University of Texas, San Antonio), Bruce Schumm (UC Santa Cruz), Melvin Schwartz (St. John's University), F. A. Scott, L. W. Seagondollar, Paul Shand (University of Northern Iowa), Stan Shepherd (Pennsylvania State University), Douglas Sherman (San Jose State), Bruce Sherwood (Carnegie Mellon University), Hugh Siefkin (Greenville College), Tomasz Skwarnicki (Syracuse University), C. P. Slichter, Charles W. Smith (University of Maine, Orono), Malcolm Smith (University of Lowell), Ross Spencer (Brigham Young University), Julien Sprott (University of Wisconsin), Victor Stanionis (Iona College), James Stith (American Institute of Physics), Chuck Stone (North Carolina A&T State

University), Edward Strother (Florida Institute of Technology), Conley Stutz (Bradley University), Albert Stwertka (U.S. Merchant Marine Academy), Kenneth Szpara-DeNisco (Harrisburg Area Community College), Martin Tiersten (CUNY, City College), David Toot (Alfred University), Somdev Tyagi (Drexel University), F. Verbrugge, Helmut Vogel (Carnegie Mellon University), Robert Webb (Texas A & M), Thomas Weber (Iowa State University), M. Russell Wehr, (Pennsylvania State University), Robert Weidman (Michigan Technical University), Dan Whalen (UC San Diego), Lester V. Whitney, Thomas Wiggins (Pennsylvania State University), David Willey (University of Pittsburgh, Johnstown), George Williams (University of Utah), John Williams (Auburn University), Stanley Williams (Iowa State University), Jack Willis, Suzanne Willis (Northern Illinois University), Robert Wilson (San Bernardino Valley College), L. Wolfenstein, James Wood (Palm Beach Junior College), Lowell Wood (University of Houston), R. E. Worley, D. H. Ziebell (Manatee Community College), George O. Zimmerman (Boston University)

Además, nos gustaría hacer algunos agradecimientos individuales.

Quiero dar gracias de todo corazón a mis colegas de Carnegie Mellon, en especial a los profesores Robert Kraemer, Bruce Sherwood, Ruth Chabay, Helmut Vogel y Brian Quinn, por las diversas conversaciones estimulantes sobre pedagogía de la física y por su apoyo y ánimo durante la preparación de las ediciones sucesivas de este libro. También estoy en deuda con las muchas generaciones de estudiantes de Carnegie Mellon que me ayudaron a aprender lo que es la buena enseñanza y la correcta escritura, al indicarme lo que funciona y lo que no. Siempre es un placer y un privilegio expresar mi gratitud a mi esposa Alice y a nuestros hijos Gretchen y Rebecca por su amor, apoyo y sostén emocional durante la elaboración de las distintas ediciones del libro. Que todos los hombres y mujeres sean bendecidos con un amor como el de ellos. —H.D.Y.

Me gustaría agradecer a mis colegas del pasado y el presente en UCSB, incluyendo a Rob Geller, Carl Gwinn, Al Nash, Elisabeth Nicol y Francesc Roig, por su apoyo sincero y sus abundantes y útiles pláticas. Tengo una deuda de gratitud en especial con mis profesores Willa Ramsay, Peter Zimmerman, William Little, Alan Schwettman y Dirk Walecka por mostrarme qué es una enseñanza clara y comprometida de la física, y con Stuart Johnson por invitarme a ser coautor de *Física universitaria* a partir de la novena edición. Quiero dar gracias en especial al equipo editorial de Addison Wesley y a sus socios: a Nancy Whilton por su visión editorial; a Margot Otway por su gran sentido gráfico y cuidado en el desarrollo de esta edición; a Peter Murphy por sus contribuciones en los ejemplos; a Jason J.B. Harlow por la lectura cuidadosa del manuscrito, y a Chandrika Madhavan, Steven Le y Cindy Johnson por mantener el flujo editorial y de producción. Sobre todo, expreso mi gratitud y amor a mi esposa Caroline, a quien dedico mi contribución al libro. Hey, Caroline, al fin terminó la nueva edición. ¡Vámonos a volar! —R.A.F.

Por favor, ¡díganos lo que piensa!

Son bienvenidos los mensajes de estudiantes y profesores, en especial sobre errores y deficiencias que encuentren en esta edición. Dedicamos mucho tiempo y esfuerzo a la elaboración del mejor libro que podemos escribir, y esperamos que ayude al lector a enseñar y a aprender física. A la vez, usted nos ayudará si nos hace saber qué es lo que necesita mejorarse… Por favor, siéntase en libertad para ponerse en contacto con nosotros por vía electrónica o por correo ordinario. Sus comentarios serán muy apreciados.

Diciembre de 2010

Hugh D. Young
Departamento de Física
Carnegie Mellon University
Pittsburgh, PA 15213
hdy@andrew.cmu.edu

Roger A. Freedman
Departamento de Física
University of California, Santa Barbara
Santa Barbara, CA 93106-9530
airboy@physics.ucsb.edu
http://www.physics.ucsb.edu/airboy/

TABLA DE CONTENIDO

ELECTROMAGNETISMO

21 CARGA ELÉCTRICA Y CAMPO ELÉCTRICO 687

21.1 Carga eléctrica 688
21.2 Conductores, aislantes y cargas inducidas 691
21.3 Ley de Coulomb 693
21.4 Campo eléctrico y fuerzas eléctricas 698
21.5 Cálculos de campos eléctricos 703
21.6 Líneas de campo eléctrico 708
21.7 Dipolos eléctricos 709
Resumen 714
Preguntas/Ejercicios/Problemas 715

22 LEY DE GAUSS 725

22.1 Carga y flujo eléctrico 725
22.2 Cálculo del flujo eléctrico 728
22.3 Ley de Gauss 732
22.4 Aplicaciones de la ley de Gauss 736
22.5 Cargas en conductores 741
Resumen 746
Preguntas/Ejercicios/Problemas 747

23 POTENCIAL ELÉCTRICO 754

23.1 Energía potencial eléctrica 754
23.2 Potencial eléctrico 761
23.3 Cálculo del potencial eléctrico 767
23.4 Superficies equipotenciales 771
23.5 Gradiente de potencial 774
Resumen 777
Preguntas/Ejercicios/Problemas 778

24 CAPACITANCIA Y DIELÉCTRICOS 788

24.1 Capacitores y capacitancia 789
24.2 Capacitores en serie y en paralelo 793
24.3 Almacenamiento de energía en capacitores y energía de campo eléctrico 796
24.4 Dieléctricos 800
24.5 Modelo molecular de la carga inducida 805
24.6 La ley de Gauss en los dieléctricos 807
Resumen 809
Preguntas/Ejercicios/Problemas 810

25 CORRIENTE, RESISTENCIA Y FUERZA ELECTROMOTRIZ 818

25.1 Corriente eléctrica 819
25.2 Resistividad 822
25.3 Resistencia 825
25.4 Fuerza electromotriz y circuitos 828
25.5 Energía y potencia en circuitos eléctricos 834
25.6 Teoría de la conducción metálica 838
Resumen 841
Preguntas/Ejercicios/Problemas 842

26 CIRCUITOS DE CORRIENTE DIRECTA 850

26.1 Resistores en serie y en paralelo 850
26.2 Reglas de Kirchhoff 855
26.3 Instrumentos de medición eléctrica 860
26.4 Circuitos *R-C* 864
26.5 Sistemas de distribución de energía 868
Resumen 873
Preguntas/Ejercicios/Problemas 874

27 CAMPO MAGNÉTICO Y FUERZAS MAGNÉTICAS 883

27.1 Magnetismo 883
27.2 Campo magnético 885
27.3 Líneas de campo magnético y flujo magnético 889
27.4 Movimiento de partículas cargadas en un campo magnético 892
27.5 Aplicaciones del movimiento de partículas cargadas 896
27.6 Fuerza magnética sobre un conductor que transporta corriente 898
27.7 Fuerza y torca en una espira de corriente 901
27.8 Motor de corriente directa 907
27.9 Efecto Hall 909
Resumen 911
Preguntas/Ejercicios/Problemas 912

28 FUENTES DE CAMPO MAGNÉTICO 923

28.1 Campo magnético de una carga en movimiento 923
28.2 Campo magnético de un elemento de corriente 926
28.3 Campo magnético de un conductor recto que transporta corriente 928
28.4 Fuerza entre conductores paralelos 931
28.5 Campo magnético de una espira circular de corriente 932
28.6 Ley de Ampère 935
28.7 Aplicaciones de la ley de Ampère 938
28.8 Materiales magnéticos 941
Resumen 947
Preguntas/Ejercicios/Problemas 949

29 INDUCCIÓN ELECTROMAGNÉTICA 957

29.1 Experimentos de inducción 958
29.2 Ley de Faraday 959
29.3 Ley de Lenz 967
29.4 Fuerza electromotriz de movimiento 969
29.5 Campos eléctricos inducidos 971
29.6 Corrientes parásitas 974
29.7 Corriente de desplazamiento y ecuaciones de Maxwell 975
29.8 Superconductividad 979
Resumen 981
Preguntas/Ejercicios/Problemas 982

30 INDUCTANCIA 991

30.1 Inductancia mutua 991
30.2 Autoinductancia e inductores 994
30.3 Energía del campo magnético 998
30.4 Circuito *R-L* 1001
30.5 Circuito *L-C* 1005
30.6 Circuito *L-R-C* en serie 1009
Resumen 1012
Preguntas/Ejercicios/Problemas 1013

31 CORRIENTE ALTERNA 1021

31.1 Fasores y corrientes alternas 1021
31.2 Resistencia y reactancia 1024
31.3 Circuito *L-R-C* en serie 1030
31.4 Potencia en circuitos de corriente alterna 1034
31.5 Resonancia en circuitos de corriente alterna 1037
31.6 Transformadores 1040
Resumen 1043
Preguntas/Ejercicios/Problemas 1044

32 ONDAS ELECTROMAGNÉTICAS 1051

32.1 Ecuaciones de Maxwell y ondas electromagnéticas 1052
32.2 Ondas electromagnéticas planas y rapidez de la luz 1055
32.3 Ondas electromagnéticas sinusoidales 1060
32.4 Energía y momento lineal de las ondas electromagnéticas 1064
32.5 Ondas electromagnéticas estacionarias 1069
Resumen 1073
Preguntas/Ejercicios/Problemas 1074

ÓPTICA

33 NATURALEZA Y PROPAGACIÓN DE LA LUZ 1080

33.1 Naturaleza de la luz 1080
33.2 Reflexión y refracción 1082
33.3 Reflexión interna total 1088
33.4 Dispersión 1091
33.5 Polarización 1093
33.6 Dispersión de la luz 1100
33.7 Principio de Huygens 1102
Resumen 1105
Preguntas/Ejercicios/Problemas 1106

34 ÓPTICA GEOMÉTRICA 1114

34.1 Reflexión y refracción en una superficie plana 1114
34.2 Reflexión en una superficie esférica 1118
34.3 Refracción en una superficie esférica 1126
34.4 Lentes delgadas 1131
34.5 Cámaras fotográficas 1139
34.6 El ojo 1142
34.7 La lente de aumento 1146
34.8 Microscopios y telescopios 1147
Resumen 1152
Preguntas/Ejercicios/Problemas 1153

35 INTERFERENCIA 1163

35.1 Interferencia y fuentes coherentes 1164
35.2 Interferencia de la luz procedente de dos fuentes 1166
35.3 Intensidad en los patrones de interferencia 1170
35.4 Interferencia en películas delgadas 1173
35.5 Interferómetro de Michelson 1179
Resumen 1182
Preguntas/Ejercicios/Problemas 1183

36 DIFRACCIÓN 1190
36.1 Difracción de Fresnel y de Fraunhofer 1191
36.2 Difracción con una sola ranura 1192
36.3 Intensidad en el patrón con una sola ranura 1195
36.4 Ranuras múltiples 1199
36.5 Rejilla de difracción 1201
36.6 Difracción de rayos x 1205
36.7 Aberturas circulares y poder de resolución 1208
36.8 Holografía 1211
Resumen 1214
Preguntas/Ejercicios/Problemas 1215

FÍSICA MODERNA

37 RELATIVIDAD 1223
37.1 Invariabilidad de las leyes físicas 1223
37.2 Relatividad de la simultaneidad 1227
37.3 Relatividad de los intervalos de tiempo 1228
37.4 Relatividad de la longitud 1233
37.5 Transformaciones de Lorentz 1237
37.6 Efecto Doppler en ondas electromagnéticas 1241
37.7 Momento lineal relativista 1243
37.8 Trabajo y energía relativistas 1246
37.9 Mecánica newtoniana y relatividad 1249
Resumen 1252
Preguntas/Ejercicios/Problemas 1253

38 FOTONES: ONDAS DE LUZ QUE SE COMPORTAN COMO PARTÍCULAS 1261
38.1 Luz absorbida como fotones: El efecto fotoeléctrico 1261
38.2 Luz emitida como fotones: Producción de rayos x 1266
38.3 Luz dispersada en forma de fotones: Dispersión de Compton y producción de pares 1269
38.4 Dualidad onda-partícula, probabilidad e incertidumbre 1273
Resumen 1280
Preguntas/Ejercicios/Problemas 1281

39 PARTÍCULAS QUE SE COMPORTAN COMO ONDAS 1286
39.1 Ondas del electrón 1286
39.2 Átomo nuclear y espectros atómicos 1292
39.3 Niveles de energía y el modelo atómico de Bohr 1297
39.4 El láser 1307
39.5 Espectros continuos 1310
39.6 Revisión del principio de incertidumbre 1314
Resumen 1318
Preguntas/Ejercicios/Problemas 1319

40 MECÁNICA CUÁNTICA 1328
40.1 Funciones de onda y la ecuación de Schrödinger unidimensional 1328
40.2 Partícula en una caja 1338
40.3 Pozos de potencial 1343
40.4 Barreras de potencial y tunelamiento 1347
40.5 Oscilador armónico 1350
Resumen 1355
Preguntas/Ejercicios/Problemas 1356

41 ESTRUCTURA ATÓMICA 1364
41.1 La ecuación de Schrödinger en tres dimensiones 1365
41.2 Partícula en una caja de tres dimensiones 1366
41.3 Átomo de hidrógeno 1372
41.4 Efecto Zeeman 1379
41.5 Espín del electrón 1383
41.6 Átomos con muchos electrones y el principio de exclusión 1387
41.7 Espectros de rayos x 1393
Resumen 1397
Preguntas/Ejercicios/Problemas 1399

42 MOLÉCULAS Y MATERIA CONDENSADA 1405
42.1 Tipos de enlaces moleculares 1405
42.2 Espectros moleculares 1408
42.3 Estructura de los sólidos 1412
42.4 Bandas de energía 1416
42.5 Modelo de electrones libres para los metales 1418
42.6 Semiconductores 1422
42.7 Dispositivos semiconductores 1425
42.8 Superconductividad 1430
Resumen 1431
Preguntas/Ejercicios/Problemas 1432

43 FÍSICA NUCLEAR 1439
43.1 Propiedades de los núcleos 1439
43.2 Enlace nuclear y estructura nuclear 1444
43.3 Estabilidad nuclear y radiactividad 1449
43.4 Actividad y vida media 1456
43.5 Efectos biológicos de la radiación 1459
43.6 Reacciones nucleares 1462
43.7 Fisión nuclear 1464
43.8 Fusión nuclear 1469
Resumen 1472
Preguntas/Ejercicios/Problemas 1473

44 FÍSICA DE PARTÍCULAS Y COSMOLOGÍA 1480

44.1 Partículas fundamentales y su historia 1480
44.2 Aceleradores y detectores de partículas 1485
44.3 Partículas e interacciones 1490
44.4 Los quarks y el camino óctuple 1496
44.5 El modelo estándar y más allá 1499
44.6 El Universo en expansión 1501
44.7 El principio del tiempo 1508
Resumen 1517
Preguntas/Ejercicios/Problemas 1518

APÉNDICES

A El sistema internacional de unidades A-1
B Relaciones matemáticas útiles A-3
C El alfabeto griego A-4
D Tabla periódica de los elementos A-5
E Factores de conversión de unidades A-6
F Constantes numéricas A-7

Respuestas a los problemas con número impar A-9
Créditos de fotografías C-1
Índice analítico I-1

CARGA ELÉCTRICA Y CAMPO ELÉCTRICO





? El agua hace posible la vida: las células de nuestro cuerpo no podrían funcionar sin el agua donde se disuelven las moléculas biológicas esenciales. ¿Qué propiedades eléctricas del agua la hacen tan buen solvente?

OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

Al estudiar este capítulo, usted aprenderá:

- La naturaleza de la carga eléctrica y cómo sabemos que esta se conserva.
- Cómo se cargan eléctricamente los objetos.
- Cómo usar la ley de Coulomb para calcular la fuerza eléctrica entre cargas.
- La diferencia entre fuerza eléctrica y campo eléctrico.
- Cómo calcular el campo eléctrico generado por un conjunto de cargas.
- Cómo usar la idea de las líneas de campo eléctrico para visualizar e interpretar los campos eléctricos.
- Cómo calcular las propiedades de los dipolos eléctricos.

En el capítulo 5 del volumen 1, mencionamos las cuatro clases de fuerzas fundamentales. Hasta este momento, la única de tales fuerzas que hemos estudiado con cierto detalle es la gravitacional. Ahora estamos listos para analizar la fuerza del *electromagnetismo*, que incluye tanto la electricidad como el magnetismo. Los fenómenos electromagnéticos ocuparán nuestra atención en la mayor parte de lo que resta del libro.

Las interacciones electromagnéticas implican partículas que tienen una propiedad llamada *carga eléctrica*, un atributo que es tan fundamental como la masa. De la misma forma que los objetos con masa son acelerados por las fuerzas gravitacionales, los objetos cargados eléctricamente son acelerados por las fuerzas eléctricas. La descarga eléctrica inesperada que usted siente cuando frota sus zapatos contra una alfombra, y luego toca una perilla metálica, se debe a partículas cargadas que saltan de su dedo a la perilla. Las corrientes eléctricas simplemente son flujos de partículas cargadas, que fluyen por cables en respuesta a las fuerzas eléctricas. Incluso las fuerzas que mantienen unidos a los átomos para formar la materia sólida, y que evitan que los átomos de objetos sólidos se atraviesen entre sí, se deben fundamentalmente a interacciones eléctricas entre las partículas cargadas en el interior de los átomos.

En este capítulo comenzaremos nuestro estudio del electromagnetismo examinando la naturaleza de la carga eléctrica. Veremos que la carga está cuantizada y obedece a cierto principio de conservación. Cuando las cargas eléctricas están en reposo en nuestro marco de referencia, ejercen fuerzas *electrostáticas* entre ellas, las cuales tienen muchísima importancia en la química y la biología, además de tener diversas aplicaciones tecnológicas. Las fuerzas electrostáticas se rigen por una relación sencilla que se conoce como *ley de Coulomb*, y es mucho más conveniente describirlas usando el concepto de *campo eléctrico*. En capítulos posteriores ampliaremos nuestro análisis para incluir cargas eléctricas en movimiento, lo que nos llevará a entender el magnetismo y, de manera sorprendente, la naturaleza de la luz.

Si bien las ideas clave del electromagnetismo son sencillas desde el punto de vista conceptual, su aplicación a cuestiones prácticas requerirá muchas de nuestras destrezas matemáticas, en especial el conocimiento de la geometría y del cálculo integral. Por esta razón, el lector verá que este capítulo y los siguientes son más demandantes

que los anteriores en cuanto al nivel matemático. La recompensa por el esfuerzo adicional será una mejor comprensión de los principios que se encuentran en el corazón de la física y la tecnología modernas.

21.1 Carga eléctrica

En una época remota 600 a.C., los antiguos griegos descubrieron que cuando frotaban ámbar con lana, el ámbar atraía otros objetos. En la actualidad decimos que, con ese frotamiento, el ámbar adquiere una **carga eléctrica** neta o simplemente *se carga*. La palabra "eléctrico" se deriva del vocablo griego *elektron*, que significa ámbar. Una persona se carga eléctricamente al frotar sus zapatos sobre una alfombra de nailon; y puede cargar un peine si lo pasa por su cabello seco.

Las varillas de plástico y un trozo de piel (verdadera o sintética) son especialmente buenos para demostrar la **electrostática**, es decir, las interacciones entre cargas eléctricas en reposo (o casi en reposo). Después de cargar las dos varillas de plástico frotándolas contra el trozo de piel como se muestra en la figura 21.1*a*, vemos que las varillas se repelen.

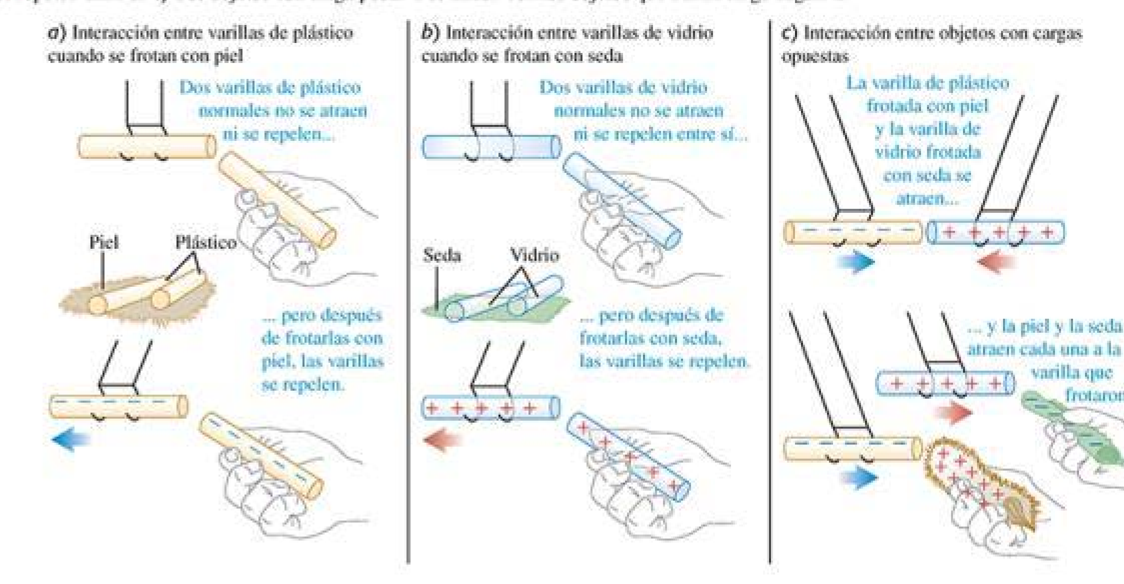
Cuando frotamos varillas de vidrio con seda, las varillas de vidrio también se cargan y se repelen entre sí (figura 21.1*b*). Pero una varilla de plástico cargada *atrae* a una varilla de vidrio también cargada; además, la varilla de plástico y la piel se atraen, al igual que la varilla de vidrio y la seda (figura 21.1*c*).

Estos experimentos y muchos otros similares han demostrado que hay exactamente dos tipos de carga eléctrica: la del plástico cuando se frota con piel y la del vidrio al frotarse con seda. Benjamín Franklin (1706-1790) sugirió llamar a esas dos clases de carga *negativa* y *positiva*, respectivamente, y tales nombres aún se utilizan. La varilla de plástico y la seda tienen carga negativa; en tanto que la varilla de vidrio y la piel tienen carga positiva.

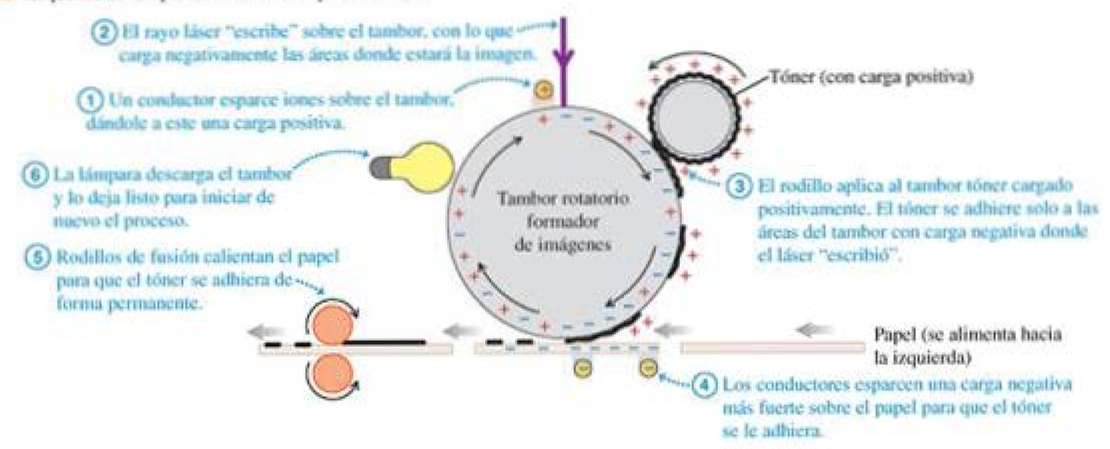
Dos cargas positivas se repelen entre sí, al igual que dos cargas negativas. Una carga positiva y una negativa se atraen.

CUIDADO **Atracción y repulsión eléctricas** En ocasiones, la atracción y la repulsión de dos objetos cargados se resume como "cargas iguales se repelen, y cargas opuestas se atraen". Sin embargo, tenga en cuenta que la frase "cargas iguales" *no* significa que las dos cargas sean idénticas, sino solo que ambas cargas tienen el mismo *signo* algebraico (ambas son positivas o ambas negativas). La expresión "cargas opuestas" quiere decir que los dos objetos tienen una carga eléctrica de signos diferentes (una positiva y la otra negativa).

21.1 Experimentos de electrostática. *a*) Los objetos cargados negativamente se repelen entre sí. *b*) Los objetos cargados positivamente se repelen entre sí. *c*) Los objetos con carga positiva se atraen con los objetos que tienen carga negativa.



21.2 Esquema de la operación de una impresora láser.



Una aplicación de las fuerzas entre cuerpos cargados es una impresora láser (figura 21.2). Al tambor formador de imágenes, que es sensible a la luz, se le da una carga positiva. Mientras el tambor gira, un rayo láser ilumina algunas áreas seleccionadas de este y las deja con una carga *negativa*. Las partículas del tóner cargado positivamente se adhieren solo en las superficies del tambor donde el láser "escribió". Cuando una hoja de papel entra en contacto con el tambor, las partículas del tóner se adhieren a la hoja y forman la imagen.

Carga eléctrica y estructura de la materia

Cuando se carga una varilla frotándola con piel o con seda, como se muestra en la figura 21.1, no hay ningún cambio visible en la apariencia de la varilla. Entonces, ¿qué es lo que realmente le sucede a la varilla cuando se carga? Para responder esta pregunta, debemos analizar más de cerca la estructura de los átomos, que son los bloques que constituyen la materia ordinaria.

La estructura de los átomos se describe en términos de tres partículas: el **electrón**, con carga negativa; el **protón**, cuya carga es positiva; y el **neutrón**, sin carga (figura 21.3). El protón y el neutrón son combinaciones de otras entidades llamadas *quarks*, que tienen cargas de $\pm\frac{1}{3}$ y $\pm\frac{2}{3}$ de la carga del electrón. No se han observado quarks aislados, y hay razones teóricas para creer que, en principio, es imposible ver un quark aislado.

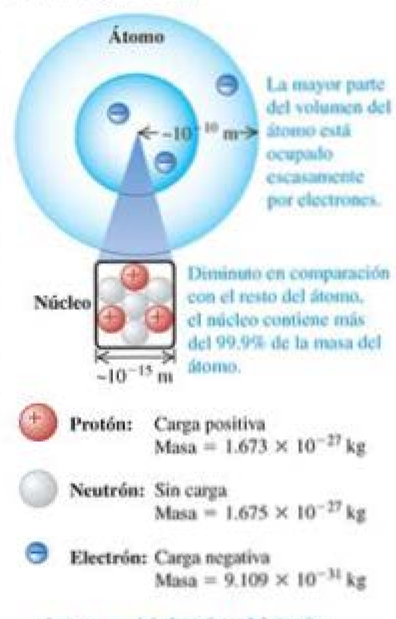
Los protones y los neutrones en un átomo forman el **núcleo**, pequeño y muy denso, cuyas dimensiones son del orden de 10^{-15} m. Los electrones rodean al núcleo a distancias del orden de 10^{-10} m. Si un átomo midiera algunos kilómetros de diámetro, su núcleo tendría el tamaño de una pelota de tenis. Los electrones cargados negativamente se mantienen dentro del átomo debido a las fuerzas eléctricas de atracción ejercidas sobre ellos por el núcleo con carga positiva. (Los protones y los neutrones permanecen dentro del núcleo estable de los átomos debido al efecto de atracción conocido como *fuerza nuclear fuerte*, que vence la repulsión eléctrica entre los protones. La fuerza nuclear fuerte es de corto alcance, por lo que sus efectos no llegan más allá del núcleo).

Las masas de las partículas individuales, con la precisión que se conocen actualmente, son

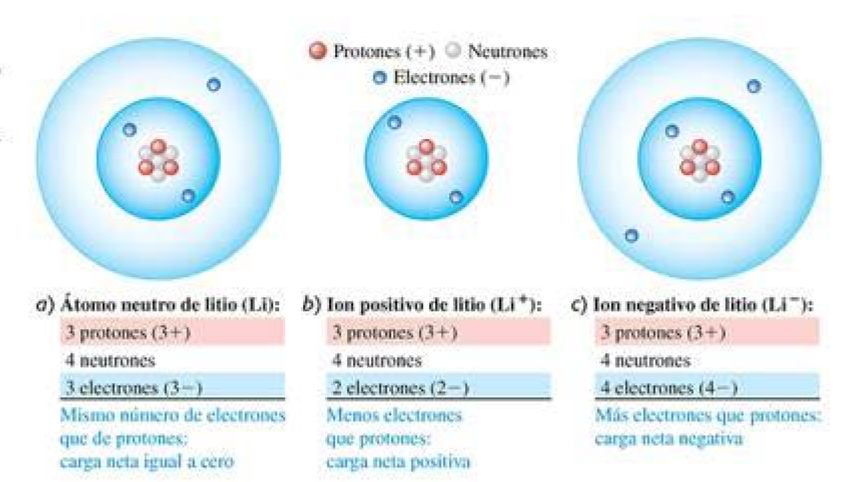
$$\text{Masa del electrón} = m_e = 9.10938215(45) \times 10^{-31}\ \text{kg}$$
$$\text{Masa del protón} = m_p = 1.672621637(83) \times 10^{-27}\ \text{kg}$$
$$\text{Masa del neutrón} = m_n = 1.674927211(84) \times 10^{-27}\ \text{kg}$$

Los números entre paréntesis indican la incertidumbre en los dos últimos dígitos. Observe que las masas del protón y del neutrón son casi iguales y aproximadamente

21.3 La estructura de un átomo. El átomo que se ilustra es el de litio (véase la figura 21.4*a*).



21.4 *a*) Un átomo neutro tiene tantos electrones como protones. *b*) Un ion positivo tiene un déficit de electrones. *c*) Un ion negativo tiene exceso de electrones. (Las "capas" de los electrones son una representación esquemática de la distribución real de los electrones, que forman una nube difusa varias veces mayor que el núcleo).



2000 veces la masa del electrón. Más del 99.9% de la masa de cualquier átomo se concentra en el núcleo.

La carga negativa del electrón tiene (dentro del error experimental) *exactamente* la misma magnitud que la carga positiva del protón. En un átomo neutro, el número de electrones es igual al número de protones en el núcleo, y la carga eléctrica neta (la suma algebraica de todas las cargas) es exactamente igual a cero (figura 21.4*a*). El número de protones o electrones en un átomo neutro de un elemento se denomina **número atómico** de ese elemento. Si se pierden uno o más electrones de un átomo, la estructura con carga positiva que queda se llama **ion positivo** (figura 21.4*b*). Un **ion negativo** es un átomo que ha *ganado* uno o más electrones (figura 21.4*c*). La ganancia o pérdida de electrones recibe el nombre de **ionización**.

Cuando el número total de protones en un cuerpo macroscópico es igual al número total de electrones, la carga total es igual a cero y el cuerpo en su totalidad es eléctricamente neutro. Para dar a un cuerpo una carga excedente negativa, se pueden *adicionar cargas negativas* o *eliminar cargas positivas* de dicho cuerpo. En forma similar, un exceso de carga positiva se crea cuando se *agregan cargas positivas*, o cuando se *eliminan cargas negativas*. En la mayoría de casos, se agregan o se eliminan electrones con carga negativa (y de gran movilidad); y un "cuerpo cargado positivamente" es aquel que ha perdido algunos de su número normal de electrones. Cuando hablamos de la carga de un cuerpo, siempre nos referimos a su carga *neta*, la cual siempre es una fracción muy pequeña (comúnmente no mayor de 10^{-12}) de la carga total positiva o negativa en el cuerpo.

La carga eléctrica se conserva

En el análisis anterior hay implícitos dos principios muy importantes. El primero es el **principio de conservación de la carga**:

La suma algebraica de todas las cargas eléctricas en cualquier sistema cerrado es constante.

Si se frota una varilla de plástico con un trozo de piel, ambas sin carga al principio, la varilla adquiere una carga negativa (pues toma electrones de la piel), y la piel adquiere una carga positiva de la *misma* magnitud (ya que perdió el mismo número de electrones que ganó la varilla). De ahí que no cambie la carga eléctrica total en los dos cuerpos tomados en conjunto. En cualquier proceso de carga, esta no se crea ni se destruye, solo se *transfiere* de un cuerpo a otro.

Se cree que el principio de conservación de la carga es una ley *universal*, pues no se ha observado ninguna evidencia experimental que contravenga este principio. Aun en las interacciones de alta energía donde se crean y se destruyen partículas, como en la creación de pares electrón-positrón, la carga total de cualquier sistema cerrado es constante con toda exactitud.

El segundo principio importante es:

La magnitud de la carga del electrón o del protón es la unidad natural de carga.

Toda cantidad observable de carga eléctrica siempre es un múltiplo entero de esta unidad básica. Decimos que la carga está *cuantizada*. Un ejemplo de cuantización que resulta familiar es el dinero. Cuando se paga en efectivo por un artículo en una tienda, hay que hacerlo en incrementos de un centavo. El dinero no se puede dividir en cantidades menores de un centavo; y la carga eléctrica no se puede dividir en cantidades menores que la carga de un electrón o un protón. (Es probable que las cargas de los quarks, de $\pm\frac{1}{3}$ y $\pm\frac{2}{3}$ no sean observables como cargas aisladas). Por lo tanto, la carga de cualquier cuerpo macroscópico siempre es igual a cero o a un múltiplo entero (negativo o positivo) de la carga del electrón.

La comprensión de la naturaleza eléctrica de la materia nos permite entender muchos aspectos del mundo físico (figura 21.5). Los enlaces químicos que mantienen unidos a los átomos para formar moléculas se deben a las interacciones eléctricas entre ellos, como los enlaces iónicos fuertes que unen a los átomos de sodio y cloro para formar la sal de mesa, y los enlaces relativamente débiles entre las cadenas de ADN que contienen nuestro código genético. La fuerza normal que ejerce sobre usted la silla en que se sienta proviene de fuerzas eléctricas entre las partículas cargadas de los átomos de usted y los de la silla. La fuerza de tensión en una cuerda que se estira y la fuerza de adhesión de un pegamento se parecen en que se deben a las interacciones eléctricas de los átomos.

21.5 La mayoría de las fuerzas que actúan sobre este esquiador acuático son eléctricas. Las interacciones eléctricas entre moléculas adyacentes originan la fuerza del agua sobre el esquí, la tensión en la cuerda y la resistencia del aire sobre el cuerpo del individuo. Las interacciones eléctricas también mantienen juntos los átomos del cuerpo del esquiador. Solo hay una fuerza por completo ajena a la eléctrica que actúa sobre el esquiador: la fuerza de la gravedad.



Evalúe su comprensión de la sección 21.1 *a*) En sentido estricto, ¿la varilla de plástico de la figura 21.1 pesa más, menos o lo mismo después de frotarla con la piel? *b*) ¿Y la varilla de vidrio una vez que se frota con seda? ¿Qué pasa con *c*) la piel y *d*) la seda? ❙

21.2 Conductores, aislantes y cargas inducidas

MasteringPHYSICS

PhET: Balloons and Static Electricity
PhET: John Travoltage

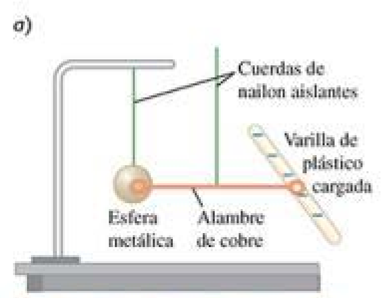
Algunos materiales permiten que las cargas eléctricas se desplacen con facilidad de una región del material a otra, mientras que otros materiales no lo permiten. Por ejemplo, en la figura 21.6*a* se muestra un alambre de cobre sostenido por una cuerda de nailon. Suponga que usted toca un extremo del alambre con una varilla de plástico cargada, y el otro extremo lo junta con una esfera metálica que, al principio, está sin carga; después, retira la varilla cargada y el alambre. Cuando acerca otro cuerpo cargado a la esfera (figuras 21.6*b* y 21.6*c*), esta será atraída o repelida, lo cual demuestra que se cargó eléctricamente. Se transfirió carga eléctrica entre la esfera y la superficie de la varilla de plástico, a través del alambre de cobre.

El alambre de cobre recibe el nombre de **conductor** de electricidad. Si se repite el experimento con una banda de caucho o una cuerda de nailon en lugar del alambre, se verá que *no* se transfiere carga a la esfera. Esos materiales se denominan **aislantes**. Los conductores facilitan el desplazamiento de las cargas a través de ellos; mientras que los aislantes no lo hacen. (En la figura 21.6, las cuerdas de nailon que sostienen son aislantes, lo cual evita que escape la carga de la esfera metálica y del alambre de cobre).

Como ejemplo, las fibras de una alfombra en un día seco son buenos aislantes. Cuando usted camina sobre ella, la fricción de los zapatos contra las fibras hace que se genere una carga en su cuerpo y permanezca ahí, porque no puede fluir por las fibras aislantes. Si después usted toca un objeto conductor, como una perilla, ocurre una transferencia rápida de la carga entre sus dedos y la perilla, por lo que siente una descarga. Una forma de evitarlo consiste en enrollar algunas de las fibras de la alfombra alrededor de núcleos conductores, de modo que cualquier carga que se acumule sobre una persona se transfiera a la alfombra de manera inofensiva. Otra solución es cubrir la alfombra con una sustancia antiestática que no transfiera fácilmente electrones hacia los zapatos o desde estos; así se evita que se acumulen cargas en el cuerpo en primer lugar.

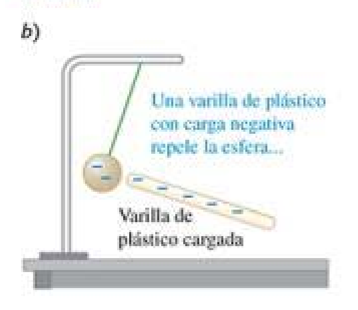
21.6 El cobre es un buen conductor de la electricidad; el nailon es un buen aislante. *a*) El alambre de cobre conduce cargas entre la esfera metálica y la varilla de plástico cargada, y así carga negativamente la esfera. Después, la esfera de metal es *b*) repelida por una varilla de plástico con carga negativa, y *c*) atraída por una varilla de vidrio con carga positiva.

a)

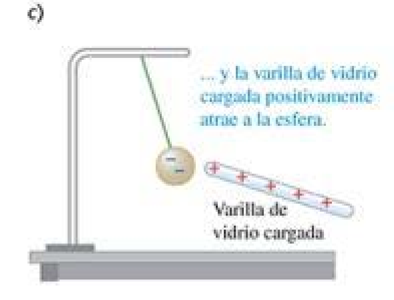


El alambre conduce carga de la varilla de plástico cargada negativamente a la esfera de metal.

b)



c)



La mayoría de los metales son buenos conductores; en tanto que los no metales, en general, son aislantes. Dentro de un sólido metálico, como el cobre, uno o más de los electrones externos de cada átomo se liberan y se mueven con libertad a través del material, exactamente como las moléculas de un gas se desplazan por los espacios entre los granos de arena en un recipiente. Los demás electrones permanecen unidos a los núcleos con carga positiva, que a la vez están unidos en posiciones casi fijas en el material. En un material aislante no hay electrones libres, o hay muy pocos, y la carga eléctrica no puede desplazarse con facilidad a través del material. Algunos materiales se denominan *semiconductores* porque tienen propiedades intermedias entre las de los buenos conductores y las de los buenos aislantes.

Carga por inducción

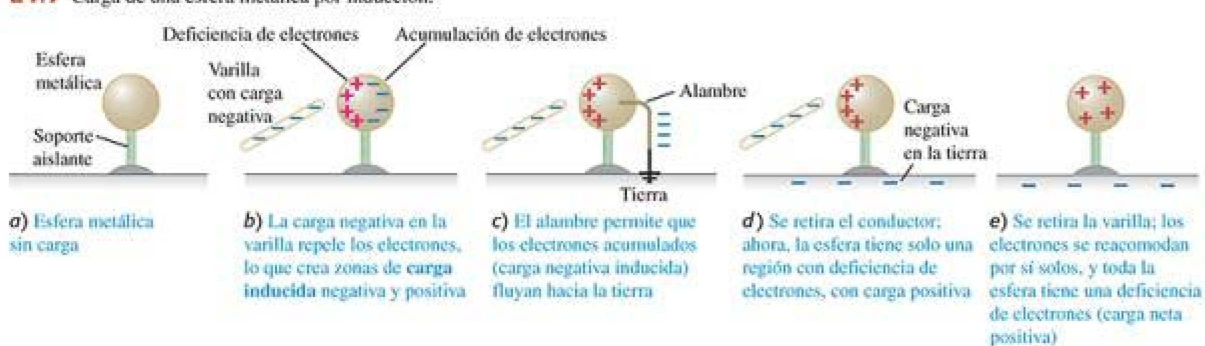
Una esfera de metal se puede cargar usando un alambre de cobre y una varilla de plástico eléctricamente cargada, como se indica en la figura 21.6*a*. En este proceso, algunos de los electrones excedentes en la varilla se transfieren hacia la esfera, lo cual deja a la varilla con una menor carga negativa. Hay otra técnica diferente con la que la varilla de plástico puede dar a otro cuerpo una carga de signo *contrario*, sin perder una parte de su propia carga. Este proceso se llama carga por **inducción**.

En la figura 21.7 se muestra un ejemplo de carga por inducción. Una esfera metálica sin carga se sostiene usando un soporte aislante (figura 21.7*a*). Cuando se le acerca una varilla con carga negativa, sin que llegue a tocarla (figura 21.7*b*), los electrones libres en la esfera metálica son repelidos por los electrones excedentes en la varilla, y se desplazan hacia la derecha, lejos de la varilla. No pueden escapar de la esfera porque tanto el soporte como el aire circundante son aislantes. Por lo tanto, existe un exceso de carga negativa en la superficie derecha de la esfera y una deficiencia de carga negativa (es decir, hay una carga positiva neta) en su superficie izquierda. Estas cargas excedentes se llaman **cargas inducidas**.

No todos los electrones libres se desplazan hacia la parte derecha de la superficie de la esfera. Tan pronto como se desarrolla cualquier carga inducida, esta ejerce fuerzas hacia la *izquierda* sobre los otros electrones libres. Estos electrones son repelidos por la carga negativa inducida a la derecha y atraídos hacia la carga positiva inducida a la izquierda. El sistema alcanza el equilibrio donde la fuerza hacia la derecha sobre un electrón, debida a la varilla cargada, queda equilibrada por la fuerza hacia la izquierda que se debe a la carga inducida. Si se retira la varilla cargada, los electrones libres regresan a la izquierda y se restablece la condición neutral original.

¿Qué pasaría si, mientras la varilla de plástico se encuentra cerca, el extremo de un alambre conductor se pusiera en contacto con la superficie derecha de la esfera, y el otro extremo de este se conectara a tierra (figura 21.7*c*)? La Tierra es un conductor, y es tan grande que actúa como una fuente prácticamente infinita de electrones adicionales o como un receptor de los electrones no deseados. Algunas de las cargas negativas fluyen a tierra a través del alambre. Ahora suponga que desconecta el alambre (figura 21.7*d*) y luego retira la varilla (figura 21.7*e*); en la esfera queda una carga positiva neta. Durante este proceso, no cambió la carga negativa de la varilla. La tierra adquiere una carga negativa de igual magnitud a la carga positiva inducida que queda en la esfera.

21.7 Carga de una esfera metálica por inducción.



a) Esfera metálica sin carga

b) La carga negativa en la varilla repele los electrones, lo que crea zonas de **carga inducida** negativa y positiva

c) El alambre permite que los electrones acumulados (carga negativa inducida) fluyan hacia la tierra

d) Se retira el conductor; ahora, la esfera tiene solo una región con deficiencia de electrones, con carga positiva

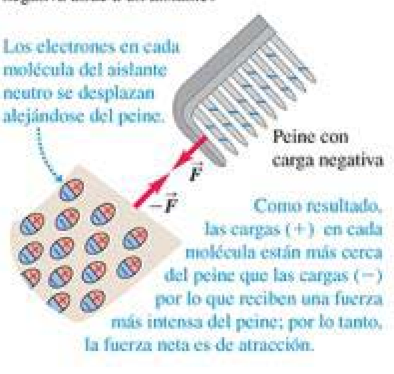
e) Se retira la varilla; los electrones se reacomodan por sí solos, y toda la esfera tiene una deficiencia de electrones (carga neta positiva)

21.8 Las cargas dentro de las moléculas de un material aislante pueden desplazarse un poco. Como resultado, un peine con carga de cualquier signo atrae a un material aislante neutro. Según la tercera ley de Newton, el aislante neutro ejerce una fuerza de atracción de igual magnitud sobre el peine.

a) Un peine cargado levanta trocitos de plástico sin carga



b) ¿De qué manera un peine con carga negativa atrae a un aislante?



c) ¿De qué manera un peine con carga positiva atrae a un aislante?



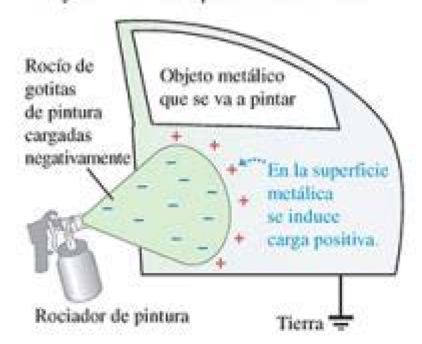
Fuerzas eléctricas en objetos sin carga



Por último, se observa que un cuerpo con carga ejerce fuerzas incluso sobre objetos que *no* están cargados. Si usted frota un globo contra una alfombra y después lo coloca junto al techo, el globo se adherirá a este, aun cuando el techo no tenga carga eléctrica neta. Después de que electrifica un peine pasándolo por su cabello, puede atraer con el peine trocitos de papel o de plástico que no estén cargados (figura 21.8*a*). ¿Cómo es posible esto?

Tal interacción es un efecto de carga inducida. Incluso en un aislante, las cargas eléctricas pueden desplazarse un poco en uno u otro sentido cuando hay una carga cerca. Esto se ilustra en la figura 21.8*b*; el peine de plástico cargado negativamente ocasiona un desplazamiento ligero de carga dentro de las moléculas del aislante neutro, un efecto llamado *polarización*. Las cargas positivas y negativas en el material se hallan presentes en cantidades iguales; no obstante, las cargas positivas están más cerca del peine de plástico, por lo que reciben una fuerza de atracción mayor que la fuerza de repulsión que se ejerce sobre las cargas negativas, dando así una fuerza de atracción neta. (En la sección 21.3 estudiaremos el modo en que las fuerzas eléctricas dependen de la distancia). Observe que un aislante neutro también es atraído por un peine cargado *positivamente* (figura 21.8*c*). Ahora las cargas en el aislante se mueven en la dirección opuesta; las cargas negativas en el aislante están más cerca del peine y reciben una fuerza de atracción mayor que la fuerza de repulsión ejercida sobre las cargas positivas del aislante. Por lo tanto, un objeto con carga de *cualquier* signo ejerce una fuerza de atracción sobre un aislante sin carga. La figura 21.9 muestra una aplicación importante de este efecto.

21.9 Proceso de pintado electrostático (compárelo con las figuras 21.7*b* y 21.7*c*). El objeto metálico que va a pintarse se conecta a tierra (al "suelo"), y las gotitas de pintura adquieren una carga eléctrica conforme salen de la boquilla rociadora. Al acercarse las gotitas de pintura al objeto que se pinta, aparecen en este cargas inducidas del signo opuesto, como se ilustra en la figura 21.7*b*, que atraen las gotitas a la superficie. Este proceso disminuye la formación de nubes de partículas dispersas de pintura y da un acabado particularmente liso.



Evalúe su comprensión de la sección 21.2 Imagine que tiene dos esferas metálicas ligeras y que cada una de ellas cuelga de una cuerda de nailon aislante. Una de las esferas tiene carga neta negativa; en tanto que la otra no tiene carga neta. *a)* Si las esferas están cerca una de otra pero sin tocarse, ¿**i.** se atraen mutuamente, **ii.** se repelen o **iii.** ninguna de ellas ejerce fuerza alguna sobre la otra? *b)* Ahora se permite que las esferas entren en contacto. Una vez que se tocan, las dos esferas ¿**i.** se atraen, **ii.** se repelen o **iii.** ninguna de ellas ejerce fuerza alguna sobre la otra? ❙

21.3 Ley de Coulomb

MasteringPHYSICS

ActivPhysics 11.1: Electric Force: Coulomb's Law
ActivPhysics 11.2: Electric Force: Superposition Principle
ActivPhysics 11.3: Electric Force: Superposition (Quantitative)

En 1784 Charles Augustin de Coulomb (1736-1806) estudió con mucho detalle las fuerzas de interacción entre partículas cargadas. Usó una balanza de torsión (figura 21.10*a*) similar a la que Cavendish emplearía 13 años después para estudiar la mucho más débil interacción gravitacional, como vimos en la sección 13.1. Coulomb descubrió que en

Aplicación Fuerzas eléctricas, sudor y fibrosis quística
Una manera de diagnosticar la fibrosis quística (FQ) es midiendo el contenido de sal en el sudor de una persona. El sudor es una mezcla de iones y agua, incluyendo el sodio (Na^+) y cloro (Cl^-) que forman sal ordinaria (NaCl). Cuando las células epiteliales secretan sudor, algunos iones de Cl^- fluyen de regreso del sudor a estas células (proceso conocido como reabsorción). La atracción eléctrica entre las cargas positivas y negativas tira de los iones de Na^+ junto con los de Cl^-. Las moléculas de agua no pueden fluir de regreso a las células epiteliales, de modo que el sudor sobre la piel tiene bajo contenido de sal. Sin embargo, en las personas con FQ, la reabsorción de iones Cl^- está bloqueada. Por lo tanto, su sudor es inusualmente salado: hasta cuatro veces la concentración normal de Cl^- y Na^+.



el caso de **cargas puntuales**, esto es, cuerpos cargados muy pequeños en comparación con la distancia r que los separa, la fuerza eléctrica es proporcional a $1/r^2$. Es decir, cuando se duplica la distancia r, la fuerza disminuye a un cuarto de su valor inicial; cuando la distancia disminuye a la mitad, la fuerza se incrementa a cuatro veces su valor inicial.

La fuerza eléctrica entre dos cargas puntuales también depende de la cantidad de carga en cada cuerpo, la que se denotará con q o Q. Para estudiar esta dependencia, Coulomb dividió una carga en dos partes iguales poniendo en contacto una pequeña esfera conductora con carga, con una esfera idéntica pero sin carga; por simetría, la carga se compartía por igual entre las dos esferas. (Observe el papel esencial que tiene el principio de conservación de la carga en este procedimiento). De esa manera, él podía obtener un medio, un cuarto, etcétera, de cualquier carga inicial. Descubrió que las fuerzas que dos cargas puntuales q_1 y q_2 ejercían una sobre la otra eran proporcionales a cada carga; además, eran proporcionales a su *producto* q_1q_2.

De ese modo, Coulomb estableció la que ahora se conoce como **ley de Coulomb**:

La magnitud de la fuerza eléctrica entre dos cargas puntuales es directamente proporcional al producto de las cargas, e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que las separa.

En términos matemáticos, la magnitud F de la fuerza que cada una de las dos cargas puntuales, q_1 y q_2, separadas una distancia r, ejerce sobre la otra se expresa como

$$F = k\frac{|q_1q_2|}{r^2} \tag{21.1}$$

donde k es una constante de proporcionalidad cuyo valor numérico depende del sistema de unidades que se utilice. En la ecuación (21.1) se emplea la notación de valor absoluto porque las cargas q_1 y q_2 pueden ser positivas o negativas, en tanto que la magnitud de la fuerza F siempre es positiva.

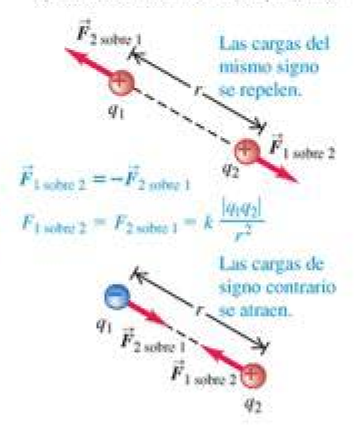
Las direcciones de las fuerzas que las dos cargas ejercen una sobre la otra siempre se encuentran a lo largo de la recta que las une. Cuando las cargas q_1 y q_2 tienen el mismo signo, ya sea positivo o negativo, las fuerzas son de repulsión; cuando las cargas tienen signos opuestos, las fuerzas son de atracción (figura 21.10*b*). Las dos fuerzas obedecen la tercera ley de Newton; siempre tienen la misma magnitud y dirección opuesta, aun cuando las cargas no tengan igual magnitud.

21.10 *a*) Medición de la fuerza eléctrica entre cargas puntuales. *b*) Las fuerzas eléctricas entre cargas puntuales obedecen la tercera ley de Newton: $\vec{F}_{1\text{ sobre }2} = -\vec{F}_{2\text{ sobre }1}$.

a) Balanza de torsión parecida a la utilizada por Coulomb para medir la fuerza eléctrica



b) Interacciones entre cargas puntuales



La proporcionalidad de la fuerza eléctrica con respecto a $1/r^2$ se ha comprobado con gran precisión. No hay razón para sospechar que el exponente sea distinto de 2. Así que la forma de la ecuación (21.1) es la misma que la de la ley de la gravitación. No obstante, las interacciones eléctricas y gravitacionales son dos clases distintas de fenómenos. Las interacciones eléctricas dependen de las cargas eléctricas y pueden ser de atracción o de repulsión; mientras que las interacciones gravitacionales dependen de la masa y siempre son de atracción (porque no se ha encontrado masa negativa).

Constantes eléctricas fundamentales

El valor de la constante de proporcionalidad k en la ley de Coulomb depende del sistema de unidades que se emplee. En nuestro estudio de la electricidad y el magnetismo, solo usaremos unidades del SI, las cuales incluyen la mayoría de las unidades con que estamos familiarizados, como volts, amperes, ohms y watts. (*No* existe un sistema inglés de unidades eléctricas). La unidad del SI para la carga eléctrica se llama **coulomb** (1 C). En unidades del SI, la constante k que aparece en la ecuación (21.1) es igual a

$$k = 8.987551787 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2 \cong 8.988 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2$$

El valor de k tiene un número tan grande de cifras significativas porque se relaciona estrechamente con la rapidez de la luz en el vacío. (Esto lo veremos en el capítulo 32, al estudiar la radiación electromagnética). Como vimos en la sección 1.3, tal rapidez se *define* exactamente como $c = 2.99792458 \times 10^8$ m/s. El valor numérico de k se define en términos de c como

$$k = (10^{-7} \text{ N} \cdot \text{s}^2/\text{C}^2)c^2$$

Se invita al lector a verificar esta expresión para confirmar que k tiene las unidades correctas.

En principio, podemos medir la fuerza eléctrica F entre dos cargas iguales q, medir la distancia r, y usar la ley de Coulomb para determinar la carga. Es decir, se puede considerar el valor de k como una definición operacional del coulomb; sin embargo, por razones de precisión experimental, es mejor definir el coulomb en términos de la unidad de *corriente* eléctrica (carga por unidad de tiempo), es decir, el *ampere*, que es igual a 1 coulomb por segundo. En el capítulo 28 volveremos a esta definición.

En unidades del SI, la constante k de la ecuación (21.1) se representa por lo general como $1/4\pi\epsilon_0$, donde ϵ_0 ("épsilon cero") es otra constante. Esto parece complicado, pero en realidad simplifica muchas de las fórmulas que encontraremos en capítulos posteriores. De aquí en adelante, generalmente escribiremos la ley de Coulomb como

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{|q_1q_2|}{r^2} \quad \text{(ley de Coulomb: fuerza entre dos cargas puntuales)} \quad (21.2)$$

Las constantes en la ecuación (21.2) son, aproximadamente,

$$\epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12} \text{ C}^2/\text{N} \cdot \text{m}^2 \quad \text{y} \quad \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = k = 8.988 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2$$

En los ejemplos y problemas será frecuente que utilicemos el valor aproximado

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9.0 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2$$

que está alrededor del 0.1% del valor correcto.

Como vimos en la sección 21.1, la unidad más fundamental de carga es la magnitud de la carga de un electrón o un protón, que se indica con e. El valor más preciso disponible cuando se escribió este libro era

$$e = 1.602176487(40) \times 10^{-19} \text{ C}$$

Un coulomb representa el negativo de la carga total de aproximadamente 6×10^{18} electrones. En comparación, un cubo de cobre de 1 cm por lado contiene cerca de 2.4×10^{24}

electrones. Cada segundo pasan por el filamento incandescente de una bombilla alrededor de 10^{19} electrones.

En problemas de electrostática (es decir, aquellos que implican cargas en reposo), es muy raro encontrar cargas tan grandes como 1 coulomb. Dos cargas de 1 C separadas 1 m ¡ejercerían fuerzas entre sí de 9×10^9 N (cerca de 1 millón de toneladas)! La carga total de todos los electrones en una moneda de cobre de un centavo es aún mayor, aproximadamente de 1.4×10^5 C, lo cual demuestra que no podemos alterar mucho la neutralidad eléctrica sin usar fuerzas demasiado grandes. Los valores más comunes de cargas fluctúan desde 10^{-9} hasta 10^{-6} C aproximadamente. Es frecuente usar el microcoulomb ($1\ \mu C = 10^{-6}$ C) y el nanocoulomb ($1\ nC = 10^{-9}$ C) como unidades de carga prácticas.



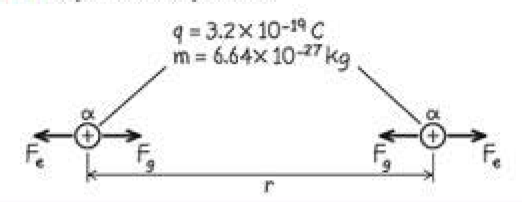
Ejemplo 21.1 Fuerza eléctrica contra fuerza gravitacional

Una partícula α que es el núcleo de un átomo de helio, tiene una masa $m = 6.64 \times 10^{-27}$ kg y una carga de $q = +2e = 3.2 \times 10^{-19}$ C. Compare la fuerza de repulsión eléctrica entre dos partículas α ("alfa") con la fuerza de atracción gravitacional entre ellas.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Este problema implica la ley de Newton para la fuerza gravitacional F_g entre partículas (véase la sección 13.1) y la ley de Coulomb para la fuerza eléctrica F_e entre cargas puntuales. Para comparar estas fuerzas, definimos la incógnita como la razón F_e/F_g. Usamos la ecuación (21.2) para F_e y la ecuación (13.1) para F_g.

21.11 Esquema de este problema.



EJECUTAR: La figura 21.11 muestra el diagrama. De las ecuaciones (21.2) y (13.1),

$$F_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q^2}{r^2} \qquad F_g = G\frac{m^2}{r^2}$$

Ambas fuerzas son inversamente proporcionales al cuadrado de la distancia, de modo que los factores r^2 se cancelan en la relación:

$$\frac{F_e}{F_g} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 G}\frac{q^2}{m^2}$$

$$= \frac{9.0 \times 10^9\ \text{N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2}{6.67 \times 10^{-11}\ \text{N}\cdot\text{m}^2/\text{kg}^2}\frac{(3.2 \times 10^{-19}\ \text{C})^2}{(6.64 \times 10^{-27}\ \text{kg})^2}$$

$$= 3.1 \times 10^{35}$$

EVALUAR: Este número tan asombrosamente grande indica que, en tal situación, la fuerza gravitacional es despreciable en comparación con la fuerza eléctrica. Esto siempre se cumple para interacciones de partículas atómicas y subatómicas. No obstante, para objetos del tamaño de un ser humano o de un planeta, las cargas positiva y negativa son casi iguales en magnitud, y la fuerza eléctrica neta por lo general es mucho *menor* que la gravitacional.

Superposición de fuerzas

Como se mencionó, la ley de Coulomb describe solo la interacción entre dos cargas *puntuales*. Los experimentos demuestran que cuando dos cargas ejercen fuerzas de manera simultánea sobre una tercera carga, la fuerza total que actúa sobre esa carga es la *suma vectorial* de las fuerzas que las dos cargas ejercerían individualmente. Esta es una propiedad importante, conocida como **principio de superposición de fuerzas**, y se cumple para cualquier número de cargas. Con base en este principio, la ley de Coulomb se aplica a *cualquier* número de cargas. Dos de los ejemplos al final de esta sección se basan en el principio de superposición.

En sentido estricto, la ley de Coulomb, tal como fue establecida, debería usarse solo para cargas puntuales *en el vacío*. Si hay materia presente entre las cargas, la fuerza neta que actúa sobre cada una se altera debido a las cargas inducidas en las moléculas del material interpuesto. Este efecto se describirá más adelante. No obstante, es práctico utilizar la ley de Coulomb sin modificar para cargas puntuales en el aire, ya que a la presión atmosférica normal, la presencia del aire cambia el valor de la fuerza eléctrica en el vacío en aproximadamente una parte en 2000.

Estrategia para resolver problemas 21.1 Ley de Coulomb



IDENTIFICAR *los conceptos relevantes:* La ley de Coulomb describe la fuerza eléctrica entre partículas cargadas.

PLANTEAR *el problema* de acuerdo con los siguientes pasos:
1. Elabore un dibujo que muestre la ubicación de las partículas cargadas, e indique la carga de cada una.
2. Si las cargas no se localizan sobre la misma línea, elabore un sistema de coordenadas *xy*.
3. El problema consistirá en encontrar la fuerza eléctrica sobre una o más partículas. Identifique cuáles son.

EJECUTAR *la solución* como sigue:
1. Para cada partícula que ejerza una fuerza eléctrica sobre la partícula de interés, calcule la magnitud de dicha fuerza usando la ecuación (21.2).
2. Considerando esas magnitudes, dibuje un diagrama de cuerpo libre que muestre los vectores fuerza eléctrica que actúen sobre la(s) partícula(s) de interés. La fuerza ejercida por la partícula 1 sobre la partícula 2 apunta desde la partícula 2 hacia la partícula 1 si las cargas tienen signos opuestos; pero si las cargas tienen el mismo signo, la fuerza sale de la partícula 2 alejándose de la partícula 1.
3. Con base en el principio de superposición, calcule la fuerza eléctrica total sobre la partícula de interés: una suma *vectorial*. (Repase el álgebra vectorial en las secciones 1.7 a 1.9. El método de componentes es útil con frecuencia).
4. Use unidades consistentes; las unidades del SI son totalmente consistentes. Con $1/4\pi\epsilon_0 = 9.0 \times 10^9\ \text{N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2$, las distancias deben expresarse en metros, la carga en coulombs y la fuerza en newtons.
5. Algunos ejemplos y problemas de este capítulo y los posteriores implican una distribución *continua* de la carga a lo largo de una línea recta, sobre una superficie o a través de un volumen. En estos casos, la suma vectorial descrita en el paso 3 se vuelve una *integral* vectorial. Se divide la distribución de la carga en elementos infinitesimales, se aplica la ley de Coulomb para cada uno y luego se integra para obtener la suma vectorial. En ocasiones, es posible efectuar este proceso sin utilizar de manera explícita la integración.
6. Aproveche cualquier simetría en la distribución de la carga para simplificar la solución del problema. Por ejemplo, dos cargas q idénticas ejercen una fuerza eléctrica neta igual a cero sobre una carga Q que está en medio de ellas, porque las fuerzas sobre Q tienen igual magnitud pero sentidos opuestos.

EVALUAR *su respuesta:* Compruebe si los resultados numéricos son razonables, y confirme que la dirección de la fuerza eléctrica neta esté de acuerdo con el principio de que las cargas del mismo signo se repelen y las cargas de signo diferente se atraen.

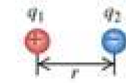
Ejemplo 21.2 Fuerza entre dos cargas puntuales



Dos cargas puntuales, $q_1 = +25$ nC y $q_2 = -75$ nC, están separadas por una distancia $r = 3.0$ cm (figura 21.12*a*). Calcule la magnitud y la dirección de *a*) la fuerza eléctrica que q_1 ejerce sobre q_2; y *b*) la fuerza eléctrica que q_2 ejerce sobre q_1.

21.12 ¿Qué fuerza ejerce q_1 sobre q_2? ¿Y qué fuerza ejerce q_2 sobre q_1? Las fuerzas gravitacionales son despreciables.

a) Las dos cargas



b) Diagrama de cuerpo libre para la carga q_2



c) Diagrama de cuerpo libre para la carga q_1



SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: En este problema se pide determinar las fuerzas eléctricas que dos cargas ejercen entre sí. Usamos la ley de Coulomb, la ecuación (21.2), para calcular las magnitudes de las fuerzas. Los signos de las cargas determinarán las direcciones de las fuerzas.

EJECUTAR: *a*) Después de convertir las unidades de r a metros y las de las cargas q_1 y q_2 a coulombs, la ecuación (21.2) nos da

$$F_{1\ \text{sobre}\ 2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{|q_1q_2|}{r^2}$$
$$= (9.0 \times 10^9\ \text{N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2)\frac{|(+25 \times 10^{-9}\ \text{C})(-75 \times 10^{-9}\ \text{C})|}{(0.030\ \text{m})^2}$$
$$= 0.019\ \text{N}$$

Las cargas tienen signos opuestos, de modo que la fuerza es de atracción (hacia la izquierda en la figura 21.12*b*); es decir, la fuerza que actúa sobre q_2 está dirigida hacia q_1 a lo largo de la línea que une las dos cargas.

b) Procediendo como en el inciso *a*), tenemos

$$F_{1\ \text{sobre}\ 2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{|q_2q_1|}{r^2} = F_{2\ \text{sobre}\ 1} = 0.019\ \text{N}$$

La fuerza de atracción sobre q_1 actúa hacia la derecha, es decir, hacia q_2 (figura 21.12*c*).

EVALUAR: La tercera ley de Newton se aplica para la fuerza eléctrica. Aun cuando las cargas tienen diferentes magnitudes, la magnitud de la fuerza que q_2 ejerce sobre q_1 es la misma que la magnitud de la fuerza que q_1 ejerce sobre q_2, y estas dos fuerzas tienen direcciones opuestas.

Ejemplo 21.3 Suma vectorial de las fuerzas eléctricas sobre una línea



Dos cargas puntuales se localizan en el eje x de un sistema de coordenadas. La carga $q_1 = 1.0$ nC está en $x = +2.0$ cm, y la carga $q_2 = -3.0$ nC está en $x = +4.0$ cm. ¿Cuál es la fuerza eléctrica total que ejercen estas dos cargas sobre una carga $q_3 = 5.0$ nC que se encuentra en $x = 0$?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: La figura 21.13*a* ilustra la situación. Para obtener la fuerza total sobre q_3, nuestra incógnita, obtenemos la suma vectorial de las dos fuerzas eléctricas sobre ella.

Continúa

EJECUTAR: La figura 21.13*b* es un diagrama de cuerpo libre para la carga q_3, la cual es repelida por q_1 (que tiene el mismo signo) y atraída hacia q_2 (que tiene signo opuesto): $\vec{F}_{1 \text{ sobre } 3}$ se encuentra en la dirección $-x$ y $\vec{F}_{2 \text{ sobre } 3}$ está en la dirección $+x$. Después de las conversiones de unidades, a partir de la ecuación (21.2) tenemos

$$F_{1 \text{ sobre } 3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{|q_1 q_3|}{r_{13}^2}$$

$$= (9.0 \times 10^9 \text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2)\frac{(1.0 \times 10^{-9}\text{ C})(5.0 \times 10^{-9}\text{ C})}{(0.020 \text{ m})^2}$$

$$= 1.12 \times 10^{-4}\text{ N} = 112\ \mu\text{N}$$

De la misma manera se puede demostrar que $F_{2 \text{ sobre } 3} = 84\ \mu\text{N}$. Por lo tanto, tenemos que $\vec{F}_{1 \text{ sobre } 3} = (-112\ \mu\text{N})\hat{\imath}$ y $\vec{F}_{2 \text{ sobre } 3} = (84\ \mu\text{N})\hat{\imath}$. Así que la fuerza neta sobre q_3 es

$$\vec{F}_3 = \vec{F}_{1 \text{ sobre } 3} + \vec{F}_{2 \text{ sobre } 3} = (-112\ \mu\text{N})\hat{\imath} + (84\ \mu\text{N})\hat{\imath} = (-28\ \mu\text{N})\hat{\imath}$$

21.13 Diagrama de este problema.

a) Diagrama de la situación

$q_3 = 5.0$ nC $q_1 = 1.0$ nC $q_2 = -3.0$ nC; 2.0 cm; 4.0 cm

b) Diagrama de cuerpo libre para q_3

EVALUAR: Para verificar, observe que la magnitud de q_2 tiene el triple de carga que q_1, pero q_2 está dos veces más alejada de q_3 que q_1. Según la ecuación (21.2), esto significa que $F_{2 \text{ sobre } 3}$ debe ser $3/2^2 = 3/4 = 0.75$ de $F_{1 \text{ sobre } 3}$. Esto es congruente con los valores calculados de: $F_{2 \text{ sobre } 3}/F_{1 \text{ sobre } 3} = (84\ \mu\text{N})/(112\ \mu\text{N}) = 0.75$. Como $F_{2 \text{ sobre } 3}$ es la fuerza más débil, la dirección de la fuerza neta es la de $\vec{F}_{1 \text{ sobre } 3}$, es decir, en la dirección de x negativa.



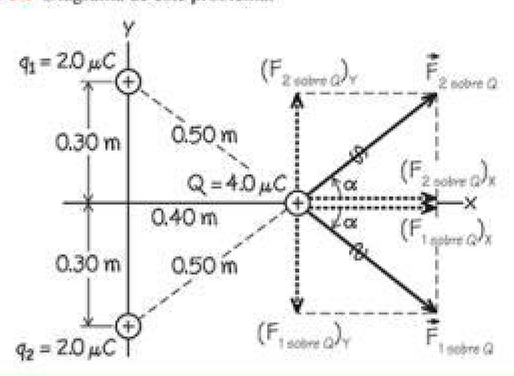
Ejemplo 21.4 Suma vectorial de fuerzas eléctricas en un plano

Dos cargas iguales y positivas, $q_1 = q_2 = 2.0\ \mu\text{C}$, se localizan en $x = 0$, $y = 0.30$ m y $x = 0$, $y = -0.30$ m, respectivamente. ¿Cuáles son la magnitud y la dirección de la fuerza eléctrica total que q_1 y q_2 ejercen sobre una tercera carga $Q = 4.0\ \mu\text{C}$ en $x = 0.40$ m, $y = 0$?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Al igual que en el ejemplo 21.3, tenemos que calcular la fuerza que cada carga ejerce sobre Q y después obtener la suma vectorial de esas fuerzas. En la figura 21.14 se presenta el diagrama. Como las tres cargas no se encuentran todas en una línea, la mejor forma de calcular las fuerzas es usar componentes.

21.14 Diagrama de este problema.



EJECUTAR: La figura 21.14 muestra las fuerzas $\vec{F}_{1 \text{ sobre } Q}$ y $\vec{F}_{2 \text{ sobre } Q}$ debidas a las cargas idénticas q_1 y q_2, las cuales se encuentran a distancias iguales de Q. De acuerdo con la ley de Coulomb, *ambas* fuerzas tienen magnitud:

$$F_{1 \text{ o } 2 \text{ sobre } Q} = (9.0 \times 10^9\text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2) \times \frac{(4.0 \times 10^{-6}\text{ C})(2.0 \times 10^{-6}\text{ C})}{(0.50\text{ m})^2} = 0.29\text{ N}$$

Las componentes x de las dos fuerzas son iguales:

$$(F_{1 \text{ o } 2 \text{ sobre } Q})_x = (F_{1 \text{ o } 2 \text{ sobre } Q})\cos\alpha = (0.29\text{ N})\frac{0.40\text{ m}}{0.50\text{ m}} = 0.23\text{ N}$$

Por simetría, vemos que las componentes y de las dos fuerzas son iguales y opuestas. Por lo tanto, su suma es igual a cero y la fuerza total $\vec{F}$ sobre Q tiene una sola componente x: $F_x = 0.23\text{ N} + 0.23\text{ N} = 0.46$ N. La fuerza total sobre Q se encuentra en dirección $+x$, con una magnitud de 0.46 N.

EVALUAR: La fuerza total sobre Q se ejerce en una dirección que no apunta alejándose directamente de q_1 ni de q_2. En vez de ello, su dirección es resultado del arreglo y apunta alejándose del *sistema* de cargas q_1 y q_2. ¿Puede ver el lector que la fuerza total *no* estaría en la dirección $+x$, si q_1 y q_2 no fueran iguales o si la disposición geométrica de las cargas no fuera simétrica?

Evalúe su comprensión de la sección 21.3 Suponga que la carga q_2 del ejemplo 21.4 fuera de $-2.0\ \mu$C. En este caso, la fuerza eléctrica total sobre Q estaría **i.** en la dirección $+x$; **ii.** en la dirección $-x$; **iii.** en la dirección $+y$; **iv.** en la dirección $-y$; **v.** sería igual a cero; **vi.** ninguna de las anteriores.



21.4 Campo eléctrico y fuerzas eléctricas

Cuando dos partículas cargadas eléctricamente interactúan en el espacio vacío, ¿cómo sabe cada una que la otra está ahí? Podemos comenzar a responder esta pregunta, y a la vez reformular la ley de Coulomb de una manera muy útil, usando el concepto de *campo eléctrico*.

Campo eléctrico

Para introducir este concepto, examinemos la repulsión mutua de dos cuerpos cargados positivamente, A y B (figura 21.15*a*). Suponga que B tiene carga q_0, y sea $\vec{F}_0$ la fuerza eléctrica que A ejerce sobre B. Una manera de concebir esta fuerza es como una fuerza de "acción a distancia", es decir, como una que actúa a través del espacio vacío sin necesidad de materia (tal como una varilla que empuje o una cuerda que tire) que la transmita a través del espacio. (La gravedad también puede considerarse como una fuerza de "acción a distancia"). Sin embargo, un enfoque más fructífero de visualizar la repulsión entre A y B es como un proceso de dos etapas. En primer lugar, imaginemos que el cuerpo A, como resultado de la carga que porta, *modifica de algún modo las propiedades del espacio que lo rodea*. Después, el cuerpo B, como resultado de la carga que porta, percibe cómo el espacio se modificó en su posición. La respuesta del cuerpo B es experimentar la fuerza $\vec{F}_0$.

Para entender cómo ocurre este proceso de dos etapas, primero se debe considerar solo el cuerpo A: eliminamos el cuerpo B y señalamos su posición anterior con el punto P (figura 21.15*b*). Decimos que el cuerpo A cargado produce o crea **un campo eléctrico** en el punto P (y en todos los demás puntos de su entorno). Este campo eléctrico está presente en P incluso si no hay carga en P, ya que tan solo es consecuencia de la carga del cuerpo A. Si después se coloca una carga puntual q_0 en el punto P, experimenta la fuerza $\vec{F}_0$. Adoptamos el punto de vista de que esta fuerza es ejercida sobre q_0 *por el campo* en P (figura 21.15*c*). Así, el campo eléctrico es el intermediario con el que A comunica su presencia a q_0. Debido a que la carga puntual q_0 experimentaría una fuerza en *cualquier* punto del entorno de A, el campo eléctrico que produce A existe en todos los puntos de la región alrededor de A.

De igual modo, podríamos decir que la carga puntual q_0 produce un campo eléctrico en el espacio alrededor suyo, y que este campo eléctrico ejerce la fuerza $-\vec{F}_0$ sobre el cuerpo A. Por cada fuerza (esto es, la fuerza de A sobre q_0 y la fuerza de q_0 sobre A), hay una carga que origina un campo eléctrico que ejerce una fuerza sobre la segunda carga. Hacemos énfasis en que esta es una *interacción* entre *dos* cuerpos cargados. Una sola carga produce un campo eléctrico en el espacio circundante; sin embargo, este campo eléctrico no ejerce una fuerza neta sobre la carga que lo creó; como se vio en la sección 4.3, un cuerpo no puede ejercer una fuerza neta sobre sí mismo. (Si este principio no fuera verdadero, ¡el lector sería capaz de elevarse hasta el techo si tirara de su cinturón hacia arriba!)

La fuerza eléctrica sobre un cuerpo cargado es ejercida por el campo eléctrico que *otros* cuerpos cargados originan.

Para averiguar experimentalmente si existe un campo eléctrico en un punto específico, colocamos en el punto un pequeño cuerpo cargado, al que llamamos **carga de prueba** (figura 21.15*c*). Si la carga de prueba experimenta una fuerza eléctrica, entonces existe un campo eléctrico en ese punto. Este campo lo producen cargas distintas de q_0.

La fuerza es una cantidad vectorial, por lo que el campo eléctrico también es una cantidad vectorial. (Observe que en el siguiente análisis se usa notación de vectores, así como letras en negritas y signos +, − e =). El *campo eléctrico* $\vec{E}$ en un punto se define como la fuerza eléctrica $\vec{F}_0$ que experimenta una carga de prueba q_0 en dicho punto, dividida entre la carga q_0. Es decir, el campo eléctrico en cierto punto es igual a la *fuerza eléctrica por unidad de carga* que una carga experimenta en ese punto:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}_0}{q_0} \quad \text{(definición de campo eléctrico como una fuerza eléctrica por unidad de carga)} \quad (21.3)$$

En unidades del SI, en el cual la unidad de fuerza es 1 N y la unidad de carga es 1 C, la unidad para la magnitud del campo eléctrico es 1 newton por coulomb (1 N/C).

Si se conoce el campo eléctrico $\vec{E}$ en cierto punto, la ecuación (21.3) se reacomoda para obtener la fuerza $\vec{F}_0$ experimentada por una carga puntual q_0 colocada en ese punto. Esta fuerza es igual al campo eléctrico $\vec{E}$ producido en ese punto, por cargas distintas de q_0, multiplicado por la carga q_0:

$$\vec{F}_0 = q_0\vec{E} \quad \text{(la fuerza ejercida sobre una carga puntual } q_0 \text{ por un campo eléctrico } \vec{E}\text{)} \quad (21.4)$$

21.15 Un cuerpo cargado crea un campo eléctrico en el espacio que lo rodea.

a) Los cuerpos A y B ejercen fuerzas eléctricas uno sobre el otro.





b) Se retira el cuerpo B...



c) El cuerpo A genera un campo eléctrico $\vec{E}$ en el punto P.



$\vec{E}$ es la fuerza por unidad de carga que el cuerpo A ejerce sobre una carga de prueba situada en P.

Aplicación Los tiburones y el "sexto sentido"

Los tiburones tienen la habilidad de localizar a sus presas (tanto a las platijas como a otros peces que viven en aguas profundas) aunque estas se encuentren totalmente escondidas en la arena del fondo del océano. Los tiburones logran esto al detectar los débiles campos eléctricos producidos por las contracciones musculares de sus presas. La sensibilidad de los tiburones a los campos eléctricos ("el sexto sentido") proviene de los canales llenos de gelatina que tienen en sus cuerpos. Estos canales terminan en los poros de la piel del tiburón (como se observa en la fotografía). Un campo eléctrico tan débil como 5×10^{-7} N/C genera una carga que fluye dentro de los canales y dispara una señal en el sistema nervioso del tiburón. Como el tiburón tiene canales con diferentes orientaciones, puede medir las diferentes componentes del vector del campo eléctrico y, así, determinar la dirección del campo.



21.16 Fuerza $\vec{F}_0 = q_0\vec{E}$ ejercida sobre una carga puntual q_0 colocada en un campo eléctrico $\vec{E}$.





MasteringPHYSICS

ActivPhysics 11.4: Electric Field: Point Charge
ActivPhysics 11.9: Motion of a Charge in an Electric Field: Introduction
ActivPhysics 11.10: Motion in an Electric Field: Problems

La carga q_0 puede ser positiva o negativa. Si q_0 es *positiva*, la fuerza $\vec{F}_0$ experimentada por la carga tiene la misma dirección que $\vec{E}$; si q_0 es *negativa*, $\vec{F}_0$ y $\vec{E}$ tienen direcciones opuestas (figura 21.16).

Aunque el concepto de campo eléctrico tal vez sea nuevo para usted, en realidad, la idea básica (de que un cuerpo origina un campo en el espacio que lo rodea y un segundo cuerpo responde a dicho campo) la ha utilizado antes. Compare la ecuación (21.4) con la expresión ya conocida de la fuerza gravitacional $\vec{F}_g$ que ejerce la Tierra sobre una masa m_0:

$$\vec{F}_g = m_0\vec{g} \qquad (21.5)$$

En esta expresión, $\vec{g}$ es la aceleración debida a la gravedad. Si dividimos ambos lados de la ecuación (21.5) entre la masa m_0, obtenemos

$$\vec{g} = \frac{\vec{F}_g}{m_0}$$

Así, $\vec{g}$ puede considerarse como la fuerza gravitacional por unidad de masa. Por analogía con la ecuación (21.3), interpretamos $\vec{g}$ como el *campo gravitacional* y, de esta manera, tratamos la interacción gravitacional entre la Tierra y la masa m_0 como un proceso de dos etapas: la Tierra origina un campo gravitacional $\vec{g}$ en el espacio que la rodea, y este campo ejerce una fuerza dada por la ecuación (21.5) sobre la masa m_0 (que se puede considerar como una *masa prueba*). El campo gravitacional $\vec{g}$ o fuerza gravitacional por unidad de masa, es un concepto útil porque no depende de la masa del cuerpo sobre el que se ejerce la fuerza gravitacional; asimismo, el campo eléctrico $\vec{E}$, o fuerza eléctrica por unidad de carga, es útil porque no depende de la carga del cuerpo sobre el que se ejerce la fuerza eléctrica.

CUIDADO **$\vec{F}_0 = q_0\vec{E}_0$ es solo para cargas de prueba *puntuales*** La fuerza eléctrica experimentada por una carga de prueba q_0 varía de un punto a otro, de manera que el campo eléctrico también es diferente en distintos puntos. Por esta razón, la ecuación (21.4) se usa únicamente para calcular la fuerza eléctrica sobre una carga *puntual*. Si un cuerpo cargado tiene un tamaño suficientemente grande, el campo eléctrico $\vec{E}$ puede tener magnitudes y direcciones muy distintas en diferentes puntos del cuerpo, y el cálculo de la fuerza eléctrica neta sobre él será más complicado.

Campo eléctrico de una carga puntual

Si la fuente es una carga puntual q, será fácil encontrar el campo eléctrico que produce. A la ubicación de la carga la llamamos el **punto de origen**; y el punto P donde se determina el campo se denomina **punto del campo**. También es útil introducir un *vector unitario* $\hat{r}$ que apunte a lo largo de la línea que va del punto de origen al punto del campo (figura 21.17*a*). Este vector unitario es igual al vector desplazamiento $\vec{r}$ del punto de origen al punto del campo, dividido entre la distancia $r = |\vec{r}|$ que separa a los dos puntos; es decir, $\hat{r} = \vec{r}/r$. Si colocamos una pequeña carga prueba q_0 en el punto del campo P, a una distancia r del punto de origen, la magnitud F_0 de la fuerza está dada por la ley de Coulomb, ecuación (21.2):

21.17 Campo eléctrico $\vec{E}$ producido en el punto P por una carga puntual aislada q que se encuentra en S. Observe que tanto en *b*) como en *c*), $\vec{E}$ es *producido* por q [véase la ecuación (21.7)] pero *actúa* sobre la carga q_0 en el punto P [véase la ecuación (21.4)].



b)
$\vec{E}$
q_0
P
q
$\hat{r}$
S
En cada punto P, el campo eléctrico originado por una carga puntual q, *positiva* y aislada, tiene una dirección que se *aleja* de la carga en la *misma* dirección que $\hat{r}$.



$$F_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{|qq_0|}{r^2}$$

De acuerdo con la ecuación (21.3), la magnitud E del campo eléctrico en P es

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{|q|}{r^2} \quad \text{(magnitud del campo eléctrico de una carga puntual)} \quad (21.6)$$

Usando el vector unitario $\hat{r}$, escribimos una ecuación *vectorial* que proporciona tanto la magnitud como la dirección del campo eléctrico $\vec{E}$:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2}\hat{r} \quad \text{(campo eléctrico de una carga puntual)} \quad (21.7)$$

Por definición, el campo eléctrico de una carga puntual siempre tiene una dirección que *se aleja* de una carga positiva (es decir, en la misma dirección que $\hat{r}$; véase la figura 21.17*b*), pero *se acerca* hacia una carga negativa (es decir, en la dirección opuesta a $\hat{r}$; véase la figura 21.17*c*).

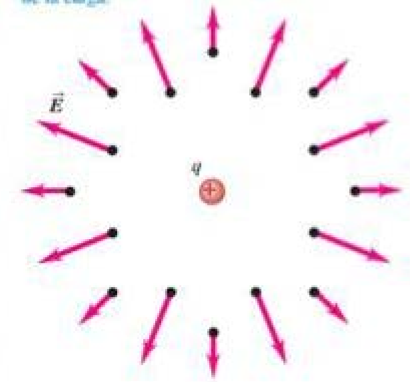
Hemos hecho hincapié en el cálculo del campo eléctrico $\vec{E}$ en un punto determinado. Sin embargo, como $\vec{E}$ puede variar de un punto a otro, no es una cantidad vectorial única, sino un conjunto *infinito* de cantidades vectoriales, cada una de las cuales está asociada con un punto del espacio. Este es un ejemplo de **campo vectorial**. En la figura 21.18 se ilustran algunos de los vectores del campo producidos por una carga puntual positiva o negativa. Si usamos un sistema de coordenadas rectangulares (x, y, z), cada componente de $\vec{E}$ en cualquier punto en general es función de las coordenadas (x, y, z) del punto. Dichas funciones se representan como $E_x(x, y, z)$, $E_y(x, y, z)$ y $E_z(x, y, z)$. Los campos vectoriales son parte importante del lenguaje de la física, no solo en la electricidad y el magnetismo. Un ejemplo cotidiano de campo vectorial es la velocidad $\vec{v}$ de las corrientes de viento; la magnitud y la dirección de $\vec{v}$, y por lo tanto las de sus componentes vectoriales, varían de un punto a otro en la atmósfera.

En ciertas situaciones, la magnitud y la dirección del campo (así como sus componentes vectoriales) tienen los mismos valores en cualquier parte de una región determinada; en tal caso, se dice que el campo es *uniforme* en esa región. Un ejemplo importante de esto es el campo eléctrico dentro de un *conductor*: si existe un campo eléctrico dentro de un conductor, el campo ejerce una fuerza sobre todas las cargas en el conductor, lo cual da a las cargas libres un movimiento neto. Por definición, una situación electrostática es aquella donde las cargas *no* tienen movimiento neto. De lo anterior se concluye que *en electrostática, el campo eléctrico en cada punto dentro del material de un conductor debe ser igual a cero*. (Observe que no se dice que el campo sea necesariamente cero en un *agujero* dentro de un conductor).

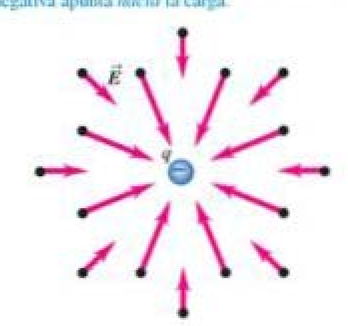
En resumen, nuestra descripción de las interacciones eléctricas tiene dos partes. La primera es que una distribución de carga actúa como una fuente del campo eléctrico. La segunda es que el campo eléctrico ejerce una fuerza sobre cualquier carga presente en el campo. Con frecuencia, nuestro análisis tiene dos etapas correspondientes: primero se calcula el campo generado por la distribución de carga de una fuente; y en segundo lugar, se examina el efecto del campo en términos de fuerza y movimiento. En el segundo paso a menudo se consideran las leyes de Newton y los principios de las interacciones eléctricas. En la siguiente sección, veremos cómo calcular campos originados por varias distribuciones de una fuente; pero primero se presentan tres ejemplos de cálculo del campo debido a una carga puntual, y de la obtención de la fuerza sobre una carga debida a un campo determinado $\vec{E}$.

21.18 Una carga puntual q produce un campo eléctrico $\vec{E}$ en *todos* los puntos del espacio. La intensidad del campo disminuye conforme la distancia aumenta.

a) El campo producido por una carga puntual positiva apunta en una dirección que se *aleja* de la carga.



b) El campo producido por una carga puntual negativa apunta *hacia* la carga.





Ejemplo 21.5 Magnitud del campo eléctrico para una carga puntual

¿Cuál es la magnitud del campo eléctrico $\vec{E}$ en un punto situado a 2.0 m de una carga puntual $q = 4.0$ nC?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: El problema se refiere a un campo eléctrico debido a una carga puntual. Se dan la magnitud de la carga y la distan-

Continúa

cia de la carga al punto del campo, por lo que usamos la ecuación (21.6) para calcular la magnitud E del campo.

EJECUTAR: De acuerdo con la ecuación (21.6),

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{|q|}{r^2} = (9.0 \times 10^9\ \text{N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2)\frac{4.0 \times 10^{-9}\ \text{C}}{(2.0\ \text{m})^2}$$
$$= 9.0\ \text{N/C}$$

EVALUAR: Nuestro resultado $E = 9.0$ N/C significa que si colocamos una carga de 1.0 C en un punto a 2.0 m de q, experimentaría una fuerza de 9.0 N. La fuerza sobre una carga de 2.0 C en ese punto sería (2.0 C)(9.0 N/C) = 18 N, y así sucesivamente.



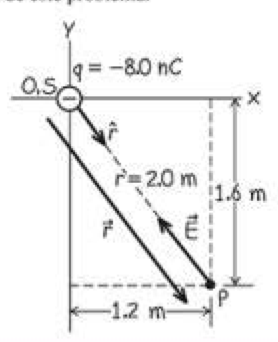
Ejemplo 21.6 Vector del campo eléctrico de una carga puntual

Una carga puntual $q = -8.0$ nC se localiza en el origen. Obtenga el vector del campo eléctrico en el punto del campo $x = 1.2$ m, $y = -1.6$ m.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Se debe calcular el *vector* del campo eléctrico $\vec{E}$ debido a una carga puntual. En la figura 21.19 se muestra el esquema. Se usa la ecuación (21.7); para ello, se debe obtener la distancia r que hay entre el punto de la fuente S (la posición de la carga q, que en este ejemplo está en el origen O) y el punto P del campo, así como una expresión para el vector unitario $\hat{r} = \vec{r}/r$ que tiene la dirección de S a P.

21.19 Esquema de este problema.



EJECUTAR: La distancia de S a P es

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(1.2\ \text{m})^2 + (-1.6\ \text{m})^2} = 2.0\ \text{m}$$

El vector unitario $\hat{r}$ es, entonces,

$$\hat{r} = \frac{\vec{r}}{r} = \frac{x\hat{\imath} + y\hat{\jmath}}{r}$$
$$= \frac{(1.2\ \text{m})\hat{\imath} + (-1.6\ \text{m})\hat{\jmath}}{2.0\ \text{m}} = 0.60\hat{\imath} - 0.80\hat{\jmath}$$

Luego, aplicando la ecuación (21.7),

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2}\hat{r}$$
$$= (9.0 \times 10^9\ \text{N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2)\frac{(-8.0 \times 10^{-9}\ \text{C})}{(2.0\ \text{m})^2}(0.60\hat{\imath} - 0.80\hat{\jmath})$$
$$= (-11\ \text{N/C})\hat{\imath} + (14\ \text{N/C})\hat{\jmath}$$

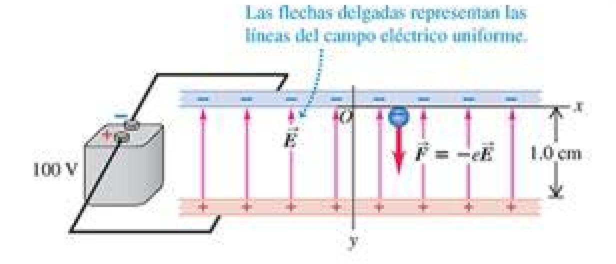
EVALUAR: Como q es negativa, $\vec{E}$ tiene una dirección que va del punto del campo a la carga (el punto de la fuente), en dirección opuesta a $\hat{r}$ (compare la situación con la figura 21.17*c*). El cálculo de la magnitud y la dirección de $\vec{E}$ se deja al lector (véase el ejercicio 21.36).



Ejemplo 21.7 Un electrón en un campo uniforme

Cuando las terminales de una batería se conectan a dos placas conductoras paralelas con un pequeño espacio entre ellas, las cargas resultantes sobre las placas originan un campo eléctrico aproximadamente uniforme $\vec{E}$ entre las placas. (En la siguiente sección veremos la razón de esta uniformidad). Si las placas están separadas por 1.0 cm y se conectan a una batería de 100 volts, como se muestra en la figura 21.20, el campo apunta verticalmente hacia arriba y tiene una magnitud $E = 1.00 \times 10^4$ N/C. *a*) Si un electrón (con carga $-e = -1.60 \times 10^{-19}$ C, masa $m = 9.11 \times 10^{-31}$ kg) en reposo se libera en la placa superior, ¿cuál es su aceleración? *b*) ¿Qué rapidez y qué energía cinética adquiere cuando viaja 1.0 cm hacia la placa inferior? *c*) ¿Cuánto tiempo se requiere para recorrer esa distancia?

21.20 Campo eléctrico uniforme entre dos placas conductoras paralelas conectadas a una batería de 100 volts. (En esta figura, la separación de las placas se exageró en relación con las dimensiones de las placas).



SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Este ejemplo implica la relación entre campo eléctrico y fuerza eléctrica. También implica la relación entre fuerza y aceleración, la definición de energía cinética, y las relaciones cinemáticas entre aceleración, distancia, velocidad y tiempo. La figura 21.20 muestra el sistema de coordenadas. Se da el campo eléctrico, por lo que se utiliza la ecuación (21.4) para calcular la fuerza sobre el electrón, y la segunda ley de Newton para obtener su aceleración. Como el campo es uniforme, la fuerza es constante y se pueden usar las fórmulas de aceleración constante del capítulo 2, del volumen 1, para calcular la velocidad del electrón y el tiempo de su recorrido. La energía cinética se determina mediante $K = \frac{1}{2}mv^2$.

EJECUTAR: *a*) Aun cuando $\vec{E}$ está dirigido hacia arriba (en la dirección positiva del eje *y*), $\vec{F}$ va hacia abajo porque la carga del electrón es negativa; por ello, F_y es negativa. Como F_y es constante, la aceleración del electrón es constante:

$$a_y = \frac{F_y}{m} = \frac{-eE}{m} = \frac{(-1.60 \times 10^{-19}\ \text{C})(1.00 \times 10^4\ \text{N/C})}{9.11 \times 10^{-31}\ \text{kg}}$$
$$= -1.76 \times 10^{15}\ \text{m/s}^2$$

b) El electrón parte del reposo, por lo que se mueve solo en la dirección del eje *y* (la dirección de la aceleración). Podemos encontrar la rapidez del electrón en cualquier posición *y* usando la fórmula de aceleración constante, es decir, la ecuación (2.13), $v_y^2 = v_{0y}^2 + 2a_y(y - y_0)$. Sabemos que $v_{0y} = 0$ y $y_0 = 0$, por lo que en $y = -1.0$ cm $= -1.0 \times 10^{-2}$ m tenemos

$$|v_y| = \sqrt{2a_y y} = \sqrt{2(-1.76 \times 10^{15}\ \text{m/s}^2)(-1.0 \times 10^{-2}\ \text{m})}$$
$$= 5.9 \times 10^6\ \text{m/s}$$

La velocidad es hacia abajo, de manera que $v_y = -5.9 \times 10^6$ m/s. La energía cinética del electrón es

$$K = \tfrac{1}{2}mv^2 = \tfrac{1}{2}(9.11 \times 10^{-31}\ \text{kg})(5.9 \times 10^6\ \text{m/s})^2$$
$$= 1.6 \times 10^{-17}\ \text{J}$$

c) De acuerdo con la ecuación (2.8) para aceleración constante, $v_y = v_{0y} + a_y t$.

$$t = \frac{v_y - v_{0y}}{a_y} = \frac{(-5.9 \times 10^6\ \text{m/s}) - (0\ \text{m/s})}{-1.76 \times 10^{15}\ \text{m/s}^2}$$
$$= 3.4 \times 10^{-9}\ \text{s}$$

EVALUAR: Este ejemplo muestra que en los problemas relacionados con partículas subatómicas como los electrones, hay muchas cantidades, incluyendo aceleración, rapidez, energía cinética y tiempo, que tienen valores *muy* diferentes de los que vemos en objetos comunes y cotidianos, como las pelotas de béisbol o los automóviles.

Evalúe su comprensión de la sección 21.4 *a*) Una carga puntual negativa se mueve a lo largo de una trayectoria recta directamente hacia una carga puntual positiva estacionaria. ¿Qué característica(s) de la fuerza eléctrica sobre la carga puntual negativa permanecerán constantes a medida que se mueve? **i.** magnitud; **ii.** dirección; **iii.** tanto la magnitud como la dirección; **iv.** ni la magnitud ni la dirección. *b*) Una carga puntual negativa se desplaza a lo largo de una órbita circular, alrededor de una carga puntual positiva. ¿Qué característica(s) de la fuerza eléctrica sobre la carga puntual negativa permanecerán constantes a medida que se mueve? **i.** magnitud; **ii.** dirección; **iii.** tanto la magnitud como la dirección; **iv.** ni la magnitud ni la dirección. ❙

MP

21.5 Cálculos de campos eléctricos

La ecuación (21.7) da el campo eléctrico generado por una sola carga puntual. Sin embargo, en la mayoría de las situaciones reales que implican campos y fuerzas eléctricos, la carga está *distribuida* en el espacio. Las varillas de plástico y de vidrio cargadas de la figura 21.1 tienen la carga eléctrica distribuida sobre sus superficies, igual que el tambor formador de imágenes en una impresora láser (figura 21.2). En esta sección aprenderemos a calcular los campos eléctricos causados por varias distribuciones de carga eléctrica. Los cálculos de esta clase tienen una importancia enorme para las aplicaciones tecnológicas de las fuerzas eléctricas. Para determinar las trayectorias de los núcleos atómicos en un acelerador utilizado en radioterapia contra el cáncer, o de las partículas cargadas en un dispositivo electrónico semiconductor, se tiene que conocer la naturaleza detallada del campo eléctrico que actúa sobre las cargas.

MasteringPHYSICS

ActivPhysics 11.5: Electric Field Due to a Dipole
ActivPhysics 11.6: Electric Field: Problems

Superposición de campos eléctricos

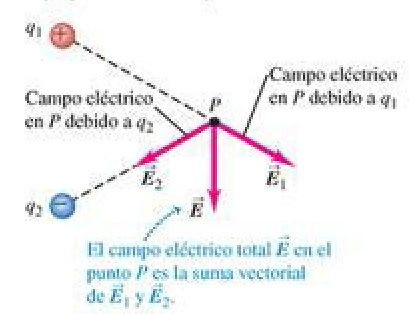
Para obtener el campo originado por una distribución de carga, imaginamos que está constituida por muchas cargas puntuales $q_1, q_2, q_3, \ldots$ (Se trata de una concepción muy realista, pues hemos visto que la carga es transportada por electrones y protones, tan pequeños que casi parecen puntos). En cualquier punto *P* dado, cada carga puntual produce su propio campo eléctrico $\vec{E}_1, \vec{E}_2, \vec{E}_3$, por lo que una carga de prueba q_0 colocada en *P* experimenta una fuerza $\vec{F}_1 = q_0\vec{E}_1$ de la carga q_1, una fuerza $\vec{F}_2 = q_0\vec{E}_2$ de la carga q_2, y así sucesivamente. De acuerdo con el principio de superposición de fuerzas que se estudió en la sección 21.3, la fuerza *total* $\vec{F}_0$ que la distribución de carga ejerce sobre q_0 es la suma vectorial de estas fuerzas individuales:

$$\vec{F}_0 = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \cdots = q_0\vec{E}_1 + q_0\vec{E}_2 + q_0\vec{E}_3 + \cdots$$

El efecto combinado de todas las cargas en la distribución se describe por el campo eléctrico *total* $\vec{E}$ en el punto *P*. A partir de la definición de campo eléctrico, ecuación (21.3), esto es

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}_0}{q_0} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 + \cdots$$

21.21 Ilustración del principio de superposición de campos eléctricos.



El campo eléctrico total en P es la suma vectorial de los campos en P debidos a cada carga puntual de la distribución de carga (figura 21.21). Este es el **principio de superposición de campos eléctricos**.

Cuando la carga está distribuida a lo largo de una línea, sobre una superficie o a través de un volumen, son muy útiles algunos términos adicionales. Para una distribución de carga lineal (como la de una varilla de plástico cargada, larga y delgada), usamos λ (letra griega lambda) para representar la **densidad de carga lineal** (carga por unidad de longitud, medida en C/m). Cuando la carga está distribuida sobre una superficie (como la del tambor que forma las imágenes de una impresora láser), se usa σ (sigma) para representar la **densidad de carga superficial** (carga por unidad de área, medida en C/m^2). Y cuando la carga se distribuye a través de un volumen, se usa ρ (rho) para representar la **densidad de carga volumétrica** (carga por unidad de volumen, C/m^3).

En los ejemplos que siguen, algunos de los cálculos tal vez parezcan intrincados, pero una vez que usted haya trabajado con los ejemplos paso a paso, el proceso resultará más sencillo. En el capítulo 28 usaremos muchas de las técnicas de cálculo de estos ejemplos para determinar los campos *magnéticos* que producen las cargas en movimiento.

Estrategia para resolver problemas 21.2 Cálculos del campo eléctrico



IDENTIFICAR *los conceptos relevantes:* Utilice el principio de superposición para calcular el campo eléctrico debido a una distribución de carga discreta o continua.

PLANTEAR *el problema* siguiendo los pasos que se listan a continuación:
1. Elabore un dibujo que muestre las ubicaciones de las cargas y sus ejes de coordenadas elegidos.
2. Indique en el dibujo la posición del *punto del campo P* (el punto donde se desea calcular el campo eléctrico $\vec{E}$).

EJECUTAR *la solución*, como sigue:
1. Use unidades consistentes. Las distancias deben estar en metros y las cargas en coulombs. Si se dan en centímetros o nanocoulombs, no olvide hacer la conversión.
2. Identifique el punto fuente S y el punto del campo P. El campo producido por una carga puntual siempre apunta de S a P si la carga es positiva, y de P a S si la carga es negativa.
3. Use la *suma* vectorial al aplicar el principio de superposición; repase el procedimiento de suma vectorial del capítulo 1 del volumen 1 si es necesario.
4. Simplifique sus cálculos aprovechando cualquier simetría en la distribución de carga.
5. Si la distribución de carga es continua, defina un pequeño elemento de carga que se pueda considerar como un punto, obtenga su campo eléctrico en P, y encuentre una manera de sumar los campos de todos los elementos de carga usando una integral. Por lo regular, es más fácil hacer esto por separado para cada componente de $\vec{E}$ de manera que tal vez sea necesario evaluar más de una integral. Asegúrese de que los límites de sus integrales son correctos; especialmente cuando existe simetría, no considere una carga dos veces.

EVALUAR *su respuesta:* Compruebe que la dirección de $\vec{E}$ ea razonable. Si el resultado para la magnitud del campo eléctrico E es función de la posición (por ejemplo, la coordenada x), verifique el resultado en un límite para el que se sepa cuál debería ser la magnitud. Cuando sea posible, verifique la respuesta obteniéndola de una forma diferente.

Ejemplo 21.8 Campo de un dipolo eléctrico



Dos cargas puntuales $q_1 = +12$ nC y $q_2 = -12$ nC están separadas por una distancia de 0.100 m (figura 21.22). (Estos pares de cargas puntuales de igual magnitud y signos opuestos se denominan *dipolos eléctricos*). Calcule el campo eléctrico debido a q_1, el campo debido a q_2, y el campo total: *a*) en el punto a; *b*) en el punto b, y *c*) en el punto c.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Se necesita encontrar el campo eléctrico total, en diferentes puntos, originado por dos cargas puntuales. Usaremos el principio de superposición: $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$. En la figura 21.22 se muestra el sistema de coordenadas y las ubicaciones de los puntos del campo, a, b y c.

EJECUTAR: En cada punto del campo, $\vec{E}$ depende de $\vec{E}_1$ y $\vec{E}_2$ primero calculamos las magnitudes E_1 y E_2 en cada punto del campo. En a, la magnitud del campo $\vec{E}_{1a}$ debido a q_1 es

$$E_{1a} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{|q_1|}{r^2} = (9.0 \times 10^9\ \text{N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2)\frac{12 \times 10^{-9}\ \text{C}}{(0.060\ \text{m})^2}$$

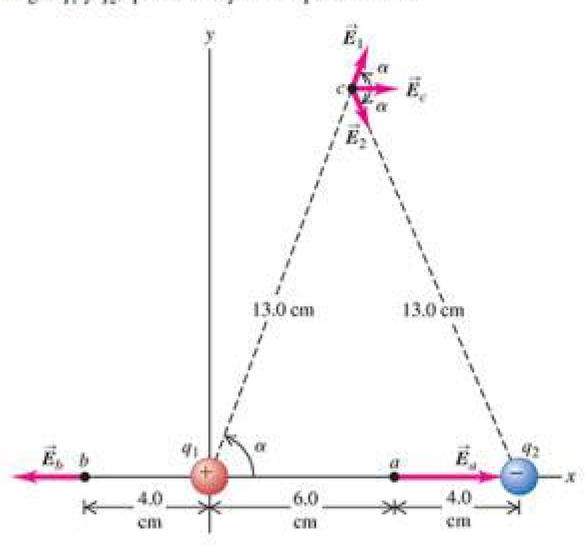
$$= 3.0 \times 10^4\ \text{N/C}$$

Las otras magnitudes se calculan de manera similar. Los resultados son

$$E_{1a} = 3.0 \times 10^4\ \text{N/C} \qquad E_{1b} = 6.8 \times 10^4\ \text{N/C}$$
$$E_{1c} = 6.39 \times 10^3\ \text{N/C}$$
$$E_{2a} = 6.8 \times 10^4\ \text{N/C} \qquad E_{2b} = 0.55 \times 10^4\ \text{N/C}$$
$$E_{2c} = E_{1c} = 6.39 \times 10^3\ \text{N/C}$$

Las *direcciones* de los campos correspondientes se *alejan*, en todos los casos, de la carga positiva q_1, y van *hacia* la carga negativa q_2.

21.22 Campo eléctrico en tres puntos, a, b y c, originado por las cargas q_1 y q_2, que constituyen un dipolo eléctrico.



a) En el punto a, $\vec{E}_{1a}$ y $\vec{E}_{2a}$ están dirigidos hacia la derecha; por lo tanto,

$$\vec{E}_a = E_{1a}\hat{\imath} + E_{2a}\hat{\imath} = (9.8 \times 10^4 \text{ N/C})\hat{\imath}$$

b) En el punto b, $\vec{E}_{1b}$ está dirigido hacia la izquierda y $\vec{E}_{2b}$ está dirigido hacia la derecha; por lo tanto,

$$\vec{E}_b = -E_{1b}\hat{\imath} + E_{2b}\hat{\imath} = (-6.2 \times 10^4 \text{ N/C})\hat{\imath}$$

c) La figura 21.22 muestra la dirección de $\vec{E}_1$ y $\vec{E}_2$ en el punto c. Ambos vectores tienen la misma componente x:

$$E_{1cx} = E_{2cx} = E_{1c}\cos\alpha = (6.39 \times 10^3 \text{ N/C})\left(\tfrac{5}{13}\right)$$
$$= 2.46 \times 10^3 \text{ N/C}$$

Por simetría, E_{1y} y E_{2y} son iguales y opuestas; por lo tanto, su suma es igual a cero. Así,

$$\vec{E}_c = 2(2.46 \times 10^3 \text{ N/C})\hat{\imath} = (4.9 \times 10^3 \text{ N/C})\hat{\imath}$$

EVALUAR: También podemos obtener $\vec{E}_c$ usando la ecuación (21.7) para el campo de una carga puntual. El vector desplazamiento $\vec{r}_1$ desde q_1 hasta el punto c, es $\vec{r}_1 = r\cos\alpha\hat{\imath} + r\,\text{sen}\,\alpha\hat{\jmath}$. Entonces, el vector unitario que va de q_1 a c es $\hat{r}_1 = \vec{r}_1/r = \cos\alpha\hat{\imath} + \text{sen}\,\alpha\hat{\jmath}$. Por simetría, el vector unitario que va de q_2 al punto c tiene la componente x opuesta pero la misma componente y: $\hat{r}_2 = -\cos\alpha\hat{\imath} + \text{sen}\,\alpha\hat{\jmath}$. Ahora podemos usar la ecuación (21.7) para representar los campos $\vec{E}_{1c}$ y $\vec{E}_{2c}$ en c en forma vectorial, para obtener su suma. Como $q_2 = -q_1$ y la distancia de r a c es la misma para ambas cargas,

$$\vec{E}_c = \vec{E}_{1c} + \vec{E}_{2c} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1}{r^2}\hat{r}_1 + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_2}{r^2}\hat{r}_2$$
$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^2}(q_1\hat{r}_1 + q_2\hat{r}_2) = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r^2}(\hat{r}_1 - \hat{r}_2)$$
$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1}{r^2}(2\cos\alpha\hat{\imath})$$
$$= 2(9.0 \times 10^9 \text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2)\frac{12 \times 10^{-9}\text{ C}}{(0.13\text{ m})^2}\left(\tfrac{5}{13}\right)\hat{\imath}$$
$$= (4.9 \times 10^3 \text{ N/C})\hat{\imath}$$

Esto es lo mismo que se calculó en el inciso *c*).

Ejemplo 21.9 Campo de un anillo con carga

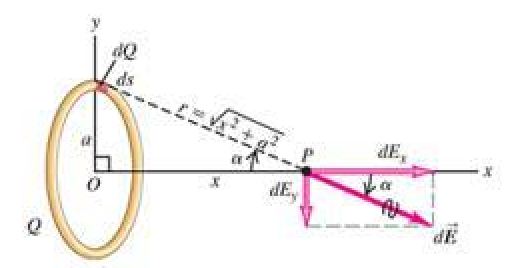


La carga Q está distribuida de manera uniforme alrededor de un anillo de radio a (figura 21.23). Calcule el campo eléctrico en el punto P, que se localiza sobre el eje del anillo a una distancia x del centro.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Este es un problema de superposición de campos eléctricos. Cada elemento de carga alrededor del anillo produce un campo eléctrico en un punto arbitrario sobre el eje x; nuestra incógnita es el campo total en este punto debido a todos los elementos de carga.

21.23 Cálculo del campo eléctrico sobre el eje de un anillo cargado. En esta figura, se considera que la carga es positiva.



EJECUTAR: Se divide el anillo en segmentos infinitesimales de longitud ds como se muestra en la figura 21.23. En términos de la densidad de carga lineal $\lambda = Q/2\pi a$, la carga en un segmento de longitud ds es $dQ = \lambda ds$. Considere dos segmentos idénticos, uno como el que se muestra en la figura en $y = a$ y otro aproximadamente a la mitad del anillo en $y = -a$. En el ejemplo 21.4 vimos que la fuerza neta $d\vec{F}$ que ejercen sobre una carga puntual de prueba y, por lo tanto, su campo neto $d\vec{E}$, tienen una dirección a lo largo del eje x. Lo mismo se aplica para cualquier par de segmentos alrededor del anillo, de modo que el campo *neto* en P se encuentra a lo largo del eje x: $\vec{E} = E_x\hat{\imath}$.

Para calcular E_x, se observa que el cuadrado de la distancia r de un segmento de anillo al punto P es $r^2 = x^2 + a^2$. De manera que la magnitud de la contribución de este segmento $d\vec{E}$ al campo eléctrico en P es

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{dQ}{x^2 + a^2}$$

La componente x de este campo es $dE_x = dE\cos\alpha$. Sabemos que $dQ = \lambda ds$ y la figura 21.23 muestra que $\cos\alpha = x/r = x/(x^2 + a^2)^{1/2}$, entonces

$$dE_x = dE\cos\alpha = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{dQ}{x^2 + a^2}\frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}}$$
$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\lambda x}{(x^2 + a^2)^{3/2}}ds$$

Continúa

Para obtener E_x, se integra esta expresión a lo largo del anillo completo, es decir, para s de 0 a $2\pi a$ (la circunferencia del anillo). El integrando tiene el mismo valor para todos los puntos del anillo, de modo que se puede sacar de la integral. Entonces tenemos

$$E_x = \int dE_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\lambda x}{(x^2 + a^2)^{3/2}}\int_0^{2\pi a} ds$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\lambda x}{(x^2 + a^2)^{3/2}}(2\pi a)$$

$$\vec{E} = E_x\hat{\imath} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Qx}{(x^2 + a^2)^{3/2}}\hat{\imath} \qquad (21.8)$$

EVALUAR: La ecuación (21.8) muestra que $\vec{E} = \mathbf{0}$ en el centro del anillo ($x = 0$). Esto tiene sentido; las cargas en los lados opuestos del anillo empujarían en direcciones opuestas a una carga prueba situada en el centro, y la suma vectorial de cada par de fuerzas es cero. Cuando el punto P del campo se encuentra mucho más lejos del anillo que el radio de este, tenemos que $x \gg a$, y el denominador de la ecuación (21.8) toma un valor cercano a x^3. En este límite el campo eléctrico en P es

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{x^2}\hat{\imath}$$

Es decir, cuando el anillo está tan lejos que el tamaño de su radio es despreciable en comparación con la distancia x, su campo es el mismo que el de una carga puntual.



Ejemplo 21.10 Campo de una línea de carga

Una carga eléctrica, Q, positiva está distribuida de manera uniforme a lo largo del eje y entre $y = -a$ y $y = +a$. Calcule el campo eléctrico en el punto P sobre el eje x, a una distancia x del origen.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: La figura 21.24 describe la situación. Al igual que en el ejemplo 21.9, debemos calcular el campo eléctrico debido a una distribución continua de la carga. Nuestra incógnita es una expresión para el campo eléctrico en P como una función de x. El eje x es el bisector perpendicular del segmento, por lo que, podemos utilizar un argumento de simetría.

EJECUTAR: Se divide la línea de carga de longitud $2a$ en segmentos infinitesimales de longitud dy. La densidad de carga lineal es $\lambda = Q/2a$, y la carga en un segmento es $dQ = \lambda dy = (Q/2a)dy$. La distancia r entre un segmento a una altura y y el punto P del campo es $r = (x^2 + y^2)^{1/2}$, de modo que la magnitud del campo en P debido al segmento a la altura y es

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{dQ}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{2a}\frac{dy}{(x^2 + y^2)}$$

La figura 21.24 muestra que las componentes x y y de este campo son $dE_x = dE\cos\alpha$ y $dE_y = -dE\,\text{sen}\,\alpha$, donde $\cos\alpha = x/r$ y $\text{sen}\,\alpha = y/r$. Entonces,

$$dE_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{2a}\frac{x\,dy}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$$

$$dE_y = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{2a}\frac{y\,dy}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$$

Para determinar el campo total en P, se deben sumar los campos de todos los segmentos a lo largo de la línea, es decir, debemos integrar de $y = -a$ a $y = +a$. Se invita al lector a trabajar los detalles de la integración (para lo cual le sería de utilidad una tabla de integrales). Los resultados son

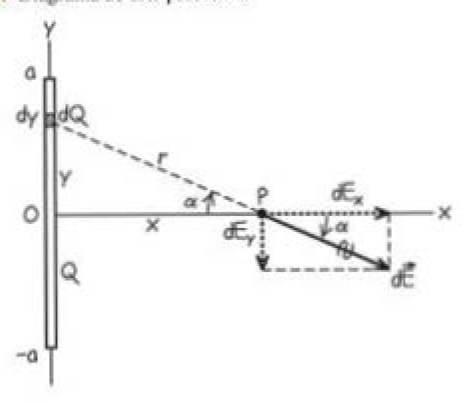
$$E_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{2a}\int_{-a}^{+a}\frac{x\,dy}{(x^2 + y^2)^{3/2}} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{x\sqrt{x^2 + a^2}}$$

$$E_y = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{2a}\int_{-a}^{+a}\frac{y\,dy}{(x^2 + y^2)^{3/2}} = 0$$

o, en forma vectorial,

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{x\sqrt{x^2 + a^2}}\hat{\imath} \qquad (21.9)$$

21.24 Diagrama de este problema.



$\vec{E}$ se aleja de la línea de carga si λ es positiva, y se acerca si λ es negativa.

EVALUAR: Usando un argumento de simetría como el que se utilizó en el ejemplo 21.9, habríamos deducido que E_y sería igual a cero; si se coloca una carga prueba positiva en P, la mitad superior de la línea de carga empuja hacia abajo de ella, y la mitad inferior empuja hacia arriba con igual magnitud. La simetría también nos dice que las mitades superior e inferior del segmento contribuyen por partes iguales al campo total en P.

Si el segmento es muy *pequeño* (o el punto del campo está muy lejos del segmento) de modo que $x \gg a$, se puede despreciar a en el denominador de la ecuación (21.9). Entonces, el campo se vuelve igual al de la carga puntual como en el ejemplo 21.9:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{x^2}\hat{\imath}$$

Para ver qué pasa si el segmento es muy *largo* (o el punto del campo está muy cerca de él) de modo que $a \gg x$, primero replanteamos ligeramente la ecuación (21.9):

$$\vec{E} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0}\frac{\lambda}{x\sqrt{(x^2/a^2) + 1}}\hat{\imath} \qquad (21.10)$$

En el límite $a \gg x$, podemos despreciar x^2/a^2 en el denominador de la ecuación (21.10), de manera que,

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 x}\hat{\imath}$$

Este es el campo de una línea de carga *infinitamente larga*. En cualquier punto *P*, a una distancia perpendicular *r* de la línea en *cualquier* dirección, $\vec{E}$ tiene la magnitud

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \qquad \text{(línea infinita de carga)}$$

Observe que este campo es proporcional a $1/r$, y no a $1/r^2$ como fue el caso de una carga puntual.

En la naturaleza no existe en realidad nada como una línea infinita de carga; no obstante, cuando el punto del campo está suficientemente cerca de la línea, hay muy poca diferencia entre el resultado para una línea infinita y el caso finito de la vida real. Por ejemplo, si la distancia *r* del punto del campo al centro de la línea es del 1% de la longitud de esta, el valor de *E* difiere menos del 0.02% del valor para la longitud infinita.

Ejemplo 21.11 Campo de un disco con carga uniforme



Un disco no conductor de radio *R* tiene una densidad de carga superficial positiva y uniforme, σ. Calcule el campo eléctrico en un punto sobre el eje del disco a una distancia *x* de su centro. Suponga que *x* es positiva.

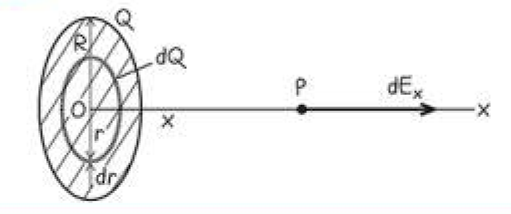
SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: En la figura 21.25 se muestra el esquema. Se representa la distribución de carga como un conjunto de anillos concéntricos de carga *dQ*. En el ejemplo 21.9 se obtuvo la ecuación (21.8) para el campo sobre el eje de un anillo cargado de manera uniforme, por lo que todo lo que tenemos que hacer es sumar las contribuciones de cada uno de los anillos.

EJECUTAR: Un anillo tiene una carga *dQ*, radio interior *r* y radio exterior $r + dr$. Su área es aproximadamente igual a su ancho *dr* multiplicado por su circunferencia $2\pi r$, o $dA = 2\pi r\, dr$. La carga por unidad de área es $\sigma = dQ/dA$, por lo que la carga del anillo es $dQ = \sigma dA = 2\pi\sigma r\, dr$. Se utiliza *dQ* en lugar de *Q* en la ecuación (21.8), que es la expresión para el campo debido a un anillo que se obtuvo en el ejemplo 21.9, y se sustituye el radio *a* del anillo por *r*. Entonces, la componente del campo dE_x en el punto *P* debido a este anillo es

$$dE_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{2\pi\sigma r x\, dr}{(x^2 + r^2)^{3/2}}$$

21.25 Diagrama para este problema.



Para calcular el campo total debido a todos los anillos, se integra dE_x para *r*, desde $r = 0$ hasta $r = R$ (*no* desde $-R$ hasta *R*):

$$E_x = \int_0^R \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{(2\pi\sigma r\, dr)x}{(x^2 + r^2)^{3/2}} = \frac{\sigma x}{4\epsilon_0}\int_0^R \frac{2r\, dr}{(x^2 + r^2)^{3/2}}$$

La integral se evalúa haciendo la sustitución $t = x^2 + r^2$ (lo que produce $dt = 2r\, dr$); se invita al lector a que trabaje en los detalles. El resultado es

$$E_x = \frac{\sigma x}{2\epsilon_0}\left[-\frac{1}{\sqrt{x^2 + R^2}} + \frac{1}{x}\right]$$

$$= \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\left[1 - \frac{1}{\sqrt{(R^2/x^2) + 1}}\right] \qquad (21.11)$$

EVALUAR: Si el disco es muy grande (o si estamos muy cerca de él), de modo que $R \gg x$, entonces, el término $1/\sqrt{(R^2/x^2) + 1}$ en la ecuación (21.11) es mucho menor que 1. Así, la ecuación (21.11) se convierte en

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \qquad (21.12)$$

El resultado final no incluye la distancia *x* desde el plano. Por lo tanto, el campo eléctrico producido por una lámina cargada, plana e *infinita*, es *independiente de su distancia a la lámina*. La dirección del campo es perpendicular en cualquier parte de la lámina y se aleja de esta. No existe nada como una lámina infinita de carga, pero si las dimensiones de la lámina son mucho mayores que la distancia *x* del punto del campo *P* a la lámina, el campo está muy cerca de lo que se obtiene con la ecuación (21.12).

Si *P* está a la *izquierda* del plano ($x < 0$), el resultado es el mismo, excepto que la dirección de $\vec{E}$ es hacia la izquierda y no hacia la derecha. Si la densidad de carga superficial es negativa, la dirección de los campos en ambos lados del plano es hacia este, en lugar de alejarse de él.

Ejemplo 21.12 Campo de dos láminas infinitas con carga opuesta



Se colocan dos láminas infinitas y planas con densidades superficiales de carga uniforme $+\sigma$ y $-\sigma$, paralelas entre sí, separadas una distancia *d* (figura 21.26). Calcule el campo eléctrico entre las dos láminas, arriba de la lámina superior y debajo de la lámina inferior.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: La ecuación (21.12) proporciona el campo eléctrico debido a una sola lámina cargada, plana e infinita. Para calcular el campo eléctrico debido a estas *dos* láminas, combinamos los campos usando el principio de superposición (figura 21.26).

21.26 Cálculo del campo eléctrico debido a dos láminas infinitas con cargas opuestas. Se presenta la vista de las láminas desde el borde; ¡solo es posible ver una parte de las láminas infinitas!

y

$\vec{E}_1$ $\vec{E}_2$ $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = 0$

Lámina 2 $-\sigma$ x

d $\vec{E}_1$ $\vec{E}_2$ $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$

Lámina 1 $+\sigma$

$\vec{E}_1$ $\vec{E}_2$ $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = 0$

Continúa

EJECUTAR: De la ecuación (21.12), tanto $\vec{E}_1$ como $\vec{E}_2$ tienen la misma magnitud en todos los puntos, sin importar la distancia a cualquiera de las láminas:

$$E_1 = E_2 = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

Como se vio en el ejemplo 21.11, la dirección de $\vec{E}_1$ en cualquier parte se aleja de la lámina 1, y la dirección de $\vec{E}_2$ en cualquier parte va hacia la lámina 2.

Entre las láminas, $\vec{E}_1$ y $\vec{E}_2$ se refuerzan uno con otro; arriba de la lámina superior y abajo de la lámina inferior, se cancelan uno con otro. Por lo tanto, el campo total es

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \begin{cases} \mathbf{0} & \text{arriba de la lámina superior} \\ \dfrac{\sigma}{\epsilon_0}\hat{j} & \text{entre las láminas} \\ \mathbf{0} & \text{abajo de la lámina inferior} \end{cases}$$

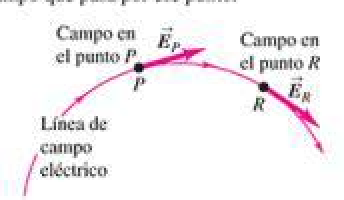
EVALUAR: Como las láminas se consideran infinitas, el resultado no depende de la separación d, y muestra que el campo entre láminas con cargas opuestas es esencialmente uniforme si la separación es mucho más pequeña que las dimensiones de las láminas. En realidad, ya usamos este resultado en el ejemplo 21.7 (sección 21.4).

CUIDADO **Los campos eléctricos no "fluyen"** Quizás usted haya pensado que el campo $\vec{E}_1$ de la lámina 1 es incapaz de "penetrar" la lámina 2, y que el campo $\vec{E}_2$ generado por la hoja 2 es incapaz de "penetrar" la hoja 1. Esta sería la conclusión si el campo eléctrico se considerara como una sustancia física que "fluye" hacia las cargas o desde ellas. Pero en realidad no hay tal sustancia, y los campos eléctricos $\vec{E}_1$ y $\vec{E}_2$ tan solo dependen de las distribuciones individuales de cargas que los crean. El campo *total* en todos los puntos es exactamente la suma vectorial de $\vec{E}_1$ y $\vec{E}_2$.

Evalúe su comprensión de la sección 21.5 Suponga que la línea de carga de la figura 21.25 (ejemplo 21.11) tuviera una carga $+Q$ distribuida de manera uniforme entre $y = 0$ y $y = +a$, y tuviera una carga $-Q$ con distribución uniforme entre $y = 0$ y $y = -a$. En esta situación, el campo eléctrico en P estaría **i.** en la dirección $+x$; **ii.** en la dirección $-x$; **iii.** en la dirección $+y$; **iv.** en la dirección $-y$; **v.** sería igual a cero; **vi.** ninguna de las anteriores.



21.6 Líneas de campo eléctrico



21.27 La dirección del campo eléctrico en un punto cualquiera es tangente a la línea de campo que pasa por ese punto.



PhET: Charges and Fields
PhET: Electric Field of Dreams
PhET: Electric Field Hockey

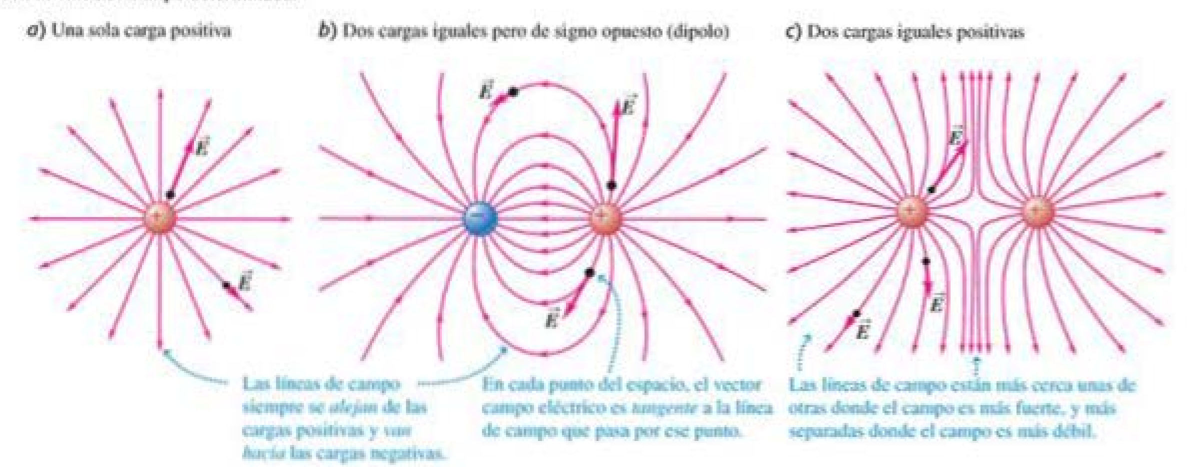
El concepto de campo eléctrico es un tanto elusivo debido a que ningún campo eléctrico puede verse directamente. Para visualizarlo, las *líneas* de campo eléctrico son de gran ayuda y lo hace parecer más real. Una **línea de campo eléctrico** es una recta o curva imaginaria trazada a través de una región del espacio, de modo que sea tangente a cualquier punto que esté en la dirección del vector del campo eléctrico en dicho punto. La figura 21.27 ilustra la idea básica. (Utilizamos un concepto similar en el análisis del movimiento de fluidos en la sección 12.5. La *línea de corriente* en un fluido es una recta o curva, cuya tangente en cualquier punto está en dirección de la velocidad del fluido en dicho punto. Sin embargo, la similitud entre las líneas de campo eléctrico y las líneas de corrientes de fluidos es únicamente de carácter matemático, porque en los campos eléctricos no hay nada que "fluya"). El científico inglés Michael Faraday (1791-1867) introdujo por primera vez el concepto de líneas de campo. Las llamó "líneas de fuerza", aunque es preferible el término "líneas de campo".

Las líneas de campo eléctrico muestran la dirección de $\vec{E}$ en cada punto, y su espaciamiento da una idea general de la *magnitud* de $\vec{E}$. Donde $\vec{E}$ es fuerte, las líneas se dibujan muy cerca una de la otra, y donde $\vec{E}$ es más débil se trazan separadas. En cualquier punto específico, el campo eléctrico tiene dirección única, por lo que solo una línea de campo puede pasar por cada punto del campo. En otras palabras, las *líneas de campo nunca se cruzan*.

En la figura 21.28 se ilustran algunas líneas de campo eléctrico en un plano que contiene *a*) una sola carga positiva; *b*) dos cargas de igual magnitud, una positiva y otra negativa (un dipolo); y *c*) dos cargas positivas iguales. A veces estos diagramas reciben el nombre de *mapas de campo*; son secciones transversales de los patrones reales en tres dimensiones. La dirección del campo eléctrico total en cada punto de cada diagrama está a lo largo de la tangente a la línea de campo eléctrico que pasa por el punto. Las flechas indican la dirección del vector del campo $\vec{E}$ a lo largo de cada línea de campo. Los vectores de campo reales se dibujaron en varios puntos de cada patrón. Observe que, en general, la magnitud del campo eléctrico es diferente en distintos puntos de una línea de campo dada; ¡una línea de campo *no* es una curva donde la magnitud del campo eléctrico sea constante!

La figura 21.28 muestra que las líneas de campo se dirigen *alejándose* de las cargas positivas (ya que al estar cerca de una carga puntual positiva, $\vec{E}$ apunta alejándose de la carga) y *acercándose* hacia las cargas negativas (puesto que al estar cerca de una

21.28 Líneas de campo eléctrico de tres distribuciones diferentes de carga. En general, la magnitud de $\vec{E}$ es diferente en distintos puntos de una línea de campo determinada.



carga puntual negativa, $\vec{E}$ apunta hacia la carga). En las regiones donde la magnitud del campo es grande, como la zona entre las cargas positiva y negativa de la figura 21.28*b*, las líneas de campo se dibujan cercanas entre sí; en cambio, donde la magnitud del campo es pequeña, como la región entre las dos cargas positivas de la figura 21.28*c*, las líneas están muy separadas. En un campo *uniforme*, las líneas de campo son rectas, paralelas y con espaciamiento uniforme, como en la figura 21.20.

La figura 21.29 muestra una vista superior de un arreglo experimental para visualizar las líneas de campo eléctrico. En el arreglo se presentan los extremos de dos alambres con carga positiva que se insertan en un contenedor de líquido, en el cual se dejan flotando algunas semillas de césped. Estas semillas son aislantes eléctricamente neutros; sin embargo, el campo eléctrico de los dos alambres cargados provoca una *polarización*; en las moléculas de cada semilla, hay un ligero desplazamiento de las cargas positivas y negativas, como se ilustra en la figura 21.8. El extremo cargado positivamente de cada semilla de césped es atraído en la dirección de $\vec{E}$ y el extremo de cada semilla cargado negativamente es atraído en dirección opuesta a $\vec{E}$. De ahí que el eje largo de cada semilla de césped tienda a orientarse en forma paralela al campo eléctrico, en la dirección de la línea de campo que pasa por la posición que ocupa la semilla (figura 21.29*b*).

CUIDADO **Las líneas de campo eléctrico no son trayectorias** Es un error común suponer que si una partícula con carga q está en movimiento en presencia de un campo eléctrico, la partícula debe moverse a lo largo de una línea de campo eléctrico. Debido a que $\vec{E}$ en cualquier punto es tangente a la línea de campo que pasa por ese punto, es cierto que la *fuerza* sobre la partícula $\vec{F} = q\vec{E}$ y, por lo tanto, la aceleración de la partícula son tangentes a la línea de campo. Pero en el capítulo 3, del volumen 1, vimos que cuando una partícula se mueve con una trayectoria curva, su aceleración *no puede* ser tangente a la trayectoria. Así que, en general, la trayectoria de una partícula cargada *no* es lo mismo que una línea de campo.

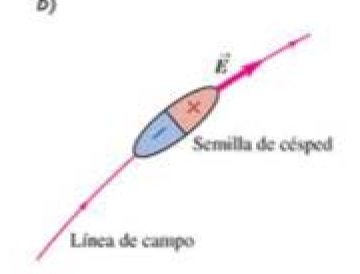
Evalúe su comprensión de la sección 21.6 Suponga que las líneas de campo eléctrico en una región del espacio son rectas. Si una partícula cargada parte del reposo en esa región, ¿su trayectoria estará a lo largo de una línea de campo?

21.29 *a*) Líneas de un campo eléctrico producidas por dos cargas puntuales iguales. El patrón se forma con semillas de césped que flotan en un líquido, por encima de dos alambres cargados. Compare este patrón con el de la figura 21.28*c*. *b*) El campo eléctrico provoca una polarización en las semillas de césped, lo cual, a la vez, genera el alineamiento de las semillas con el campo.

a)



b)

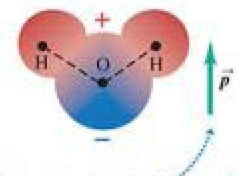


21.7 Dipolos eléctricos

Un **dipolo eléctrico** es un par de cargas puntuales de igual magnitud y signos opuestos (una carga positiva q y una carga negativa $-q$) separadas por una distancia d. En el ejemplo 21.8 (sección 21.5) se presentaron los dipolos eléctricos; el concepto es digno de estudiarse con más detenimiento porque muchos sistemas físicos, desde las moléculas hasta las antenas de televisión, se pueden describir como dipolos eléctricos. También usaremos mucho este concepto en el análisis de los dieléctricos en el capítulo 24.

21.30 *a*) Una molécula de agua es un ejemplo de dipolo eléctrico. *b*) Cada tubo de ensayo contiene una solución de una sustancia diferente en agua. El momento dipolar eléctrico grande del agua la convierte en un magnífico solvente.

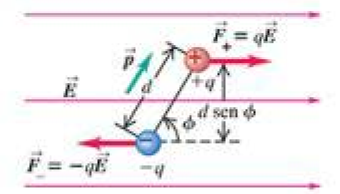
a) Una molécula de agua, con la carga positiva en color rojo, y la carga negativa en azul



b) Varias sustancias disueltas en agua



21.31 La fuerza neta sobre este dipolo eléctrico es cero, pero hay una torca dirigida hacia la parte interna de la página, que tiende a hacer girar el dipolo en el sentido horario.



La figura 21.30*a* muestra una molécula de agua (H_2O), que en muchos sentidos se comporta como un dipolo eléctrico. Como un todo, la molécula de agua es eléctricamente neutra; no obstante, los enlaces químicos dentro de la molécula ocasionan un desplazamiento de la carga; el resultado es una carga neta negativa en el extremo del oxígeno de la molécula, y una carga neta positiva en el extremo del hidrógeno, formando así un dipolo eléctrico. El efecto es equivalente al desplazamiento de un electrón de apenas 4×10^{-11} m (aproximadamente el radio de un átomo de hidrógeno); sin embargo, las consecuencias de este desplazamiento son profundas. El agua es un magnífico solvente para las sustancias iónicas como la sal de mesa (cloruro de sodio, NaCl) precisamente porque la molécula de agua es un dipolo eléctrico (figura 21.30*b*). Cuando se disuelve en agua, la sal se disocia en un ion de sodio positivo (Na^+) y un ion de cloro negativo (Cl^-), los cuales tienden a ser atraídos hacia los extremos negativo y positivo, respectivamente, de las moléculas de agua; esto mantiene los iones en la solución. Si las moléculas de agua no fueran dipolos eléctricos, el agua sería un mal solvente, y casi toda la química que ocurre en soluciones acuosas sería imposible. Esto incluye todas las reacciones bioquímicas que se realizan en las formas de vida terrestre. En un sentido muy real, ¡nuestra existencia como seres humanos depende de los dipolos eléctricos!

Estudiaremos dos temas sobre los dipolos eléctricos. El primero es qué fuerzas y torcas experimenta un dipolo cuando se coloca en un campo eléctrico externo (es decir, un campo originado por cargas fuera del dipolo). El segundo se refiere a qué campo eléctrico produce un dipolo eléctrico por sí mismo.

Fuerza y torca sobre un dipolo eléctrico

Para iniciar con la primera pregunta, coloquemos un dipolo eléctrico en un campo eléctrico externo *uniforme* $\vec{E}$, como se indica en la figura 21.31. Las fuerzas $\vec{F}_+$ y $\vec{F}_-$ sobre las dos cargas tienen una magnitud qE, pero sus direcciones son opuestas y su suma es igual a cero. *La fuerza neta sobre un dipolo eléctrico en un campo eléctrico externo uniforme es cero.*

Sin embargo, las dos fuerzas no actúan a lo largo de la misma línea, por lo que sus *torcas* no suman cero. Las torcas se calculan con respecto al centro del dipolo. Sea f el ángulo entre el campo eléctrico $\vec{E}$ y el eje del dipolo ϕ; entonces, las torcas tanto para $\vec{F}_+$ como para $\vec{F}_-$ son $(d/2)$ sen ϕ. La torca de $\vec{F}_+$ y la de $\vec{F}_-$ tienen ambas la misma magnitud, igual a $(qE)\,(d/2)$ sen ϕ, y tienden a hacer girar el dipolo en el sentido horario (es decir, en la figura 21.31, $\vec{\tau}$ se dirige hacia la parte interna de la página). Entonces, la magnitud de la torca total es el doble de la magnitud de cualquiera de las torcas individuales:

$$\vec{\tau} = (qE)(d \text{ sen } \phi) \qquad (21.13)$$

donde d sen ϕ es la distancia perpendicular entre las líneas de acción de las dos fuerzas.

El producto de la carga q y la separación d es la magnitud de una cantidad llamada **momento dipolar eléctrico**, que se denota con p:

$$p = qd \qquad \text{(magnitud del momento dipolar eléctrico)} \qquad (21.14)$$

Las unidades de p son de carga distancia ($C \cdot m$). Por ejemplo, la magnitud del momento dipolar eléctrico de una molécula de agua es $p = 6.13 \times 10^{-30}\ C \cdot m$.

CUIDADO **El símbolo p tiene múltiples significados** Hay que tener cuidado de no confundir el momento dipolar con momento lineal o la presión. En el alfabeto no hay tantas letras como cantidades físicas, de modo que algunas literales se utilizan con varios significados. Es el contexto el que por lo general aclara lo que se quiere decir, pero hay que estar atento.

Además, el momento dipolar eléctrico se define como una cantidad *vectorial* $\vec{p}$. La magnitud de $\vec{p}$ está dada por la ecuación (21.14), y su dirección es a lo largo del eje dipolar, de la carga negativa a la carga positiva, como se muestra en la figura 21.31.

En términos de p, la ecuación (21.13) para la magnitud τ de la torca ejercida por el campo se convierte en

$\tau = pE \text{ sen } \phi$ (magnitud de la torca sobre un dipolo eléctrico) (21.15)

Como el ángulo ϕ en la figura 21.31 es el ángulo entre las direcciones de los vectores $\vec{p}$ y $\vec{E}$, esto nos recuerda la expresión de la magnitud del *producto vectorial* que se estudió en la sección 1.10. (Quizás el lector desee repasar ese análisis). Entonces, es posible representar la torca sobre el dipolo en forma vectorial como

$\vec{\tau} = \vec{p} \times \vec{E}$ (torca sobre un dipolo eléctrico, en forma vectorial) (21.16)

Se puede utilizar la regla de la mano derecha del producto vectorial, para verificar que en la situación que se ilustra en la figura 21.31, $\vec{\tau}$ se dirige hacia la parte interna de la página. La torca es máxima cuando $\vec{p}$ y $\vec{E}$ son perpendiculares, y es igual a cero cuando son paralelos o antiparalelos. La torca siempre tiende a hacer que $\vec{p}$ gire para que se alinee con $\vec{E}$. La posición $\phi = 0$, con $\vec{p}$ paralelo a $\vec{E}$, es una posición de equilibrio estable; mientras que la posición $\phi = \pi$, con $\vec{p}$ y $\vec{E}$ antiparalelos, es una posición de equilibrio inestable. La polarización de una semilla de césped en el aparato que se ilustra en la figura 21.29*b* le da un momento dipolar eléctrico; entonces, la torca que ejerce $\vec{E}$ ocasiona que la semilla se alinee con $\vec{E}$ y, por consiguiente, con las líneas de campo.

Energía potencial de un dipolo eléctrico

MasteringPHYSICS
PhET: Microwaves

Cuando un dipolo cambia de dirección en un campo eléctrico, la torca del campo eléctrico realiza *trabajo* sobre él, con el cambio correspondiente de su energía potencial. El trabajo dW realizado por una torca τ durante un desplazamiento infinitesimal $d\phi$ está dado por la ecuación (10.19): $dW = \tau\, d\phi$. Como la torca está en la dirección en que ϕ disminuye, debemos representar la torca como $\tau = -pE \text{ sen } \phi$, y

$$dW = \tau\, d\phi = -pE \text{ sen } \phi\, d\phi$$

En un desplazamiento finito de ϕ_1 a ϕ_2, el trabajo total realizado sobre el dipolo es

$$W = \int_{\phi_1}^{\phi_2} (-pE \operatorname{sen} \phi)\, d\phi$$
$$= pE \cos \phi_2 - pE \cos \phi_1$$

El trabajo es el negativo del cambio de energía potencial, como se vio en el capítulo 7 del volumen 1: $W = U_1 - U_2$. Por lo tanto, una definición adecuada de la energía potencial U para este sistema es

$$U(\phi) = -pE \cos \phi \qquad (21.17)$$

En esta expresión se reconoce el *producto escalar* $\vec{p} \cdot \vec{E} = pE \cos \phi$, por lo que también se puede escribir

$U = -\vec{p} \cdot \vec{E}$ (energía potencial para un dipolo en un campo eléctrico) (21.18)

La energía potencial tiene su valor mínimo $U = -pE$ (es decir, su valor más negativo) en la posición de equilibrio estable, donde $\phi = 0$ y $\vec{p}$ es paralelo a $\vec{E}$. La energía potencial es máxima cuando $\phi = \pi$ y $\vec{p}$ es antiparalelo a $\vec{E}$; entonces, $U = +pE$. En $\phi = \pi/2$, donde $\vec{p}$ es perpendicular a $\vec{E}$, U es igual a cero. Es posible definir U de manera diferente para que valga cero en alguna otra orientación de $\vec{p}$, pero nuestra definición es la más sencilla.

La ecuación (21.18) brinda otra manera de considerar el efecto ilustrado en la figura 21.29. El campo eléctrico $\vec{E}$ da a cada semilla de césped un momento dipolar eléctrico, por lo que la semilla se alinea con $\vec{E}$ para minimizar la energía potencial.

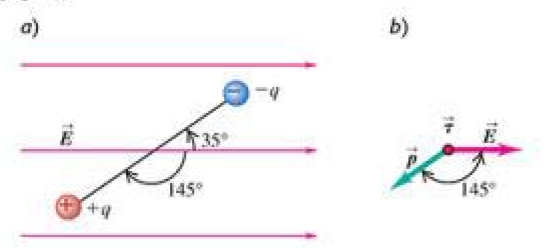


Ejemplo 21.13 Fuerza y torca sobre un dipolo eléctrico

La figura 21.32*a* muestra un dipolo eléctrico en un campo eléctrico uniforme con magnitud de 5.0×10^5 N/C dirigido en forma paralela al plano de la figura. Las cargas son $\pm 1.6 \times 10^{-19}$ C; ambas se encuentran en el plano y están separadas por una distancia de 0.125 nm $= 0.125 \times 10^{-9}$ m. Obtenga *a*) la fuerza neta ejercida por el campo sobre el dipolo;

Continúa

21.32 *a*) Un dipolo eléctrico. *b*) Direcciones del momento dipolar eléctrico, del campo eléctrico y de la torca ($\vec{\tau}$ apunta hacia afuera de la página).



b) la magnitud y la dirección del momento dipolar eléctrico; *c*) la magnitud y la dirección de la torca; *d*) la energía potencial del sistema en la posición que se muestra.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Este problema utiliza las ideas de la presente sección acerca de un dipolo eléctrico colocado en un campo eléctrico. Se emplea la relación $\vec{F} = q\vec{E}$ para cada carga puntual, con el propósito de calcular la fuerza sobre el dipolo en su conjunto. La ecuación (21.14) proporciona el momento dipolar, la ecuación (21.16) da la torca sobre el dipolo, y la ecuación (21.18) nos da la energía potencial del sistema.

EJECUTAR: *a*) Como el campo es uniforme, las fuerzas sobre las dos cargas son iguales y opuestas, y la fuerza total sobre el dipolo es igual a cero.

b) La magnitud p del momento dipolar eléctrico $\vec{p}$ es

$$p = qd = (1.6 \times 10^{-19}\ \text{C})(0.125 \times 10^{-9}\ \text{m})$$
$$= 2.0 \times 10^{-29}\ \text{C} \cdot \text{m}$$

La dirección de $\vec{p}$ es de la carga negativa a la positiva, en el sentido horario, a 145° a partir de la dirección del campo eléctrico (figura 21.32*b*).

c) La magnitud de la torca es

$$\tau = pE \operatorname{sen} \phi = (2.0 \times 10^{-29}\ \text{C})(5.0 \times 10^{5}\ \text{N/C})(\operatorname{sen} 145°)$$
$$= 5.7 \times 10^{-24}\ \text{N} \cdot \text{m}$$

De acuerdo con la regla de la mano derecha para el producto vectorial (véase la sección 1.10), la dirección de la torca es $\vec{\tau} = \vec{p} \times \vec{E}$ hacia afuera de la página. Esto corresponde a una torca en sentido antihorario que tiende a alinear $\vec{p}$ con $\vec{E}$.

d) La energía potencial es

$$U = -pE\cos\phi$$
$$= -(2.0 \times 10^{-29}\ \text{C} \cdot \text{m})(5.0 \times 10^{5}\ \text{N/C})(\cos 145°)$$
$$= 8.2 \times 10^{-24}\ \text{J}$$

EVALUAR: La magnitud de la carga, la distancia entre las cargas, el momento dipolar y la energía potencial son muy pequeños, pero todos son típicos de las moléculas.

En este análisis supusimos que $\vec{E}$ no fuera uniforme, las fuerzas en los extremos quizá no se cancelarían por completo, y la fuerza neta no sería igual a cero. Así que un cuerpo con carga neta igual a cero, pero con momento dipolar eléctrico, puede experimentar una fuerza neta en un campo eléctrico no uniforme. Como vimos en la sección 21.1, un campo eléctrico puede polarizar un cuerpo sin carga, lo que origina una separación de la carga y el momento dipolar eléctrico. Es así como los cuerpos sin carga experimentan fuerzas electrostáticas (véase la figura 21.8).

Campo en un dipolo eléctrico

Ahora pensemos en un dipolo eléctrico como una *fuente* de campo eléctrico. ¿Cómo sería este campo? Su forma general se ilustra en el mapa de campo de la figura 21.28*b*. En cada punto del patrón, el campo total $\vec{E}$ es la suma vectorial de los campos generados por dos cargas individuales, como ocurre en el ejemplo 21.8 (sección 21.5). Intente dibujar diagramas que ilustren esta suma vectorial para varios puntos.

Para obtener información cuantitativa sobre el campo de un dipolo eléctrico, tenemos que hacer algunos cálculos, como se ilustra en el siguiente ejemplo. Observe el uso del principio de superposición de campos eléctricos para sumar las contribuciones de las cargas individuales al campo. Asimismo, note que es necesario utilizar técnicas de aproximación aun para el caso relativamente sencillo de un campo originado por dos cargas. Es frecuente que los cálculos de campos sean muy complicados, por lo que es común usar análisis por computadora al determinar el campo debido a una distribución arbitraria de carga.

Ejemplo 21.14 Repaso del campo de un dipolo eléctrico

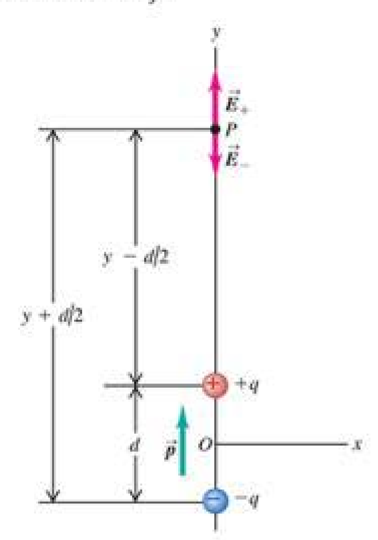


Un dipolo eléctrico tiene centro en el origen, y $\vec{p}$ está en dirección del eje $+y$ (figura 21.33). Obtenga una expresión aproximada para el campo eléctrico en un punto P sobre el eje y, para el que y sea mucho mayor que d. Para hacer esto, use la expansión binomial $(1 + x)^n \cong 1 + nx + n(n-1)x^2/2 + \cdots$ (válida para el caso en que $|x| < 1$).

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Se emplea el principio de superposición: el campo eléctrico total es la suma vectorial del campo producido por la carga positiva y el campo originado por la carga negativa. En el punto P del campo que se muestra en la figura 21.33, el campo $\vec{E}_{+}$ de la carga positiva tiene una componente y positiva (hacia arriba); y el campo

21.33 Determinación del campo eléctrico de un dipolo eléctrico en un punto situado sobre su eje.



$\vec{E}_-$ de la carga negativa tiene una componente y negativa (hacia abajo). Estas componentes se suman para obtener el campo total, y luego aplicar la aproximación en que y es mucho mayor que d.

EJECUTAR: La componente y total, E_y, del campo eléctrico de las dos cargas es

$$E_y = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{(y - d/2)^2} - \frac{1}{(y + d/2)^2}\right]$$

$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 y^2}\left[\left(1 - \frac{d}{2y}\right)^{-2} - \left(1 + \frac{d}{2y}\right)^{-2}\right]$$

Se usa el mismo enfoque del ejemplo 21.8 (sección 21.5). Ahora viene la aproximación: cuando se está muy lejos del dipolo en comparación con su tamaño, de manera que $y \gg d$, tenemos que $d/2y \ll 1$. Con $n = -2$ y $d/2y$ sustituyendo a x en la expansión binomial, solo conservamos los dos primeros términos (los que eliminamos son mucho menores). Entonces tenemos

$$\left(1 - \frac{d}{2y}\right)^{-2} \cong 1 + \frac{d}{y} \quad \text{y} \quad \left(1 + \frac{d}{2y}\right)^{-2} \cong 1 - \frac{d}{y}$$

De manera que E_y está dada aproximadamente por

$$E_y \cong \frac{q}{4\pi\epsilon_0 y^2}\left[1 + \frac{d}{y} - \left(1 - \frac{d}{y}\right)\right] = \frac{qd}{2\pi\epsilon_0 y^3} = \frac{p}{2\pi\epsilon_0 y^3}$$

EVALUAR: Un camino alternativo para obtener este resultado es colocar las fracciones en la primera expresión de E_y con un denominador común, sumar y luego aproximar el denominador $(y - d/2)^2(y + d/2)^2$ como y^4. Se dejan los detalles al lector (véase el ejercicio 21.60).

Para puntos P situados fuera de los ejes de coordenadas, las expresiones son más complicadas; sin embargo, en *todos* los puntos muy alejados del dipolo (en cualquier dirección) el campo disminuye como $1/r^3$. Se puede comparar esto con el comportamiento de $1/r^2$ de una carga puntual, el comportamiento de $1/r$ de una línea larga de carga, y la independencia de r de una lámina de carga grande. Hay distribuciones de carga para las que el campo disminuye aun con mayor rapidez. A grandes distancias, el campo de un *cuadrupolo eléctrico*, el cual consiste en dos dipolos iguales con orientación contraria, separados por una distancia pequeña, decae como $1/r^4$.

Evalúe su comprensión de la sección 21.7 Se coloca un dipolo eléctrico en la región de un campo eléctrico uniforme $\vec{E}$, con el momento dipolar eléctrico $\vec{p}$, apuntando en la dirección opuesta a $\vec{E}$. ¿El dipolo está **i.** en equilibrio estable, **ii.** en equilibrio inestable, o **iii.** ninguno de los anteriores? (*Sugerencia:* Tal vez le convenga repasar la sección 7.5).



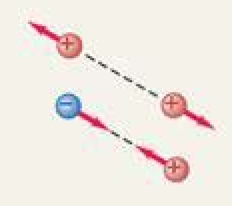
RESUMEN



Carga eléctrica, conductores y aislantes: La cantidad fundamental en electrostática es la carga eléctrica. Hay dos clases de carga: positiva y negativa. Las cargas del mismo signo se repelen mutuamente; las cargas de signo opuesto se atraen. La carga se conserva; la carga total en un sistema aislado es constante.

Toda la materia ordinaria está constituida de protones, neutrones y electrones. Los protones positivos y los neutrones eléctricamente neutros del núcleo de un átomo se mantienen unidos por la fuerza nuclear; los electrones negativos se mueven alrededor del núcleo a distancias mucho mayores que el tamaño de este. Las interacciones eléctricas son las principales responsables de la estructura de átomos, moléculas y sólidos.

Los conductores son materiales en los cuales la carga eléctrica se desplaza con facilidad; en los aislantes la carga no se mueve con facilidad. La mayoría de los metales son buenos conductores; en tanto que la mayoría de los no metales son aislantes.

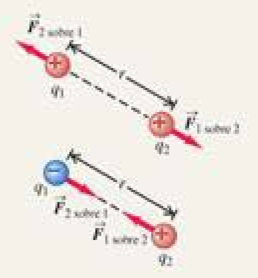


Ley de Coulomb: Para las cargas q_1 y q_2 separadas por una distancia r, la magnitud de la fuerza eléctrica sobre cualquiera de ellas es proporcional al producto q_1q_2 e inversamente proporcional a r^2. La fuerza sobre cada carga ocurre a lo largo de la línea que las une; dicha fuerza es de repulsión si q_1 y q_2 tienen el mismo signo, y de atracción si tienen el signo opuesto. En unidades del SI la unidad de la carga eléctrica es el coulomb, que se representa por C. (Véase los ejemplos 21.1 y 21.2).

Cuando dos o más cargas ejercen una fuerza sobre una carga, la fuerza total sobre esa carga es la suma vectorial de las fuerzas ejercidas por las cargas individuales. (Véase los ejemplos 21.3 y 21.4).

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{|q_1q_2|}{r^2} \qquad (21.2)$$

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 8.988 \times 10^9\ \mathrm{N \cdot m^2/C^2}$$



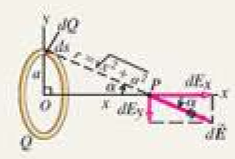
Campo eléctrico: El campo eléctrico $\vec{E}$, es una cantidad vectorial, y es fuerza por unidad de carga que se ejerce sobre una carga prueba en cualquier punto. El campo eléctrico producido por una carga puntual está dirigido radialmente hacia afuera de la carga o hacia ella. (Véase los ejemplos 21.5 a 21.7).

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}_0}{q_0} \qquad (21.3)$$

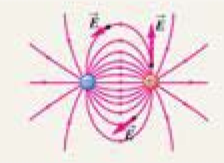
$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2}\hat{r} \qquad (21.7)$$



Superposición de campos eléctricos: El campo eléctrico $\vec{E}$ de cualquier combinación de cargas es la suma vectorial de los campos producidos por las cargas individuales. Para calcular el campo eléctrico generado por una distribución continua de carga, se divide la distribución en elementos pequeños, se calcula el campo producido por cada elemento, y luego se efectúa la suma vectorial, por lo general con técnicas de integración. Las distribuciones de carga están descritas por la densidad de carga lineal, λ, la densidad de carga superficial, σ, y la densidad de carga volumétrica, ρ. (Véase los ejemplos 21.8 a 21.12).



Líneas de campo eléctrico: Las líneas de campo proporcionan una representación gráfica de los campos eléctricos. En cualquier punto sobre una línea de campo, la tangente a la línea está en dirección de $\vec{E}$ en ese punto. El número de líneas por unidad de área (perpendicular a su dirección) es proporcional a la magnitud de $\vec{E}$ en ese punto.

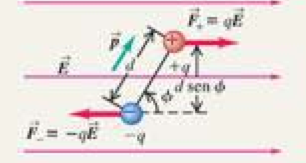


Dipolos eléctricos: Un dipolo eléctrico consiste en un par de cargas eléctricas de igual magnitud q pero signo contrario, separadas por una distancia d. El momento dipolar eléctrico $\vec{p}$ tiene magnitud $p = qd$. La dirección de $\vec{p}$ va de la carga negativa a la carga positiva. Un dipolo eléctrico es un campo eléctrico $\vec{E}$ que experimenta una torca $\vec{\tau}$ igual al producto vectorial de $\vec{p}$ y $\vec{E}$. La magnitud de la torca depende del ángulo ϕ entre $\vec{p}$ y $\vec{E}$. La energía potencial, U, para un dipolo eléctrico en un campo eléctrico también depende de la orientación relativa de $\vec{p}$ y $\vec{E}$. (Véase los ejemplos 21.13 y 21.14).

$$\tau = pE \operatorname{sen} \phi \qquad (21.15)$$

$$\vec{\tau} = \vec{p} \times \vec{E} \qquad (21.16)$$

$$U = -\vec{p} \cdot \vec{E} \qquad (21.18)$$





PROBLEMA PRÁCTICO Cálculo de un campo eléctrico: medio anillo cargado

Una carga positiva Q está distribuida de manera uniforme alrededor de un semicírculo de radio a como se muestra en la figura 21.34. Obtenga la magnitud y la dirección del campo eléctrico resultante en el punto P, el centro de curvatura del semicírculo.

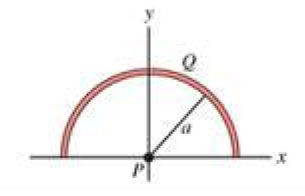
GUÍA DE SOLUCIÓN

Véase el área de estudio MasteringPhysics® para consultar una solución con Video Tutor.

IDENTIFICAR y PLANTEAR

1. Las incógnitas son las componentes del campo eléctrico en P.
2. Divida el semicírculo en segmentos infinitesimales, cada uno de los cuales es un arco circular pequeño de radio a y ángulo $d\theta$. ¿Cuál es la longitud de este segmento? ¿Cuál es la cantidad de carga del segmento?

21.34



3. Considere un segmento infinitesimal situado en una posición angular θ sobre el semicírculo, medido a partir de la esquina inferior derecha del semicírculo en $x = a$, $y = 0$. (Por lo tanto, $\theta = \pi/2$ en $x = 0$, $y = a$ y $\theta = \pi$ en $x = -a$, $y = 0$). ¿Cuáles son las componentes x y y del campo eléctrico en P (dE_x y dE_y) producido por este segmento?

EJECUTAR

4. Integre las expresiones de dE_x y dE_y desde $\theta = 0$ hasta $\theta = \pi$. Los resultados serán las componentes x y y del campo eléctrico en P.
5. Use los resultados del paso 4 para obtener la magnitud y dirección del campo en P.

EVALUAR

6. ¿El resultado de la magnitud del campo eléctrico tiene las unidades correctas?
7. Explique cómo podría haber encontrado la componente x del campo eléctrico usando un argumento de simetría.
8. ¿Cuál sería el campo eléctrico en P si el semicírculo se ampliara a un círculo completo con centro en P?

Problemas

Para tareas asignadas por el profesor, visite www.masteringphysics.com



•, ••, •••: Problemas de dificultad creciente. **PA**: Problemas acumulativos que incorporan material de capítulos anteriores. **CALC**: Problemas que requieren cálculo. **BIO**: Problemas de ciencias biológicas.

PREGUNTAS PARA ANÁLISIS

P21.1 Si usted desprende dos tiras de cinta adhesiva transparente del mismo carrete y de inmediato las deja colgando una cerca de la otra, se repelerán mutuamente. Si luego pega el lado con adhesivo de una con el lado brillante de la otra y las separa, se atraerán entre sí. Dé una explicación convincente donde intervenga la transferencia de electrones entre las tiras de cinta en esta secuencia de eventos.

P21.2 Dos esferas de metal cuelgan de cuerdas de nailon, y cuando se acerca una a la otra tienden a atraerse. Con base en esta única información, analice todas las maneras posibles en que las esferas pudieran estar cargadas. ¿Sería posible que, después de que las esferas se toquen, queden pegadas? Justifique su respuesta.

P21.3 La fuerza eléctrica entre dos partículas cargadas se hace más débil a medida que aumenta la distancia. Suponga que la fuerza eléctrica fuera *independiente* de la distancia. En este caso, ¿un peine cargado haría que un aislante neutro se polarizara, como en la figura 21.8? ¿Por qué? ¿El aislante neutro sería atraído por el peine? De nuevo, ¿por qué?

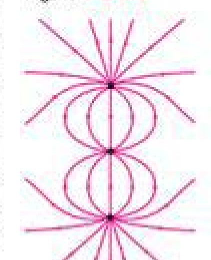
P21.4 Su ropa tiende a pegarse entre sí cuando sale de la secadora. ¿Por qué? ¿Esperaría más o menos atracción si la ropa estuviera hecha del mismo material (por ejemplo, algodón), que si estuviera hecha con distintas telas? De nuevo, ¿por qué? (Tal vez usted quiera experimentar con su próxima carga de lavado).

P21.5 Una esfera de metal sin carga cuelga de una cuerda de nailon. Cuando se le acerca una varilla de vidrio con carga positiva, la esfera es atraída hacia la varilla. Pero si la esfera toca la varilla, de pronto se aleja de la misma. Explique por qué la esfera primero es atraída y luego repelida.

P21.6 Los electrones libres en un metal son atraídos por gravedad hacia la Tierra. Entonces, ¿por qué no se asientan en el fondo del conductor, como los sedimentos en el fondo de un río?

P21.7 • La figura P21.7 muestra algunas de las líneas del campo eléctrico generadas por tres cargas puntuales ubicadas a lo largo de un eje vertical. Las tres cargas tienen la misma magnitud. *a*) ¿Cuáles son los signos de las tres cargas? Explique su razonamiento. *b*) ¿En qué punto(s) el campo eléctrico tiene la magnitud más pequeña? Explique su razonamiento. Explique de qué manera se combinan los campos generados por cada carga puntual para producir un campo neto pequeño en este punto o puntos.

Figura **P21.7**



P21.8 Los buenos conductores eléctricos, como los metales, normalmente son buenos conductores del calor; asimismo, los aislantes eléctricos, como la madera, por lo general son malos conductores del calor. Explique por qué hay una relación entre la conducción eléctrica y la conducción del calor en estos materiales.

P21.9 • Suponga que la carga mostrada en la figura 21.28*a* se encuentra fija en su posición. Entonces, una partícula pequeña cargada positivamente se coloca en algún punto de la figura y se libera. ¿La trayectoria de la partícula seguirá una línea de campo eléctrico? ¿Por qué? Suponga ahora que la partícula se coloca en algún punto de la figura 21.28*b* y se libera (las cargas positiva y negativa mostradas en la figura están fijas en su posición). ¿Su trayectoria seguirá una línea de campo eléctrico? Nuevamente, por qué. Explique cualquier diferencia entre las respuestas de las dos situaciones.

P21.10 Dos objetos metálicos idénticos están montados en soportes aislantes. Describa cómo podría colocar cargas de signo opuesto, pero exactamente de igual magnitud en los dos objetos.

P21.11 Se puede utilizar una envoltura de plástico de alimentos para cubrir un recipiente, estirándola en la parte superior y luego presionando las partes que cuelgan contra los lados. ¿Por qué la envoltura es pegajosa? (*Sugerencia:* La respuesta tiene que ver con la fuerza eléctrica). ¿La envoltura para alimentos se adhiere a sí misma con igual fuerza? ¿Por qué? ¿Funcionaría con recipientes metálicos? Otra vez, ¿por qué?

P21.12 Si usted camina sobre una alfombra de nailon y luego toca un objeto metálico grande, como una perilla, puede recibir una chispa y una descarga. ¿Por qué esto tiende a ocurrir más en los días secos que en los húmedos? (*Sugerencia:* Véase la figura 21.30). ¿Por qué es menos probable que reciba la descarga si toca un objeto metálico *pequeño*, como un clip sujetapapeles?

P21.13 Usted tiene un objeto con carga negativa. ¿Cómo lo puede usar para colocar una carga negativa neta en una esfera metálica aislada? ¿Y para colocar una carga positiva neta en la esfera?

P21.14 Cuando dos cargas puntuales de igual masa y carga se liberan en una mesa sin fricción, cada una tiene una aceleración inicial a_0. Si en vez de ello, una se mantiene fija y se libera la otra, ¿cuál será su aceleración inicial: a_0, $2a_0$ o $a_0/2$? Explique su respuesta.

P21.15 En una mesa libre de fricción, se liberan una carga puntual de masa *m* y carga *Q*, y otra carga puntual de masa *m* pero con carga igual a 2*Q*. Si la carga *Q* tiene una aceleración inicial a_0, ¿cuál será la aceleración de 2*Q*: a_0, $2a_0$, $4a_0$, $a_0/2$ o $a_0/4$? Explique su respuesta.

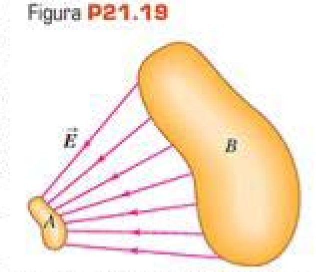
P21.16 Se coloca un protón en un campo eléctrico uniforme y luego se libera. Después se sitúa un electrón en el mismo punto y también se libera. ¿Las dos partículas experimentan la misma fuerza? ¿La misma aceleración? ¿Se mueven en la misma dirección cuando se liberan?

P21.17 En el ejemplo 21.1 (sección 21.3) se vio que la fuerza eléctrica entre dos partículas α es del orden de 10^{35} veces más fuerte que la fuerza gravitacional. Entonces, ¿por qué percibimos fácilmente la gravedad de la Tierra pero no su fuerza eléctrica?

P21.18 ¿Qué similitudes hay entre las fuerzas eléctricas y las fuerzas gravitacionales? ¿Cuáles son sus diferencias más significativas?

P21.19 Dos objetos irregulares *A* y *B* transportan cargas de signo opuesto. La figura P21.19 muestra las líneas de campo eléctrico en las cercanías de cada uno de los objetos. *a*) ¿Cuál es el objeto positivo, *A* o *B*? ¿Cómo lo sabe? *b*) ¿Dónde es más fuerte el campo eléctrico, cerca de *A* o cerca de *B*? ¿Cómo lo sabe?

Figura **P21.19**



P21.20 Los núcleos atómicos están formados por protones y neutrones. Esto demuestra que debe haber otra clase de interacción, además de las fuerzas gravitacionales y eléctricas. ¿Cuál es? Explique su respuesta.

P21.21 Los campos eléctricos suficientemente fuertes hacen que los átomos se ionicen positivamente, es decir, que pierdan uno o más electrones. Explique cómo ocurre esto. ¿Qué determina la intensidad que debe tener el campo para que esto suceda?

P21.22 En la figura P21.22 se muestran los campos eléctricos en el punto *P* debidos a las cargas positivas q_1 y q_2. ¿El hecho de que se crucen entre sí contraviene el enunciado de la sección 21.6 acerca de que las líneas de campo eléctrico nunca se cruzan? Explique su respuesta.

Figura **P21.22**





P21.23 La temperatura y la velocidad del aire tienen diferentes valores en lugares distintos de la atmósfera terrestre. ¿La velocidad del aire es un campo vectorial? ¿Por qué? ¿La temperatura del aire es un campo vectorial? De nuevo, ¿por qué?

EJERCICIOS

Sección 21.3 Ley de Coulomb

21.1 •• En una esfera pequeña de plomo con masa de 8.00 g los electrones excedentes se colocan de modo que su carga neta es de -3.20×10^{-9} C. *a*) Obtenga el número de electrones excedentes en la esfera. *b*) ¿Cuántos electrones excedentes hay por átomo de plomo? El número atómico del plomo es 82, y su masa atómica es 207 g/mol.

21.2 • Los relámpagos ocurren cuando hay un flujo de carga eléctrica (sobre todo electrones) entre el suelo y los cumulonimbos (nubes de tormenta). La tasa máxima del flujo de carga en un relámpago es de alrededor de 20,000 C/s; esto dura 100 μs o menos. ¿Cuánta carga fluye entre el suelo y la nube en ese tiempo? ¿Cuántos electrones fluyen en dicho periodo?

21.3 •• BIO Estime cuántos electrones hay en su cuerpo. Haga todas las suposiciones que crea necesarias, pero especifíquelas. (*Sugerencia:* Considere que la mayoría de los átomos de su cuerpo tienen números iguales de electrones, protones y neutrones). ¿Cuál es la carga combinada de todos estos electrones?

21.4 • **Partículas en un anillo de oro.** Usted tiene un anillo de oro puro (24 quilates) con masa de 17.7 g. El oro tiene una masa atómica de 197 g/mol y un número atómico de 79. *a*) ¿Cuántos protones hay en el anillo, y cuál es su carga total positiva? *b*) Si el anillo no tiene carga neta, ¿cuántos electrones hay en él?

21.5 • BIO **Propagación de una señal en las neuronas.** Las *neuronas* son componentes del sistema nervioso del cuerpo que transmiten señales como impulsos eléctricos que viajan a lo largo de todo el sistema. Estos impulsos se propagan cuando la carga de repente se precipita hacia adentro y luego hacia afuera de una parte de la neurona llamada *axón*. Las mediciones indican que durante la fase de entrada del ciclo fluyen por el axón 5.6×10^{11} Na^+ (iones de sodio) por metro, cada uno con una carga igual a $+e$. ¿Cuántos coulombs de carga entran a la longitud de 1.5 cm del axón durante este proceso?

21.6 • Dos esferas pequeñas separadas por una distancia de 20.0 cm tienen cargas iguales. ¿Cuántos electrones excedentes debe haber en cada esfera, si la magnitud de la fuerza de repulsión entre ellas es de 4.57×10^{-21} N?

21.7 •• El peso medio de un ser humano es de alrededor de 650 N. Si dos personas comunes tienen, cada una, una carga excedente de 1.0 coulomb, una positiva y la otra negativa, ¿qué tan lejos tendrían que estar para que la atracción eléctrica entre ellas fuera igual a su peso de 650 N?

21.8 •• Dos esferas pequeñas de aluminio tienen, cada una, una masa de 0.0250 kg, y están separadas 80.0 cm. *a*) ¿Cuántos electrones contiene cada esfera? (La masa atómica del aluminio es de 26.982 g/mol, y su número atómico es 13). *b*) ¿Cuántos electrones tendrían que retirarse de una esfera y agregarse a la otra, para generar una fuerza de atracción entre ellas con magnitud de 1.00×10^4 N (aproximadamente 1 tonelada)? Suponga que las esferas son cargas puntuales. *c*) ¿Qué fracción de todos los electrones en cada esfera representa esto?

21.9 •• Se dan cargas eléctricas positivas a dos esferas pequeñas de plástico. Cuando están separadas una distancia de 15.0 cm, la fuerza de repulsión entre ellas tiene una magnitud de 0.220 N. ¿Cuál es la carga en cada esfera, *a*) si las dos cargas son iguales, y *b*) si una esfera tiene cuatro veces la carga de la otra?

21.10 •• **¿Qué pasaría si no fuéramos eléctricamente neutros?** Una persona de 75 kg abre sus brazos de modo que sus manos quedan separadas 1.7 m. Normalmente, la mano de una persona representa el 1% aproximadamente del peso de su cuerpo. En números redondos, supondremos que el peso total de cada mano se debe al calcio de los huesos, y trataremos a las manos como cargas puntuales. Un mol de calcio tiene 40.18 g, y cada átomo contiene 20 protones y 20 electrones. Suponga que solo el 1% de las cargas positivas de cada mano está desbalanceado por la carga negativa. *a*) ¿Cuántos átomos de calcio contiene cada mano? *b*) ¿Cuántos coulombs de carga desbalanceada contiene cada mano? *c*) ¿Qué fuerzas tendrían que ejercer los brazos de la persona sobre sus manos para evitar que salgan volando? ¿Hay probabilidades de que los brazos puedan ejercer esta fuerza?

21.11 •• Dos esferas muy pequeñas de 8.55 g, cuyos centros están separados una distancia de 15.0 cm, se cargan sumando números iguales de electrones a cada una de ellas. Si se ignoran todas las demás fuerzas, ¿cuántos electrones habría que agregar a cada esfera para que las dos aceleraran a 25.0g al ser liberadas? ¿En qué dirección acelerarían?

21.12 •• **¿Exactamente qué tan intensa es la fuerza eléctrica?** Suponga que usted tiene dos cajas pequeñas con 1.0 g de protones en cada una. *a*) Si un astronauta colocara una de esas cajas en la Luna y la otra se quedara en la Tierra, y se conectaran con una cuerda muy ligera (¡y muy larga!), ¿cuál sería la tensión en la cuerda? Exprese su respuesta en newtons y en libras. ¿Necesita tomar en cuenta las fuerzas gravitacionales de la Tierra y la Luna sobre los protones? ¿Por qué? *b*) ¿Qué fuerza gravitacional ejercería cada caja sobre la otra?

21.13 • En un experimento en el espacio, se mantiene fijo un protón y se libera otro a una distancia de 2.50 mm. *a*) ¿Cuál es la aceleración inicial del protón después de liberarlo? *b*) Elabore diagramas cualitativos (¡sin números!) de aceleración-tiempo y velocidad-tiempo, para el movimiento del protón liberado.

21.14 • Una carga negativa de $-0.550\ \mu C$ ejerce una fuerza hacia arriba de 0.200 N, sobre una carga desconocida que está a 0.300 m directamente debajo de ella. *a*) ¿Cuál es la carga desconocida (magnitud y signo)? *b*) ¿Cuáles son la magnitud y la dirección de la fuerza que la carga desconocida ejerce sobre la carga de $-0.550\ \mu C$?

21.15 •• Tres cargas puntuales están en línea. La carga $q_3 = +5.00$ nC está en el origen. La carga $q_2 = -3.00$ nC se encuentra en $x = +4.00$ cm. La carga q_1 está en $x = +2.00$ cm. ¿Cuál es la magnitud y el signo de q_1, si la fuerza neta sobre q_3 es igual a cero?

21.16 •• En el ejemplo 21.4, suponga que la carga puntual sobre el eje y en $y = -0.30$ m tiene una carga negativa de $-2.0\ \mu C$, y las otras cargas permanecen igual. Obtenga la magnitud y la dirección de la fuerza neta sobre Q. ¿En qué difiere su respuesta de la que se dio en el ejemplo 21.4? Explique las diferencias.

21.17 •• En el ejemplo 21.3, calcule la fuerza neta sobre la carga q_1.

21.18 •• En el ejemplo 21.4, ¿cuál es la fuerza neta (magnitud y dirección) sobre la carga q_1 que ejercen las otras dos cargas?

21.19 •• Tres cargas puntuales están alineadas a lo largo del eje x. La carga $q_1 = +3.00\ \mu C$ está en el origen, y la carga $q_2 = -5.00\ \mu C$ se encuentra en $x = 0.200$ m. La carga $q_3 = -8.00\ \mu C$. ¿Dónde está situada q_3 si la fuerza neta sobre q_1 es de 7.00 N en la dirección negativa del eje x?

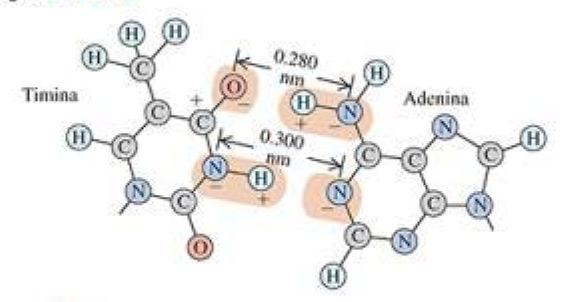
21.20 •• Repita el ejercicio 21.19 para $q_3 = +8.00\ \mu C$.

21.21 •• Dos cargas puntuales se ubican sobre el eje y como sigue: la carga $q_1 = -1.50$ nC está en $y = -0.600$ m, y la carga $q_2 = +3.20$ nC está en el origen ($y = 0$). ¿Cuál es la fuerza total (magnitud y dirección) ejercida por estas dos cargas sobre una tercera $q_3 = +5.00$ nC que se ubica en $y = -0.400$ m?

21.22 •• Dos cargas puntuales están situadas sobre el eje x del modo siguiente: la carga $q_1 = +4.00$ nC se encuentra en $x = 0.200$ m, y la carga $q_2 = +5.00$ nC está en $x = -0.300$ m. ¿Cuáles son la magnitud y la dirección de la fuerza total ejercida por estas dos cargas sobre una carga puntual negativa $q_3 = -6.00$ nC que se encuentra en el origen?

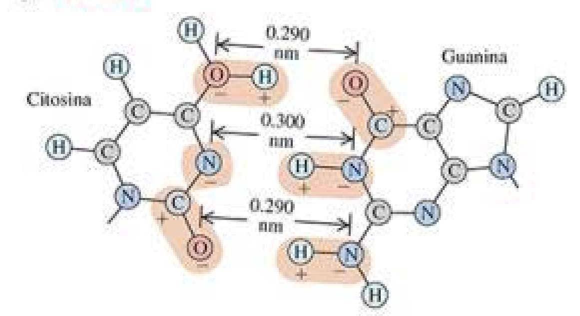
21.23 •• BIO **Par de bases en el ADN, I.** Los dos lados de la doble hélice del ADN están conectados por pares de bases (adenina, timina, citosina y guanina). Debido a la forma geométrica de las moléculas, la adenina se une con la timina, y la citosina con la guanina. La figura E21.23 muestra el enlace timina-adenina. Cada carga mostrada es $\pm e$, y la distancia H—N es de 0.110 nm. *a*) Calcule la fuerza *neta* que la timina ejerce sobre la adenina. ¿Es de atracción o de repulsión? Para hacer los cálculos sencillos y razonables, solo considere las fuerzas debidas a las combinaciones O—H—N y N—H—N, suponiendo que son paralelas entre sí. Sin embargo, recuerde que en el grupo O—H—N, el O^- ejerce una fuerza tanto sobre H^+ como sobre N^-, de la misma manera que en el grupo N—H—N. *b*) Calcule la fuerza sobre el electrón en el átomo de hidrógeno, el cual se encuentra a 0.0529 nm del protón. Luego compare la intensidad de la fuerza de enlace del electrón en el hidrógeno con la fuerza de enlace de las moléculas de adenina-timina.

Figura **E21.23**



21.24 •• BIO **Par de bases en el ADN, II.** Tome como referencia el ejercicio 21.23. La figura E21.24 muestra el enlace de las moléculas de citosina y guanina. Las distancias entre O—H y H—N son de 0.110 nm. En este caso, suponga que el enlace se debe solo a las fuerzas a lo largo de las combinaciones O—H—O, N—H—N y O—H—N, y suponga también que estas tres combinaciones son paralelas entre sí. Calcule la fuerza *neta* que ejerce la citosina sobre la guanina debido a las tres combinaciones anteriores. ¿Esta fuerza es de atracción o de repulsión?

Figura **E21.24**



Sección 21.4 Campo eléctrico y fuerzas eléctricas

21.25 • PA Se coloca un protón en un campo eléctrico uniforme de 2.75×10^3 N/C. Calcule: *a*) la magnitud de la fuerza eléctrica ejercida sobre el protón; *b*) la aceleración del protón; *c*) la rapidez del protón después de estar 1.00 μs en el campo, suponiendo que parte del reposo.

21.26 • Una partícula tiene una carga de −3.00 nC. *a*) Encuentre la magnitud y la dirección del campo eléctrico debido a esta partícula, en un punto que está 0.250 m directamente arriba de ella. *b*) ¿A qué distancia de esta partícula su campo eléctrico tiene una magnitud de 12.0 N/C?

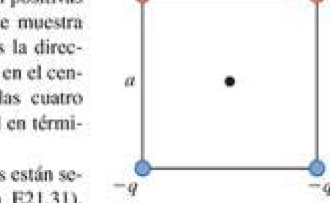
21.27 • **PA** Un protón se desplaza en forma horizontal hacia la derecha a 4.50×10^6 m/s. *a*) Encuentre la magnitud y la dirección del campo eléctrico más débil que lleve al protón uniformemente al reposo en una distancia de 3.20 cm. *b*) ¿Cuánto tiempo le lleva al protón detenerse una vez que entra al campo eléctrico? *c*) ¿Cuál es el campo mínimo (magnitud y dirección) que sería necesario para detener un electrón en las condiciones del inciso *a*)?

21.28 • **PA** Un electrón parte del reposo en un campo eléctrico uniforme, acelera verticalmente hacia arriba y recorre 4.50 m en los primeros 3.00 μs después de que se libera. *a*) ¿Cuáles son la magnitud y la dirección del campo eléctrico? *b*) ¿Se justifica que se desprecien los efectos de la gravedad? Explique su respuesta cuantitativamente.

21.29 •• *a*) ¿Cuál debe ser la carga (signo y magnitud) de una partícula de 1.45 g para que permanezca estacionaria, cuando se coloca en un campo eléctrico dirigido hacia abajo con magnitud de 650 N/C? *b*) ¿Cuál es la magnitud de un campo eléctrico donde la fuerza eléctrica sobre un protón tiene la misma magnitud que su peso?

21.30 •• Se coloca una carga puntual en cada esquina de un cuadrado de lado *a*. Todas las cargas tienen la misma magnitud *q*. Dos de las cargas son positivas y dos son negativas, como se muestra en la figura E21.30. ¿Cuál es la dirección del campo eléctrico neto en el centro del cuadrado debido a las cuatro cargas, y cuál es su magnitud en términos de *q* y *a*?

Figura **E21.30**



21.31 • Dos cargas puntuales están separadas por 25.0 cm (figura E21.31). Calcule el campo eléctrico neto que producen estas cargas *a*) en el punto *A* y *b*) en el punto *B*. *c*) ¿Cuáles serían la magnitud y la dirección de la fuerza eléctrica que esta combinación de cargas produciría sobre un protón situado en el punto *A*?

Figura **E21.31**



21.32 •• **Campo eléctrico de la Tierra.** La Tierra tiene una carga eléctrica neta que origina un campo en los puntos cerca de su superficie igual a 150 N/C, dirigido hacia el centro del planeta. *a*) ¿Qué magnitud y signo de la carga tendría que adquirir un ser humano de 60 kg, para superar su peso con la fuerza ejercida por el campo eléctrico terrestre? *b*) ¿Cuál sería la fuerza de repulsión entre dos personas, cada una con la carga calculada en el inciso *a*), separadas por una distancia de 100 m? ¿Es factible el uso del campo eléctrico de nuestro planeta como un medio para volar? ¿Por qué?

21.33 •• **PA** Se lanza un electrón con rapidez inicial $v_0 = 1.60 \times 10^6$ m/s hacia el interior de un campo uniforme entre las placas paralelas de la figura E21.33. Suponga que el campo entre las placas es uniforme y está dirigido verticalmente hacia abajo, y que el campo fuera de las placas es igual a cero. El electrón ingresa al campo en un punto equidistante de las dos placas. *a*) Si el electrón apenas elude la placa superior al salir del campo, encuentre la magnitud del campo eléctrico. *b*) Suponga que en la figura E21.33 el electrón es sustituido por un protón con la misma rapidez inicial v_0. ¿Golpearía el protón una de las placas? Si el protón no golpea ninguna de las placas, ¿cuáles serían la magnitud y la dirección de su desplazamiento vertical, cuando sale de la región entre las placas? *c*) Compare las trayectorias que recorren el electrón y el protón, y explique las diferencias. *d*) Analice si es razonable ignorar los efectos de la gravedad para cada partícula.

Figura **E21.33**



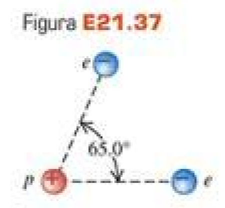
21.34 •• La carga puntual $q_1 = -5.00$ nC se encuentra en el origen, y la carga puntual $q_2 = +3.00$ nC está sobre el eje *x* en $x = 3.00$ cm. El punto *P* se halla sobre el eje *y* en $y = 4.00$ cm. *a*) Calcule los campos eléctricos $\vec{E}_1$ y $\vec{E}_2$ en el punto *P* debidos a las cargas q_1 y q_2. Exprese los resultados en términos de vectores unitarios (véase el ejemplo 21.6). *b*) Utilice los resultados del inciso *a*) para obtener el campo resultante en *P*, expresado con notación de vectores unitarios.

21.35 •• **PA** En el ejercicio 21.33, ¿cuál es la rapidez del electrón cuando sale del campo eléctrico?

21.36 • *a*) Calcule la magnitud y la dirección (relativa al eje +*x*) del campo eléctrico del ejemplo 21.6. *b*) Una carga puntual de −2.5 nC está colocada en el punto *P* de la figura 21.19. Encuentre la magnitud y la dirección de **i.** la fuerza que la carga de −8.0 nC situada en el origen ejerce sobre esta carga, y **ii.** la fuerza que esta carga ejerce sobre la carga de −8.0 nC que está en el origen.

21.37 •• Si dos electrones se encuentran, cada uno, a 1.50×10^{-10} m de un protón, como se muestra en la figura E21.37, obtenga la magnitud y dirección de la fuerza eléctrica neta que ejercerán sobre el protón.

Figura **E21.37**

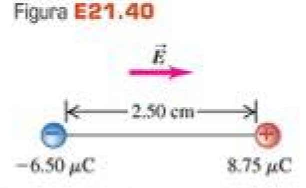


21.38 •• **PA** En la región entre dos placas planas paralelas con carga opuesta, existe un campo eléctrico uniforme. Se libera un protón desde el reposo en la superficie de la placa con carga positiva, y golpea la superficie de la placa opuesta, que está a una distancia de 1.60 cm de la primera, en un intervalo de tiempo de 1.50×10^{-6} s. *a*) Encuentre la magnitud del campo eléctrico. *b*) Calcule la rapidez del protón cuando golpea la placa con carga negativa.

21.39 • Una carga puntual se encuentra en el origen. Si esta carga puntual se toma como fuente, ¿cuál es el vector unitario $\hat{r}$ en dirección de *a*) el punto del campo situado en $x = 0$, $y = -1.35$ m; *b*) el punto del campo en $x = 12.0$ cm, $y = 12.0$ cm; *c*) el punto del campo en $x = -1.10$ m, $y = 2.60$ m? Exprese sus resultados en términos de los vectores unitarios $\hat{\imath}$ y $\hat{\jmath}$.

21.40 •• Una carga puntual de +8.75 μC está adherida bajo una mesa horizontal sin fricción. Está unida a una carga puntual de −6.50 μC con un alambre aislante y ligero de 2.50 cm. Un campo eléctrico uniforme de magnitud 1.85×10^8 N/C está dirigido en forma paralela al alambre, como se ilustra en la figura E21.40. *a*) Calcule la tensión en el alambre. *b*) ¿Cuál sería la tensión si las dos cargas fueran negativas?

Figura **E21.40**



21.41 •• *a*) Un electrón se desplaza hacia el este en un campo eléctrico uniforme de 1.50 N/C, dirigido hacia el oeste. En el punto *A*, la velocidad del electrón es de 4.50×10^5 hacia el este. ¿Cuál es la rapidez del electrón cuando alcanza el punto *B*, 0.375 m al este del punto *A*? *b*) Un protón se mueve en el campo eléctrico uniforme del inciso *a*). En el punto *A*, la velocidad del protón es de 1.90×10^4 m/s al este. ¿Cuál es la rapidez del protón en el punto *B*?

Sección 21.5 Cálculos de campos eléctricos

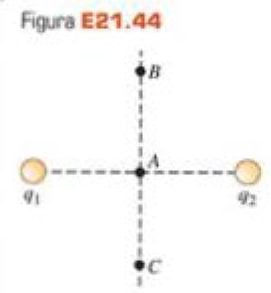
21.42 • Dos cargas puntuales Q y $+q$ (donde q es positiva) producen el campo eléctrico neto mostrado en P en la figura E21.42. La dirección del campo es paralela a la línea que une las dos cargas. *a*) ¿Qué concluye acerca del signo y la magnitud de Q? Explique su razonamiento. *b*) Si la carga inferior fuera negativa, ¿sería posible que el campo tuviera la dirección mostrada en la figura? Explique su razonamiento.

Figura **E21.42**

21.43 •• Dos cargas puntuales positivas q están colocadas sobre el eje x, una en $x = a$ y la otra en $x = -a$. *a*) Calcule la magnitud y la dirección del campo eléctrico en $x = 0$. *b*) Obtenga la expresión para el campo eléctrico en puntos sobre el eje x. Use los resultados para graficar la componente x del campo eléctrico en función de x, para valores de x entre $-4a$ y $+4a$.

21.44 • Las dos cargas q_1 y q_2 mostradas en la figura E21.44 tienen magnitudes iguales. ¿Cuál es la dirección del campo eléctrico neto debido a estas dos cargas en los puntos A (a medio camino entre las cargas), B y C, si *a*) ambas cargas son negativas, *b*) ambas cargas son positivas, *c*) q_1 es positiva y q_2 es negativa?

Figura **E21.44**

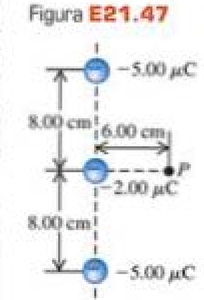


21.45 • Una carga puntual de +2.00 nC está en el origen, y una segunda carga puntual de −5.00 nC está en el eje x en $x = 0.800$ m. *a*) Encuentre el campo eléctrico (magnitud y dirección) en cada uno de los siguientes puntos sobre el eje x: **i.** $x = 0.200$ m; **ii.** $x = 1.20$ m; **iii.** $x = -0.200$ m. *b*) Calcule la fuerza eléctrica neta que las dos cargas ejercerían sobre un electrón colocado en cada punto del inciso *a*).

21.46 •• Repita el ejercicio 21.44, pero ahora con $q_1 = -4.00$ nC.

21.47 • Tres cargas puntuales negativas están sobre una línea, como se ilustra en la figura E21.47. Encuentre la magnitud y la dirección del campo eléctrico que produce esta combinación de cargas en el punto P, que está a una distancia de 6.00 cm de la carga de −2.00 μC medida en forma perpendicular a la línea que une las tres cargas.

Figura **E21.47**



21.48 •• BIO **Campo eléctrico de los axones.** Se transmite una señal nerviosa a través de una neurona cuando un exceso de iones Na^+ entra repentinamente al axón, una parte cilíndrica larga de la neurona. Los axones miden 10.0 μm de diámetro, y las mediciones muestran que aproximadamente 5.6×10^{11} iones de Na^+ por metro (cada uno con una carga $+e$) entran durante este proceso. Aun cuando el axón es un cilindro largo, no toda la carga entra en todos lados al mismo tiempo. Un modelo adecuado sería una serie de cargas puntuales que se mueven a lo largo del axón. Sea 0.10 mm la longitud del axón modelado como una carga puntual. *a*) Si la carga que entra en cada metro del axón se distribuye de manera uniforme a lo largo de él, ¿cuántos coulombs de carga entran en 0.10 mm de longitud del axón? *b*) ¿Qué campo eléctrico (magnitud y dirección) produce la repentina entrada del flujo de carga en la superficie del cuerpo si el axón se localiza 5.00 cm debajo de la piel? *c*) Ciertos tiburones responden a campos eléctricos tan débiles como 1.0 μN/C. ¿A qué distancia de este segmento de axón puede estar un tiburón y aun así detectar su campo eléctrico?

21.49 • En un sistema de coordenadas rectangulares, se coloca una carga puntual positiva $q = 6.00 \times 10^{-9}$ C en el punto $x = +0.150$ m, $y = 0$, y otra carga puntual idéntica se sitúa en $x = -0.150$ m, $y = 0$. Encuentre las componentes x y y, la magnitud y la dirección del campo eléctrico en los siguientes puntos: *a*) el origen; *b*) $x = 0.300$ m, $y = 0$; *c*) $x = 0.150$ m, $y = -0.400$ m; *d*) $x = 0$, $y = 0.200$ m.

21.50 •• Una carga puntual $q_1 = -4.00$ nC se encuentra en el punto $x = 0.600$ m, $y = 0.800$ m; mientras que una segunda carga $q_2 = +6.00$ nC está en el punto $x = 0.600$ m, $y = 0$. Calcule la magnitud y la dirección del campo eléctrico neto en el origen debido a estas dos cargas puntuales.

21.51 •• Repita el ejercicio 21.49 para el caso en que la carga puntual en $x = +0.150$ m, $y = 0$ es positiva y la otra es negativa, cada una con magnitud de 6.00×10^{-9} C.

21.52 •• Un alambre recto y muy largo tiene una carga de 1.50×10^{-10} C/m por unidad de longitud. ¿A qué distancia del alambre la magnitud del campo eléctrico es igual a 2.50 N/C?

21.53 • Un conductor en forma de anillo con radio $a = 2.50$ cm tiene una carga positiva total $Q = +0.125$ nC, distribuida de manera uniforme en toda su circunferencia, como se aprecia en la figura 21.23. El centro del anillo está en el origen de coordenadas O. *a*) ¿Cuál es el campo eléctrico (magnitud y dirección) en el punto P, que está en el eje x en $x = 40.0$ cm? *b*) En el punto P del inciso anterior se coloca una carga puntual $q = -2.50$ μC. ¿Cuáles son la magnitud y la dirección de la fuerza ejercida *por* la carga q *sobre* el anillo?

21.54 •• Un alambre de plástico, aislante y recto, mide 8.50 cm de longitud y tiene una densidad de carga de +175 nC/m, distribuidos de manera uniforme por toda su longitud. Se encuentra sobre una mesa horizontal. *a*) Encuentre la magnitud y la dirección del campo eléctrico que produce este alambre en un punto que está 6.00 cm directamente arriba de su punto medio. *b*) Si el alambre ahora se dobla para formar un círculo que se coloca aplanado sobre la mesa, calcule la magnitud y la dirección del campo eléctrico que produce en un punto que se encuentra 6.00 cm directamente arriba de su centro.

21.55 •• Una carga de −6.50 nC está distribuida de manera uniforme sobre la superficie de una cara de un disco aislante con radio de 1.25 cm. *a*) Obtenga la magnitud y la dirección del campo eléctrico que produce este disco en el punto P sobre el eje del disco a una distancia de 2.00 cm de su centro. *b*) Suponga que toda la carga se colocara lejos del centro y se distribuyera de manera uniforme sobre el borde exterior del disco. Determine la magnitud y la dirección del campo eléctrico en el punto P. *c*) Si toda la carga se lleva al centro del disco, encuentre la magnitud y la dirección del campo eléctrico en el punto P. *d*) ¿Por qué en el inciso *a*) el campo es más fuerte que en el inciso *b*)? ¿Por qué en el inciso *c*) el campo es el más fuerte de los tres?

Sección 21.7 Dipolos eléctricos

21.56 • La molécula del amoniaco (NH_3) tiene un momento dipolar de 5.0×10^{-30} C·m. Se colocan moléculas del amoniaco en fase gaseosa en un campo eléctrico uniforme $\vec{E}$ con magnitud de 1.6×10^6 N/C. *a*) ¿Cuál es el cambio en la energía potencial eléctrica cuando el momento dipolar de una molécula modifica su orientación con respecto a $\vec{E}$ de paralela a perpendicular? *b*) ¿A qué temperatura absoluta T la energía cinética media de traslación, $\frac{3}{2}kT$, de una molécula es igual al cambio en energía potencial calculado en el inciso *a*)? (*Nota:* Arriba de esta temperatura, la agitación térmica impide que los dipolos se alineen con el campo eléctrico).

21.57 • Las cargas puntuales $q_1 = -4.5$ nC y $q_2 = +4.5$ nC están separadas 3.1 mm, y forman un dipolo eléctrico. *a*) Calcule el momento dipolar eléctrico (magnitud y dirección). *b*) Las cargas están en un campo eléctrico uniforme, cuya dirección forma un ángulo de 36.9° con la línea que une las cargas. ¿Cuál es la magnitud de este campo si la torca que ejerce sobre el dipolo tiene una magnitud de 7.2×10^{-9} N · m?

21.58 • El momento dipolar de la molécula de agua (H_2O) es de 6.17 $\times 10^{-30}$ C · m. Considere una molécula de agua localizada en el origen, cuyo momento dipolar $\vec{p}$ apunta en la dirección positiva del eje *x*. Un ion de cloro (Cl^-) de carga -1.60×10^{-19} C está ubicado en $x = 3.00 \times 10^{-9}$ m. Encuentre la magnitud y la dirección de la fuerza eléctrica que la molécula de agua ejerce sobre el ion de cloro. ¿Esta fuerza es de atracción o de repulsión? Suponga que *x* es mucho mayor que la separación *d* entre las cargas en el dipolo, por lo que se puede usar la expresión aproximada para el campo eléctrico a lo largo del eje del dipolo que se obtuvo en el ejemplo 21.14.

21.59 • **Torca sobre un dipolo.** Un dipolo eléctrico con momento dipolar $\vec{p}$ está en un campo eléctrico uniforme $\vec{E}$. *a*) Encuentre las orientaciones del dipolo para el cual la torca sobre el dipolo es igual a cero. *b*) ¿Cuál de las orientaciones en el inciso *a*) es estable, y cuál es inestable? (*Sugerencia:* Considere un pequeño desplazamiento fuera de la posición de equilibrio y analice lo que ocurre). *c*) Demuestre que para la orientación estable del inciso *b*), el propio campo eléctrico del dipolo tiende a oponerse al campo externo.

21.60 •• Considere el dipolo eléctrico del ejemplo 21.14. *a*) Obtenga una expresión para la magnitud del campo eléctrico producido por el dipolo en un punto localizado en el eje *x* de la figura 21.33. ¿Cuál es la dirección de este campo eléctrico? *b*) ¿De qué manera el campo eléctrico, en puntos que están sobre el eje *x*, depende de *x* cuando *x* es muy grande?

21.61 • Tres cargas se encuentran en los vértices de un triángulo isósceles, como se ilustra en la figura E21.61. Las cargas de ±5.00 μC forman un dipolo. *a*) Obtenga la fuerza (magnitud y dirección) que la carga de -10.00 μC ejerce sobre el dipolo. *b*) Para un eje perpendicular a la línea que une las cargas de ±5.00 μC en el punto medio de dicha línea, obtenga la torca (magnitud y dirección) ejercido sobre el dipolo por la carga de -10.00 μC.

Figura **E21.61**

21.62 • Un dipolo que consiste en cargas $\pm e$, separadas 220 nm, se coloca entre dos láminas muy grandes (prácticamente infinitas) que tienen densidades de carga iguales, pero opuestas, de 125 $\mu C/m^2$. *a*) ¿Cuál es la energía potencial máxima que este dipolo puede tener debido a las láminas, y cómo debería orientarse en relación con las láminas para que adquiera ese valor? *b*) ¿Cuál es la torca máxima que las láminas pueden ejercer sobre el dipolo, y cómo debería orientarse con respecto a las láminas para adquirir este valor? *c*) ¿Cuál es la fuerza neta que ejercen las dos láminas sobre el dipolo?

PROBLEMAS

21.63 ••• Se colocan cuatro cargas idénticas *Q* en las esquinas de un cuadrado de lado *L*. *a*) En un diagrama de cuerpo libre, muestre todas las fuerzas que actúan sobre una de las cargas. *b*) Obtenga la magnitud y dirección de la fuerza total ejercida sobre una carga por las otras tres.

21.64 ••• Se colocan dos cargas, una de 2.50 μC y otra de -3.50 μC, sobre el eje *x*, una en el origen y la otra en $x = 0.600$ m, como se muestra en la figura P21.64. Obtenga la posición sobre el eje *x* donde la fuerza neta sobre una pequeña carga $+q$ sería igual a cero.

Figura **P21.64**



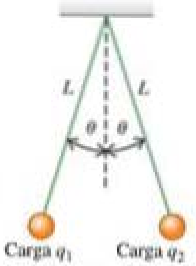
21.65 •• Tres cargas puntuales se encuentran a lo largo del eje *x*. La carga $q_1 = -4.50$ nC se localiza en $x = 0.200$ m, y la carga $q_2 = +2.50$ nC está en $x = -0.300$ m. Una carga puntual positiva q_3 se ubica en el origen. *a*) ¿Cuál debe ser el valor de q_3 para que la fuerza neta sobre esta carga puntual tenga una magnitud igual a 4.00 μN? *b*) ¿Cuál es la dirección de la fuerza neta sobre q_3? *c*) ¿En qué posición sobre el eje *x* se puede colocar q_3 para que la fuerza neta sobre ella sea cero, descartando las respuestas triviales de $x = +\infty$ y $x = -\infty$?

21.66 •• Se coloca una carga $q_1 = +5.00$ nC en el origen de un sistema de coordenadas *xy*, y una carga $q_2 = -2.00$ nC se sitúa sobre la parte positiva del eje *x*, en $x = 4.00$ cm. *a*) Si ahora se coloca una tercera carga $q_3 = +6.00$ nC en el punto $x = 4.00$ cm, $y = 3.00$ cm, determine las componentes *x* y *y* de la fuerza total ejercida sobre esta carga por las otras dos. *b*) Calcule la magnitud y la dirección de esta fuerza.

21.67 •• **PA** Se mantienen fijas dos cargas puntuales positivas *Q* sobre el eje *x* en $x = a$ y $x = -a$. Se coloca una tercera carga puntual, *q*, con masa *m*, sobre el eje *x*, fuera del origen en una coordenada *x* tal que $|x| \ll a$. Después se libera la carga *q*, que tiene libertad de movimiento a lo largo del eje *x*. *a*) Obtenga la frecuencia de oscilación de la carga *q*. (*Sugerencia:* Repase la definición de movimiento armónico simple en la sección 14.2. Utilice la expansión binomial $(1 + z)^n = 1 + nz + n(n-1)z^2/2 + \cdots$, válida para el caso en que $|z| < 1$). *b*) Suponga ahora que la carga *q* se colocara sobre el eje *y* en una coordenada *y* tal que $|y| \ll a$, y luego se liberara. Si esta carga tuviera libertad para moverse a cualquier parte del plano *xy*, ¿qué pasaría con ella? Explique su respuesta.

21.68 •• **PA** Dos esferas idénticas con masa *m* cuelgan de cuerdas de seda con longitud *L*, como se indica en la figura P21.68. Cada esfera tiene la misma carga, por lo que $q_1 = q_2 = q$. El radio de cada esfera es muy pequeño en comparación con la distancia entre las esferas, por lo que pueden considerarse cargas puntuales. Demuestre que si el ángulo *q* es pequeño, la separación de equilibrio *d* entre las esferas es $d = (q^2L/2\pi\epsilon_0 mg)^{1/3}$. (*Sugerencia:* Si θ es pequeño, entonces $\tan\theta = \operatorname{sen}\theta$).

Figura **P21.68**



21.69 ••• **PA** Dos esferas pequeñas con masa $m = 15.0$ g cuelgan de cuerdas de seda con longitud $L = 1.20$ m desde un punto común (figura P21.68). Cuando se da a las esferas cantidades iguales de carga negativa, de modo que $q_1 = q_2 = q$, cada cuerda forma un ángulo $\theta = 25°$ con respecto a la vertical. *a*) Elabore un diagrama que muestre las fuerzas sobre cada esfera. Trate las esferas como cargas puntuales. *b*) Encuentre la magnitud de *q*. *c*) Ahora se acortan ambas cuerdas a una longitud $L = 0.600$ m, en tanto que las cargas q_1 y q_2 permanecen iguales. ¿Qué nuevo ángulo formará cada cuerda con la vertical? (*Sugerencia:* Esta parte del problema se puede resolver numéricamente

usando valores de prueba para q y ajustándolos hasta que se obtenga una respuesta consistente).

21.70 •• PA Dos esferas idénticas están atadas a cuerdas de seda de longitud $L = 0.500$ m y cuelgan de un punto común (figura P21.68). Cada esfera tiene masa $m = 8.00$ g. El radio de cada esfera es muy pequeño en comparación con la distancia entre ambas, por lo que pueden considerarse cargas puntuales. Se da carga positiva q_1 a una esfera, y a la otra carga positiva diferente q_2; esto hace que las esferas se separen, de manera que cuando están en equilibrio cada cuerda forma un ángulo $\theta = 20°$ con la vertical. *a*) Dibuje un diagrama de cuerpo libre para cada esfera cuando hay equilibrio, e indique todas las fuerzas que actúan sobre cada esfera. *b*) Determine la magnitud de la fuerza electrostática que actúa sobre cada esfera y determine la tensión en cada cuerda. *c*) Con base en la información proporcionada, ¿qué puede decirse sobre las magnitudes de q_1 y q_2? Explique sus respuestas. *d*) Ahora se conecta un alambre pequeño entre las esferas, lo cual permite que se transfiera carga de una a otra, hasta que ambas esferas tengan la misma carga; entonces se retira el conductor. Ahora, cada cuerda forma un ángulo de 30.0° con la vertical. Determine las cargas originales. (*Sugerencia:* Se conserva la carga total sobre el par de esferas).

21.71 •• El cloruro de sodio (NaCl, sal de mesa común) está formado por iones de sodio positivos (Na^+) y iones de cloro negativos (Cl^-). *a*) Si una carga puntual, con igual carga y masa que todos los iones de Na^+ en 0.100 moles de NaCl, está a 2.00 cm de una carga puntual con igual carga y masa que todos los iones de Cl^-, *a*) ¿cuál es la magnitud de la fuerza de atracción entre esas dos cargas puntuales? *b*) Si la carga puntual positiva del inciso *a*) se mantiene en su lugar y la carga puntual negativa se libera partiendo del reposo, ¿cuál será su aceleración inicial? (Véase el apéndice D, para las masas atómicas). *c*) ¿Parece razonable que los iones del NaCl puedan separarse de esta manera? ¿Por qué? (De hecho, cuando el cloruro de sodio se disuelve en agua, se separa en iones de Na^+ y Cl^-. Sin embargo, en esta situación hay fuerzas eléctricas adicionales ejercidas por las moléculas de agua sobre los iones).

21.72 •• Una carga puntual de −5.00 nC se encuentra sobre el eje x en $x = 1.20$ m. Una segunda carga puntual Q se ubica sobre el eje x, en $x = -0.60$ m. ¿Cuál debe ser el signo y la magnitud de Q para que el campo eléctrico resultante en el origen sea *a*) 45.00 N/C en la dirección $+x$, *b*) 45.00 N/C en la dirección $-x$?

21.73 •• PA Una bola de plástico pequeña de 12.3 g está sujeta a una cuerda muy ligera de 28.6 cm, el cual, a la vez, está atada a la pared vertical de una habitación (figura P21.73). En esta habitación existe un campo eléctrico horizontal uniforme. Cuando se proporciona a la bola un exceso de carga de −1.11 μC, se observa que permanece suspendida, con un ángulo entre la cuerda y la pared igual a 17.4°. Calcule la magnitud y dirección del campo eléctrico en la habitación.

Figura **P21.73**

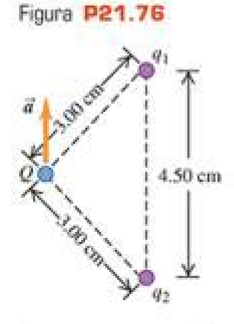
17.4°

21.74 •• PA Cuando $t = 0$, un objeto muy pequeño de masa igual a 0.40 mg y carga +9.00 μC viaja a 125 m/s en la dirección $-x$. La carga se mueve en un campo eléctrico uniforme que tiene dirección $+y$ y magnitud $E = 895$ N/C. Se puede ignorar la fuerza gravitacional sobre la partícula. ¿A qué distancia se encuentra la partícula del origen cuando $t = 7.00$ ms?

21.75 •• Dos partículas que tienen cargas $q_1 = 0.50$ nC y $q_2 = 8.00$ nC se encuentran a una distancia de 1.20 m. ¿En qué punto de la línea que une las dos cargas el campo eléctrico total, debido a las dos cargas, es igual a cero?

21.76 ••• Dos cargas puntuales q_1 y q_2 se colocan a una distancia de 4.50 m entre sí. Otra carga puntual $Q = -1.75$ μC con masa de 5.00 g se sitúa inicialmente a 3.00 cm de cada una de estas cargas (figura P21.76) y se libera a partir del reposo. Usted observa que la aceleración inicial de Q es de 324 m/s² hacia arriba, paralela a la línea que une las dos cargas puntuales. Calcule q_1 y q_2.

Figura **P21.76**



21.77 • Se colocan tres cargas puntuales idénticas q en cada una de tres esquinas de un cuadrado de lado L. Obtenga la magnitud y la dirección de la fuerza neta sobre una carga puntual de $-3q$ que se sitúa *a*) en el centro del cuadrado, y *b*) en la esquina vacía del cuadrado. En cada caso, dibuje un diagrama de cuerpo libre que muestre las fuerzas ejercidas sobre la carga de $-3q$ por cada una de las otras tres cargas.

21.78 ••• Se colocan tres cargas puntuales sobre el eje y: una carga q en $y = a$, una carga $-2q$ en el origen, y una carga q en $y = -a$. Este arreglo se denomina cuadrupolo eléctrico. *a*) Calcule la magnitud y la dirección del campo eléctrico en los puntos sobre la parte positiva del eje x. *b*) Use la expansión binomial para obtener una expresión aproximada para el campo eléctrico, válida para $x \gg a$. Compare este comportamiento con el del campo eléctrico de una carga puntual y con el del campo eléctrico de un dipolo.

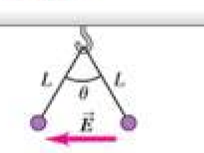
21.79 •• PA **Intensidad de la fuerza eléctrica.** Imagine dos bolsas con 1.0 g de protones, una en el Polo Norte de la Tierra y la otra en el Polo Sur. *a*) ¿Cuántos protones hay en cada bolsa? *b*) Calcule la atracción gravitacional y la repulsión eléctrica que ejerce una bolsa sobre la otra. *c*) ¿Las fuerzas del inciso *b*) son lo suficientemente intensas para que usted las perciba, si sostiene una de las bolsas?

21.80 • **Fuerza eléctrica dentro del núcleo.** Las dimensiones normales de los núcleos atómicos son del orden de 10^{-15} m (1 fm). *a*) Si dos protones en un núcleo están separados por 2.0 fm, encuentre la magnitud de la fuerza eléctrica que cada uno ejerce sobre el otro. Exprese la respuesta en newtons y en libras. ¿Esta fuerza sería lo suficientemente intensa como para que la sintiera un ser humano? *b*) Puesto que los protones se repelen entre sí con mucha intensidad, ¿por qué no salen disparados del núcleo?

21.81 •• **Si los átomos no fueran neutros…** Puesto que las cargas en el electrón y el protón tienen el mismo valor absoluto, los átomos son eléctricamente neutros. Suponga que esto no fuera cierto, y que el valor absoluto de la carga del electrón fuera 0.00100% menor que la carga del protón. *a*) Estime cuál sería la carga neta de este libro en tales circunstancias. Haga todas las suposiciones que considere justificadas, pero especifíquelas. (*Sugerencia:* Considere que la mayoría de los átomos en este libro tienen números iguales de electrones, protones y neutrones). *b*) ¿Cuál sería la magnitud de la fuerza eléctrica entre dos libros separados a 5.0 m? ¿Esta fuerza sería de atracción o de repulsión? Estime cuál sería la aceleración de cada libro, si estuvieran separados por una distancia de 5.0 m y no existieran más que las fuerzas eléctricas sobre ellos. *c*) Analice cómo el hecho de que la materia ordinaria sea estable demuestra que los valores absolutos de las cargas del electrón y protón deben ser idénticas con un grado *muy* alto de exactitud.

21.82 ••• PA Dos esferas diminutas de masa igual a 6.80 mg tienen cargas de igual magnitud,

Figura **P21.82**



72.0 nC, pero de signo contrario. Se atan al mismo gancho del techo con cuerdas ligeras de longitud igual a 0.530 m. Cuando se activa un campo eléctrico horizontal y uniforme E, dirigido a la izquierda, las esferas cuelgan con un ángulo q entre las cuerdas igual a 50° (figura P21.82). *a*) ¿Cuál esfera (la de la derecha o la de la izquierda) tiene carga positiva? *b*) ¿Cuál es la magnitud E del campo?

21.83 •• PA Considere el modelo de un átomo de hidrógeno en el cual un electrón se encuentra en una órbita circular de radio $r = 5.29 \times 10^{-11}$ m alrededor de un protón estacionario. ¿Cuál es la rapidez del electrón en esta órbita?

21.84 •• PA Una pequeña esfera de masa igual a 9.00 μg y carga igual a -4.30 μC se mueve en una órbita circular alrededor de una esfera estacionaria con carga igual a $+7.50$ μC. Si la rapidez de la esfera pequeña es 5.90×10^3 m/s, ¿cuál es el radio de su órbita? Considere las esferas como cargas puntuales e ignore la gravedad.

21.85 •• Dos esferas de cobre pequeñas tienen un radio de 1.00 mm cada una. *a*) ¿Cuántos átomos contiene cada esfera? *b*) Suponga que cada átomo de cobre contiene 29 protones y 29 electrones. Sabemos que los electrones y los protones tienen exactamente cargas de la misma magnitud, pero estudiemos el efecto de diferencias pequeñas (véase también el problema 21.81). Si la carga de un protón es $+e$ y la magnitud de la carga de un electrón fuera 0.100% más pequeña, ¿cuál sería la carga neta de cada esfera y qué fuerza ejercería una esfera sobre la otra, si estuvieran separadas 1.00 m?

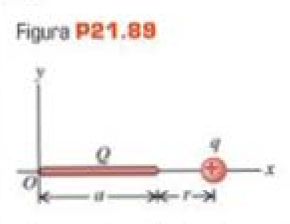
21.86 ••• PA **Operación de una impresora de inyección de tinta.** En una impresora de inyección de tinta, las letras se forman rociando tinta en el papel mediante una boquilla con movimiento rápido. Las gotas de tinta, que tienen una masa de 1.4×10^{-8} g cada una, salen de la boquilla y viajan hacia el papel a 20 m/s, pasando a través de un dispositivo que da a cada gota una carga q positiva al quitarle algunos de sus electrones. Las gotas pasan después entre placas deflectoras paralelas de 2.0 cm de largo, donde hay un campo eléctrico vertical y uniforme con magnitud de 8.0×10^4 N/C. Si una gota se debe desviar 0.30 mm en el momento que alcance el extremo de las placas deflectoras, ¿qué magnitud de carga se tiene que dar a la gota?

21.87 •• PA Un protón se proyecta en un campo eléctrico uniforme que apunta verticalmente hacia arriba y tiene magnitud E. La velocidad inicial del protón tiene una magnitud v_0 y está dirigida con un ángulo α por debajo de la horizontal. *a*) Encuentre la distancia máxima $h_{máx}$ que el protón desciende verticalmente por debajo de su elevación inicial. Ignore las fuerzas gravitacionales. *b*) ¿Después de qué distancia horizontal d el protón regresa a su elevación original? *c*) Elabore un diagrama de la trayectoria del protón. *d*) Encuentre los valores numéricos de $h_{máx}$ y d si $E = 500$ N/C, $v_0 = 4.00 \times 10^5$ m/s y $\alpha = 30°$.

21.88 • Una carga puntual negativa $q_1 = -4.00$ nC está en el eje x en $x = 0.60$ m. Una segunda carga puntual q_2 está sobre el eje x en $x = -1.20$ m. ¿Cuáles deben ser el signo y la magnitud de q_2 para que el campo eléctrico neto en el origen sea de *a*) 50.00 N/C en la dirección $+x$, y de *b*) 50.00 N/C en la dirección $-x$?

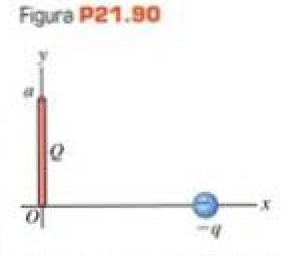
21.89 •• CALC Una carga positiva Q está distribuida de manera uniforme a lo largo del eje x, de $x = 0$ a $x = a$. Una carga puntual positiva q se localiza en la parte positiva del eje x, en $x = a + r$, una distancia r a la derecha del final de Q (figura P21.89). *a*) Calcule las componentes x y y del campo eléctrico producido por la distribución de carga Q en puntos sobre el eje x positivo, donde $x > a$. *b*) Calcule la fuerza (magnitud y dirección) que la distribución de carga Q ejerce sobre q. *c*) Demuestre que si $r \gg a$, la magnitud de la fuerza en el inciso *b*) es aproximadamente $Qq/4\pi\epsilon_0 r^2$. Explique cómo se obtiene este resultado.

Figura **P21.89**



21.90 •• CALC Una carga positiva Q está distribuida de manera uniforme a lo largo del eje y positivo entre $y = 0$ y $y = a$. Una carga puntual negativa $-q$ se encuentra sobre la parte positiva del eje x, a una distancia x del origen (figura P21.90). *a*) Calcule las componentes x y y del campo eléctrico producido por la distribución de carga Q en puntos sobre la parte positiva del eje x. *b*) Calcule las componentes x y y de la fuerza que la distribución de carga Q ejerce sobre q. *c*) Demuestre que si $x \gg a$, $F_x \cong -Qq/4\pi\epsilon_0 x^2$ y $F_y \cong +Qqa/8\pi\epsilon_0 x^3$. Explique por qué se obtiene este resultado.

Figura **P21.90**



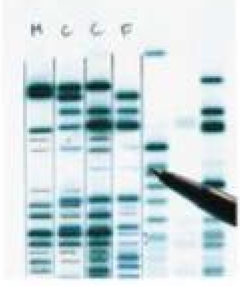
21.91 •• Una línea de carga como la que aparece en la figura 21.24 se extiende desde $y = 2.50$ cm hasta $y = -2.50$ cm. La carga total distribuida de manera uniforme en la línea es -7.00 nC. *a*) Calcule el campo eléctrico (magnitud y dirección) sobre el eje x en $x = 10.0$ cm. *b*) ¿La magnitud del campo eléctrico que usted calculó en el inciso *a*) es mayor o menor que el campo eléctrico a 10.0 cm de una carga puntual que tiene la misma carga total en esa línea finita de carga? Explique por qué sucede esto, en términos de la aproximación usada con la finalidad de obtener $E = Q/4\pi\epsilon_0 x^2$ para una carga puntual de la ecuación (21.9). *c*) ¿A qué distancia x el resultado para la línea finita de carga difiere en 1.0% del de la carga puntual?

21.92 • PA **Un universo paralelo.** Imagine un universo paralelo donde la fuerza eléctrica tiene las mismas propiedades que en el nuestro, pero no hay gravedad. En este universo paralelo, el Sol tiene una carga Q, la Tierra tiene una carga $-Q$, y la atracción eléctrica entre ellos mantiene a nuestro planeta en órbita. La Tierra en el universo paralelo tiene la misma masa, el mismo radio orbital y el mismo periodo orbital que en nuestro universo. Calcule el valor de Q. (Consulte el apéndice F, si es necesario).

21.93 ••• Un disco con carga uniforme como el de la figura 21.25 tiene un radio de 2.50 cm y una carga total de 7.0×10^{-12} C. *a*) Obtenga el campo eléctrico (magnitud y dirección) sobre el eje x en $x = 20.0$ cm. *b*) Demuestre que para $x \gg R$, la ecuación (21.11) se convierte en $E = Q/4\pi\epsilon_0 x^2$, donde Q es la carga total en el disco. *c*) ¿La magnitud del campo eléctrico que usted obtuvo en el inciso *a*) es mayor o menor que la magnitud del campo eléctrico que está a 20.0 cm de una carga puntual que tiene la misma carga total que este disco? Explique por qué ocurre esto en términos de la aproximación usada en el inciso *b*) con la finalidad de obtener $E = Q/4\pi\epsilon_0 x^2$ para una carga puntual a partir de la ecuación (21.11). *d*) ¿Cuál es la diferencia porcentual entre los campos eléctricos producidos por el disco finito y por una carga puntual con la misma carga en $x = 20.0$ cm y en $x = 10.0$ cm?

21.94 •• BIO **Electroforesis.** La electroforesis es un proceso usado por los biólogos para separar moléculas biológicas diferentes (como las de las proteínas) unas de otras, de acuerdo con la razón carga/tamaño. Los materiales que se van a separar están inmersos en una solución viscosa que produce una fuerza de arrastre F_D proporcional al tamaño y la rapidez de la molécula. Esta relación se expresa como $F_D = KRv$, donde R es el radio de la molécula (modelada como esférica), v es su rapidez, y K es una constante que depende de la viscosidad de la solución. La solución se coloca en un campo eléctrico externo E de modo que la fuerza eléctrica sobre


Figura **P21.94**



una partícula de carga q es $F = qE$. *a*) Demuestre que cuando el campo eléctrico se ajusta de manera que las dos fuerzas (eléctrica y de arrastre por la viscosidad) se equilibran, la razón de q a R es Kv/E. *b*) Demuestre que si dejamos el campo eléctrico activado por un tiempo t, la distancia x que se mueve la molécula durante ese tiempo es $x = (Et/k)(q/R)$. *c*) Suponga que tiene una muestra con tres moléculas biológicas diferentes en la cual la razón molecular q/R del material 2 es el doble de la del material 1, y la razón molecular del material 3 es tres veces la del material 1. Demuestre que las distancias recorridas por estas moléculas después de la misma cantidad de tiempo son $x_2 = 2x_1$ y $x_3 = 3x_1$. En otras palabras, el material 2 viaja el doble que el material 1, y el material 3 viaja el triple que el material 1. Por lo tanto, hemos separado estas moléculas de acuerdo con su razón entre carga y tamaño. En la práctica, este proceso se puede realizar con un gel o papel especial, a lo largo de los cuales migran las moléculas biológicas (figura P21.94). El proceso puede ser lento y requerir varias horas para separaciones de un centímetro más o menos.

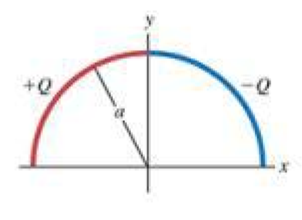
21.95 • **CALC** Una carga positiva $+Q$ está distribuida de manera uniforme a lo largo del eje $+x$, de $x = 0$ a $x = a$. Una carga negativa $-Q$ está distribuida de modo también uniforme a lo largo del eje $-x$, de $x = 0$ a $x = -a$. *a*) Una carga puntual positiva q está sobre el eje y positivo, a una distancia y del origen. Encuentre la fuerza (magnitud y dirección) que las distribuciones de carga positiva y negativa ejercen juntas sobre q. Demuestre que esta fuerza es proporcional a y^{-3} para $y \gg a$. *b*) Suponga que la carga puntual positiva q está sobre el eje x positivo, a una distancia $x > a$ del origen. Encuentre la fuerza (magnitud y dirección) que la distribución de carga ejerce sobre q. Demuestre que esta fuerza es proporcional a x^{-3} para $x \gg a$.

21.96 •• **PA** Una esfera pequeña con masa m tiene una carga positiva q y está atada a un extremo de una cuerda de seda de longitud L. El otro extremo de la cuerda está atado a una lámina aislante, vertical y grande, que tiene una densidad de carga superficial positiva σ. Demuestre que cuando la esfera está en equilibrio, la cuerda forma un ángulo igual a arctan $(q\sigma/2mg\epsilon_0)$ con la lámina vertical.

21.97 •• **CALC** La carga negativa $-Q$ está distribuida de manera uniforme alrededor de un cuarto de círculo de radio a que se encuentra en el primer cuadrante, con el centro de curvatura en el origen. Calcule las componentes x y y del campo eléctrico neto en el origen.

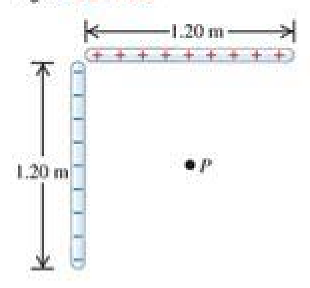
21.98 •• **CALC** Un semicírculo de radio a se encuentra en los cuadrantes primero y segundo, con el centro de curvatura en el origen. La carga positiva $+Q$ está distribuida de manera uniforme alrededor de la mitad izquierda del semicírculo, y la carga negativa $-Q$ está distribuida de manera uniforme alrededor de la mitad derecha del semicírculo (figura P21.98). ¿Cuáles son la magnitud y dirección del campo eléctrico neto en el origen generado por esta distribución de carga?

Figura **P21.98**



21.99 •• Dos alambres no conductores de 1.20 m forman un ángulo recto. Un segmento tiene $+2.50$ μC de carga, distribuida de modo uniforme por toda su longitud; el otro segmento tiene -2.50 μC de carga, distribuida de modo uniforme por toda su longitud, como se ilustra en la figura P21.99. *a*) Encuentre la magnitud y la dirección del campo eléctrico que producen estos alambres en el punto P, que está a 60.0 cm de cada alambre. *b*) Si un electrón se libera en P, ¿cuáles son la magnitud y la dirección de la fuerza neta que ejercen estos alambres sobre él?

Figura **P21.99**



21.100 • Dos láminas paralelas muy grandes están separadas 5.00 cm. La lámina A tiene una densidad de carga superficial uniforme de -9.50 μC/m^2; y la lámina B, que está a la derecha de A, tiene una densidad de carga uniforme de -11.60 μC/m^2. Suponga que las láminas son lo suficientemente grandes como para considerarse infinitas. Encuentre la magnitud y la dirección del campo eléctrico neto que estas láminas producen en un punto *a*) 4.00 cm a la derecha de la lámina A; *b*) 4.00 cm a la izquierda de la lámina A; *c*) 4.00 cm a la derecha de la lámina B.

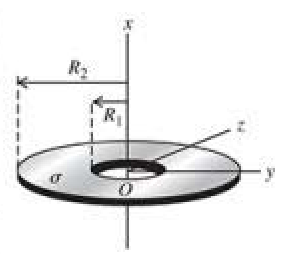
21.101 • Repita el problema 21.100 para el caso en que la lámina B sea positiva.

21.102 • Dos láminas horizontales muy grandes están separadas 4.25 cm y tienen densidades superficiales de carga uniforme, iguales pero de signo contrario, de magnitud σ. Usted desea usar las láminas para mantener estacionaria en la región entre ellas una gotita de aceite con masa de 324 μg, que tiene cinco electrones excedentes. Suponiendo que la gotita está en el vacío, *a*) ¿cuál debería ser la dirección del campo eléctrico entre las placas, y *b*) cuál debería ser el valor de σ?

21.103 •• Una lámina infinita con carga positiva por unidad de área σ está en el plano xy. Una segunda lámina infinita con carga negativa por unidad de área $-\sigma$ está en el plano yz. Encuentre el campo eléctrico neto en todos los puntos que no estén en ninguno de esos planos. Exprese su respuesta en términos de los vectores unitarios $\hat{\imath}$, $\hat{\jmath}$ y $\hat{k}$.

21.104 •• **PA** Un disco delgado con un agujero circular en el centro, llamado *corona circular*, tiene un radio interior R_1 y un radio exterior R_2 (figura P21.104). El disco tiene una densidad de carga superficial uniforme y positiva σ en su superficie. *a*) Determine la carga eléctrica total en la corona circular. *b*) La corona circular se encuentra en el plano yz, con su centro en el origen. Para un punto arbitrario en el eje x (el eje de la corona circular), encuentre la magnitud y la dirección del campo eléctrico $\vec{E}$. Considere puntos arriba y abajo de la corona circular en la figura P21.104. *c*) Demuestre que en puntos sobre el eje x que estén suficientemente cerca del origen, la magnitud del campo eléctrico es aproximadamente proporcional a la distancia entre el centro de la corona circular y el punto. ¿Qué tan cerca es "suficientemente cerca"? *d*) Una partícula puntual con masa m y carga negativa $-q$ tiene libertad de movimiento a lo largo del eje x (pero no puede apartarse del eje). Originalmente, la partícula está en reposo en $x = 0.01R_1$ y luego se libera. Encuentre la frecuencia de oscilación de la partícula. (*Sugerencia:* Repase la sección 14.2. La corona circular permanece estacionaria).

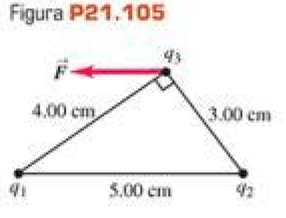

Figura **P21.104**



PROBLEMAS DE DESAFÍO

21.105 ••• Tres cargas se colocan como se ilustra en la figura P21.105. La magnitud de q_1 es 2.00 μC, pero no se conocen su signo ni el valor de la carga q_2. La carga q_3 es de $+4.00$ μC, y la fuerza neta $\vec{F}$ sobre q_3 está por completo en la dirección negativa del eje x. *a*) Considere los diferentes signos posibles de q_1, y que hay cuatro posibles diagramas de

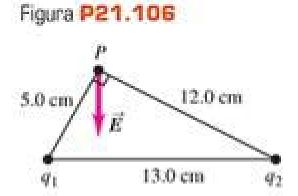
Figura **P21.105**



fuerza que representan las fuerzas $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$ que q_1 y q_2 ejercen sobre q_3. Dibuje esas cuatro configuraciones de fuerza posibles. *b*) Con base en los diagramas del inciso *a*) y la dirección de $\vec{F}$, deduzca los signos de las cargas q_1 y q_2. *c*) Calcule la magnitud de q_2. *d*) Determine F, la magnitud de la fuerza neta sobre q_3.

21.106 ··· Dos cargas se colocan como se muestra en la figura P21.106. La magnitud de q_1 es 3.00 μC, pero se desconocen el signo y el valor de la carga q_2. La dirección del campo eléctrico neto $\vec{E}$ en el punto P está por completo en la dirección negativa del eje y. *a*) Considerando los posibles signos diferentes de q_1 y q_2, hay cuatro posibles diagramas que podrían representar los campos eléctricos $\vec{E}_1$ y $\vec{E}_2$ producidos por q_1 y q_2. Dibuje las cuatro posibles configuraciones de campo eléctrico. *b*) Con base en los diagramas del inciso *a*) y la dirección de $\vec{E}$, deduzca los signos de q_1 y q_2. *c*) Determine la magnitud de $\vec{E}$.

Figura **P21.106**



21.107 ··· CALC Dos varillas delgadas de longitud L están a lo largo del eje x, una entre $x = a/2$ y $x = a/2 + L$, y la otra entre $x = -a/2$ y $x = -a/2 - L$. Cada varilla tiene carga positiva Q distribuida de manera uniforme en toda su longitud. *a*) Calcule el campo eléctrico producido por la segunda varilla en puntos a lo largo del eje x positivo. *b*) Demuestre que la magnitud de la fuerza que ejerce una varilla sobre la otra es

$$F = \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 L^2}\ln\left[\frac{(a+L)^2}{a(a+2L)}\right]$$

c) Demuestre que si $a \gg L$, la magnitud de esta fuerza se reduce a $F = Q^2/4\pi\epsilon_0 a^2$. (*Sugerencia:* Use la expansión $\ln(1+z) = z - z^2/2 + z^3/3 - \cdots$, válida para $|z| \ll 1$. Considere *todas* las expansiones al menos hasta el orden L^2/a^2. Interprete este resultado.

Respuestas

Pregunta inicial del capítulo



Las moléculas de agua tienen un momento dipolar eléctrico permanente: un extremo de la molécula tiene carga positiva y el otro tiene carga negativa. Estos extremos atraen iones negativos y positivos, respectivamente, y los mantienen separados en la solución. El agua es menos eficaz como solvente para materiales cuyas moléculas no se ionizan (llamadas sustancias *no iónicas*), como los aceites.

Preguntas de las secciones
Evalúe su comprensión

21.1 Respuestas: *a*) la varilla de plástico pesa más, *b*) la varilla de vidrio pesa menos, *c*) la piel pesa menos, *d*) la seda pesa más La varilla de plástico obtiene una carga negativa al tomar electrones de la piel, por lo que la varilla pesa un poco más y la piel pierde un poco de peso después del frotamiento. En contraste, la varilla de vidrio obtiene una carga positiva porque cede electrones a la seda, así que después de frotarse, la varilla de vidrio pesa un poco menos, y la seda un poco más. El cambio en el peso es *muy* pequeño: el número de electrones transferidos es una fracción pequeña del mol, y un mol de electrones tiene una masa de tan solo $(6.02 \times 10^{23}$ electrones$)(9.11 \times 10^{-31}$ kg/electrón$) = 5.48 \times 10^{-7}$ kg = ¡0.548 miligramos!

21.2 Respuestas: *a*) i, *b*) ii. Antes de que las dos esferas se toquen, la esfera con carga negativa ejerce una fuerza de repulsión sobre los electrones de la otra esfera, lo cual origina zonas de carga inducida negativa y positiva (véase la figura 21.7*b*). La zona positiva está más cerca de la esfera cargada negativamente que la zona negativa, por lo que hay una fuerza neta de atracción que jala a las esferas una hacia la otra, como en el caso del peine y el aislante de la figura 21.8*b*. Una vez que se tocan las dos esferas metálicas, algo del exceso de electrones de la esfera con carga negativa fluirá hacia la otra esfera (porque los metales son conductores). Entonces, las dos esferas tendrán una carga negativa neta y se repelerán mutuamente.

21.3 Respuesta: iv. La fuerza ejercida por q_1 sobre Q es como en el ejemplo 21.4. La magnitud de la fuerza ejercida por q_2 sobre Q aún es igual a $F_{1 \text{ sobre } Q}$, pero la dirección de la fuerza ahora es *hacia* q_2 con un ángulo α por debajo del eje x. Entonces, las componentes x de las dos fuerzas se anulan, mientras que las componentes y (negativas) se suman, y la fuerza eléctrica total ocurre en la dirección negativa del eje y.

21.4 Respuestas: *a*) ii, *b*) i. El campo eléctrico $\vec{E}$ producido por una carga puntual positiva apunta directamente alejándose de la carga (véase la figura 21.18*a*) y tiene una magnitud que depende de la distancia r entre la carga y el punto del campo. De ahí que una segunda carga puntual negativa, $q < 0$, recibirá una fuerza $\vec{F} = q\vec{E}$ que apunta directamente hacia la carga positiva y tiene una magnitud que depende de la distancia r entre las dos cargas. Si la carga negativa se mueve directamente hacia la carga positiva, la dirección de la fuerza permanece igual, pero la magnitud de la fuerza se incrementa a medida que disminuye la distancia r. Si la carga negativa se mueve en círculo alrededor de la carga positiva, la magnitud de la fuerza permanece igual (porque la distancia r es constante), pero la dirección de la fuerza cambia.

21.5 Respuesta: iv. Piense en un par de segmentos de longitud dy, uno en la coordenada $y > 0$ y el otro en la coordenada $-y < 0$. El segmento superior tiene carga positiva y produce un campo eléctrico $d\vec{E}$ en P, que apunta alejándose del segmento, por lo que $d\vec{E}$ tiene una componente x positiva y una componente y negativa, como el vector $d\vec{E}$ en la figura 21.24. El segmento inferior tiene la misma cantidad de carga negativa. Produce una $d\vec{E}$ que tiene la misma magnitud pero apunta *hacia* el segmento inferior, así que tiene una componente x negativa y una componente y también negativa. Por simetría, las dos componentes x son iguales pero opuestas, de manera que se cancelan. Por lo tanto, el campo eléctrico total únicamente tiene una componente y negativa.

21.6 Respuesta: sí Cuando las líneas de campo son rectas, $\vec{E}$ debe apuntar en la misma dirección a través de la región. De ahí que la fuerza $\vec{F} = q\vec{E}$ sobre una partícula de carga q siempre esté en la misma dirección. Una partícula que parte del reposo acelera en línea recta en la dirección de $\vec{F}$, por lo que su trayectoria es una línea recta a lo largo de una línea de campo.

21.7 Respuesta: ii. Las ecuaciones (21.17) y (21.18) indican que la energía potencial para un dipolo en un campo eléctrico es $U = -\vec{p}\cdot\vec{E} = -pE\cos\phi$, donde ϕ es el ángulo entre las direcciones de $\vec{p}$ y $\vec{E}$. Si $\vec{p}$ y $\vec{E}$ apuntan en direcciones opuestas, de manera que $\phi = 180°$, entonces $\cos\phi = -1$ y $U = +pE$. Este es el valor máximo que puede tener U. De nuestro análisis de los diagramas de energía en la sección 7.5, se deduce que se trata de una situación de equilibrio inestable.

Problema práctico

Respuesta: $E = 2kQ/\pi a^2$ en dirección de $-y$



LEY DE GAUSS



? Esta niña adquiere una carga eléctrica al tocar la esfera metálica con carga. Los cabellos cargados en su cabeza se repelen y se levantan. Si la niña estuviera dentro de una esfera de metal grande y con carga, ¿sus cabellos se levantarían?

OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

Al estudiar este capítulo, usted aprenderá:

- A determinar la cantidad de carga dentro de una superficie cerrada examinando el campo eléctrico en la superficie.
- Cuál es el significado de flujo eléctrico y cómo se calcula.
- Cómo la ley de Gauss relaciona el flujo eléctrico a través de una superficie cerrada con la carga encerrada por la superficie.
- Cómo se usa la ley de Gauss para calcular el campo eléctrico debido a una distribución simétrica de la carga.
- Dónde se localiza la carga en un conductor cargado.

En general, existe un modo fácil y otro difícil de efectuar un trabajo; el modo fácil tal vez solo requiera el empleo de las herramientas correctas. En física las *propiedades de simetría* de los sistemas constituyen una herramienta importante para simplificar los problemas. Muchos sistemas físicos tienen simetría; por ejemplo, un cuerpo cilíndrico no se ve distinto después de hacerlo girar sobre su eje, y una esfera de metal con carga se ve igual después que se ha hecho girar alrededor de cualquier eje que pase por su centro.

La ley de Gauss es parte de la clave para utilizar consideraciones de simetría que simplifican los cálculos del campo eléctrico. Por ejemplo, el campo de una distribución de carga en una línea recta o en una lámina plana, que se obtuvo en la sección 21.5 resolviendo algunas integrales un tanto difíciles, se obtiene en unos cuantos renglones con ayuda de la ley de Gauss. Sin embargo, la ley de Gauss es algo más que un método para realizar ciertos cálculos con facilidad. En realidad, es un enunciado fundamental acerca de la relación que existe entre las cargas eléctricas y los campos eléctricos. Entre otras cosas, la ley de Gauss ayuda a entender cómo se distribuye la carga en los cuerpos conductores.

La ley de Gauss se trata de lo siguiente. Dada cualquier distribución general de carga, se rodea con una superficie imaginaria que la encierre y luego se observa el campo eléctrico en distintos puntos de esa superficie imaginaria. La ley de Gauss es una relación entre el campo en *todos* los puntos de la superficie y la carga total que esta encierra. Tal vez esto suene como una forma indirecta de expresar los fenómenos, pero es una relación sumamente útil. Más allá de su empleo como herramienta de cálculo, la ley de Gauss ayuda a tener una comprensión más profunda de los campos eléctricos. En varios de los siguientes capítulos recurriremos continuamente a esta comprensión conforme avancemos en el estudio del electromagnetismo.

22.1 Carga y flujo eléctrico

En el capítulo 21 se planteó la siguiente pregunta: "Dada una distribución de carga, ¿cuál es el campo eléctrico que produce esa distribución en un punto *P*?". Vimos que la respuesta podía encontrarse si se representaba la distribución como un conjunto de

En esta sección la discusión de la ley de Gauss se basa e inspira en las ideas innovadoras de Ruth W. Chabay y Bruce A. Sherwood, en su obra *Electric and Magnetic Interactions* (John Wiley & Sons, 1994).



ActivPhysics 11.7: Electric Flux

cargas puntuales, cada una de las cuales producía un campo eléctrico $\vec{E}$ dado por la ecuación (21.7). Así, el campo total en P es la suma vectorial de los campos debidos a todas las cargas puntuales.

Pero existe una relación alternativa entre las distribuciones de carga y los campos eléctricos. Para descubrir esta relación, hagamos la pregunta del capítulo 21 a la inversa: "Si se conoce el patrón del campo eléctrico en una región específica, ¿qué podemos deducir acerca de la distribución de carga en esa región?".

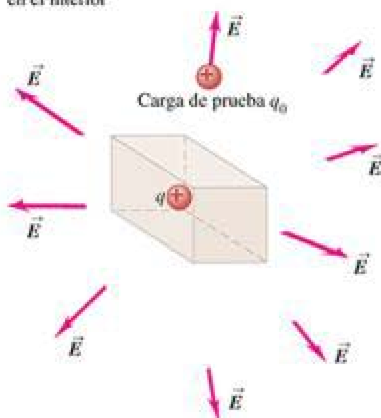
He aquí un ejemplo. Considere la caja que se ilustra en la figura 22.1*a*, que puede contener o no una carga eléctrica. Imagine que la caja está construida con un material que no tiene ningún efecto sobre el campo eléctrico; este es un recurso como los conceptos de la cuerda con masa despreciable y el plano inclinado libre de fricción. Mejor aún, dejemos que la caja represente una superficie *imaginaria* que puede encerrar o no cierta carga. Llamaremos a la caja una **superficie cerrada**, ya que encierra por completo un volumen. ¿Cómo se puede determinar cuánta carga eléctrica (si es que la hay) se encuentra dentro de la caja?

22.1 ¿Cómo se podría medir la carga dentro de una caja sin abrirla?

a) Caja que contiene una cantidad desconocida de carga



b) Uso de una carga de prueba, afuera de la caja, para determinar la cantidad de carga que hay en el interior



Como sabemos que una distribución de carga produce un campo eléctrico y que este ejerce una fuerza sobre una carga de prueba, se mueve una carga de prueba q_0 en torno a las proximidades de la caja. Con la medición de la fuerza $\vec{F}$ experimentada por la carga de prueba en diferentes posiciones, se elabora un mapa tridimensional del campo eléctrico $\vec{E} = \vec{F}/q_0$ fuera de la caja. En el caso que se ilustra en la figura 22.1*b*, el mapa resulta ser el mismo que el del campo eléctrico producido por una carga puntual positiva (figura 21.28*a*). A partir de los detalles del mapa, es posible determinar el valor exacto de la carga puntual dentro de la caja.

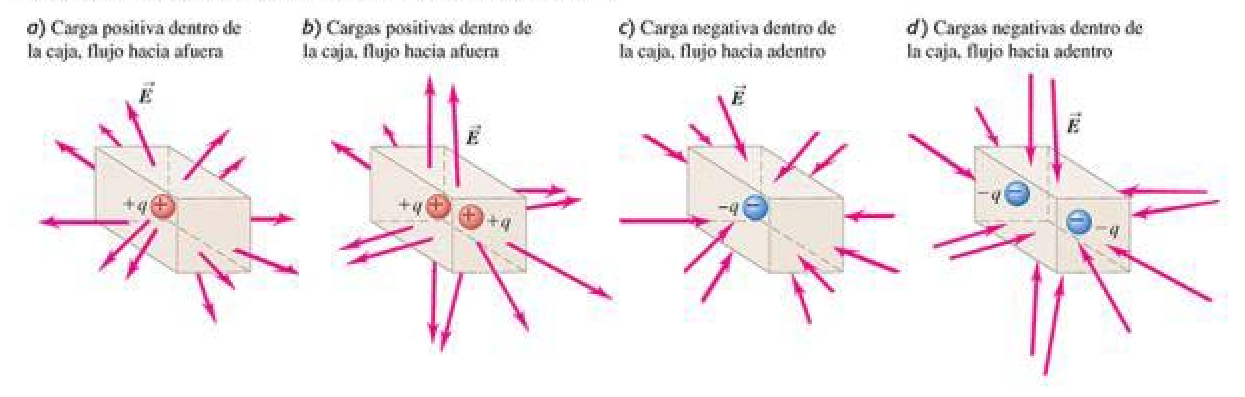
Para determinar el contenido de la caja, en realidad solo se necesita medir $\vec{E}$ en la *superficie* de la caja. En la figura 22.2*a* hay una sola carga puntual *positiva* en el interior de la caja, y en la figura 22.2*b* hay dos de esas cargas. Los patrones de campo en las superficies de las cajas son diferentes en sus detalles, pero en ambos casos el campo eléctrico apunta hacia *afuera* de la caja. Las figuras 22.2*c* y 22.2*d* ilustran casos con una y dos cargas puntuales *negativas*, respectivamente, dentro de la caja. Una vez más, los detalles de $\vec{E}$ son distintos, pero en los dos casos el campo apunta *hacia* la caja.

Flujo eléctrico y carga encerrada

En la sección 21.4 se mencionó la analogía entre los vectores campo eléctrico y los vectores velocidad de un fluido en movimiento. Esta analogía resulta útil aun cuando los campos eléctricos no "fluyen" en realidad. Empleando esta analogía, en las figuras 22.2*a* y 22.2*b*, en las que los vectores campo eléctrico apuntan hacia afuera de la superficie, decimos que existe un **flujo eléctrico** *saliente*. En las figuras 22.2*c* y 22.2*d*, los vectores $\vec{E}$ se dirigen hacia la superficie, y el flujo eléctrico es *entrante*.

La figura 22.2 sugiere una relación sencilla: la carga positiva dentro de la caja corresponde a un flujo eléctrico saliente a través de la superficie de la caja, y la carga negativa en el interior corresponde a un flujo eléctrico entrante. ¿Qué sucede si la carga dentro de la caja es *cero*? En la figura 22.3*a* la caja está vacía y $\vec{E} = \mathbf{0}$ en cual-

22.2 El campo eléctrico sobre la superficie de las cajas contiene *a*) una sola carga puntual positiva, *b*) dos cargas puntuales positivas, *c*) una sola carga puntual negativa, o *d*) dos cargas puntuales negativas.



quier lugar, por lo que no hay flujo eléctrico hacia el interior o exterior de la caja. En la figura 22.3*b*, dentro de la caja hay una carga positiva y otra negativa de la misma magnitud, por lo que la carga *neta* en el interior es igual a cero. Hay un campo eléctrico, pero "fluye hacia adentro" de la caja en la mitad de su superficie y "fluye hacia afuera" de la caja en la otra mitad. Por lo tanto, no hay flujo eléctrico *neto* hacia adentro o hacia afuera de la caja.

En la figura 22.3*c*, la caja de nuevo está vacía. Sin embargo, hay una carga presente *afuera* de la caja; dicha caja se ha colocado con una de sus caras paralela a una lámina infinita cargada uniformemente que produce un campo eléctrico uniforme perpendicular a la lámina (como se vio en el ejemplo 21.11 de la sección 21.5). En una cara de la caja, apunta hacia la caja; en la del extremo opuesto, $\vec{E}$ apunta hacia afuera de la caja; y en los lados, $\vec{E}$ es paralelo a la superficie, por lo que no apunta hacia adentro ni hacia afuera de la caja. Como sucede en la figura 22.3*b*, el flujo eléctrico hacia el interior en una parte de la caja compensa con exactitud al flujo eléctrico que va hacia el exterior en la otra parte. De manera que en todos los casos que se ilustran en la figura 22.3, no hay un flujo eléctrico *neto* a través de la superficie de la caja, y ninguna carga *neta* está encerrada en ella.

Las figuras 22.2 y 22.3 ponen de manifiesto una vinculación entre el *signo* (positivo, negativo o cero) de la carga *neta* contenida dentro de una superficie cerrada y el sentido (saliente, entrante o ninguno) del flujo eléctrico neto a través de la superficie. Asimismo, existe una conexión entre la *magnitud* de la carga neta dentro de la superficie cerrada y la *intensidad* del "flujo" neto de $\vec{E}$ sobre la superficie. Tanto en la figura 22.4*a* como en la 22.4*b*, hay una sola carga puntual en el interior de la caja, pero en la figura 22.4*b* la magnitud de la carga es el doble de grande, por lo que $\vec{E}$ tiene en todo lugar el doble de magnitud que en la figura 22.4*a*. Si tenemos en mente la analogía con el flujo de fluidos, esto significa que el flujo eléctrico saliente neto también es dos veces mayor en la figura 22.4*b* que en la 22.4*a*. Esto sugiere que el flujo eléctrico neto a través de la superficie de la caja es *directamente proporcional* a la magnitud de la carga neta encerrada en la caja.

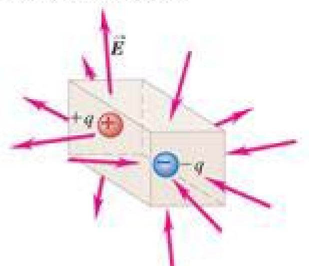
Esta conclusión es independiente del tamaño de la caja. En la figura 22.4*c* la carga puntual $+q$ está encerrada por una caja con dimensiones lineales que duplican las de la caja de la figura 22.4*a*. La magnitud del campo eléctrico de una carga puntual disminuye con la distancia de acuerdo con $1/r^2$, de manera que la magnitud media de $\vec{E}$ en cada cara de la caja grande en la figura 22.4*c* es solo $\frac{1}{4}$ de la magnitud media en la cara correspondiente en la figura 22.4*a*. Pero cada cara de la caja grande tiene exactamente el cuádruple del área de la cara correspondiente de la caja pequeña. Por lo tanto, el flujo eléctrico saliente de la caja es *igual* para las dos cajas si el flujo eléctrico se *define* como sigue: con respecto a cada cara de la caja, hay que tomar el producto de la componente perpendicular media de $\vec{E}$ por el área de esa cara; luego se suman los resultados de todas las caras de la caja. Con esta definición, el flujo eléctrico neto debido a una sola carga puntual dentro de la caja es independiente del tamaño de esta y solo depende de la carga neta en el interior.

22.3 Tres casos en los que hay una carga *neta* igual a cero en el interior de la caja, y no hay flujo eléctrico neto a través de la superficie de esta. *a*) Caja vacía con $\vec{E} = \mathbf{0}$. *b*) Caja que contiene una carga puntual positiva y una negativa de igual magnitud. *c*) Caja vacía inmersa en un campo eléctrico uniforme.

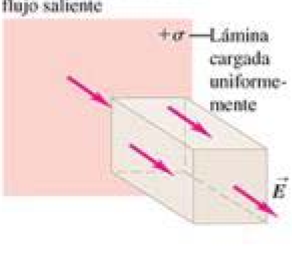
a) Caja que contiene una cantidad desconocida de carga



b) Hay una carga *neta* igual a cero en el interior de la caja; el flujo entrante cancela el flujo saliente

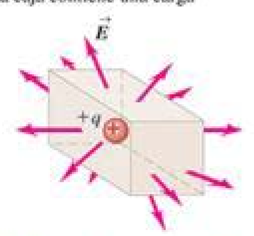


c) No hay carga dentro de la caja; el flujo entrante cancela el flujo saliente

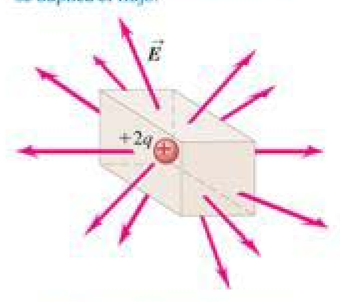


22.4 *a*) Caja que encierra una carga puntual positiva $+q$. *b*) La duplicación de la carga ocasiona que la magnitud de $\vec{E}$ se duplique, lo que también duplica el flujo eléctrico a través de la superficie. *c*) Si la carga permanece igual, pero las dimensiones de la caja se duplican, el flujo permanece sin cambio. La magnitud de $\vec{E}$ sobre la superficie disminuye en un factor de $\frac{1}{4}$, pero el área a través de la que "fluye" $\vec{E}$ aumenta en un factor de 4.

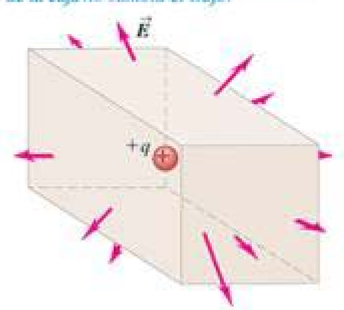
a) La caja contiene una carga



b) Al duplicarse la carga encerrada se duplica el flujo.



c) La duplicación de las dimensiones de la caja *no cambia* el flujo.



Resumiendo, para los casos especiales de una superficie cerrada en forma de caja rectangular y distribuciones de carga debidas a cargas puntuales o láminas infinitas con carga, se tiene lo siguiente:

1. La existencia de un flujo eléctrico neto hacia el exterior o hacia el interior de una superficie cerrada depende del signo de la carga encerrada.
2. Las cargas *afuera* de la superficie no provocan un flujo eléctrico neto a través de la superficie.
3. El flujo eléctrico neto es directamente proporcional a la cantidad neta de carga contenida dentro de la superficie, pero es independiente del tamaño de la superficie cerrada.

Estas observaciones constituyen el planteamiento cualitativo de la *ley de Gauss*.

¿Son válidas estas observaciones para otras clases de distribuciones de carga y para superficies cerradas de forma arbitraria? Se demostrará que la respuesta a estas preguntas es afirmativa. Pero para explicar por qué esto es así, se necesita contar con un enunciado matemático preciso de lo que significa el flujo eléctrico; de ello nos ocuparemos en la siguiente sección.

Evalúe su comprensión de la sección 22.1 Si todas las dimensiones de la caja de la figura 22.2*a* se incrementaran en un factor de 3, ¿qué efecto tendría este cambio en el flujo eléctrico a través de la caja? **i.** El flujo sería $3^2 = 9$ veces mayor; **ii.** el flujo sería 3 veces más grande; **iii.** el flujo permanecería sin cambio; **iv.** el flujo sería $\frac{1}{3}$ menor; **v.** el flujo sería $\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$ menor; **vi.** no hay información suficiente para determinarlo.

22.2 Cálculo del flujo eléctrico

En la sección anterior presentamos el concepto de *flujo eléctrico*, el cual se utilizó para formular un enunciado cualitativo de la ley de Gauss: el flujo eléctrico neto a través de una superficie cerrada es directamente proporcional a la carga neta en el interior de esa superficie. Para aprovechar al máximo esta ley, es necesario saber cómo *calcular* el flujo eléctrico. Para ello, se empleará de nuevo la analogía entre un campo eléctrico $\vec{E}$ y el campo de los vectores velocidad $\vec{v}$ de un fluido en movimiento. (De nuevo, recuerde que esto solo es una analogía; un campo eléctrico *no* es un flujo).

Flujo: Analogía del fluido en movimiento

La figura 22.5 ilustra un fluido en movimiento estable de izquierda a derecha. Examinemos la razón volumétrica de flujo dV/dt (digamos, en metros cúbicos por segundo) a través del alambre rectangular de área A. Cuando el área es perpendicular a la velocidad $\vec{v}$ del flujo (figura 22.5*a*) y la velocidad de flujo es la misma en todos los puntos del fluido, la razón volumétrica de flujo dV/dt es el área A multiplicada por la rapidez v del flujo:

$$\frac{dV}{dt} = vA$$

Cuando el rectángulo se encuentra inclinado un ángulo ϕ (figura 22.5*b*) de manera que su cara no es perpendicular a $\vec{v}$, el área que se toma en cuenta es la de la silueta que se genera al mirar en la dirección de $\vec{v}$. Esta área, que se muestra en color rojo y se denota con $A_\perp$ en la figura 22.5*b*, es la *proyección* del área A sobre una superficie perpendicular a $\vec{v}$. Dos lados del rectángulo proyectado tienen la misma longitud que en el original, pero los otros dos disminuyen en un factor de cos ϕ, por lo que el área proyectada $A_\perp$ es igual a $A \cos \phi$. Así, la razón volumétrica de flujo a través de A es

$$\frac{dV}{dt} = vA\cos\phi$$

Si $\phi = 90°$, $dV/dt = 0$; el alambre rectangular presenta su borde al flujo, por lo que ningún fluido pasa a través del rectángulo.

Asimismo, $v \cos \phi$ es la componente del vector $\vec{v}$ perpendicular al plano del área A. Si se llama $v_{\perp}$, a esta componente, la razón volumétrica de flujo queda así:

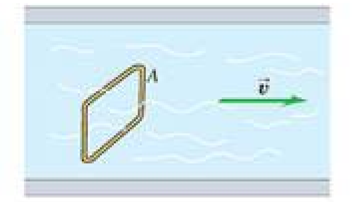
$$\frac{dV}{dt} = v_{\perp} A$$

Es posible expresar la razón volumétrica de flujo de manera más compacta mediante el concepto de *vector área* $\vec{A}$, una cantidad vectorial con magnitud A y dirección perpendicular al plano del área en cuestión. El vector área $\vec{A}$ describe tanto el tamaño del área como su orientación en el espacio. En términos de $\vec{A}$, podemos expresar la razón volumétrica de flujo del fluido a través del rectángulo en la figura 22.5*b* como el producto (punto) escalar:

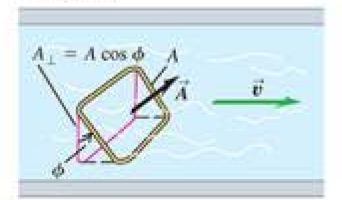
$$\frac{dV}{dt} = \vec{v} \cdot \vec{A}$$

22.5 La razón volumétrica de flujo del fluido a través del alambre rectangular *a*) es vA cuando el área del rectángulo es perpendicular a $\vec{v}$ y *b*) es $vA \cos \phi$ cuando el rectángulo está inclinado un ángulo ϕ.

a) Alambre rectangular en un fluido



b) El alambre rectangular está inclinado un ángulo ϕ



Flujo de un campo eléctrico uniforme

Utilizando la analogía entre un campo eléctrico y un flujo en movimiento, se definirá ahora el flujo eléctrico de la misma forma en que se acaba de definir la razón volumétrica de flujo en un fluido; simplemente se sustituye la velocidad del fluido $\vec{v}$ por el campo eléctrico $\vec{E}$. El símbolo que se usa para el flujo eléctrico es Φ_E (la letra griega mayúscula *fi*; el subíndice E es para recordar que se trata de flujo *eléctrico*). En primer lugar, considere un área plana A perpendicular a un campo eléctrico uniforme $\vec{E}$ (figura 22.6*a*). Se define el flujo eléctrico a través de esta área como el producto de la magnitud E del campo por el área A:

$$\Phi_E = EA$$

En términos generales, se puede imaginar Φ_E como las líneas de campo que pasan a través de A. El incremento del área significa que más líneas de $\vec{E}$ pasan a través del área, lo que aumenta el flujo; un campo más intenso significa mayor densidad de líneas de $\vec{E}$ y por lo tanto más líneas por unidad de área, lo que también incrementa el flujo.

Si el área A es plana pero no perpendicular al campo $\vec{E}$, entonces son menos las líneas de campo que la atraviesan. En este caso, el área que se toma en cuenta es la silueta que se observa al mirar en dirección de $\vec{E}$. Esta es el área $A_{\perp}$ en la figura 22.6*b*, y es igual a $A \cos \phi$ (compárela con la figura 22.5*b*). Nuestra definición de flujo eléctrico para un campo eléctrico uniforme se generaliza a

$$\Phi_E = EA \cos \phi \qquad \text{(flujo eléctrico para } \vec{E} \text{ uniforme, superficie plana)} \qquad (22.1)$$

Como $E \cos \phi$ es la componente de $\vec{E}$ perpendicular al área, la ecuación (22.1) se expresa como

$$\Phi_E = E_{\perp} A \qquad \text{(flujo eléctrico para } \vec{E} \text{ uniforme, superficie plana)} \qquad (22.2)$$

En términos del vector área $\vec{A}$ perpendicular al área, el flujo eléctrico se expresa como el producto escalar de $\vec{E}$ por $\vec{A}$:

$$\Phi_E = \vec{E} \cdot \vec{A} \qquad \text{(flujo eléctrico para } \vec{E} \text{ uniforme, superficie plana)} \qquad (22.3)$$

Las ecuaciones (22.1), (22.2) y (22.3) expresan el flujo eléctrico, para una superficie *plana* y un campo eléctrico *uniforme*, de maneras diferentes pero equivalentes. La unidad del SI para el flujo eléctrico es $1\ \text{N} \cdot \text{m}^2/\text{C}$. Observe que si el área está de perfil con respecto al campo, $\vec{E}$ y $\vec{A}$ son perpendiculares y el flujo es igual a cero (figura 22.6*c*).

La dirección de un vector área se puede representar con $\vec{A}$ empleando un *vector unitario* $\hat{n}$ perpendicular al área; $\hat{n}$ significa "normal". De esta forma,

$$\vec{A} = A\hat{n} \qquad (22.4)$$

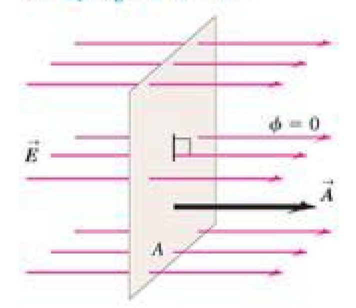
Una superficie tiene dos caras, por lo que hay dos direcciones posibles para $\hat{n}$ y $\vec{A}$. Siempre se debe especificar cuál es la dirección elegida. En la sección 22.1 se relacionó la carga dentro de una superficie *cerrada* con el flujo eléctrico a través de ella. En una superficie cerrada siempre se elegirá la dirección de $\hat{n}$ como aquella que se

Aplicación Flujo a través de la boca de un tiburón peregrino
A diferencia de los agresivos tiburones carnívoros, como el gran tiburón blanco, el tiburón peregrino se alimenta tranquilamente del plancton existente en el agua que pasa por sus branquias mientras nada. Para sobrevivir con estos pequeños organismos se requiere que un enorme flujo de agua pase por la inmensa boca del tiburón, la cual puede medir hasta un metro de ancho. El flujo de agua, el producto de la rapidez del tiburón a través del agua por el área de su boca, puede ser de hasta $0.5\ \text{m}^3/\text{s}$ (500 litros por segundo, o casi 5×10^5 galones por hora). De modo similar, el flujo de un campo eléctrico a través de una superficie depende de la magnitud del campo y del área de la superficie (así como de la orientación entre el campo y la superficie).

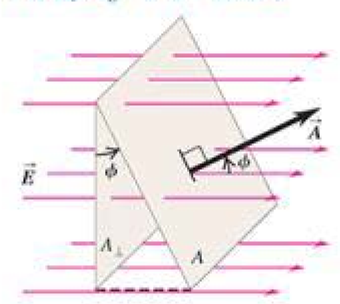


22.6 Una superficie plana en un campo eléctrico uniforme. El flujo eléctrico Φ_E a través de la superficie es igual al producto escalar del campo eléctrico $\vec{E}$ y el vector área $\vec{A}$.

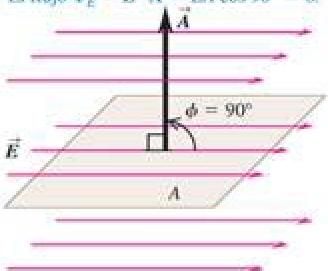
a) La superficie está de frente al campo eléctrico:
- $\vec{E}$ y $\vec{A}$ son paralelos (el ángulo entre $\vec{E}$ y $\vec{A}$ es $\phi = 0$).
- El flujo $\Phi_E = \vec{E} \cdot \vec{A} = EA$.



b) La superficie está inclinada un ángulo ϕ con respecto a la orientación de frente:
- El ángulo entre $\vec{E}$ y $\vec{A}$ es ϕ.
- El flujo $\Phi_E = \vec{E} \cdot \vec{A} = EA \cos \phi$.



c) La superficie está de perfil en relación con el campo eléctrico:
- $\vec{E}$ y $\vec{A}$ son perpendiculares (el ángulo entre $\vec{E}$ y $\vec{A}$ es $\phi = 90°$).
- El flujo $\Phi_E = \vec{E} \cdot \vec{A} = EA \cos 90° = 0$.



dirige *hacia el exterior*, y se hablará del flujo *hacia afuera* de una superficie cerrada. Así, lo que en la sección 22.1 se llamó "flujo eléctrico hacia afuera" corresponde a un valor *positivo* de Φ_E, y lo que se denominó "flujo eléctrico hacia adentro" corresponde a un valor *negativo* de Φ_E.

Flujo de un campo eléctrico no uniforme

¿Qué ocurre si el campo eléctrico $\vec{E}$ no es uniforme, sino que varía de un punto a otro en el área A? O, ¿qué sucede si A es parte de una superficie curva? En estos casos se divide A en muchos elementos pequeños dA, cada uno de los cuales tiene un vector unitario $\hat{n}$ perpendicular a él, y un vector área $d\vec{A} = \hat{n}\, dA$. Se calcula el flujo eléctrico a través de cada elemento y los resultados se integran para obtener el flujo total:

$$\Phi_E = \int E \cos \phi \, dA = \int E_\perp \, dA = \int \vec{E} \cdot d\vec{A} \quad \text{(definición general del flujo eléctrico)} \qquad (22.5)$$

Esta integral se llama **integral de superficie** de la componente $E_\perp$ del área, o integral de superficie de $\vec{E} \cdot d\vec{A}$. En problemas específicos, alguna forma de la integral es más conveniente que las otras. El ejemplo 22.3 al final de esta sección ilustra el uso de la ecuación (22.5).

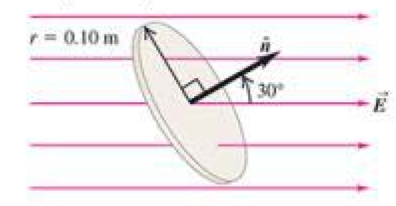
En la ecuación (22.5) el flujo eléctrico $\int E_\perp \, dA$ es igual al valor *medio* de la componente perpendicular del campo eléctrico, multiplicado por el área de la superficie. Esta es la misma definición del flujo eléctrico a la que se llegó en la sección 22.1, pero expresada en una forma más matemática. En la siguiente sección se verá la relación entre el flujo eléctrico total a través de *cualquier* superficie cerrada, sin importar su forma, y la cantidad de carga encerrada dentro de esa superficie.



Ejemplo 22.1 Flujo eléctrico a través de un disco

Un disco de radio igual a 0.10 m está orientado con su vector unitario normal $\hat{n}$ a un ángulo de 30° respecto a un campo eléctrico uniforme $\vec{E}$ con magnitud de 2.0×10^3 N/C (figura 22.7). (Como esta no es una superficie cerrada, no tiene un "interior" ni un "exterior"; por eso se tiene que especificar la dirección de $\hat{n}$ en la figura). *a)* ¿Cuál es el flujo eléctrico a través del disco? *b)* ¿Cuál sería el flujo que cruzaría el disco si se girara de manera que $\hat{n}$ fuera perpendicular a $\vec{E}$? *c)* ¿Cuál sería el flujo que pasaría a través del disco si $\hat{n}$ fuera paralela a $\vec{E}$?

22.7 El flujo eléctrico Φ_E a través de un disco depende del ángulo entre su normal $\hat{n}$ y el campo eléctrico $\vec{E}$.



SOLUTION

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Este problema es acerca de una superficie plana en un campo eléctrico uniforme, por lo que se aplican las ideas de esta sección. El flujo eléctrico se calcula con la ecuación (22.1).

EJECUTAR: *a*) El área es $A = \pi(0.10 \text{ m})^2 = 0.0314 \text{ m}^2$, y el ángulo entre $\vec{E}$ y $\vec{A} = A\hat{n}$ es $\phi = 30°$, por lo que, de acuerdo con la ecuación (22.1),

$$\Phi_E = EA\cos\phi = (2.0 \times 10^3 \text{ N/C})(0.0314 \text{ m}^2)(\cos 30°) = 54 \text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{C}$$

b) Ahora, la normal al disco es perpendicular a $\vec{E}$, de manera que $\phi = 90°$, $\cos\phi = 0$ y $\Phi_E = 0$.

c) La normal al disco es paralela a $\vec{E}$, por lo que $\phi = 0$ y $\cos\phi = 1$:

$$\Phi_E = EA\cos\phi = (2.0 \times 10^3 \text{ N/C})(0.0314 \text{ m}^2)(1) = 63 \text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{C}$$

EVALUAR: Como comprobación de nuestros resultados, observe que la respuesta del inciso *b*) es un valor menor que la del inciso *a*), la cual, a la vez, es menor que la del inciso *c*). ¿Todo esto es como debería ser?

Ejemplo 22.2 Flujo eléctrico a través de un cubo



Una superficie cúbica imaginaria de lado L está situada en una región de campo eléctrico uniform $\vec{E}$. Determine el flujo eléctrico que pasa a través de cada cara del cubo y el flujo total a través de este cuando *a*) el cubo está orientado con dos de sus caras perpendiculares al campo $\vec{E}$ (figura 22.8*a*); y *b*) cuando el cubo se gira un ángulo θ, con respecto a un eje vertical (figura 22.8*b*).

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Como $\vec{E}$ es uniforme y cada una de las seis caras del cubo es una superficie plana, el flujo Φ_{Ei} que cruza cada cara se obtiene con las ecuaciones (22.3) y (22.4). El flujo total a través del cubo es la suma de los seis flujos individuales.

EJECUTAR: *a*) En la figura 22.8*a* se ilustran los vectores unitarios $\hat{n}_1$ a $\hat{n}_6$ de cada cara; cada vector unitario apunta *hacia afuera* de la superficie cerrada del cubo. El ángulo entre $\vec{E}$ y $\hat{n}_1$ es de 180°; el ángulo entre $\vec{E}$ y $\hat{n}_2$ es de 0°; y el ángulo entre $\vec{E}$ y cada uno de los otros cuatro vectores unitarios es de 90°. Cada cara del cubo tiene un área de L^2, por lo que los flujos a través de las caras son

$$\Phi_{E1} = \vec{E}\cdot\hat{n}_1 A = EL^2\cos 180° = -EL^2$$
$$\Phi_{E2} = \vec{E}\cdot\hat{n}_2 A = EL^2\cos 0° = +EL^2$$
$$\Phi_{E3} = \Phi_{E4} = \Phi_{E5} = \Phi_{E6} = EL^2\cos 90° = 0$$

El flujo es negativo en la cara 1, donde $\vec{E}$ está dirigido hacia el cubo, y positivo en la cara 2, donde $\vec{E}$ se dirige hacia afuera del cubo. El flujo total a través del cubo es

$$\Phi_E = \Phi_{E1} + \Phi_{E2} + \Phi_{E3} + \Phi_{E4} + \Phi_{E5} + \Phi_{E6} = -EL^2 + EL^2 + 0 + 0 + 0 + 0 = 0$$

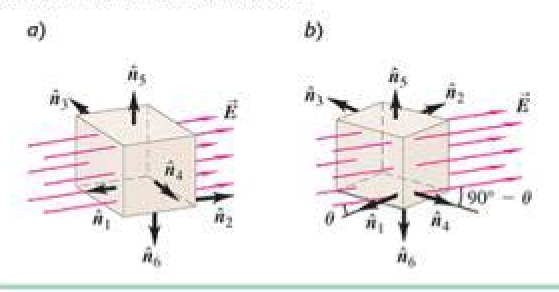
b) El campo $\vec{E}$ está dirigido hacia las caras 1 y 3, de modo que los flujos a través de ellas son negativos; el campo $\vec{E}$ está dirigido hacia afuera de las caras 2 y 4, de modo que los flujos a través de ellas son positivos. Se tiene que

$$\Phi_{E1} = \vec{E}\cdot\hat{n}_1 A = EL^2\cos(180° - \theta) = -EL^2\cos\theta$$
$$\Phi_{E2} = \vec{E}\cdot\hat{n}_2 A = +EL^2\cos\theta$$
$$\Phi_{E3} = \vec{E}\cdot\hat{n}_3 A = EL^2\cos(90° + \theta) = -EL^2\,\text{sen}\,\theta$$
$$\Phi_{E4} = \vec{E}\cdot\hat{n}_4 A = EL^2\cos(90° - \theta) = +EL^2\,\text{sen}\,\theta$$
$$\Phi_{E5} = \Phi_{E6} = EL^2\cos 90° = 0$$

El flujo total $\Phi_E = \Phi_{E1} + \Phi_{E2} + \Phi_{E3} + \Phi_{E4} + \Phi_{E5} + \Phi_{E6}$ a través de la superficie del cubo es, de nuevo, igual a cero.

EVALUAR: Se llegó a la misma conclusión que en el análisis de la figura 22.3*c*: se observó que ahí había un flujo neto igual a cero de un campo eléctrico uniforme a través de una superficie cerrada que no contenía carga eléctrica.

22.8 Flujo eléctrico de un campo uniforme $\vec{E}$ a través de una caja cúbica de lado L en dos orientaciones.



Ejemplo 22.3 Flujo eléctrico a través de una esfera



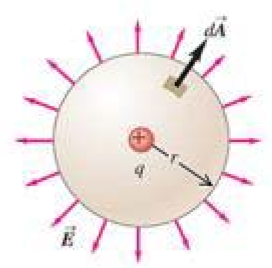
Una carga puntual $q = +3.0\ \mu\text{C}$ está rodeada por una esfera imaginaria centrada en la carga y cuyo radio mide 0.20 m (figura 22.9). Determine el flujo eléctrico a través de la esfera.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: En este caso la superficie no es plana y el campo eléctrico no es uniforme, por lo que para calcular el flujo eléctrico (nuestra incógnita), se debe usar la definición general de la ecuación (22.5). Como la esfera tiene su centro en la carga puntual, en cualquier punto sobre la superficie de la esfera $\vec{E}$ está dirigido hacia el exterior en forma perpendicular a la superficie. La dirección positiva tanto para $\hat{n}$ como para $E_\perp$ es hacia el exterior, por lo que $E_\perp = E$ y el flujo a través del elemento de superficie dA es $\vec{E}\cdot d\vec{A} = E\,dA$. Esto simplifica en gran medida la integral en la ecuación (22.5).

Continúa

22.9 Flujo eléctrico a través de una esfera centrada en una carga puntual.



EJECUTAR: Se debe resolver la integral de la ecuación (22.5), $\Phi_E = \int E\, dA$. En cualquier punto de la esfera de radio r, el campo eléctrico tiene la misma magnitud $E = q/4\pi\epsilon_0 r^2$. Por lo tanto, E se puede sacar de la integral, la cual se convierte en $\Phi_E = E\int dA = EA$, donde A es el área de la superficie esférica: $A = 4\pi r^2$. Así, el flujo total que sale de la esfera es

$$\Phi_E = EA = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0}$$

$$= \frac{3.0 \times 10^{-6}\ \text{C}}{8.85 \times 10^{-12}\ \text{C}^2/\text{N}\cdot\text{m}^2} = 3.4 \times 10^5\ \text{N}\cdot\text{m}^2/\text{C}$$

EVALUAR: El radio r de la esfera se cancela en el resultado de Φ_E. Se habría obtenido el mismo flujo con una esfera de 2.0 m o de 200 m. En esencia, se llegó a la misma conclusión del análisis de la figura 22.4 en la sección 22.1, donde se consideraron superficies rectangulares cerradas de dos tamaños distintos que encerraban una carga puntual. Ahí se encontró que el flujo de $\vec{E}$ era independiente del tamaño de la superficie; se obtiene el mismo resultado para una superficie esférica. En realidad, el flujo a través de *cualquier* superficie que encierre una sola carga puntual es independiente de la forma o el tamaño de la superficie, como se verá un poco más adelante.

Evalúe su comprensión de la sección 22.2 Ordene las siguientes superficies del flujo eléctrico más positivo al más negativo. **i.** Una superficie rectangular plana con vector área $\vec{A} = (6.0\ \text{m}^2)\hat{\imath}$ en un campo eléctrico uniforme $\vec{E} = (4.0\ \text{N/C})\hat{\jmath}$; **ii.** una superficie circular plana con vector área $\vec{A} = (3.0\ \text{m}^2)\hat{\jmath}$ en un campo eléctrico uniforme $\vec{E} = (4.0\ \text{N/C})\hat{\imath} + (2.0\ \text{N/C})\hat{\jmath}$; **iii.** una superficie cuadrada plana con vector área $\vec{A} = (3.0\ \text{m}^2)\hat{\imath} + (7.0\ \text{m}^2)\hat{\jmath}$ en un campo eléctrico uniforme $\vec{E} = (4.0\ \text{N/C})\hat{\imath} - (2.0\ \text{N/C})\hat{\jmath}$; **iv.** una superficie oval plana con vector área $\vec{A} = (3.0\ \text{m}^2)\hat{\imath} - (7.0\ \text{m}^2)\hat{\jmath}$ en un campo eléctrico uniforme $\vec{E} = (4.0\ \text{N/C})\hat{\imath} - (2.0\ \text{N/C})\hat{\jmath}$. ❙

22.3 Ley de Gauss

La **ley de Gauss** es otra alternativa de la ley de Coulomb. Aunque es exactamente equivalente a la ley de Coulomb, la ley de Gauss es una forma distinta de expresar la relación entre la carga eléctrica y el campo eléctrico. La formuló Carl Friedrich Gauss (1777-1855), uno de los matemáticos más notables de todos los tiempos (figura 22.10).

22.10 Carl Friedrich Gauss ayudó a desarrollar varias ramas de las matemáticas, incluida la geometría diferencial, el análisis real y la teoría de números. Una de sus invenciones es la "curva de campana" de la estadística. Gauss también realizó investigaciones de vanguardia sobre el magnetismo de la Tierra y calculó la órbita del primer asteroide que se descubrió.



Carga puntual dentro de una superficie esférica

La ley de Gauss establece que el flujo eléctrico total a través de cualquier superficie cerrada (una superficie que encierra un volumen definido) es proporcional a la carga eléctrica total (neta) dentro de la superficie. En la sección 22.1 se planteó esta relación de manera cuantitativa para ciertos casos especiales; ahora se desarrollará en forma más rigurosa. Comenzaremos con el campo de una sola carga puntual positiva q. Las líneas de campo se extienden en forma radial hacia afuera en todas direcciones por igual. Colocamos esta carga en el centro de una superficie esférica imaginaria con radio R. La magnitud E del campo eléctrico en cada punto de la superficie está dada por

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{R^2}$$

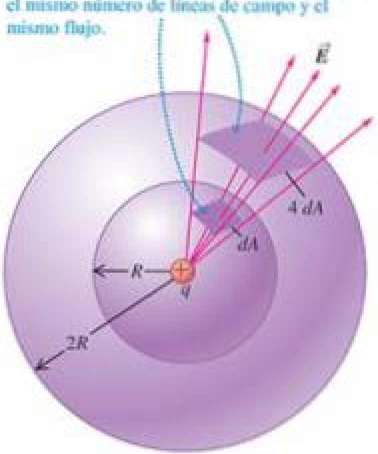
En cada punto de la superficie, $\vec{E}$ es perpendicular a esta, y su magnitud es la misma en todos los puntos, como se ilustra en el ejemplo 22.3 (sección 22.2). El flujo eléctrico total es el producto de la magnitud E del campo por el área total $A = 4\pi R^2$ de la esfera:

$$\Phi_E = EA = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{R^2}(4\pi R^2) = \frac{q}{\epsilon_0} \qquad (22.6)$$

El flujo es independiente del radio R de la esfera; solo depende de la carga q encerrada por la esfera.

Este resultado también se puede interpretar en términos de las líneas de campo. La figura 22.11 muestra dos esferas de radios R y $2R$ centradas en la carga puntual q. Cada línea de campo que pasa a través de la esfera más pequeña también cruza la esfera más grande, por lo que el flujo total a través de cada esfera es el mismo.

Lo que se cumple para toda la esfera también se cumple para cualquier parte de su superficie. En la figura 22.11, sobre la esfera de radio R, está resaltada un área dA que se proyecta sobre la esfera de radio $2R$ con líneas que parten del centro y que pasan por puntos sobre la frontera de dA. El área proyectada sobre la esfera mayor es, evidentemente, $4\ dA$. Pero como el campo eléctrico debido a una carga puntual es inversamente proporcional a r^2, la magnitud del campo sobre la esfera de radio $2R$ es de la magnitud sobre la esfera de radio R. Así, el flujo eléctrico es el mismo para las dos áreas e independiente del radio de la esfera.



22.11 Proyección de un elemento de área dA de una esfera de radio R sobre una esfera concéntrica de radio $2R$. La proyección multiplica las dimensiones lineales por 2, por lo que el elemento de área sobre la esfera más grande es $4\ dA$.

Carga puntual dentro de una superficie no esférica

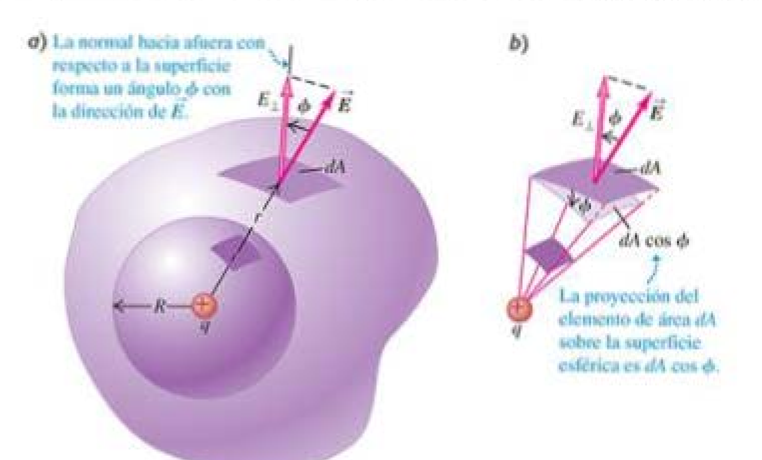
Esta técnica de proyección demuestra cómo generalizar el análisis a superficies no esféricas. En lugar de una segunda esfera, vamos a rodear la esfera de radio R con una superficie de forma irregular, como en la figura 22.12*a*. Considere un pequeño elemento de área dA sobre la superficie irregular; se observa que esta área es *mayor* que el elemento correspondiente sobre una superficie esférica a la misma distancia de q. Si una normal a dA forma un ángulo ϕ con una línea radial que sale de q, dos lados del área proyectada sobre la superficie esférica se ven disminuidos en un factor $\cos\phi$ (figura 22.12*b*). Los otros dos lados permanecen iguales. Por lo tanto, el flujo eléctrico a través del elemento de la superficie esférica es igual al flujo $E\ dA \cos\phi$ a través del elemento correspondiente de la superficie irregular.

Se puede dividir toda la superficie irregular en elementos dA, calcular para cada uno de ellos el flujo eléctrico $E\ dA \cos\phi$, y sumar los resultados por integración, como en la ecuación (22.5). Cada uno de los elementos de área se proyecta sobre un elemento correspondiente de superficie esférica. Así, el flujo eléctrico *total* que atraviesa la superficie irregular, dado por cualquiera de las formas que adopta la ecuación (22.5), debe ser el mismo que el flujo total a través de una esfera, el cual es igual a q/ϵ_0 de acuerdo con la ecuación (22.6). Por lo tanto, para la superficie irregular,

$$\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q}{\epsilon_0} \tag{22.7}$$

La ecuación (22.7) se cumple para una superficie de *cualquier* forma o tamaño, siempre y cuando sea una superficie *cerrada* que contenga la carga q. El círculo en el signo de la integral recuerda que la integral siempre se toma sobre una superficie *cerrada*.

Los elementos de área $d\vec{A}$ y los vectores unitarios $\hat{n}$ correspondientes siempre apuntan hacia *afuera* del volumen encerrado por la superficie. Entonces, el flujo eléctrico es positivo en aquellas áreas en las que el campo eléctrico apunta hacia afuera de



22.12 Cálculo del flujo eléctrico que pasa a través de una superficie no esférica.

la superficie, y negativo donde apunta hacia adentro. Además, $E_\perp$ es positivo en los puntos en que $\vec{E}$ apunta hacia el exterior de la superficie, y negativo en los que $\vec{E}$ apunta hacia el interior de esta.

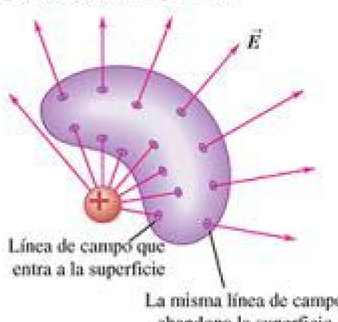
Si la carga puntual en la figura 22.12 es negativa, el campo $\vec{E}$ está dirigido en forma radial *hacia adentro*; en ese caso, el ángulo ϕ es mayor de 90°, su coseno es negativo, y la integral en la ecuación (22.7) es negativa. Pero como q también es negativa, la ecuación (22.7) se sigue cumpliendo.

Para una superficie cerrada que *no* encierra carga,

$$\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = 0$$

Este es el enunciado matemático que indica que cuando una región no contiene carga, las líneas de campo ocasionadas por cargas *afuera* de la región y que entran por un lado deben salir por el otro. (En la sección 22.1 se llegó a la misma conclusión al considerar el caso especial de una caja rectangular en un campo uniforme). La figura 22.13 ilustra este punto. *Las líneas de un campo eléctrico comienzan o terminan dentro de una región del espacio solo cuando en esa región existe carga.*

22.13 Carga puntual *afuera* de una superficie cerrada que no encierra ninguna carga. Si una línea de campo eléctrico proveniente de la carga externa entra por un punto de la superficie, debe salir por otro.



Forma general de la ley de Gauss

Ahora viene el paso final en la obtención de la forma general de la ley de Gauss. Suponga que la superficie encierra no solo una carga puntual q, sino varias cargas, q_1, q_2, q_3, ... El campo eléctrico total (resultante) $\vec{E}$ en cualquier punto es la suma vectorial de los campos $\vec{E}$ de las cargas individuales. Sea Q_{enc} la carga *total* encerrada por la superficie: $Q_{enc} = q_1 + q_2 + q_3 + \cdots$. Sea también $\vec{E}$ el campo *total* en la posición del elemento de área $d\vec{A}$ de la superficie, y sea $E_\perp$ la componente perpendicular al plano de ese elemento (es decir, paralelo a $d\vec{A}$). Luego, se puede escribir una ecuación como la (22.7) para cada carga y su campo correspondiente, y sumar los resultados. Al hacerlo, se obtiene el enunciado general de la ley de Gauss:

$$\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0} \qquad \text{(ley de Gauss)} \qquad (22.8)$$

El flujo eléctrico total a través de una superficie cerrada es igual a la carga eléctrica total (neta) dentro de la superficie, dividida entre ϵ_0.

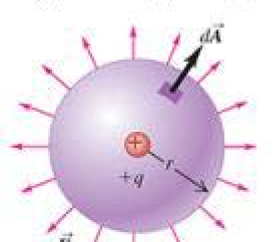
CUIDADO **Las superficies gaussianas son imaginarias** Recuerde que la superficie cerrada a que se refiere la ley de Gauss es *imaginaria*; no es necesario que haya un objeto material en la posición de la superficie. A menudo se hace referencia a la superficie cerrada que se emplea en la ley de Gauss como una **superficie gaussiana**.

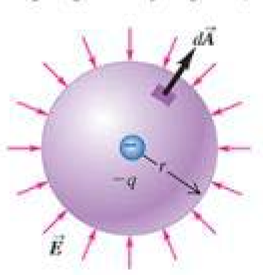
Utilizando la definición de Q_{enc} y las distintas maneras de expresar el flujo eléctrico que da la ecuación (22.5), la ley de Gauss se puede plantear en las siguientes formas equivalentes:

$$\Phi_E = \oint E\cos\phi \, dA = \oint E_\perp \, dA = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0} \qquad \text{(diversas formas de la ley de Gauss)} \qquad (22.9)$$

Igual que en la ecuación (22.5), las diversas formas de la integral expresan el mismo concepto, el flujo eléctrico total a través de la superficie gaussiana, en términos diferentes. En ocasiones conviene más una forma que las otras.

Como ejemplo, en la figura 22.14*a* se muestra una superficie esférica gaussiana de radio r alrededor de una carga puntual positiva $+q$. El campo eléctrico apunta hacia afuera de la superficie gaussiana, de modo que en cada punto de la superficie, $\vec{E}$ tiene la misma dirección que $d\vec{A}$, $\phi = 0$ y $E_\perp$ es igual a la magnitud del campo $E = q/4\pi\epsilon_0 r^2$. Como E es igual en todos los puntos de la superficie, es válido sacarlo de





22.14 Superficies gaussianas esféricas alrededor de *a*) una carga puntual positiva y *b*) una carga puntual negativa.

la integral en la ecuación (22.9), de manera que la integral que queda es $\int dA = A = 4\pi r^2$, que es el área de la esfera. Así, la ecuación (22.9) se convierte en

$$\Phi_E = \oint E_\perp \, dA = \oint \left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\right) dA = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \oint dA = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0}$$

La carga Q_{enc} encerrada es exactamente la carga $+q$, lo que concuerda con la ley de Gauss. Si la superficie gaussiana encerrara una carga puntual *negativa*, como en la figura 22.14*b*, entonces $\vec{E}$ apuntaría hacia el *interior* de la superficie en cada punto en la dirección opuesta a $d\vec{A}$. Así, $\phi = 180°$ y $E_\perp$ es igual al negativo de la magnitud del campo: $E_\perp = -E = -|-q|/4\pi\epsilon_0 r^2 = -q/4\pi\epsilon_0 r^2$. La ecuación (22.9) se convierte en

$$\Phi_E = \oint E_\perp \, dA = \oint \left(\frac{-q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\right) dA = \frac{-q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \oint dA = \frac{-q}{4\pi\epsilon_0 r^2} 4\pi r^2 = \frac{-q}{\epsilon_0}$$

Esto de nuevo concuerda con la ley de Gauss porque la carga encerrada en la figura 22.14*b* es $Q_{enc} = -q$.

En las ecuaciones (22.8) y (22.9), Q_{enc} siempre es la suma algebraica de todas las cargas positivas y negativas encerradas por la superficie gaussiana, y $\vec{E}$ es el campo *total* en cada punto de la superficie. Note también que, en general, este campo es causado parcialmente por cargas adentro de la superficie y parcialmente por cargas afuera de esta. Pero como muestra la figura 22.13, las cargas en el exterior *no* contribuyen al flujo total (neto) a través de la superficie. Por lo tanto, las ecuaciones (22.8) y (22.9) son correctas aun cuando haya cargas afuera de la superficie que contribuyan al campo eléctrico en esta última. Cuando $Q_{enc} = 0$, el flujo total a través de la superficie gaussiana debe ser igual a cero, aunque ciertas áreas tengan flujo positivo y otras flujo negativo (véase la figura 22.3*b*).

La ley de Gauss es la respuesta definitiva a la pregunta que se planteó al inicio de la sección 22.1: "Si en una región dada se conoce el patrón del campo eléctrico, ¿qué se concluye acerca de la distribución de carga en esa región?". La ley de Gauss establece una relación entre el campo eléctrico en una superficie cerrada y la distribución de carga dentro de esa superficie. Pero en ciertos casos la ley de Gauss puede usarse para responder la pregunta inversa: "Si se conoce la distribución de carga, ¿qué se concluye acerca del campo eléctrico que esa distribución genera?". Tal vez parezca que la ley de Gauss es una manera poco atractiva de contestar esta pregunta, ya que resolver la integral en la ecuación (22.8) quizá parezca una tarea intimidante. En ocasiones sí lo es, pero en otras es sorprendentemente fácil. A continuación se presenta un ejemplo que *no* implica integración; en la siguiente sección se verán varios ejemplos más.



Ejemplo conceptual 22.4 Flujo eléctrico y carga encerrada

La figura 22.15 muestra el campo producido por dos cargas puntuales $+q$ y $-q$ (un dipolo eléctrico). Determine el flujo eléctrico a través de cada una de las superficies cerradas, *A*, *B*, *C* y *D*.

SOLUCIÓN

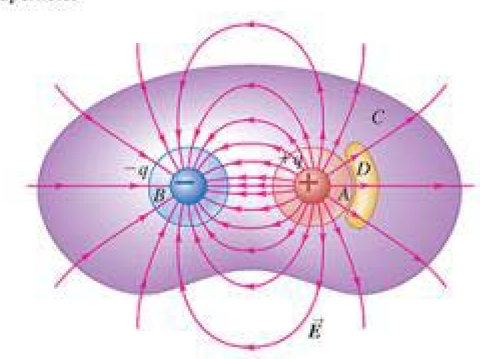
La ley de Gauss, ecuación (22.8), establece que el flujo eléctrico total a través de una superficie cerrada es igual a la carga total encerrada dividida entre ϵ_0. En la figura 22.15, la superficie *A* (en color rojo)

Continúa

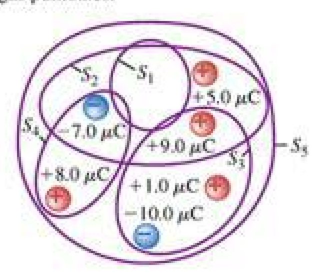
encierra la carga positiva, por lo que $Q_{enc} = +q$; la superficie B (en azul) encierra la carga negativa, de manera que $Q_{enc} = -q$; la superficie C (en púrpura) encierra las *dos* cargas, y tiene $Q_{enc} = +q + (-q) = 0$; y la superficie D (en amarillo) no encierra cargas, así que $Q_{enc} = 0$. De manera que, sin necesidad de resolver ninguna integral, tenemos que $\Phi_{EA} = +q/\epsilon_0$, $\Phi_{EB} = -q/\epsilon_0$ y $\Phi_{EC} = \Phi_{ED} = 0$. Estos resultados solo dependen de las cargas encerradas dentro de cada superficie gaussiana y no de las formas específicas de las superficies.

Al examinar las líneas del campo eléctrico se obtienen conclusiones similares. Todas las líneas de campo que cruzan la superficie A están dirigidas hacia afuera de la superficie, de modo que el flujo a través de A debe ser positivo. De manera similar, el flujo a través de B debe ser negativo porque todas las líneas de campo que cruzan esa superficie están dirigidas hacia adentro. Para las superficies C y D, hay tantas líneas de campo apuntando hacia la superficie como líneas de campo apuntando hacia afuera, por lo que el flujo a través de cada una de estas superficies es igual a cero.

22.15 El número neto de líneas de campo que salen de una superficie cerrada es proporcional a la carga total encerrada por esa superficie.



22.16 Cinco superficies gaussianas y seis cargas puntuales.



Evalúe su comprensión de la sección 22.3 En la figura 22.16 se ilustran seis cargas puntuales que están en el mismo plano. Hay cinco superficies gaussianas (S_1, S_2, S_3, S_4 y S_5) que encierran, cada una, parte de este plano, y la figura 22.16 también presenta la intersección de cada superficie con el plano. Clasifique las cinco superficies en orden del flujo eléctrico que pasa a través de ellas, del más positivo al más negativo.

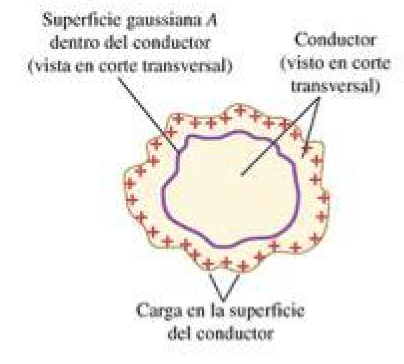
22.4 Aplicaciones de la ley de Gauss

La ley de Gauss es válida para *cualquier* distribución de cargas y *cualquier* superficie encerrada. La ley de Gauss se puede utilizar de dos maneras. Si se conoce la distribución de la carga y si esta tiene simetría suficiente que permita evaluar la integral de la ley de Gauss, se puede obtener el campo. O si se conoce el campo, es posible usar la ley de Gauss para encontrar la distribución de carga, como las cargas en superficies conductoras.

En esta sección se presentan ejemplos de ambas clases de aplicaciones. Cuando los estudie, observe el papel que desempeñan las propiedades de simetría de cada sistema. Se empleará la ley de Gauss para calcular los campos eléctricos ocasionados por varias distribuciones de carga sencillas; los resultados se presentan en forma de tabla en el resumen del capítulo.

En problemas prácticos es frecuente encontrar situaciones donde se desea conocer el campo eléctrico generado por una distribución de carga en un conductor. Estos cálculos se facilitan por el siguiente hecho notable: *cuando en un conductor sólido se coloca un exceso de carga que se encuentra en reposo, esta se ubica en su totalidad en la superficie, no en el interior del material.* (Con el término *exceso* se quiere decir cargas distintas de los iones y electrones libres que constituyen el conductor neutro). La demostración es la siguiente. Se sabe, a partir de la sección 21.4, que en una situación electrostática (con todas las cargas en reposo), el campo eléctrico $\vec{E}$ en cada punto en el interior de un material conductor es igual a cero. Si $\vec{E}$ *no* fuera cero, las cargas en exceso se moverían. Suponga que se construye una superficie gaussiana dentro del conductor, como la superficie A en la figura 22.17. Como $\vec{E} = \mathbf{0}$ en cualquier lugar de la superficie, la ley de Gauss requiere que la carga neta dentro de la superficie sea igual a cero. Ahora imagine que se comprime la superficie como un globo que se desinfla hasta que encierre una región tan pequeña que se pueda considerar un punto P; entonces, la carga en ese punto debe ser igual a cero. Esto se puede hacer en cualquier parte dentro del conductor, *por lo que no puede haber carga en exceso en ningún punto dentro de un conductor sólido; toda carga excedente debe encontrarse en la superficie del conductor.* (Este resultado es para un conductor *sólido*. En la siguiente sección se estudiará lo que sucede si el conductor tiene cavidades en su interior). En los ejemplos que siguen se recurrirá con frecuencia a este hecho.

22.17 En condiciones electrostáticas (las cargas no están en movimiento), cualquier carga en exceso en un conductor sólido se ubica totalmente en la superficie del conductor.



Estrategia para resolver problemas 22.1 Ley de Gauss



IDENTIFICAR *los conceptos relevantes:* La ley de Gauss es más útil cuando la distribución de carga tiene simetría esférica, cilíndrica o plana. En estos casos, la simetría determina la dirección de $\vec{E}$. Luego, con la ley de Gauss se obtiene la magnitud de $\vec{E}$ si se conoce la distribución de carga, y viceversa. En cualquier caso, el análisis se inicia con la pregunta: ¿cuál es la simetría?

PLANTEAR *el problema* mediante los siguientes pasos:

1. Liste las cantidades conocidas y desconocidas e identifique la incógnita.
2. Seleccione la superficie gaussiana imaginaria cerrada que sea adecuada. En la simetría esférica, use una superficie esférica concéntrica. En la simetría cilíndrica, use una superficie cilíndrica coaxial con los extremos planos perpendiculares al eje de simetría (como una lata de sopa). En la simetría plana, use una superficie cilíndrica (como una lata de atún) con los extremos planos paralelos al plano.

EJECUTAR *la solución* como sigue:

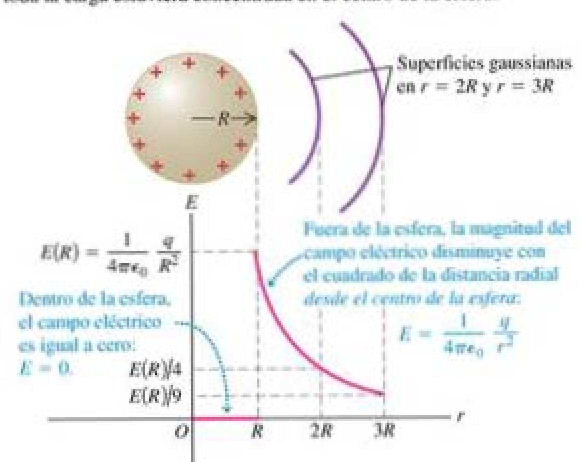
1. Determine el tamaño y la ubicación adecuados de la superficie gaussiana. Para evaluar el campo en un punto particular, la superficie debe contener ese punto. Puede ser útil colocar una cara de la superficie en forma de lata dentro de un conductor, donde $\vec{E}$ y, por lo tanto, Φ sean iguales a cero, o colocar sus caras equidistantes del plano cargado.
2. Resuelva la integral $\oint E_\perp \, dA$ en la ecuación (22.9). En esta ecuación, $E_\perp$ es la componente perpendicular del campo eléctrico *total* en cada punto de la superficie gaussiana. Una buena elección de la superficie gaussiana facilita la integración o la vuelve innecesaria. Si la superficie incluye varias superficies separadas, como las caras y envolvente de un cilindro, la integral $\oint E_\perp \, dA$ de la superficie completa encerrada es la suma de las integrales $\oint E_\perp \, dA$ de las superficies separadas. Considere los puntos 3 a 6 conforme trabaja.
3. Si $\vec{E}$ es *perpendicular* (normal) en cada punto a una superficie de área A, si apunta *hacia afuera* desde el interior de la superficie, y si también tiene la misma *magnitud* en todos los puntos de la superficie, entonces $E_\perp = E =$ constante, y $\oint E_\perp \, dA$ sobre la superficie es igual a EA. (Si $\vec{E}$ apunta hacia adentro, entonces $E_\perp = -E$ y $\int E_\perp \, dA = -EA$). Este puede ser el caso para una parte o el total de la superficie gaussiana. Si $\vec{E}$ es tangente a la superficie en cada punto, entonces $E_\perp = 0$ y la integral de la superficie es igual a cero. Este tal vez sea el caso para partes de una superficie gaussiana cilíndrica. Si $\vec{E} = \mathbf{0}$ en cada punto de la superficie, la integral es cero.
4. Aun cuando *no* hubiera carga dentro de la superficie, el campo en cualquier punto de la superficie gaussiana no necesariamente es igual a cero. Sin embargo, en este caso, el flujo eléctrico total a través de la superficie es siempre igual a cero.
5. La integral del flujo $\oint E_\perp \, dA$ se puede aproximar como la diferencia entre el número de líneas eléctricas de fuerza entrantes y salientes de la superficie gaussiana. En este sentido, el flujo indica el signo de la carga encerrada, pero es solo proporcional a él; un flujo igual a cero corresponde a una carga encerrada igual a cero.
6. Una vez evaluada la integral $\oint E_\perp \, dA$, se usa la ecuación (22.9) para resolver la incógnita.

EVALUAR *la respuesta:* Si el resultado es una *función* que describe cómo varía la magnitud del campo eléctrico según la posición, asegúrese de que tiene sentido.

Ejemplo 22.5 Campo de una esfera conductora con carga

Se coloca una carga positiva total q en una esfera conductora sólida de radio R (figura 22.18). Determine $\vec{E}$ en cualquier punto en el interior o en el exterior de la esfera.

22.18 Cálculo del campo eléctrico de una esfera conductora con carga positiva q. Fuera de la esfera, el campo es el mismo como si toda la carga estuviera concentrada en el centro de la esfera.



SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Como se vio en esta sección, toda la carga debe encontrarse en la superficie de la esfera. La carga es libre de moverse sobre el conductor y no hay una posición preferida sobre la superficie; por lo tanto, la carga está distribuida de manera *uniforme* en la superficie y el sistema tiene simetría esférica. Para aprovechar la simetría, se toma como la superficie gaussiana una esfera imaginaria de radio r con centro en el conductor. Se puede calcular el campo adentro o afuera del conductor tomando $r < R$ o $r > R$, respectivamente. En cualquier caso, el punto en que se desea calcular $\vec{E}$ se encuentra en la superficie gaussiana.

EJECUTAR: La simetría esférica significa que la dirección del campo eléctrico debe ser radial, porque no hay una dirección preferente paralela a la superficie, de modo que $\vec{E}$ no puede tener una componente paralela a la superficie. Tampoco existe una orientación preferida de la esfera; por lo tanto, la magnitud E del campo solo depende de la distancia r desde el centro y debe tener el mismo valor en todos los puntos sobre la superficie gaussiana.

Para $r > R$ todo el conductor se encuentra dentro de la superficie gaussiana, de manera que la carga encerrada es q. El área de la superficie gaussiana es $4pr^2$, y $\vec{E}$ es uniforme sobre la superficie y perpendicular a ella en cada uno de sus puntos. La integral del flujo $\oint E_\perp \, dA$ es $E(4\pi r^2)$ y la ecuación (22.8) da:

Continúa

$$E(4\pi r^2) = \frac{q}{\epsilon_0} \quad \text{y}$$

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2} \qquad \text{(fuera de una esfera conductora cargada)}$$

Esta expresión es la misma que la de una carga puntual; afuera de la esfera cargada, el campo es equivalente al que habría si toda la carga estuviera concentrada en su centro. Inmediatamente afuera de la superficie de la esfera, donde $r = R$,

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{R^2} \quad \text{(en la superficie de una esfera conductora cargada)}$$

CUIDADO **El flujo puede ser positivo o negativo** Recuerde que se eligió que la carga q fuera *positiva*. Si fuera negativa, el campo eléctrico estaría dirigido radialmente *hacia el interior* y no hacia el exterior, y el flujo eléctrico a través de la superficie gaussiana sería negativo. Las magnitudes del campo eléctrico en el exterior y en la superficie de la esfera están dadas por las mismas expresiones anteriores, excepto que q denota la *magnitud* (valor absoluto) de la carga.

Para $r < R$, de nuevo tenemos que $E(4\pi r^2) = Q_{enc}/\epsilon_0$. Pero ahora la superficie gaussiana (que está por completo dentro del conductor) *no* encierra ninguna carga, por lo que $Q_{enc} = 0$, y el campo eléctrico en el interior del conductor es igual a cero.

EVALUAR: Ya se sabe que dentro de un conductor sólido (sea esférico o no), $\vec{E} = \mathbf{0}$ cuando las cargas están en reposo. En la figura 22.18 se ilustra E como función de la distancia r desde el centro de la esfera. Observe que en el límite, cuando $R \to 0$, la esfera se convierte en una carga puntual; así que solo hay un "exterior", y el campo está dado en cualquier parte por $E = q/4\pi\epsilon_0 r^2$. De esta forma, se dedujo la ley de Coulomb a partir de la ley de Gauss. (En la sección 22.3 se dedujo la ley de Gauss a partir de la ley de Coulomb; las dos leyes son equivalentes).

Este método también es aplicable a un conductor con forma de *cascarón* esférico (un conductor esférico con un hueco concéntrico en el centro) si dentro del agujero no hay carga. Se usa una superficie gaussiana esférica con radio r menor que el radio del hueco. Si en el interior del hueco *hubiera* un campo, tendría que ser radial y con simetría esférica, como antes, por lo que $E = Q_{enc}/4\pi\epsilon_0 r^2$. Pero ahora no hay carga encerrada, de manera que, en el interior del hueco, $Q_{enc} = 0$ y $E = 0$.

¿Se puede utilizar esta misma técnica para determinar el campo eléctrico en el espacio que hay entre una esfera cargada y una esfera conductora concéntrica y hueca que la rodee?



Ejemplo 22.6 Campo de una carga lineal uniforme

Una carga eléctrica está distribuida de manera uniforme a lo largo de un alambre delgado de longitud infinita. La carga por unidad de longitud es λ (se supone positiva). Calcule el campo eléctrico usando la ley de Gauss.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: En el ejemplo 21.10 (sección 21.5) vimos que el campo $\vec{E}$ de un alambre infinito, cargado uniformemente, está dirigido en forma radial hacia afuera si λ es positiva, y radialmente hacia adentro si λ es negativa, y que la magnitud E del campo depende solo de la distancia radial del alambre. Esto sugiere el uso de una superficie gaussiana *cilíndrica*, de radio r y una longitud l cualquiera, coaxial con el alambre y con sus caras perpendiculares al alambre (figura 22.19).

EJECUTAR: El flujo a través de las caras planas de la superficie gaussiana es cero porque el campo eléctrico radial es paralelo a estos extremos, y entonces $\vec{E} \cdot \hat{n} = 0$. Sobre la parte cilíndrica de la superficie tenemos que $\vec{E} \cdot \hat{n} = E_\perp = E$ en todas partes. (Si λ fuera negativa, tendríamos que $\vec{E} \cdot \hat{n} = E_\perp = -E$ en todas partes). El área de la superficie cilíndrica es $2\pi rl$, de modo que el flujo a través de ella, y por lo tanto el flujo total Φ_E a través de la superficie gaussiana, es $EA = 2\pi rlE$. La carga total encerrada es $Q_{enc} = \lambda l$, y así, a partir de la ley de Gauss, ecuación (22.8),

$$\Phi_E = 2\pi rlE = \frac{\lambda l}{\epsilon_0} \quad \text{y}$$

$$E = \frac{1}{2\pi\epsilon_0}\frac{\lambda}{r} \qquad \text{(campo de una línea infinita de carga)}$$

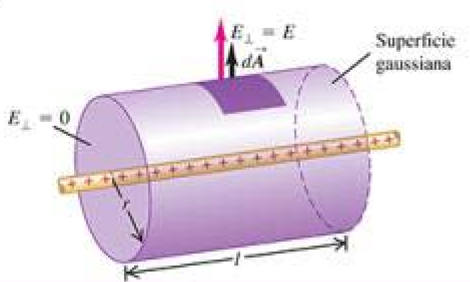
Este es el mismo resultado que se obtuvo en el ejemplo 21.10 con *mucho* más esfuerzo.

Si λ es *negativa*, $\vec{E}$ estaría dirigido radialmente hacia el interior, y en la expresión anterior de E, λ se debería interpretar como el valor absoluto de la carga por unidad de longitud.

EVALUAR: En el ejemplo 21.10 vimos que *toda* la carga en el conductor contribuye al campo en cualquier punto, aun cuando se considere solo la parte de la carga $Q_{enc} = \lambda l$ dentro de la superficie gaussiana al aplicar la ley de Gauss. No hay ninguna incongruencia aquí; se toma la carga completa para dar al campo las propiedades que nos permitan calcular Φ_E más fácilmente, y la ley de Gauss siempre se aplica solo a la carga encerrada. Si el alambre es corto, se pierde la simetría del conductor, y E no sería uniforme sobre la superficie gaussiana cilíndrica coaxial. La ley de Gauss *no podría* usarse para obtener Φ_E; debemos resolver el problema por el camino laborioso empleado en el ejemplo 21.10.

Podemos utilizar una superficie gaussiana de la figura 22.19 para demostrar que el campo afuera de un cilindro largo cargado uniformemente es igual que si toda la carga se concentrara en una línea a lo largo de su eje (véase el problema 22.42). También se puede calcular el campo eléctrico en el espacio entre un cilindro con carga y otro cilindro conductor hueco y coaxial que lo rodee (véase el problema 22.39).

22.19 Se emplea una superficie gaussiana cilíndrica coaxial para obtener el campo eléctrico fuera de un conductor cargado de longitud infinita.





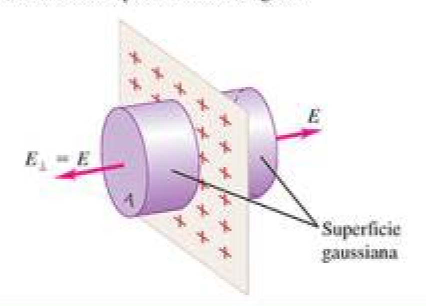
Ejemplo 22.7 Campo de una lámina plana infinita cargada

Use la ley de Gauss para determinar el campo eléctrico que genera una lámina delgada, plana e infinita, en la que hay una densidad de carga superficial uniforme y positiva σ.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: En el ejemplo 21.11 (sección 21.5) vimos que el campo $\vec{E}$ de una lámina infinita cargada uniformemente es normal a la lámina, y que su magnitud es independiente de la distancia a la lámina. Para aprovechar las propiedades de simetría, se usa una superficie gaussiana cilíndrica con extremos de área A y con su eje perpendicular a la lámina cargada (figura 22.20).

22.20 Superficie gaussiana cilíndrica que se utiliza para encontrar el campo de una lámina plana infinita cargada.



EJECUTAR: El flujo a través de la parte cilíndrica de la superficie gaussiana es cero porque $\vec{E} \cdot \hat{n} = 0$ en cualquier parte. El flujo a través de cada cara de la superficie es $+EA$ porque $\vec{E} \cdot \hat{n} = E_\perp = E$ en todas partes, de ahí que el flujo total a través de ambas caras (y, por lo tanto, el flujo total Φ_E a través de la superficie gaussiana) es $+2EA$. La carga total encerrada es $Q_{enc} = \sigma A$, y por la ley de Gauss,

$$2EA = \frac{\sigma A}{\epsilon_0} \quad \text{y}$$

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \quad \text{(campo de una lámina infinita cargada)}$$

Este es el mismo resultado que se obtuvo en el ejemplo 21.11 con cálculos mucho más complejos.

Si σ es negativa, $\vec{E}$ está dirigido *hacia* la lámina, el flujo a través de la superficie gaussiana en la figura 22.20 es negativo, y σ en la expresión $E = \sigma/2\epsilon_0$ denota la magnitud (el valor absoluto) de la densidad de carga.

EVALUAR: Nuevamente vemos que, con una simetría favorable, es posible deducir los campos eléctricos usando la ley de Gauss mucho más fácilmente que con la ley de Coulomb.



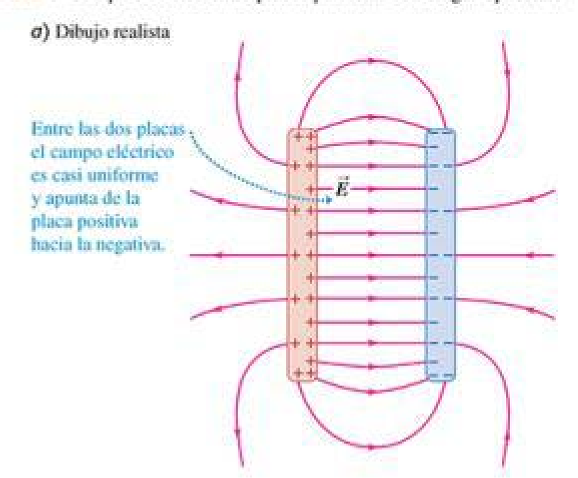
Ejemplo 22.8 Campo entre láminas conductoras paralelas y con cargas opuestas

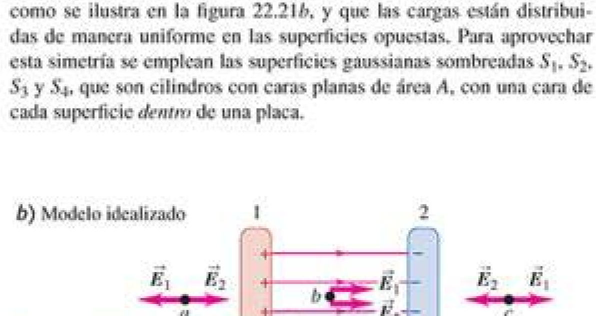
Dos placas conductoras paralelas, grandes y planas tienen cargas de igual magnitud pero con signo contrario; las densidades de carga en la superficie son $+\sigma$ para una y $-\sigma$ para la otra. Determine el campo eléctrico en la región entre las placas.

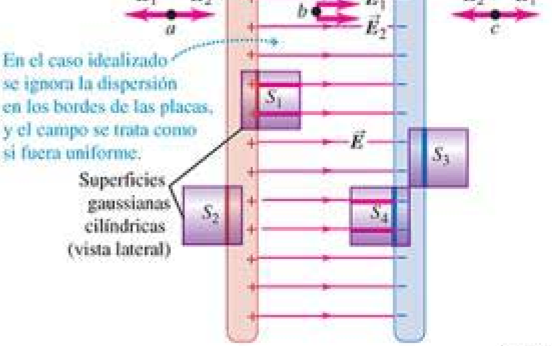
SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: La figura 22.21*a* describe el campo. Puesto que las cargas opuestas se atraen, la mayor parte de la carga se acumula en las caras opuestas de las placas. Una pequeña cantidad de carga reside en las superficies *exteriores* de las placas, y en sus extremos hay alguna dispersión del campo. Pero si las placas son muy grandes en comparación con la distancia que las separa, la cantidad de carga en las superficies exteriores se vuelve despreciable por pequeña, y la dispersión se ignora excepto cerca de los bordes. En este caso se puede suponer que el campo es uniforme en la región interior entre las placas, como se ilustra en la figura 22.21*b*, y que las cargas están distribuidas de manera uniforme en las superficies opuestas. Para aprovechar esta simetría se emplean las superficies gaussianas sombreadas S_1, S_2, S_3 y S_4, que son cilindros con caras planas de área A, con una cara de cada superficie *dentro* de una placa.

22.21 Campo eléctrico entre placas paralelas con cargas opuestas.







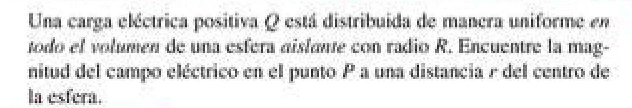
Continúa

EJECUTAR: El extremo de la izquierda de la superficie S_1 está dentro de la placa 1 positiva. Como en condiciones electrostáticas el campo dentro del volumen de cualquier sólido conductor es igual a cero, no hay flujo eléctrico a través de ese extremo. El campo eléctrico entre las placas es perpendicular a la cara derecha por lo que en esa cara, $E_\perp$ es igual a E y el flujo es EA; este es positivo porque $\vec{E}$ está dirigido hacia afuera de la superficie gaussiana. A través de la envolvente del cilindro no hay flujo, pues es paralela a $\vec{E}$. Así que la integral del flujo total en la ley de Gauss es EA. La carga neta encerrada por el cilindro es σA, por lo que la ecuación (22.8) da $EA = \sigma A/\epsilon_0$; entonces tenemos

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad \text{(campo entre placas conductoras con cargas opuestas)}$$

El campo es uniforme y perpendicular a las placas, y su magnitud es independiente de la distancia desde cualquiera de las placas. Este es el mismo resultado que se obtiene al usar la superficie gaussiana S_4; además, las superficies S_2 y S_3 producen $E = 0$ a la izquierda de la placa 1 y a la derecha de la placa 2, respectivamente. Se invita al lector a efectuar los cálculos respectivos (véase el ejercicio 22.29).

EVALUAR: Utilizando el principio de superposición de campos eléctricos, se obtienen los mismos resultados en el ejemplo 21.11. Los campos generados por las dos láminas de carga (uno en cada placa) son $\vec{E}_1$ y $\vec{E}_2$ del ejemplo 22.7, se sabe que ambos tienen magnitud $\sigma/2\epsilon_0$. El campo eléctrico total en cualquier punto es la suma vectorial $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$. En los puntos a y c en la figura 22.21b, $\vec{E}_1$ y $\vec{E}_2$ tienen direcciones opuestas y su resultante es igual a cero. En el punto b, $\vec{E}_1$ y $\vec{E}_2$ tienen la misma dirección; su resultante tiene magnitud $E = \sigma/\epsilon_0$, como se encontró antes utilizando la ley de Gauss.



Ejemplo 22.9 Campo de una esfera cargada uniformemente



Una carga eléctrica positiva Q está distribuida de manera uniforme *en todo el volumen* de una esfera *aislante* con radio R. Encuentre la magnitud del campo eléctrico en el punto P a una distancia r del centro de la esfera.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Como se vio en el ejemplo 22.5, el sistema tiene simetría esférica, por lo que se pueden usar las conclusiones de ese ejemplo acerca de la dirección y la magnitud de $\vec{E}$. Para emplear la simetría esférica, se elige como superficie gaussiana una esfera con radio r, concéntrica con la distribución de la carga.

EJECUTAR: Por simetría, la dirección de $\vec{E}$ es radial en todos los puntos de la superficie gaussiana, por lo que $E_\perp = E$ y la magnitud E del campo tiene el mismo valor en todos los puntos de la superficie. Así, el flujo eléctrico total a través de la superficie gaussiana es el producto de E por el área total de la superficie $A = 4\pi r^2$, es decir, $\Phi_E = 4\pi r^2 E$.

La cantidad de carga encerrada por la superficie gaussiana depende del radio r. Para obtener E *dentro* de la esfera, se elige $r < R$. La densidad de carga volumétrica ρ es la carga Q dividida entre el volumen de la esfera cargada de radio R:

$$\rho = \frac{Q}{4\pi R^3/3}$$

El volumen V_{enc} encerrado por la superficie gaussiana es $\frac{4}{3}\pi r^3$, por lo que la carga total Q_{enc} contenida por la superficie es

$$Q_{\text{enc}} = \rho V_{\text{enc}} = \left(\frac{Q}{4\pi R^3/3}\right)\left(\tfrac{4}{3}\pi r^3\right) = Q\frac{r^3}{R^3}$$

Así, la ley de Gauss, ecuación (22.8), se convierte en

$$4\pi r^2 E = \frac{Q}{\epsilon_0}\frac{r^3}{R^3} \quad \text{o bien,}$$

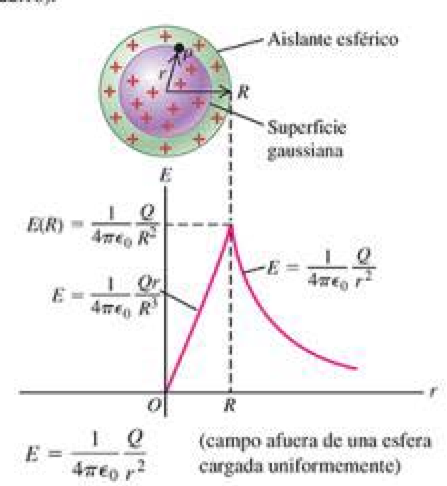
$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Qr}{R^3} \quad \text{(campo dentro de una esfera cargada uniformemente)}$$

La magnitud del campo es proporcional a la distancia r que hay entre el punto del campo y el centro de la esfera (véase la gráfica de E contra r en la figura 22.22).

Para calcular E *afuera* de la esfera se toma $r > R$. Esta superficie encierra la esfera cargada completa, por lo que $Q_{\text{enc}} = Q$, y la ley de Gauss da

$$4\pi r^2 E = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad \text{o bien,}$$

22.22 Magnitud del campo eléctrico de una esfera aislante cargada uniformemente. Compare esto con el campo de una esfera conductora (figura 22.18).



$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r^2} \quad \text{(campo afuera de una esfera cargada uniformemente)}$$

Para *cualquier* cuerpo cargado esféricamente simétrico, el campo eléctrico en su exterior varía de acuerdo con $1/r^2$, como si toda la carga estuviera concentrada en el centro. Esto se ilustra en la figura 22.22.

Si la carga es *negativa*, $\vec{E}$ va radialmente *hacia adentro* y en las expresiones de E, Q se interpreta como el valor absoluto de la carga.

EVALUAR: Observe que si se establece que $r = R$ en cualquiera de las expresiones de E, se obtiene el mismo resultado $E = Q/4\pi\epsilon_0 R^2$ para la magnitud del campo en la superficie de la esfera. Esto se debe a que la magnitud E es una función *continua* de r. En contraste, en la esfera conductora cargada del ejemplo 22.5, la magnitud del campo eléctrico es *discontinua* en $r = R$ (salta de $E = 0$ apenas dentro de la esfera a $E = Q/4\pi\epsilon_0 R^2$ justo afuera de la esfera). En general, el campo eléctrico $\vec{E}$ es discontinuo en su magnitud, dirección, o ambas, en cualquier lugar en el que haya una *lámina* cargada, como la superficie de una esfera conductora cargada (ejemplo 22.5), la superficie de una lámina infinita cargada (ejemplo 22.7) o la superficie de una placa conductora cargada (ejemplo 22.8).

El método utilizado aquí se aplica a *cualquier* distribución de carga con simetría esférica, inclusive si no es radialmente uniforme, como aquí. Tales distribuciones de carga ocurren dentro de muchos átomos y núcleos atómicos, por lo que la ley de Gauss es una herramienta útil en la física atómica y nuclear.

Ejemplo 22.10 Carga en una esfera hueca

Una esfera hueca de pared delgada y radio de 0.250 m tiene una cantidad desconocida de carga distribuida de manera uniforme en su superficie. A una distancia de 0.300 m desde el centro de la esfera, el campo eléctrico apunta radialmente hacia adentro de la esfera y su magnitud es de 1.80×10^2 N/C. ¿Cuánta carga hay en la esfera?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: La distribución de carga tiene simetría esférica. Igual que en los ejemplos 22.5 y 22.9, se deduce que el campo eléctrico es radial en todo lugar, y su magnitud es función solo de la distancia radial r desde el centro de la esfera. Se utiliza una superficie esférica gaussiana que es concéntrica con la distribución de carga y tiene un radio $r = 0.300$ m. Nuestra incógnita es $Q_{enc} = q$.

EJECUTAR: La distribución de carga es la misma que si la carga estuviera sobre la superficie de una esfera conductora de 0.250 m de radio. Por ello es posible usar los resultados del ejemplo 22.5. Observe que aquí el campo eléctrico está dirigido hacia la esfera, por lo que q debe ser *negativa*. Además, el campo eléctrico se dirige hacia la superficie gaussiana, de modo que $E_\perp = -E$ y $\Phi_E = E_\perp\, dA = -E(4\pi r^2)$.

Según la ley de Gauss, el flujo es igual a la carga q en la esfera (toda ella encerrada por la superficie gaussiana) dividida entre ϵ_0. Al despejar q se obtiene lo siguiente:

$$q = -E(4\pi\epsilon_0 r^2) = -(1.80 \times 10^2 \text{ N/C})(4\pi) \times (8.854 \times 10^{-12} \text{ C}^2/\text{N}\cdot\text{m}^2)(0.300 \text{ m})^2 = -1.80 \times 10^{-9} \text{ C} = -1.80 \text{ nC}$$

EVALUAR: Para determinar la carga, se tiene que conocer el campo eléctrico en *todos* los puntos de la superficie gaussiana con la finalidad de poder calcular la integral de flujo. Aquí esto fue posible porque la distribución de carga es muy simétrica. Si la distribución de carga fuera irregular o asimétrica, la ley de Gauss no resultaría muy útil para calcular la distribución de carga a partir del campo, o viceversa.

Evalúe su comprensión de la sección 22.4 Se coloca una cantidad conocida de carga Q en el conductor de forma irregular que se ilustra en la figura 22.17. Si se conoce el tamaño y la forma del conductor, ¿es posible emplear la ley de Gauss para calcular el campo eléctrico en una posición arbitraria fuera del conductor? **|**

22.5 Cargas en conductores

Ya sabemos que en una situación electrostática (en la que no hay movimiento neto de la carga), el campo eléctrico en cada punto dentro de un conductor es igual a cero, y que el exceso de carga en un conductor sólido se localiza por completo en su superficie (figura 22.23*a*). Pero, ¿qué pasa si en el conductor hay una *cavidad* (como en la figura 22.23*b*)? Si no hay carga dentro de la cavidad, se puede utilizar una superficie gaussiana como A (que está por completo dentro del material del conductor) para demostrar que la carga *neta* en la *superficie de la cavidad* debe ser igual a cero, ya que $\vec{E} = \mathbf{0}$ en todo lugar de la superficie gaussiana. De hecho, es factible probar que en esta situación no puede haber carga *en ninguna parte* de la superficie de la cavidad. La demostración detallada de este enunciado se dejará para el capítulo 23.

Suponga que se coloca un cuerpo pequeño con carga q dentro de una cavidad en el interior de un conductor (figura 22.23*c*). El conductor está descargado y aislado de la carga q. Otra vez, $\vec{E} = \mathbf{0}$ en todos los puntos de la superficie A, por lo que, según la ley de Gauss, la carga *total* dentro de esta superficie debe ser igual a cero. Por lo tanto, debe haber una carga $-q$ distribuida sobre la superficie de la cavidad, generada ahí por la carga q en el interior de la cavidad. La carga *total* en el conductor debe ser igual a cero, por lo que debe haber una carga $+q$ ya sea en su superficie exterior o

Aplicación Distribución de carga en el interior de las células nerviosas
El interior de una célula nerviosa humana contiene tanto iones positivos de potasio [K⁺] como moléculas de proteína cargadas negativamente [Pr⁻]. Los iones de potasio fluyen hacia afuera de la célula a través de la membrana celular, pero las moléculas de proteína, de tamaño mucho más grande, no lo pueden hacer. El resultado es que el interior de la célula tiene una carga neta negativa. (El fluido fuera de la célula tiene una carga positiva que equilibra esto). El fluido dentro de la célula es un buen conductor, de modo que las moléculas Pr⁻ se distribuyen sobre la superficie exterior del fluido, es decir, sobre la superficie interior de la membrana de la célula, la cual es un aislante. Esto se cumple independientemente de la forma de la célula.



22.23 Cálculo del campo eléctrico dentro de un conductor cargado.

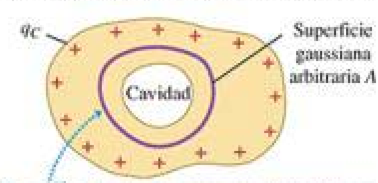
a) Conductor sólido con carga q_C

q_C

$\vec{E} = \mathbf{0}$ dentro del conductor

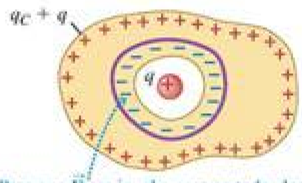
La carga q_C reside por completo en la superficie del conductor. La situación es electrostática, por lo que $\vec{E} = \mathbf{0}$ dentro del conductor.

b) El mismo conductor con una cavidad interna



Como $\vec{E} = \mathbf{0}$ en todos los puntos dentro del conductor, el campo eléctrico debe ser igual a cero en todos los puntos de la superficie gaussiana.

c) Se coloca en la cavidad una carga aislada q



Para que $\vec{E}$ sea igual a cero en todos los puntos de la superficie gaussiana, la superficie de la cavidad debe tener una carga total de $-q$.



dentro del material. Pero ya se demostró que en una situación electrostática no puede haber ningún exceso de carga dentro del material de un conductor. Así, se concluye que la carga $+q$ debe estar en la superficie externa. Con el mismo razonamiento, si el conductor tuviera originalmente una carga q_C, entonces la carga total en la superficie exterior debe ser $q_C + q$ después de que se insertó la carga q en la cavidad.



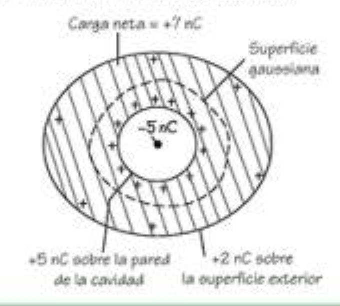
Ejemplo conceptual 22.11 Conductor con una cavidad

Un conductor sólido con una cavidad tiene una carga total de +7 nC. Dentro de la cavidad, aislada del conductor, hay una carga puntual de −5 nC. ¿Cuánta carga hay en cada superficie (interna y externa) del conductor?

SOLUCIÓN

La figura 22.24 ilustra la situación. Si la carga en la cavidad es $q = -5$ nC, la carga en la superficie interna de la cavidad debe ser $-q = -(-5 \text{ nC}) = +5$ nC. El conductor lleva una carga *total* de +7 nC, la cual no se encuentra en el interior del material. Si en la superficie interna de la cavidad hay +5 nC, entonces en la superficie externa del conductor debe haber (+7 nC) − (+5 nC) = +2 nC.

22.24 Ilustración del problema. Dentro del volumen del conductor hay un campo eléctrico igual a cero y, por lo tanto, un flujo de cero a través de la superficie gaussiana, por lo que la carga sobre la pared de la cavidad debe ser la opuesta de la carga puntual.

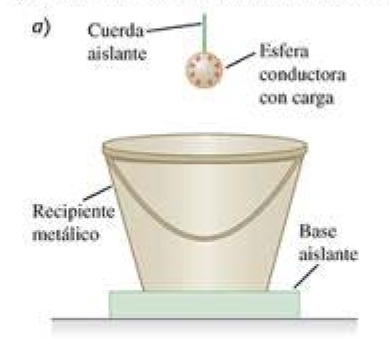


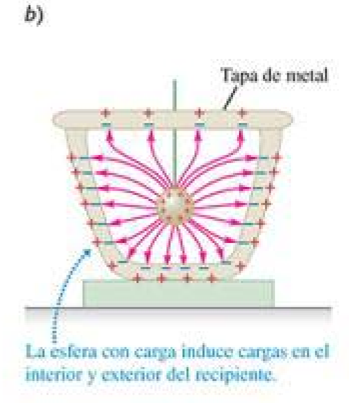
Prueba experimental de la ley de Gauss

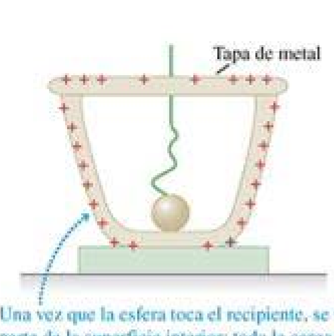
Ahora se analizará un experimento histórico, que se ilustra en la figura 22.25. Se fija un recipiente conductor sobre una base aislante. Al principio, el recipiente no tiene carga. Después se cuelga, con un cordel aislante, una esfera metálica cargada (figura 22.25*a*), la cual se hace descender hacia el interior del recipiente, y se coloca la tapa (figura 22.25*b*). Se inducen cargas sobre las paredes del recipiente, como se ilustra. Luego se deja que la esfera *toque* la pared interior (figura 22.25*c*). La superficie de la esfera se convierte en parte de la superficie de la cavidad. La situación es ahora la misma que la de la figura 22.23*b*; si la ley de Gauss es correcta, la carga neta en la superficie de la cavidad debe ser igual a cero. Es decir, la esfera debe perder toda su carga. Por último, se extrae la esfera y se constata que, en efecto, ha perdido toda su carga.

Este experimento lo realizó en el siglo XIX el científico inglés Michael Faraday empleando una hielera de metal con tapa, y se conoce como el **experimento de la hielera de Faraday**. El resultado confirma la validez de la ley de Gauss y, por lo tanto,

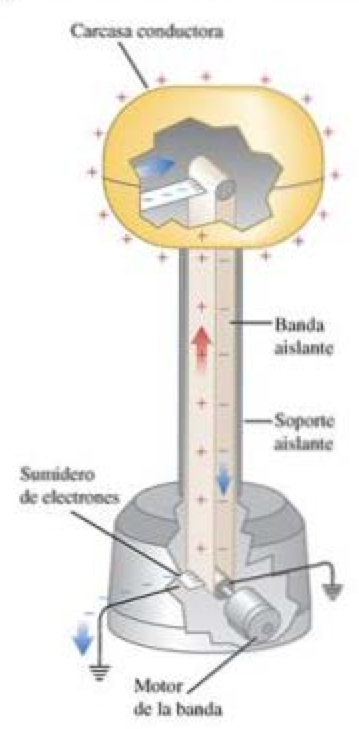
22.25 *a*) Esfera conductora con carga, suspendida de un cordel aislante afuera de un recipiente conductor apoyado en una base aislante. *b*) Se hace descender la esfera hacia el interior del recipiente, y se coloca la tapa. *c*) La esfera toca la superficie interior del recipiente.







22.26 Vista interior de las partes esenciales de un generador electrostático de Van de Graaff. El sumidero de electrones en la parte inferior extrae electrones de la banda, proporcionando a esta una carga positiva; en la parte superior la banda atrae electrones de la carcasa conductora, dándole una carga positiva.

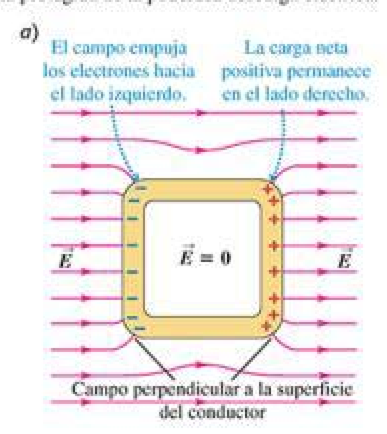


de la ley de Coulomb. El resultado de Faraday fue significativo porque el método experimental de Coulomb, quien usaba una balanza de torsión y dividía las cargas, no era muy preciso; es muy difícil confirmar con gran precisión la dependencia que tiene la fuerza electrostática del término $1/r^2$ con mediciones directas de la fuerza. En contraste, experimentos como el de Faraday prueban la validez de la ley de Gauss y, por consiguiente, de la ley de Coulomb de un modo mucho más preciso. Versiones modernas de este experimento han demostrado que el exponente 2 en el término $1/r^2$ de la ley de Coulomb no difiere, precisamente, por más de 10^{-16}. Así que no hay razón para sospechar que es un número diferente de exactamente 2.

El mismo principio que subyace en el experimento de la hielera de Faraday es el que se utiliza en el *generador electrostático de Van de Graaff* (figura 22.26). Una banda con carga continuamente transporta carga al interior de una carcasa conductora. Según la ley de Gauss, nunca puede haber una carga en la superficie interior de esta carcasa, de modo que la carga es transportada inmediatamente a la superficie exterior de la carcasa. Como resultado, la carga en la carcasa y el campo eléctrico que la rodea se vuelven muy grandes con mucha rapidez. El generador Van de Graaff se utiliza como acelerador de partículas cargadas y para demostraciones de física.

Este principio también es la base del *blindaje electrostático*. Imagine que hay un instrumento electrónico muy sensible que deseamos proteger de los campos eléctricos dispersos que pudieran originar lecturas erróneas. Se rodea al instrumento con una caja conductora, o se recubren las paredes, el piso y el techo de la habitación con un material conductor como lámina de cobre. El campo eléctrico exterior redistribuye los electrones libres en el conductor, lo que deja en ciertas regiones de la superficie exterior una carga neta positiva, y en otras una negativa (figura 22.27). Esta distribución de la carga genera un campo eléctrico adicional de manera que el campo *total* en cada punto dentro de la caja es igual a cero, como afirma la ley de Gauss. La distribución de la carga en la caja también altera las formas de las líneas del campo cerca de la caja, como se observa en la figura. Con frecuencia este arreglo se conoce como la *jaula de*

22.27 *a*) Caja conductora (jaula de Faraday) inmersa en un campo eléctrico uniforme. El campo de las cargas inducidas sobre la caja se combina con el campo uniforme para dar un campo total igual a cero dentro de la caja. *b*) Esta persona está dentro de una jaula de Faraday, y por lo tanto está protegida de la poderosa descarga eléctrica.



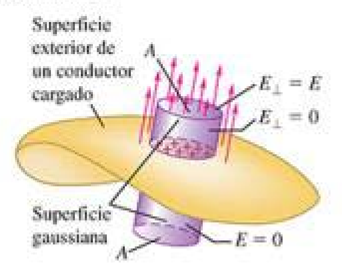


Faraday. La misma física nos dice que uno de los lugares más seguros en que se puede permanecer durante una tormenta eléctrica es en el interior de un automóvil; si un relámpago azotara el vehículo, la carga tendería a permanecer en la carrocería de metal, mientras que en el compartimento de pasajeros habría poco o ningún campo eléctrico.

Campo en la superficie de un conductor

Por último, observe que hay una relación directa entre el campo $\vec{E}$ en un punto justo afuera de cualquier conductor y la densidad de carga superficial σ en ese punto. En general, σ varía de un punto a otro de la superficie. En el capítulo 23 se mostrará que en un punto así, la dirección de $\vec{E}$ siempre es *perpendicular* a la superficie. (Este efecto se aprecia en la figura 22.27*a*).

22.28 El campo inmediatamente afuera de un conductor cargado es perpendicular a la superficie, y su componente perpendicular $E_\perp$ es igual a σ/ϵ_0.



Para encontrar una relación entre σ en cualquier punto de la superficie y la componente perpendicular del campo eléctrico en ese punto, se construye una superficie gaussiana en forma de un pequeño cilindro (figura 22.28). La cara de uno de los extremos, con área igual a A, queda dentro del conductor y la otra queda afuera. El campo eléctrico es igual a cero en todos los puntos dentro del conductor. Fuera de este, la componente de $\vec{E}$ perpendicular a la envolvente del cilindro es igual a cero, y sobre la cara del exterior la componente perpendicular es igual a $E_\perp$. (Si σ es positiva, el campo eléctrico apunta hacia afuera del conductor y $E_\perp$ es positiva; si σ es negativa, el campo eléctrico apunta hacia el interior y $E_\perp$ es negativa). Así, el flujo total a través de la superficie es $E_\perp A$. La carga encerrada dentro de la superficie gaussiana es σA, por lo que a partir de la ley de Gauss,

$$E_\perp A = \frac{\sigma A}{\epsilon_0} \quad \text{y} \quad E_\perp = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad \text{(campo en la superficie de un conductor)} \tag{22.10}$$

Esto se puede comprobar con los resultados obtenidos para superficies esféricas, cilíndricas y planas.

En el ejemplo 22.8 se demostró que la magnitud del campo entre dos placas conductoras infinitas y planas con cargas opuestas también es igual a σ/ϵ_0. En este caso, la magnitud del campo E es la misma en *todas* las distancias entre las placas, pero en todos los demás casos, E disminuye conforme aumenta la distancia a la superficie.

Ejemplo conceptual 22.12 Campo en la superficie de una esfera conductora

Compruebe la ecuación (22.10) para una esfera conductora de radio R y carga total q.

SOLUCIÓN

En el ejemplo 22.5 (sección 22.4) se demostró que el campo eléctrico inmediatamente afuera de la superficie es

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{R^2}$$

La densidad de carga superficial es uniforme e igual a q dividida entre el área de la superficie de la esfera:

$$\sigma = \frac{q}{4\pi R^2}$$

Al comparar estas dos expresiones se observa que $E = \sigma/\epsilon_0$, como se plantea en la ecuación (22.10).

Ejemplo 22.13 Campo eléctrico de la Tierra



La Tierra (un conductor) tiene una carga eléctrica neta. El campo eléctrico resultante cerca de la superficie tiene un valor medio de alrededor de 150 N/C, dirigido hacia el centro de la Tierra. *a)* ¿Cuál es la densidad de carga superficial correspondiente? *b)* ¿Cuál es la carga superficial *total* de la Tierra?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Se da la magnitud del campo eléctrico en la superficie de la Tierra conductora. Se puede calcular la densidad de carga superficial σ usando la ecuación (22.10). La carga total Q en la superficie de la Tierra es el producto de σ por el área de la superficie terrestre.

EJECUTAR: *a)* De la dirección del campo se sabe que σ es negativa (lo que corresponde a $\vec{E}$ dirigido *hacia* la superficie, por lo que E es negativa). De acuerdo con la ecuación (22.10),

$$\begin{aligned}\sigma &= \epsilon_0 E_\perp = (8.85 \times 10^{-12}\ \text{C}^2/\text{N}\cdot\text{m}^2)(-150\ \text{N/C})\\ &= -1.33 \times 10^{-9}\ \text{C/m}^2 = -1.33\ \text{nC/m}^2\end{aligned}$$

b) El área de la superficie de la Tierra es $4\pi R_E{}^2$, donde $R_E = 6.38 \times 10^6$ m es el radio terrestre (véase el apéndice F). La carga total Q es el producto $4\pi R_E{}^2\sigma$, o

$$\begin{aligned}Q &= 4\pi(6.38 \times 10^6\ \text{m})^2(-1.33 \times 10^{-9}\ \text{C/m}^2)\\ &= -6.8 \times 10^5\ \text{C} = -680\ \text{kC}\end{aligned}$$

EVALUAR: El resultado del inciso *b)* se puede comprobar con el que se obtuvo en el ejemplo 22.5. Al despejar Q, se encuentra que

$$\begin{aligned}Q &= 4\pi\epsilon_0 R^2 E_\perp\\ &= \frac{1}{9.0 \times 10^9\ \text{N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2}(6.38 \times 10^6\ \text{m})^2(-150\ \text{N/C})\\ &= -6.8 \times 10^5\ \text{C}\end{aligned}$$

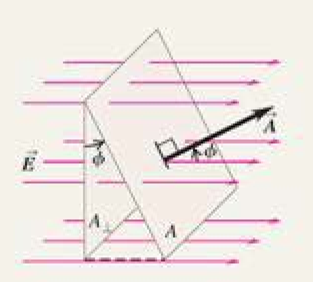
Un electrón tiene una carga de -1.60×10^{-19} C. Este exceso de carga eléctrica negativa corresponde a la existencia de $(-6.8 \times 10^5\ \text{C})/(-1.60 \times 10^{-19}\ \text{C}) = 4.2 \times 10^{24}$ un exceso de electrones en la Tierra, o cerca de 7 moles de electrones en exceso. Esto se compensa con una *deficiencia* igual de electrones en la atmósfera superior de nuestro planeta, por lo que la combinación de la Tierra con su atmósfera es eléctricamente neutra.

Evalúe su comprensión de la sección 22.5 Una esfera hueca conductora carece de carga neta. En el centro de la cavidad esférica dentro de la esfera hay una carga puntual positiva q. Se conecta un alambre conductor entre el exterior de la esfera y el suelo. ¿Se medirá un campo eléctrico fuera de la esfera?



Flujo eléctrico: El flujo eléctrico es una medida del flujo de un campo eléctrico a través de una superficie. Es igual al producto de un elemento de área por la componente perpendicular de $\vec{E}$, integrado sobre una superficie. (Véase los ejemplos 22.1 a 22.3).

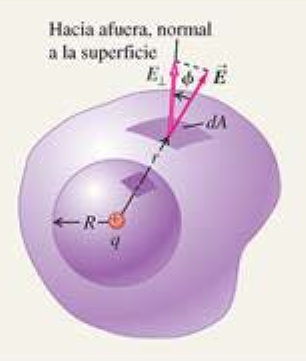
$$\Phi_E = \int E\cos\phi \, dA = \int E_\perp \, dA = \int \vec{E}\cdot d\vec{A} \quad (22.5)$$



Ley de Gauss: La ley de Gauss establece que el flujo eléctrico total a través de una superficie cerrada, que se expresa como la integral de superficie de la componente de $\vec{E}$ normal a la superficie, es igual a una constante por la carga total Q_{enc} encerrada por la superficie. La ley de Gauss es lógicamente equivalente a la ley de Coulomb, pero su uso simplifica mucho los problemas con alto grado de simetría. (Véase los ejemplos 22.4 a 22.10).

Cuando colocamos carga en exceso en un conductor en reposo, esta permanece completamente en la superficie, y $\vec{E} = \mathbf{0}$ en todos los puntos del material del conductor. (Véase los ejemplos 22.11 a 22.13).

$$\Phi_E = \oint E\cos\phi \, dA = \oint E_\perp \, dA = \oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0} \quad (22.8), (22.9)$$



Campo eléctrico de varias distribuciones simétricas de carga: En la siguiente tabla se listan los campos eléctricos generados por varias distribuciones simétricas de carga. En la tabla, q, Q, λ y σ se refieren a las *magnitudes* de las cantidades.

Distribución de la carga	Punto en un campo eléctrico	Magnitud del campo eléctrico
Una sola carga puntual q	Distancia r desde q	$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2}$
Carga q en la superficie de una esfera conductora de radio R	Esfera exterior, $r > R$	$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2}$
	Esfera interior, $r < R$	$E = 0$
Alambre infinito, carga por unidad de longitud λ	Distancia r desde el alambre	$E = \frac{1}{2\pi\epsilon_0}\frac{\lambda}{r}$
Cilindro conductor infinito con radio R, carga por unidad de longitud λ	Cilindro exterior, $r > R$	$E = \frac{1}{2\pi\epsilon_0}\frac{\lambda}{r}$
	Cilindro interior, $r < R$	$E = 0$
Esfera aislante sólida con radio R, carga Q distribuida de manera uniforme en todo el volumen	Esfera exterior, $r > R$	$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r^2}$
	Esfera interior, $r < R$	$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Qr}{R^3}$
Lámina infinita con carga uniforme por unidad de área σ	Cualquier punto	$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$
Dos placas conductoras con cargas opuestas y densidades superficiales de carga $+\sigma$ y $-\sigma$	Cualquier punto entre las placas	$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$
Conductor cargado	Inmediatamente afuera del conductor	$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$



PROBLEMA PRÁCTICO Campo eléctrico dentro de un átomo de hidrógeno

Un átomo de hidrógeno está constituido por un protón de carga $+Q = 1.60 \times 10^{-19}$ C y un electrón de carga $-Q = -1.60 \times 10^{-19}$ C. El protón puede considerarse como una carga puntual en $r = 0$, el centro del átomo. El movimiento del electrón ocasiona que su carga se "disperse" hacia una distribución esférica alrededor del protón, por lo que el electrón es equivalente a una carga por unidad de volumen de $\rho(r) = -(Q/\pi a_0^3)e^{-2r/a_0}$, donde $a_0 = 5.29 \times 10^{-11}$ m se llama *radio de Bohr*. *a*) Obtenga la cantidad total de la carga del átomo de hidrógeno encerrada dentro de una esfera con radio r centrada en el protón. *b*) Obtenga el campo eléctrico (magnitud y dirección) generado por la carga del átomo de hidrógeno como función de r. *c*) Grafique el cociente entre la magnitud E del campo eléctrico y la magnitud del campo generado solo por el protón, como función de r.

GUÍA DE SOLUCIÓN

Véase el área de estudio MasteringPhysics® para consultar una solución con Video Tutor.



IDENTIFICAR y PLANTEAR

1. La distribución de carga en este problema tiene simetría esférica, igual que en el ejemplo 22.9, por lo que se puede resolver usando la ley de Gauss.
2. La carga dentro de una esfera de radio r contiene la carga del protón $+Q$ más la parte de la distribución de carga del electrón que se encuentra dentro de la esfera. La diferencia con el ejemplo 22.9 es que la distribución de carga del electrón *no* es uniforme, de modo que la carga encerrada dentro de una esfera de radio r *no* es simplemente la densidad de carga multiplicada por el volumen $4\pi r^3/3$ de la esfera. Así que se debe resolver una integral.
3. Considere un cascarón esférico delgado con centro en el protón, de radio r' y grosor infinitesimal igual a dr'. Como el cascarón es muy delgado, todos los puntos del mismo tienen esencialmente el mismo radio desde el protón. Así, la cantidad de carga del electrón dentro del cascarón *es* igual a la densidad de carga del electrón $\rho(r')$ en este radio multiplicada por el volumen dV del cascarón. ¿Cuál es dV en términos de r'?
4. La carga total del electrón dentro de un radio r es igual a la integral de $\rho(r')dV$ desde $r' = 0$ hasta $r' = r$. Defina esta integral (pero no la resuelva todavía) y úsela para escribir una expresión para la carga total (incluyendo el protón) dentro de una esfera de radio r.

EJECUTAR

5. Integre la expresión del paso 4 para obtener la carga dentro del radio r. *Sugerencia:* Integre por sustitución: cambie la variable de integración de r' a $x = 2r'/a_0$. Calcule la integral $\int x^2 e^{-x}\,dx$ usando integración por partes, o buscándola en una tabla de integrales o en Internet.
6. Use la ley de Gauss y los resultados del paso 5 para obtener el campo eléctrico a una distancia r del protón.
7. Calcule el cociente mencionado en el inciso *c*) y grafique contra r. (Verá que es más fácil graficar esta función contra la cantidad r/a_0).

EVALUAR

8. ¿Cómo se comportan los resultados de la carga encerrada y la magnitud del campo eléctrico en el límite $r \to 0$? ¿Y en el límite $r \to \infty$? Explique sus resultados.

Problemas

Para tareas asignadas por el profesor, visite www.masteringphysics.com



•, ••, •••: Problemas de dificultad creciente. **PA**: Problemas acumulativos que incorporan material de capítulos anteriores. **CALC**: Problemas que requieren cálculo. **BIO**: Problemas de ciencias biológicas.

PREGUNTAS PARA ANÁLISIS

P22.1 Un globo de caucho tiene en su interior una carga puntual. ¿El flujo eléctrico a través del globo depende de si está inflado por completo o no? Explique su razonamiento.

P22.2 Suponga que en la figura 22.15 ambas cargas son positivas. ¿Cuáles serían los flujos a través de cada una de las cuatro superficies del ejemplo?

P22.3 En la figura 22.15, suponga que se coloca una tercera carga puntual fuera de la superficie gaussiana C de color púrpura. ¿Afectaría esto el flujo eléctrico a través de cualquiera de las superficies A, B, C o D de la figura? ¿Por qué?

P22.4 Cierta región del espacio acotada por una superficie imaginaria cerrada no contiene carga. ¿El campo eléctrico siempre es igual a cero en todos los puntos de la superficie? Si no es así, ¿en qué circunstancias sería cero en la superficie?

P22.5 Una superficie gaussiana esférica encierra una carga puntual q. Si la carga puntual se desplaza del centro de la esfera a un punto alejado de ahí, ¿cambia el campo eléctrico en un punto de la superficie? ¿Cambia el flujo total a través de la superficie gaussiana? Explique su respuesta.

P22.6 Usted encuentra una caja cerrada ante su puerta. Sospecha que contiene varias esferas de metal con carga y empacadas en un material aislante. ¿Cómo podría determinar la carga neta total dentro de la caja sin abrirla? ¿O no es posible hacer eso?

P22.7 Una esfera sólida de cobre tiene una carga neta positiva distribuida de manera uniforme sobre su superficie; el campo eléctrico en el interior de la esfera es igual a cero. Después, una carga puntual negativa fuera de la esfera se acerca a la superficie de la misma. ¿Toda la carga neta en la esfera seguirá en la superficie? De ser así, ¿se distribuiría de manera uniforme? Y si no fuera uniforme, ¿cómo se distribuiría? ¿El campo eléctrico dentro de la esfera seguiría siendo igual a cero? Explique su respuesta para cada caso.

P22.8 Si el campo eléctrico de una carga puntual fuera proporcional a $1/r^3$ en vez de $1/r^2$, ¿seguiría siendo válida la ley de Gauss? Explique su razonamiento. (*Sugerencia:* Considere una superficie gaussiana esférica centrada en una sola carga puntual).

P22.9 En un conductor, uno o más electrones de cada átomo tienen libertad para moverse por todo el volumen del conductor. ¿Contradice esto el enunciado de que cualquier carga en exceso en un conductor sólido debe permanecer en su superficie? ¿Por qué?

P22.10 Usted carga el generador Van de Graaff que se muestra en la figura 22.26, y luego le acerca una esfera conductora hueca idéntica, pero sin carga y sin dejar que las dos esferas se toquen. Elabore un diagrama de la distribución de cargas en la segunda esfera. ¿Cuál es el flujo neto a través de la segunda esfera? ¿Cuál es el campo eléctrico dentro de la segunda esfera?

P22.11 Un pararrayos es una varilla de cobre redondeada que se monta en la parte alta de los edificios y va soldada a un cable grueso, también de cobre, que llega a tierra. Los pararrayos se utilizan para proteger casas y graneros de los relámpagos; la corriente de los relámpagos corre por el cable y no por el edificio. ¿Por qué? ¿Por qué el extremo de la varilla debe estar redondeado?

P22.12 Un conductor sólido tiene una cavidad en su interior. ¿Afectaría la presencia de una carga puntual dentro de la cavidad al campo eléctrico fuera del conductor? ¿Por qué? ¿La presencia de una carga puntual fuera del conductor afectaría el campo eléctrico en el interior de la cavidad? De nuevo, ¿por qué?

P22.13 Explique el siguiente enunciado: "En una situación estática, el campo eléctrico en la superficie de un conductor podría no tener ninguna componente paralela a la superficie, ya que esto violaría la condición de que las cargas en la superficie están en reposo". ¿Este mismo enunciado sería válido para el campo eléctrico en la superficie de un *aislante*? Explique su respuesta y la razón de cualquier diferencia entre los casos de un conductor y un aislante.

P22.14 En cierta región del espacio, el campo eléctrico $\vec{E}$ es uniforme. *a*) Use la ley de Gauss para demostrar que esa región debe ser eléctricamente neutra; es decir, la densidad de carga volumétrica ρ debe ser igual a cero. *b*) Lo contrario, ¿es verdadero? Es decir, en una región del espacio donde no hay carga, ¿$\vec{E}$ debe ser uniforme? Explique su respuesta.

P22.15 *a*) En cierta región del espacio, la densidad de carga volumétrica ρ tiene un valor positivo uniforme. En esa región, ¿$\vec{E}$ puede ser uniforme? Explique su respuesta. *b*) Suponga que en esa región donde ρ es positiva y uniforme hay una "burbuja" dentro de la cual $\rho = 0$. En el interior de la burbuja, ¿$\vec{E}$ puede ser uniforme? Explique su respuesta.

EJERCICIOS

Sección 22.2 Cálculo del flujo eléctrico

22.1 • Una delgada hoja de papel tiene un área de 0.250 m^2 y está orientada de tal modo que la normal a la hoja forma un ángulo de 60° con un campo eléctrico uniforme de magnitud 14 N/C. *a*) Calcule la magnitud del flujo eléctrico a través de la hoja. *b*) ¿La respuesta al inciso *a*) depende de la forma de la hoja? ¿Por qué? *c*) Para qué ángulo *f* entre la normal a la hoja y el campo eléctrico, la magnitud del flujo a través de la hoja es: **i.** máxima y **ii.** mínima? Explique sus respuestas.

22.2 •• Una lámina plana tiene forma rectangular con lados de longitud 0.400 m y 0.600 m. La lámina está inmersa en un campo eléctrico uniforme de magnitud 75.0 N/C dirigido a 20° con respecto al plano de la lámina (figura E22.2). Encuentre la magnitud del flujo eléctrico a través de la lámina.

Figura **E22.2**



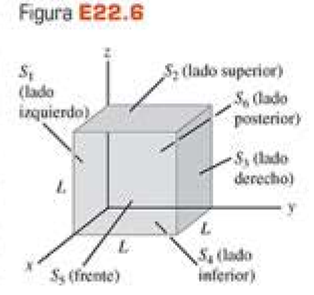
22.3 • Se mide un campo eléctrico de 1.25×10^6 N/C a una distancia de 0.150 m de una carga puntual. No existe otra fuente de campo eléctrico en la región más que esta carga puntual. *a*) ¿Cuál es el flujo eléctrico a través de la superficie de una esfera de radio 0.150 m y que tiene esa carga en su centro? *b*) ¿Cuál es la magnitud de esta carga?

22.4 • En el ejemplo 21.11 (sección 21.5) se demostró que el campo eléctrico debido a una línea infinita de carga es perpendicular a esta y su magnitud es $E = \lambda/2\pi\epsilon_0 r$. Considere un cilindro imaginario con radio $r = 0.250$ m y longitud $l = 0.400$ m que tiene una línea infinita de carga positiva que va a lo largo de su eje. La carga por unidad de longitud en la línea es $\lambda = 3.00\ \mu$C/m. *a*) ¿Cuál es el flujo eléctrico a través del cilindro debido a esta línea infinita de carga? *b*) ¿Cuál es el flujo a través del cilindro si su radio se incrementa a $r = 0.500$ m? *c*) ¿Cuál es el flujo a través del cilindro si su longitud aumenta a $l = 0.800$ m?

22.5 •• Una superficie hemisférica con radio r en una región de campo eléctrico uniforme $\vec{E}$ tiene su eje alineado en forma paralela con la dirección del campo. Calcule el flujo a través de la superficie.

22.6 • El cubo de la figura E22.6 tiene lados con longitud L = 10.0 cm. El campo eléctrico es uniforme, tiene magnitud $E = 4.00 \times 10^3$ N/C y es paralelo al plano xy con un ángulo de 53.1° medido a partir del eje $+x$ hacia el eje $+y$. *a*) ¿Cuál es el flujo eléctrico a través de cada una de las seis caras del cubo, S_1, S_2, S_3, S_4, S_5 y S_6? *b*) ¿Cuál es el flujo eléctrico total a través de todas las caras del cubo?

Figura **E22.6**

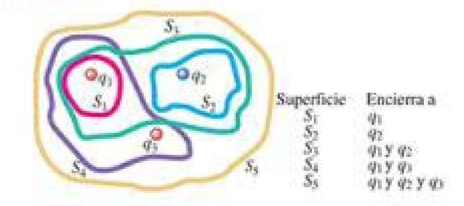


Sección 22.3 Ley de Gauss

22.7 • **BIO** Como vimos en la sección 22.5, las células nerviosas humanas tienen una carga negativa y el material en el interior de la célula es un buen conductor. Si una célula tiene una carga neta de −8.65 pC, ¿cuáles son la magnitud y dirección (hacia adentro o hacia afuera) del flujo neto a través de la frontera de la célula?

22.8 • Las tres esferas pequeñas que se ilustran en la figura E22.8 tienen cargas $q_1 = 4.00$ nC, $q_2 = -7.80$ nC y $q_3 = 2.40$ nC. Calcule el flujo eléctrico neto a través de cada una de las siguientes superficies cerradas que se ilustran en sección transversal en la figura: *a*) S_1; *b*) S_2; *c*) S_3; *d*) S_4; *e*) S_5. *f*) Las respuestas para los incisos *a*) a *e*), ¿dependen de la manera en que está distribuida la carga en cada esfera pequeña? ¿Por qué?

Figura **E22.8**



Superficie	Encierra a
S_1	q_1
S_2	q_2
S_3	q_1 y q_2
S_4	q_1 y q_3
S_5	q_1 y q_2 y q_3

22.9 •• Se rocía una capa muy delgada y uniforme de pintura con carga sobre la superficie de una esfera de plástico cuyo diámetro es de 12.0 cm, para obtener una carga de −35.0 μC. Encuentre el campo eléctrico *a*) apenas adentro de la capa de pintura; *b*) inmediatamente afuera de la capa de pintura; *c*) 5.00 cm afuera de la superficie de la capa de pintura.

22.10 • Una carga puntual $q_1 = 4.00$ nC se localiza sobre el eje x en $x = 2.00$ m, y una segunda carga puntual $q_2 = -6.00$ nC está en el eje y en $y = 1.00$ m. ¿Cuál es el flujo eléctrico total debido a estas dos cargas puntuales a través de una superficie esférica con centro en el origen y con radio de *a*) 0.500 m, *b*) 1.50 m, *c*) 2.50 m?

22.11 • Una carga puntual de 6.20 μC está en el centro de un cubo con lados cuya longitud mide 0.500 m. *a*) ¿Cuál es el flujo eléctrico a través de una de las seis caras del cubo? *b*) ¿Cómo cambiaría su respuesta al inciso *a*) si los lados midieran 0.250 m? Dé una explicación.

22.12 • **Campos eléctricos en un átomo.** Los núcleos de los átomos grandes, como el del uranio, con 92 protones, se modelan como esferas simétricas de carga. El radio del núcleo de uranio mide aproximadamente 7.4×10^{-15} m. *a*) ¿Cuál es el campo eléctrico que produce este núcleo justo afuera de su superficie? *b*) ¿Qué magnitud de campo eléctrico produce a la distancia de los electrones, que es alrededor de 1.0×10^{-10} m? *c*) Los electrones se modelan como si formaran un cascarón uniforme de carga negativa. ¿Qué campo eléctrico neto producen en el sitio en que se ubica el núcleo?

22.13 • Una carga puntual de +5.00 μC se localiza en el eje x en $x = 4.00$ m, cerca de una superficie esférica de radio 3.00 m con centro en el origen. *a*) Calcule la magnitud del campo eléctrico en $x = 3.00$ m. *b*) Determine la magnitud del campo eléctrico en $x = -3.00$ m. *c*) De acuerdo con la ley de Gauss, el flujo neto a través de la esfera es igual a cero porque no contiene carga. Pero el campo debido a la carga exterior es mucho más fuerte en el lado cercano a la esfera (por ejemplo, en $x = 3.00$ m) que en el lado alejado (en $x = -3.00$ m). Entonces, ¿cómo puede ser igual el flujo hacia la esfera (en el lado cercano) que el flujo hacia fuera de ella (en el lado lejano)? Dé una explicación; un diagrama será de utilidad.

Sección 22.4 Aplicaciones de la ley de Gauss y Sección 22.5 Cargas en conductores

22.14 •• Una esfera metálica sólida con radio de 0.450 m tiene una carga neta de 0.250 nC. Determine la magnitud del campo eléctrico *a*) en un punto a 0.100 m fuera de la superficie, y *b*) en un punto dentro de la esfera, a 0.100 m bajo la superficie.

22.15 •• Dos líneas uniformemente cargadas de longitud muy grande son paralelas y están separadas una distancia de 0.300 m. Cada línea tiene una carga por unidad de longitud igual a +5.20 μC/m. ¿Qué magnitud de fuerza ejerce una línea de carga en una longitud de 0.0500 m de la otra línea de carga?

22.16 • Algunos astrónomos han sugerido que Marte tiene un campo eléctrico parecido al de la Tierra y que se produce un flujo eléctrico neto de 3.63×10^{16} N·m^2/C en su superficie, dirigido hacia el centro del planeta. Calcule *a*) la carga eléctrica total sobre Marte; *b*) el campo eléctrico en la superficie del planeta (consulte los datos astronómicos en la tercera de forros); *c*) la densidad de carga en Marte, suponiendo que toda la carga se distribuye de manera uniforme en su superficie.

22.17 •• ¿Qué exceso de electrones debe agregarse a un conductor esférico aislado de 32.0 cm de diámetro para producir un campo eléctrico de 1150 N/C apenas afuera de su superficie?

22.18 •• El campo eléctrico a 0.400 m de una línea de carga uniforme y muy larga es de 840 N/C. ¿Cuánta carga está contenida en una longitud de 2.00 cm de la línea?

22.19 •• Una línea de carga uniforme y muy larga tiene 4.80 μC/m por unidad de longitud y se ubica a lo largo del eje x. Una segunda línea de carga uniforme tiene una carga por unidad de longitud de -2.40 μC/m y es paralela al eje x en $y = 0.400$ m. ¿Cuál es el campo eléctrico neto (magnitud y dirección) en los siguientes puntos sobre el eje y: *a*) $y = 0.200$ m y *b*) $y = 0.600$ m?

22.20 • *a*) A una distancia de 0.200 cm del centro de una esfera conductora con carga y radio de 0.100 cm, el campo eléctrico es de 480 N/C. ¿Cuál es el campo eléctrico a 0.600 cm del centro de la esfera? *b*) A una distancia de 0.200 cm del eje de un cilindro conductor cargado muy largo con radio de 0.100 cm, el campo eléctrico es de 480 N/C. ¿Cuál es el campo eléctrico a 0.600 cm del eje del cilindro? *c*) A una distancia de 0.200 cm de una lámina grande cargada uniformemente, el campo eléctrico es de 480 N/C. ¿Cuál es el campo eléctrico a 1.20 cm de la lámina?

22.21 •• Una esfera hueca, conductora, con radio exterior de 0.250 m y radio interior de 0.200 m tiene una densidad de carga superficial de $+6.37 \times 10^{-6}$ C/m^2. Se introduce una carga de -0.500 μC en la cavidad interna de la esfera. *a*) ¿Cuál es la nueva densidad de carga apenas afuera de la esfera? *b*) Calcule la intensidad del campo eléctrico justo afuera de la esfera. *c*) ¿Cuál es el flujo eléctrico a través de una superficie esférica apenas adentro de la superficie interior de la esfera?

22.22 •• Una carga puntual de -2.00 μC se localiza en el centro de una cavidad esférica de radio 6.50 cm dentro de un sólido aislante con carga. La densidad de carga en el sólido es $\rho = 7.35 \times 10^{-4}$ C/m^3. Calcule el campo eléctrico dentro del sólido a una distancia de 9.50 cm del centro de la cavidad.

22.23 •• El campo eléctrico a una distancia de 0.145 m de la superficie de una esfera sólida aislante, con radio de 0.355 m, es de 1750 N/C. *a*) Suponiendo que la carga de la esfera se distribuye uniformemente, ¿cuál es la densidad de carga en su interior? *b*) Calcule el campo eléctrico dentro de la esfera a una distancia de 0.200 m del centro.

22.24 •• **PA** Un objeto muy pequeño con masa igual a 8.20×10^{-9} kg, y carga positiva de 6.50×10^{-9} C, se proyecta directamente hacia una lámina aislante muy grande cargada positivamente y que tiene una densidad de carga superficial uniforme de 5.90×10^{-8} C/m^2. El objeto se encuentra inicialmente a 0.400 m de la lámina. ¿Qué rapidez inicial debe tener el objeto para que la distancia más corta de aproximación a la lámina sea de 0.100 m?

22.25 •• **PA** En $t = 0$ un protón se encuentra a una distancia de 0.360 m de una lámina aislante cargada muy larga, y se mueve paralelamente a la lámina con rapidez de 9.70×10^2 m/s. La lámina tiene una densidad de carga uniforme de 2.34×10^{-9} C/m^2. ¿Cuál es la rapidez del protón en $t = 5.00 \times 10^{-8}$ s?

22.26 •• **PA** A partir del reposo, se libera un electrón que se encuentra a una distancia de 0.300 m de una lámina grande aislante con carga que tiene una densidad de carga superficial uniforme de $+2.90 \times 10^{-12}$ C/m^2. *a*) ¿Cuánto trabajo realiza sobre el electrón el campo eléctrico de la lámina conforme el electrón se mueve de su posición inicial a un punto que se encuentra a 0.050 m de la lámina? *b*) ¿Cuál es la rapidez del electrón cuando se encuentra a 0.050 m de la lámina?

22.27 ••• **PA CALC** Una esfera aislante de radio $R = 0.160$ m tiene una densidad de carga uniforme $\rho = +7.20 \times 10^{-9}$ C/m^3. Un pequeño objeto considerado como carga puntual se libera partiendo del reposo justo afuera de la superficie de la esfera. El pequeño objeto tiene una carga positiva $q = 3.40 \times 10^{-6}$ C. ¿Cuánto trabajo realiza el campo eléctrico de la esfera sobre el objeto, conforme este se mueve a un punto muy alejado de la esfera?

22.28 • Un conductor con una cavidad interna, como se ilustra en la figura 22.23*c*, tiene una carga total de +5.00 nC. La carga dentro de la cavidad, aislada del conductor, es de -6.00 nC. ¿Cuánta carga hay en *a*) la superficie interior del conductor, y *b*) la superficie exterior del conductor?

22.29 • Aplique la ley de Gauss a las superficies gaussianas S_2, S_3 y S_4 en la figura 22.21*b*, para calcular el campo eléctrico entre las placas y afuera de ellas.

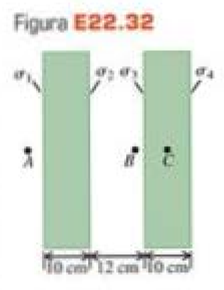
22.30 • Una lámina aislante y cuadrada con lado de 80.0 cm se encuentra en posición horizontal. La lámina tiene una carga de 7.50 nC distribuida de manera uniforme sobre su superficie. *a*) Calcule el campo eléctrico en un punto localizado a 0.100 mm sobre el centro de la lámina. *b*) Estime el campo eléctrico en un punto a 100 m sobre el centro de la lámina. *c*) ¿Serían diferentes las respuestas para los incisos *a*) y *b*) si la lámina estuviera hecha de un material conductor? ¿Por qué?

22.31 • Un conductor cilíndrico de longitud infinita tiene un radio R y densidad de carga superficial uniforme σ. *a*) En términos de σ y R, ¿cuál es la carga por unidad de longitud λ para el cilindro? *b*) En términos de σ, ¿cuál es la magnitud del campo eléctrico producido por el cilindro cargado a una distancia $r > R$ desde su eje? *c*) Exprese el resultado del inciso *b*) en términos de λ y demuestre que el campo eléctrico fuera del cilindro es igual que si toda la carga estuviera sobre

el eje. Compare su resultado con el que se obtuvo para una línea de carga en el ejemplo 22.6 (sección 22.4).

22.32 • Dos láminas de plástico no conductoras, muy grandes, cada una con espesor de 10.0 cm, tienen densidades de carga uniforme σ_1, σ_2, σ_3 y σ_4 en sus superficies, como se ilustra en la figura E22.32. Estas densidades superficiales de carga tienen los valores $\sigma_1 = -6.00\ \mu\text{C/m}^2$, $\sigma_2 = +5.00\ \mu\text{C/m}^2$, $\sigma_3 = +2.00\ \mu\text{C/m}^2$ y $\sigma_4 = +4.00\ \mu\text{C/m}^2$. Use la ley de Gauss para encontrar la magnitud y dirección del campo eléctrico en los siguientes puntos, lejos de los bordes de las láminas: *a*) punto *A*, a 5.00 cm de la cara izquierda de la lámina de la izquierda; *b*) punto *B*, a 1.25 cm de la superficie interior de la lámina de la derecha; *c*) punto *C*, a la mitad de la lámina de la derecha.

Figura **E22.32**



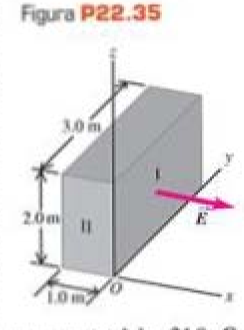
22.33 • Una carga negativa $-Q$ se localiza dentro de la cavidad de un sólido metálico hueco. El exterior del sólido tiene contacto con la tierra por medio de la conexión de un alambre conductor. *a*) ¿Hay algún exceso de carga inducido sobre la superficie interior de la pieza de metal? Si así fuera, determine su signo y magnitud. *b*) ¿Hay algún exceso de carga sobre el exterior del elemento de metal? ¿Por qué? *c*) ¿Hay algún campo eléctrico en la cavidad? Explique su respuesta. *d*) ¿Hay algún campo eléctrico dentro del metal? Explique por qué. ¿Hay algún campo eléctrico fuera del metal? Explique por qué. *e*) ¿Alguien situado fuera del sólido mediría un campo eléctrico debido a la carga $-Q$? ¿Es razonable decir que el conductor a tierra tiene *aislada* la región de los efectos de la carga $-Q$? En principio, ¿podría hacerse lo mismo para la gravedad? ¿Por qué?

PROBLEMAS

22.34 •• Un cubo tiene lados con longitud $L = 0.300$ m. Se coloca con una esquina en el origen, como se muestra en la figura E22.6. El campo eléctrico no es uniforme, pero está dado por $\vec{E} = (-5.00\ \text{N/C}\cdot\text{m})x\hat{\imath} + (3.00\ \text{N/C}\cdot\text{m})z\hat{k}$. *a*) Calcule el flujo eléctrico a través de cada una de las seis caras del cubo, S_1, S_2, S_3, S_4, S_5 y S_6. *b*) Determine la carga eléctrica total dentro del cubo.

22.35 • El campo eléctrico $\vec{E}$ en la figura P22.35 es paralelo en todo lugar al eje *x*, por lo que las componentes E_y y E_z son iguales a cero. La componente *x* del campo E_x depende de *x*, pero no de *y* ni de *z*. En los puntos del plano *yz* (donde $x = 0$), $E_x = 125$ N/C. *a*) ¿Cuál es el flujo eléctrico a través de la superficie I en la figura P22.35? *b*) ¿Cuál es el flujo eléctrico a través de la superficie II? *c*) El volumen que se ilustra en la figura es una pequeña sección de un bloque muy grande aislante de 1.0 m de espesor. Si dentro de ese volumen hay una carga total de -24.0 nC, ¿cuáles son la magnitud y la dirección de $\vec{E}$ en la cara opuesta a la superficie I? *d*) El campo eléctrico, ¿es producido solo por cargas dentro del bloque, o también se debe a cargas fuera del bloque? ¿Cómo saberlo?

Figura **P22.35**



22.36 •• **CALC** En una región del espacio existe un campo eléctrico en dirección del eje *z* y de magnitud $E = (964\ \text{N/(C}\cdot\text{m))}x$. Obtenga el flujo de este campo a través de un cuadrado de lado igual a 0.350 m y que se encuentra en el plano *xy* en $z = 0$. Un lado del cuadrado se encuentra sobre el eje $+x$ y otro sobre el eje $+y$.

22.37 •• El campo eléctrico $\vec{E}_1$ en toda la cara de un paralelepípedo es uniforme y se dirige hacia afuera de la cara. En la cara opuesta, el campo eléctrico $\vec{E}_2$ también es uniforme en toda ella y se dirige hacia esa cara (figura P22.37). Las dos caras en cuestión están inclinadas 30.0° con respecto a la horizontal, en tanto que $\vec{E}_1$ y $\vec{E}_2$ son horizontales; $\vec{E}_1$ tiene una magnitud de 2.50×10^4 N/C, y $\vec{E}_2$ tiene una magnitud de 7.00×10^4 N/C. *a*) Suponiendo que ninguna otra línea de campo eléctrico cruza las superficies del paralelepípedo, determine la carga neta contenida dentro. *b*) ¿El campo eléctrico solo es producido por las cargas en el interior del paralelepípedo, o también se debe a las que están fuera de este? ¿Cómo podría saberse?

Figura **P22.37**



22.38 • Una línea larga tiene una densidad de carga lineal uniforme de $+50.0\ \mu$C/m que es paralela y a 10.0 cm de la superficie de una lámina de plástico plana y grande que tiene una densidad de carga superficial uniforme de $-100\ \mu\text{C/m}^2$ en un lado. Encuentre la ubicación de todos los puntos en los que una partícula α no recibiría ninguna fuerza debido a este arreglo de objetos con carga.

22.39 • **Cable coaxial.** Un cable coaxial largo consiste en un conductor cilíndrico interior con radio *a*, y un cilindro exterior con radio interior *b* y radio exterior *c*. El cilindro exterior está montado en apoyos aislantes y no tiene carga neta. El cilindro interior tiene una carga positiva uniforme por unidad de longitud λ. Calcule el campo eléctrico *a*) en cualquier punto entre los cilindros a una distancia *r* del eje, y *b*) en cualquier punto afuera del cilindro exterior. *c*) Elabore una gráfica de la magnitud del campo eléctrico como función de la distancia *r* desde el eje del cable, de $r = 0$ a $r = 2c$. *d*) Determine la carga por unidad de longitud en las superficies interna y externa del cilindro exterior.

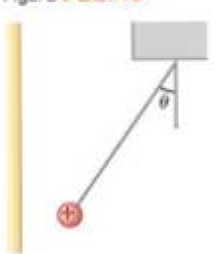
22.40 • Un tubo conductor muy largo (un cilindro hueco) tiene radio interior *a* y radio exterior *b*. Conduce una carga por unidad de longitud $+\alpha$, donde α es una constante positiva con unidades de C/m. Sobre el eje del tubo se encuentra una línea de carga, con carga por unidad de longitud de $+\alpha$. *a*) Calcule el campo eléctrico en términos de α y la distancia *r* desde el eje del tubo para **i.** $r < a$; **ii.** $a < r < b$; **iii.** $r > b$. Muestre en una gráfica los resultados de *E* como función de *r*. *b*) ¿Cuál es la carga por unidad de longitud sobre **i.** la superficie interior del tubo, y **ii.** la superficie exterior del tubo?

22.41 • Repita el problema 22.40, solo que ahora el tubo conductor tiene una carga por unidad de longitud de $-\alpha$. Igual que en el problema 22.40, la línea de carga tiene $+\alpha$ como carga por unidad de longitud.

22.42 • Un cilindro sólido y muy largo, con radio *R*, tiene carga positiva distribuida de manera uniforme, con carga por unidad de volumen de ρ. *a*) Obtenga la expresión para el campo eléctrico dentro del volumen a una distancia *r* del eje del cilindro en términos de la densidad de carga ρ. *b*) ¿Cuál es el campo eléctrico en un punto afuera del volumen en términos de la carga por unidad de longitud λ en el cilindro? *c*) Compare las respuestas de los incisos *a*) y *b*) para $r = R$. *d*) Elabore una gráfica de la magnitud del campo eléctrico como función de *r*, de $r = 0$ a $r = 3R$.

22.43 •• **PA** Una esfera pequeña con masa de 4.00×10^{-6} kg tiene una carga de 5.00×10^{-8} C y cuelga de un cordel cerca

Figura **P22.43**



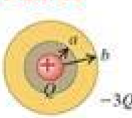
de una lámina muy grande, aislante y con carga, como se ilustra en la figura P22.43. La densidad de carga en la superficie de la lámina es de 2.50×10^{-9} C/m^2. Encuentre el ángulo que forma el cordel.

22.44 • **Esfera dentro de otra esfera.** Una esfera sólida conductora tiene una carga q y radio a. Se encuentra dentro de una esfera hueca concéntrica, con radio interior b y radio exterior c. La esfera hueca no tiene carga neta. *a*) Obtenga expresiones para la magnitud del campo eléctrico en términos de la distancia r desde el centro para las regiones $r < a$, $a < r < b$, $b < r < c$, y $r > c$. *b*) Elabore la gráfica de la magnitud del campo eléctrico como función de r, de $r = 0$ a $r = 2c$. *c*) ¿Cuál es la carga en la superficie interior de la esfera hueca? *d*) ¿Y en la superficie exterior? *e*) Represente la carga de la esfera pequeña mediante cuatro signos positivos. Elabore un diagrama de las líneas de campo del sistema dentro de un volumen esférico de radio $2c$.

22.45 • Una esfera sólida conductora con radio R que tiene carga positiva Q es concéntrica con un cascarón aislante muy delgado de radio $2R$ que también tiene una carga Q. La carga Q está distribuida de manera uniforme en el cascarón aislante. *a*) Encuentre el campo eléctrico (magnitud y dirección) en cada una de las regiones $0 < r < R$, $R < r < 2R$, y $r > 2R$. *b*) Elabore la gráfica de la magnitud del campo eléctrico como función de r.

22.46 • Un cascarón esférico conductor, con radio interior a y radio exterior b, tiene una carga puntual positiva Q localizada en su centro. La carga total en el cascarón es $-3Q$, y está aislada de su ambiente (figura P22.46). *a*) Obtenga expresiones para la magnitud del campo eléctrico, en términos de la distancia r desde el centro, para las regiones $r < a$, $a < r < b$, y $r > b$. *b*) ¿Cuál es la densidad de carga superficial en la superficie interior del cascarón conductor? *c*) ¿Cuál es la densidad de carga superficial en la superficie exterior del cascarón conductor? *d*) Elabore un diagrama de las líneas de campo y la localización de todas las cargas. *e*) Grafique la magnitud del campo eléctrico como función de r.

Figura **P22.46**



22.47 • **Cascarones esféricos concéntricos.** Un cascarón esférico conductor pequeño con radio interior a y radio exterior b es concéntrico con respecto a otro cascarón conductor esférico más grande cuyo radio interior es c y radio exterior d (figura P22.47). El cascarón interior tiene una carga total $+2q$, y el exterior tiene carga de $+4q$. *a*) Calcule el campo eléctrico (magnitud y dirección) en términos de q y la distancia r a partir del centro común de los dos cascarones para **i.** $r < a$; **ii.** $a < r < b$; **iii.** $b < r < c$; **iv.** $c < r < d$; **v.** $r > d$. Muestre sus resultados en una gráfica de la componente radial de $\vec{E}$ como función de r. *b*) ¿Cuál es la carga total en **i.** la superficie interior del cascarón pequeño; **ii.** la superficie exterior del cascarón pequeño; **iii.** la superficie interior del cascarón grande; **iv.** la superficie exterior del cascarón grande?

Figura **P22.47**



22.48 • Repita el problema 22.47, pero ahora considere que el cascarón externo tiene carga $-2q$. Igual que en el problema 22.47, el cascarón interior tiene carga $+2q$.

22.49 • Repita el problema 22.47, pero ahora considere que el cascarón exterior tiene carga $-4q$. Como en el problema 22.47, el cascarón interior tiene carga $+2q$.

22.50 • Una esfera conductora sólida con radio R tiene una carga total positiva Q. La esfera está rodeada por un cascarón aislante con radio interior R y radio exterior $2R$. El cascarón aislante tiene una densidad de carga uniforme ρ. *a*) Encuentre el valor de ρ de manera que la carga neta de todo el sistema sea igual a cero. *b*) Si ρ tiene el valor obtenido en el inciso *a*), calcule el campo eléctrico (magnitud y dirección) en cada una de las regiones $0 < r < R$, $R < r < 2R$, y $r > 2R$. Presente sus resultados en una gráfica de la componente radial de $\vec{E}$ como función de r. *c*) Como regla general, el campo eléctrico es discontinuo solo en lugares en que hay una lámina delgada de carga. Explique el modo en que concuerdan con esta regla sus resultados para el inciso *b*).

22.51 • Sobre la superficie de un cascarón esférico delgado y aislante de radio R, está distribuida uniformemente una carga negativa $-Q$. Calcule la fuerza (magnitud y dirección) que ejerce el cascarón sobre una carga puntual positiva q ubicada a una distancia *a*) $r > R$ del centro del cascarón (afuera del cascarón), y *b*) $r < R$ del centro del cascarón (dentro del cascarón).

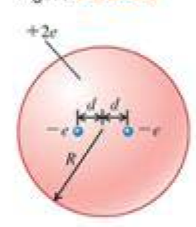
22.52 •• *a*) ¿Cuántos electrones en exceso deben distribuirse de manera uniforme dentro del volumen de una esfera de plástico aislada de 30.0 cm de diámetro, para producir un campo eléctrico de 1390 N/C justo afuera de la superficie de la esfera? *b*) ¿Cuál es el campo eléctrico en un punto que está 10.0 cm fuera de la superficie de la esfera.

22.53 ••• **CALC** Una esfera hueca, aislante, tiene un radio interior a y un radio exterior b. Dentro del material aislante, la densidad de carga volumétrica está dada por $\rho(r) = \frac{\alpha}{r}$, donde α es una constante positiva. *a*) En términos de α y a, ¿cuál es la magnitud del campo eléctrico a una distancia r del centro del cascarón, donde $a < r < b$? *b*) Se coloca una carga puntual q en el centro del hueco, en $r = 0$. En términos de α y a, ¿qué valor debe tener q (en signo y magnitud) para que el campo eléctrico sea constante en la región $a < r < b$, y cuál es entonces el valor del campo constante en esta región?

22.54 •• **PA** **Modelo atómico de Thomson.** En los primeros años del siglo XX, un modelo ampliamente aceptado de la estructura del átomo era el del físico inglés J. J. Thomson (el descubridor del electrón). En el modelo de Thomson, un átomo consistía en una esfera de material con carga positiva en el que estaban inmersos electrones con carga negativa, como chispas de chocolate en una bola de masa de galleta. Imagine que un átomo así consistía en un electrón con masa m y carga $-e$, que puede considerarse una carga puntual, y una esfera con carga uniforme igual a $+e$ y radio R. *a*) Explique por qué la posición de equilibrio del electrón está en el centro del núcleo. *b*) En el modelo de Thomson se suponía que el material positivo ofrecía poca o ninguna resistencia al movimiento del electrón. Si el electrón se aparta del equilibro una distancia menor que R, demuestre que el movimiento resultante del electrón sería armónico simple, y calcule su frecuencia de oscilación. (*Sugerencia:* Repase la definición del movimiento armónico simple en la sección 14.2. Si puede demostrarse que la fuerza neta sobre el electrón es de esta forma, entonces se infiere que el movimiento es armónico simple. Por el contrario, si la fuerza neta sobre el electrón no tiene esta forma, el movimiento no es armónico simple). *c*) En la época de Thomson se sabía que los átomos excitados emitían ondas de luz solo de ciertas frecuencias. En su modelo, la frecuencia de la luz emitida es la misma que la frecuencia de oscilación del electrón o electrones en el átomo. En el modelo de Thomson, ¿cuál tendría que ser el radio de un átomo para que produjera luz roja de frecuencia 4.57×10^{14} Hz? Compare su respuesta con los radios de átomos reales, que son del orden de 10^{-10} m (consulte el apéndice F para datos sobre el electrón). *d*) Si el electrón se desplazara del equilibrio una distancia mayor que R, ¿oscilaría? ¿Este movimiento sería armónico simple? Explique su razonamiento. (*Nota histórica:* En 1910 se descubrió el núcleo atómico, lo que probó que el modelo de Thomson era incorrecto. La carga positiva de un átomo no estaba distribuida en su volumen, como suponía Thomson, sino que se concentraba en el diminuto núcleo de radio de 10^{-14} a 10^{-15} m).

22.55 • **Modelo atómico de Thomson (*continuación*).** Utilizando el modelo de Thomson (actualmente caduco) que se describió en el problema 22.54, considere un átomo que contiene dos electrones, cada uno con carga $-e$, inmersos en una esfera de carga $+2e$ y radio R. En el equilibrio, cada electrón está

Figura **P22.55**



a una distancia d del centro del átomo (figura P22.55). Calcule la distancia d en términos de las demás propiedades del átomo.

22.56 • **Bloque uniformemente cargado.** Un bloque de material aislante tiene un espesor $2d$ y está orientado de forma que sus caras quedan paralelas al plano yz y dado por los planos $x = d$ y $x = -d$. Las dimensiones y y z del bloque son muy grandes en comparación con d y pueden considerarse esencialmente infinitas. El bloque tiene una densidad de carga positiva uniforme ρ. a) Explique por qué el campo eléctrico debido al bloque es igual a cero en el centro del bloque ($x = 0$). *b*) Con base en la ley de Gauss, encuentre el campo eléctrico debido al bloque (magnitud y dirección) en todos los puntos del espacio.

22.57 • **CALC** **Bloque con carga no uniforme.** Repita el problema 22.56, pero ahora considere que la densidad de carga del bloque está dada por $\rho(x) = \rho_0(x/d)^2$, donde ρ_0 es una constante positiva.

22.58 • **CALC** Una distribución de carga no uniforme, pero con simetría esférica, tiene una densidad de carga $\rho(r)$ dada como sigue:

$$\rho(r) = \rho_0(1 - 4r/3R) \qquad \text{para } r \leq R$$
$$\rho(r) = 0 \qquad \text{para } r \geq R$$

donde ρ_0 es una constante positiva. *a*) Encuentre la carga total contenida en la distribución de carga. *b*) Obtenga una expresión para el campo eléctrico en la región $r \leq R$. *c*) Obtenga una expresión para el campo eléctrico en la región $r \geq R$. *d*) Elabore la gráfica de la magnitud E del campo eléctrico como función de r. *e*) Calcule el valor de r en el que el campo eléctrico es máximo, y obtenga el valor de este campo máximo.

22.59 • **PA** **CALC** **Ley de Gauss de la gravitación.** La fuerza gravitacional entre dos masas puntuales separadas por una distancia r es proporcional a $1/r^2$, igual que la fuerza eléctrica entre dos cargas puntuales. A causa de esta similitud entre las interacciones gravitacionales y eléctricas, también hay una ley de Gauss para la gravitación. *a*) Sea $\vec{g}$ la aceleración debida a la gravedad ocasionada por una masa puntual m en el origen, de manera que $\vec{g} = -(Gm/r^2)\hat{r}$. Considere una superficie gaussiana esférica con radio r centrada en esa masa puntual, y demuestre que el flujo de $\vec{g}$ a través de esta superficie está dado por

$$\oint \vec{g} \cdot d\vec{A} = -4\pi Gm$$

b) Con los mismos pasos lógicos que se siguieron en la sección 22.3 con la finalidad de obtener la ley de Gauss para el campo eléctrico, demuestre que el flujo de $\vec{g}$ a través de *cualquier* superficie cerrada está dado por

$$\oint \vec{g} \cdot d\vec{A} = -4\pi GM_{enc}$$

donde M_{enc} es la masa total encerrada por la superficie cerrada.

22.60 • **PA** **Aplicación de la ley de Gauss de la gravitación.** Con base en la ley de Gauss para la gravitación [obtenida en el inciso *b*) del problema 22.59], demuestre que los siguientes enunciados son verdaderos: *a*) Para cualquier distribución de masa con simetría esférica y masa total M, la aceleración debida a la gravedad fuera de la distribución es la misma que si toda la masa estuviera concentrada en el centro. (*Sugerencia:* Véase el ejemplo 22.5 en la sección 22.4). *b*) En cualquier punto dentro de un cascarón de masa simétricamente esférica, la aceleración debida a la gravedad es igual a cero. (*Sugerencia:* Véase el ejemplo 22.5). *c*) Si se pudiera perforar un agujero a través de un planeta con simetría esférica con respecto a su centro, y si la densidad fuera uniforme, se encontraría que la magnitud de $\vec{g}$ es directamente proporcional a la distancia r del centro. (*Sugerencia:* Véase el ejemplo 22.9 en la sección 22.4). En la sección 13.6 se probaron estos resultados mediante un análisis extenuante; las demostraciones con la ley de Gauss para la gravitación son *mucho* más fáciles.

22.61 • *a*) Una esfera aislante con radio a tiene una densidad de carga uniforme ρ. La esfera no está centrada en el origen, sino en $\vec{r} = \vec{b}$. Demuestre que el campo eléctrico en el interior de la esfera está dado por $\vec{E} = \rho(\vec{r} - \vec{b})/3\epsilon_0$. *b*) Una esfera aislante de radio R tiene un agujero esférico de radio a ubicado dentro de su volumen y con centro a una distancia b del centro de la esfera, donde $a < b < R$ (en la figura P22.61 se muestra una sección transversal de la esfera). La parte sólida de la esfera tiene una densidad de carga volumétrica uniforme ρ. Obtenga la magnitud y la dirección del campo eléctrico $\vec{E}$ dentro del agujero, y demuestre que $\vec{E}$ es uniforme en todo el agujero. [*Sugerencia:* Use el principio de superposición y el resultado del inciso *a*)].

Figura **P22.61**

22.62 • Un cilindro aislante sólido, muy largo, con radio R tiene un agujero cilíndrico con radio a perforado a lo largo de toda su longitud. El eje del agujero está a una distancia b del eje del cilindro, donde $a < b < R$ (figura P22.62). El material sólido del cilindro tiene densidad de carga volumétrica uniforme ρ. Encuentre la magnitud y dirección del campo eléctrico $\vec{E}$ dentro del agujero, y demuestre que $\vec{E}$ es uniforme en todo el agujero. (*Sugerencia:* Véase el problema 22.61).

Figura **P22.62**

22.63 • Una carga positiva Q está distribuida de manera uniforme sobre cada uno de dos volúmenes esféricos con radio R. Una esfera de carga está centrada en el origen, y la otra en $x = 2R$ (figura P22.63). Encuentre la magnitud y la dirección del campo eléctrico neto debido a estas dos distribuciones de carga en los siguientes puntos sobre el eje x: *a*) $x = 0$; *b*) $x = R/2$; *c*) $x = R$; *d*) $x = 3R$.

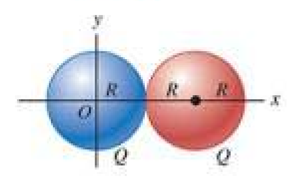


Figura **P22.63**

22.64 • Repita el problema 22.63, pero ahora la esfera de la izquierda tiene carga positiva Q y la de la derecha carga negativa $-Q$.

22.65 •• **CALC** Una distribución de carga no uniforme, pero con simetría esférica, tiene la densidad de carga $\rho(r)$ dada como sigue:

$$\rho(r) = \rho_0(1 - r/R) \qquad \text{para } r \leq R$$
$$\rho(r) = 0 \qquad \text{para } r \geq R$$

donde $\rho_0 = 3Q/\pi R^3$ es una constante positiva. *a*) Demuestre que la carga total contenida en la distribución de carga es Q. *b*) Demuestre que el campo eléctrico en la región $r \geq R$ es idéntico al que produce una carga puntual Q en $r = 0$. *c*) Obtenga una expresión para el campo eléctrico en la región $r \leq R$. *d*) Elabore la gráfica de la magnitud del campo eléctrico E como función de r. *e*) Encuentre el valor de r para el que el campo eléctrico es máximo, y calcule el valor de ese campo máximo.

PROBLEMAS DE DESAFÍO

22.66 ••• **PA** **CALC** Una región del espacio contiene una carga total positiva Q distribuida esféricamente de manera que la densidad de carga volumétrica $\rho(r)$ está dada por

$$\rho(r) = \alpha \qquad \text{para } r \leq R/2$$
$$\rho(r) = 2\alpha(1 - r/R) \qquad \text{para } R/2 \leq r \leq R$$
$$\rho(r) = 0 \qquad \text{para } r \geq R$$

Aquí α es una constante positiva que tiene unidades de C/m^3. *a*) Determine α en términos Q y R. *b*) Con base en la ley de Gauss, obtenga una expresión para la magnitud de $\vec{E}$ como función de r. Haga esto

para las tres regiones por separado. Exprese sus respuestas en términos de la carga total Q. Asegúrese de comprobar que los resultados concuerden en las fronteras de las regiones. *c*) ¿Qué fracción de la carga total está contenida dentro de la región $r \leq R/2$? *d*) Si un electrón con carga $q' = -e$ oscila de ida y vuelta alrededor de $r = 0$ (el centro de la distribución) con una amplitud menor que $R/2$, demuestre que el movimiento es armónico simple. (*Sugerencia:* Repase el análisis del movimiento armónico simple en la sección 14.2. Si, y solo si, la fuerza neta sobre el electrón es proporcional a su desplazamiento del equilibrio, entonces el movimiento es armónico simple). *e*) ¿Cuál es el periodo del movimiento en el inciso *d*)? *f*) Si la amplitud del movimiento descrito en el inciso *e*) es mayor que $R/2$, ¿el movimiento es armónico simple? ¿Por qué?

22.67 ••• PA CALC Una región en el espacio contiene una carga total positiva Q que está distribuida en forma esférica de manera que la densidad de carga volumétrica $\rho(r)$ está dada por

$$\rho(r) = 3\alpha r/(2R) \qquad \text{para } r \leq R/2$$
$$\rho(r) = \alpha[1 - (r/R)^2] \qquad \text{para } R/2 \leq r \leq R$$
$$\rho(r) = 0 \qquad \text{para } r \geq R$$

Aquí, α es una constante positiva que tiene unidades de C/m^3. *a*) Determine α en términos de Q y R. *b*) Con base en la ley de Gauss, obtenga una expresión para la magnitud del campo eléctrico como función de r. Realice esto por separado para las tres regiones. Exprese sus respuestas en términos de la carga total Q. *c*) ¿Qué fracción de la carga total está contenida dentro de la región $R/2 \leq r \leq R$? *d*) ¿Cuál es la magnitud de $\vec{E}$ en $r = R/2$? *e*) Si un electrón con carga $q' = -e$ se libera desde el reposo en cualquier punto de alguna de las tres regiones, el movimiento resultante será oscilatorio pero no armónico simple. ¿Por qué? (Véase el problema de desafío 22.66).

Respuestas

Pregunta inicial del capítulo 

No. El campo eléctrico dentro de una cavidad interior de un conductor es igual a cero, por lo que no hay ningún efecto eléctrico en la niña. (Véase la sección 22.5).

Preguntas de las secciones Evalúe su comprensión

22.1 Respuesta: iii. Cada elemento de la superficie de la caja estará tres veces más lejos de la carga $+q$, por lo que el campo eléctrico será $(\frac{1}{3})^2 = \frac{1}{9}$ de la intensidad. Pero el área de la caja se incrementará en un factor de $3^2 = 9$. Por lo tanto, el flujo eléctrico se multiplicará por un factor de $(\frac{1}{9})(9) = 1$. En otras palabras, el flujo no cambiará.

22.2 Respuesta: iv, ii, i, iii. En cada caso, el campo eléctrico es uniforme, por lo que el flujo es $\Phi_E = \vec{E} \cdot \vec{A}$. Se usan las relaciones para los productos escalares de vectores unitarios: $\hat{\imath} \cdot \hat{\imath} = \hat{\jmath} \cdot \hat{\jmath} = 1$, $\hat{\imath} \cdot \hat{\jmath} = 0$. En el caso **i.** se tiene $\Phi_E = (4.0\ \text{N/C})(6.0\ \text{m}^2)\hat{\imath} \cdot \hat{\jmath} = 0$ (el campo eléctrico y el vector área son perpendiculares, por lo que hay un flujo nulo). En el caso **ii.** se tiene $\Phi_E [(4.0\ \text{N/C})\hat{\imath} + (2.0\ \text{N/C})\hat{\jmath}] \cdot (3.0\ \text{m}^2)\hat{\jmath} = (2.0\ \text{N/C}) \cdot (3.0\ \text{m}^2) = 6.0\ \text{N} \cdot \text{m}^2/\text{C}$. De manera similar, en el caso **iii.** se tiene $\Phi_E = [(4.0\ \text{N/C})\hat{\imath} - (2.0\ \text{N/C})\hat{\jmath}] \cdot [(3.0\ \text{m}^2)\hat{\imath} + (7.0\ \text{m}^2)\hat{\jmath}] = (4.0\ \text{N/C})(3.0\ \text{m}^2) - (2.0\ \text{N/C})(7.0\ \text{m}^2) = -2\ \text{N} \cdot \text{m}^2/\text{C}$, y en el caso **iv.** se tiene $\Phi_E = [(4.0\ \text{N/C})\hat{\imath} - (2.0\ \text{N/C})\hat{\jmath}] \cdot [(3.0\ \text{m}^2)\hat{\imath} - (7.0\ \text{m}^2)\hat{\jmath}] = (4.0\ \text{N/C})(3.0\ \text{m}^2) + (2.0\ \text{N/C}) \cdot (7.0\ \text{m}^2) = 26\ \text{N} \cdot \text{m}^2/\text{C}$.

22.3 Respuesta: S_2, S_5, S_4; S_1 y S_3 (empatadas) La ley de Gauss afirma que el flujo a través de una superficie cerrada es proporcional a la cantidad de carga encerrada dentro de esa superficie, por lo que ordenar estas superficies según sus flujos es lo mismo que hacerlo según la cantidad de carga que encierran. La superficie S_1 no encierra carga, la superficie S_2 encierra $9.0\ \mu\text{C} + 5.0\ \mu\text{C} + (-7.0\ \mu\text{C}) = 7.0\ \mu\text{C}$, la superficie S_3 encierra $9.0\ \mu\text{C} + 1.0\ \mu\text{C} + (-10.0\ \mu\text{C}) = 0$, la superficie S_4 encierra $8.0\ \mu\text{C} + (-7.0\ \mu\text{C}) = 1.0\ \mu\text{C}$, y la superficie S_5 encierra $8.0\ \mu\text{C} + (-7.0\ \mu\text{C}) + (-10.0\ \mu\text{C}) + (1.0\ \mu\text{C}) + (9.0\ \mu\text{C}) + (5.0\ \mu\text{C}) = 6.0\ \mu\text{C}$.

22.4 Respuesta: no Tal vez usted estuviera tentado a dibujar una superficie gaussiana que fuera una versión grande del conductor, con la misma forma y colocada de manera que lo encerrara por completo. Si bien se conoce el flujo a través de esta superficie gaussiana (según la ley de Gauss, es $\Phi_E = Q/\epsilon_0$), la dirección del campo eléctrico no necesita ser perpendicular a la superficie, y tampoco es necesario que la magnitud del campo sea la misma en todos los puntos de la superficie. No es posible realizar la integral de flujo $\oint E_\perp\, dA$, por lo que no se puede calcular el campo eléctrico. La ley de Gauss es útil para obtener el campo eléctrico solo cuando la distribución de la carga es *muy* simétrica.

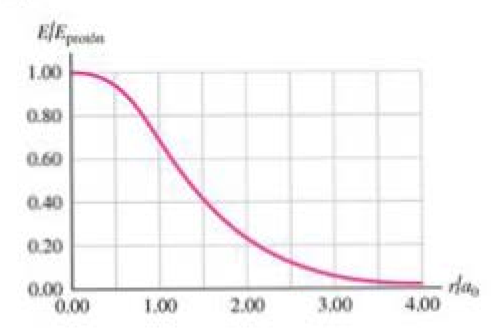
22.5 Respuesta: no Antes de conectar el alambre con la esfera, la presencia de la carga puntual induciría una carga $-q$ en la superficie interior de la esfera hueca y una carga q en la superficie exterior (la carga neta en la esfera es igual a cero). Habrá un campo eléctrico fuera de la esfera que se debe a la carga en la superficie exterior. Sin embargo, una vez que el alambre conductor toque la esfera, los electrones fluirán de la tierra a la superficie exterior de la esfera para neutralizar la carga ahí presente (véase la figura 21.7*c*). Como resultado, la esfera no tendrá carga en su superficie externa, ni tampoco campo eléctrico en el exterior.

Problema práctico

Respuestas: *a*) $Q(r) = Qe^{-2r/a_0}[2(r/a_0)^2 + 2(r/a_0) + 1]$

b) $E = \dfrac{kQe^{-2r/a_0}}{r^2}[2(r/a_0)^2 + 2(r/a_0) + 1]$

c)



23 POTENCIAL ELÉCTRICO



? En cierto tipo de soldadura, fluye carga eléctrica entre la herramienta que suelda y las piezas metálicas por unir. Esto produce un arco muy brillante, y su alta temperatura funde las piezas uniéndolas. ¿Por qué debe mantenerse la herramienta cerca de las piezas que se sueldan?

OBETIVOS DE APRENDIZAJE

Al estudiar este capítulo, usted aprenderá:

- A calcular la energía potencial eléctrica de un conjunto de cargas.
- El significado y la importancia del potencial eléctrico.
- A determinar el potencial eléctrico que un conjunto de cargas produce en un punto en el espacio.
- Cómo utilizar las superficies equipotenciales para visualizar la forma en que varía el potencial eléctrico en el espacio.
- A emplear el potencial eléctrico para calcular el campo eléctrico.

Este capítulo trata de la energía asociada con las interacciones eléctricas. Cada vez que se enciende una luz, se escucha un reproductor de CD o se habla por un teléfono móvil, se utiliza energía eléctrica, un elemento indispensable en nuestra sociedad tecnológica. En los capítulos 6 y 7 del volumen 1, se presentaron los conceptos de *trabajo* y *energía* en el contexto de la mecánica; ahora se combinarán estos conceptos con lo que hemos aprendido sobre cargas eléctricas, fuerzas eléctricas y campos eléctricos. Como vimos en muchos problemas de mecánica, las ideas sobre la energía hacen más fácil la solución de diversos problemas; de manera análoga ocurre en electricidad.

Cuando una partícula con carga se mueve en un campo eléctrico, este último ejerce una fuerza que efectúa un *trabajo* sobre la partícula. Dicho trabajo siempre se puede expresar en términos de la energía potencial eléctrica. Así como la energía potencial gravitacional depende de la altura de una masa sobre la superficie terrestre, la energía potencial eléctrica depende de la posición que ocupa la partícula con carga en el campo eléctrico. Describiremos la energía potencial eléctrica utilizando un concepto nuevo, llamado *potencial eléctrico* o simplemente *potencial*. En el estudio de los circuitos, es frecuente llamar *voltaje* a una diferencia de potencial entre un punto y otro. Los conceptos de potencial y voltaje son cruciales para entender la manera en que funcionan los circuitos eléctricos, y tienen aplicaciones importantes en los haces de electrones que se emplean en la radioterapia contra el cáncer, los aceleradores de partículas de alta energía y muchos otros dispositivos.

23.1 Energía potencial eléctrica

Se ha comprobado que los conceptos de trabajo, energía potencial y conservación de la energía son sumamente útiles en el estudio de la mecánica. En esta sección se verá que estos conceptos son igual de útiles para comprender y analizar las interacciones eléctricas.

Comencemos por revisar tres aspectos esenciales de los capítulos 6 y 7 del volumen 1. En primer lugar, cuando una fuerza $\vec{F}$ actúa sobre una partícula que se mueve de un punto a a un punto b, el trabajo $W_{a\to b}$ efectuado por la fuerza está dado por la siguiente *integral de línea*:

$$W_{a\to b} = \int_a^b \vec{F}\cdot d\vec{l} = \int_a^b F\cos\phi\, dl \quad \text{(trabajo realizado por una fuerza)} \qquad (23.1)$$

donde $d\vec{l}$ es un desplazamiento infinitesimal a lo largo de la trayectoria de la partícula, y ϕ es el ángulo entre $\vec{F}$ y $d\vec{l}$ en cada punto de la trayectoria.

En segundo lugar, si la fuerza $\vec{F}$ es *conservativa*, según se definió el término en la sección 7.3, el trabajo realizado por $\vec{F}$ siempre se puede expresar en términos de una **energía potencial** U. Cuando la partícula se mueve de un punto donde la energía potencial es U_a a otro donde es U_b, el cambio en la energía potencial es $\Delta U = U_b - U_a$, y el trabajo $W_{a\to b}$ que realiza la fuerza es

$$W_{a\to b} = U_a - U_b = -(U_b - U_a) = -\Delta U \quad \text{(trabajo efectuado por una fuerza conservativa)} \qquad (23.2)$$

Cuando $W_{a\to b}$ es positivo, U_a es mayor que U_b, ΔU es negativo y la energía potencial *disminuye*. Eso es lo que ocurre cuando una pelota de béisbol cae de un punto elevado *a*) a otro más bajo *b*) por el efecto de la gravedad terrestre; la fuerza de la gravedad efectúa un trabajo positivo, y la energía potencial gravitacional disminuye (figura 23.1). Cuando se lanza una pelota hacia arriba, la fuerza gravitacional realiza un trabajo negativo durante el ascenso, y la energía potencial aumenta.

En tercer lugar, el teorema del trabajo y la energía establece que el cambio en la energía cinética $\Delta K = K_b - K_a$ durante cualquier desplazamiento es igual al trabajo *total* realizado sobre la partícula. Si el trabajo sobre la partícula lo realizan solo fuerzas conservativas, entonces la ecuación (23.2) da el trabajo total, y $K_b - K_a = -(U_b - U_a)$. Por lo general, esto se escribe así:

$$K_a + U_a = K_b + U_b \qquad (23.3)$$

Es decir, en estas circunstancias, la energía mecánica total (cinética más potencial) se *conserva*.

23.1 Trabajo realizado sobre una pelota de béisbol en movimiento en un campo gravitacional uniforme.



Energía potencial eléctrica en un campo uniforme

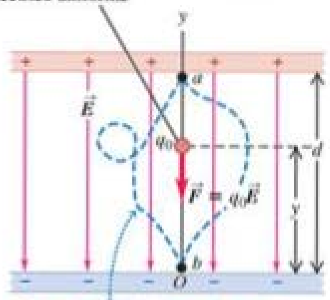
A continuación veremos un ejemplo en el caso eléctrico utilizando estos conceptos básicos. En la figura 23.2 un par de placas metálicas paralelas con carga generan un campo eléctrico uniforme descendente de magnitud E. El campo ejerce una fuerza hacia abajo de magnitud $F = q_0E$ sobre una carga de prueba positiva q_0. A medida que la carga se mueve hacia abajo una distancia d del punto a al punto b, la fuerza sobre la carga de prueba es constante e independiente de su ubicación. Por lo tanto, el trabajo realizado por el campo eléctrico es el producto de la magnitud de la fuerza y la componente de desplazamiento en la dirección (descendente) de la fuerza:

$$W_{a\to b} = Fd = q_0Ed \qquad (23.4)$$

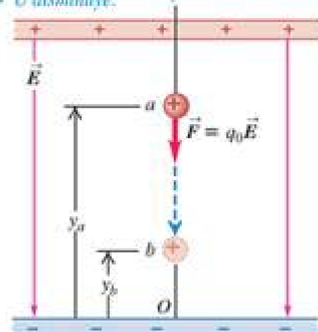
Este trabajo es positivo, ya que la fuerza está en la misma dirección que el desplazamiento neto de la carga de prueba.

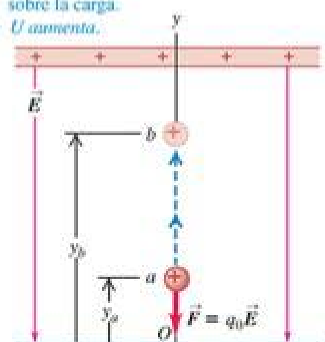
La componente y de la fuerza eléctrica, $F_y = -q_0E$, es constante, y no hay componente x o z. Esto es análogo a la fuerza gravitacional que actúa sobre una masa m cerca de la superficie de la Tierra; para esta fuerza, existe una componente y constante $F_y = -mg$, y las componentes x y z son iguales a cero. A partir de esta analogía se puede concluir que la fuerza ejercida sobre q_0 por el campo eléctrico uniforme en la figura 23.2 es *conservativa*, igual que la fuerza gravitacional. Esto significa que el trabajo $W_{a\to b}$ efectuado por el campo es independiente de la trayectoria que sigue la partícula de a a b. Este trabajo puede representarse con una función de *energía potencial* U, tal como se hizo para la energía potencial gravitacional en la sección 7.1.

23.2 Trabajo realizado sobre una carga puntual que se mueve en un campo eléctrico uniforme. Compare esta ilustración con la figura 23.1.



23.3 Carga positiva que se desplaza *a*) en la dirección del campo eléctrico $\vec{E}$ y *b*) en la dirección opuesta de $\vec{E}$.





La energía potencial para la fuerza gravitacional $F_y = -mg$ fue $U = mgy$; por consiguiente, la energía potencial para la fuerza eléctrica $F_y = -q_0E$ es

$$U = q_0Ey \tag{23.5}$$

Cuando la carga de prueba se mueve de la altura y_a a la altura y_b, el trabajo realizado sobre la carga por el campo está dado por

$$W_{a\to b} = -\Delta U = -(U_b - U_a) = -(q_0Ey_b - q_0Ey_a) = q_0E(y_a - y_b) \tag{23.6}$$

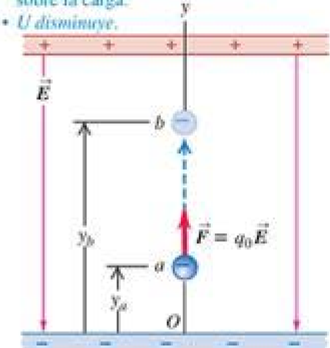
Cuando y_a es mayor que y_b (figura 23.3*a*), la carga de prueba positiva q_0 se mueve hacia abajo, en la misma dirección que $\vec{E}$; el desplazamiento tiene lugar en la misma dirección que la fuerza $\vec{F} = q_0\vec{E}$, por lo que el campo realiza trabajo positivo y U disminuye. [En particular, si $y_a - y_b = d$ como en la figura 23.2, la ecuación (23.6) da $W_{a\to b} = q_0Ed$, en concordancia con la ecuación (23.4)]. Cuando y_a es menor que y_b (figura 23.3*b*), la carga de prueba positiva q_0 se mueve hacia arriba, en dirección opuesta a $\vec{E}$; el desplazamiento es opuesto a la fuerza, el campo realiza un trabajo negativo y U aumenta.

Si la carga de prueba q_0 es negativa, la energía potencial aumenta cuando se mueve a favor del campo, y disminuye cuando se mueve en contra del campo (figura 23.4).

Sea positiva o negativa la carga de prueba, se aplica la siguiente regla general: *U aumenta* si la carga de prueba q_0 se mueve en la dirección *opuesta* a la fuerza eléctrica $\vec{F} = q_0\vec{E}$ (figuras 23.3*b* y 23.4*a*); *U disminuye* si q_0 se mueve en la *misma* dirección

23.4 Una carga negativa que se desplaza *a*) en dirección del campo eléctrico $\vec{E}$ y *b*) en dirección opuesta de $\vec{E}$. Compare con la figura 23.3.

a) La carga negativa se desplaza en la dirección de $\vec{E}$:
• El campo realiza trabajo *negativo* sobre la carga.
• *U aumenta.*



que $\vec{F} = q_0\vec{E}$ (figuras 23.3*a* y 23.4*b*). Este es el mismo comportamiento de la energía potencial gravitacional, la cual aumenta si una masa m se mueve hacia arriba (en dirección opuesta a la dirección de la fuerza gravitacional) y disminuye si m se mueve hacia abajo (en la misma dirección que la fuerza gravitacional).

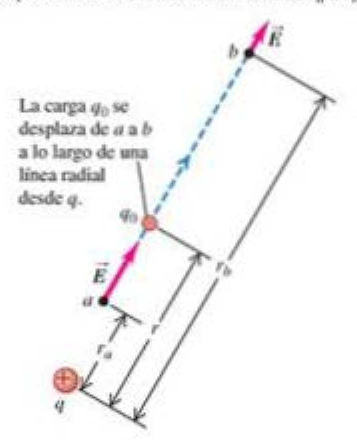
CUIDADO **Energía potencial eléctrica** La relación que hay entre el cambio en la energía potencial eléctrica y el movimiento en un campo eléctrico es muy importante, y se utilizará con frecuencia, aunque requiere cierto esfuerzo para comprenderla del todo. Tómese el tiempo necesario para estudiar cuidadosamente el párrafo anterior así como las figuras 23.3 y 23.4. ¡Hacerlo ahora será de gran utilidad más adelante!

Energía potencial eléctrica de dos cargas puntuales

La idea de la energía potencial eléctrica no se limita al caso especial de un campo eléctrico uniforme. En realidad, este concepto se puede aplicar a una carga puntual en *cualquier* campo eléctrico generado por una distribución de carga estática. Recuerde, del capítulo 21, que cualquier distribución de carga se puede representar como un conjunto de cargas puntuales. Por lo tanto, es útil calcular el trabajo realizado sobre una carga de prueba q_0 que se mueve en el campo eléctrico generado por una sola carga puntual estacionaria q.

En primer lugar se considerará un desplazamiento a lo largo de una línea *radial*, como se ilustra en la figura 23.5. La fuerza sobre q_0 está dada por la ley de Coulomb, y su componente radial es

$$F_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{qq_0}{r^2} \qquad (23.7)$$



23.5 La carga de prueba q_0 se desplaza a lo largo de una línea recta que se extiende en forma radial desde la carga q. Conforme se desplaza de a a b, la distancia varía de r_a a r_b.

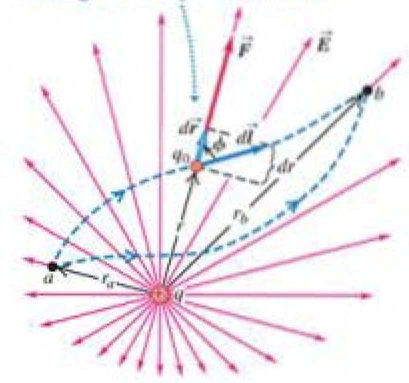
Si q y q_0 tienen el mismo signo (+ o −), la fuerza es de repulsión y F_r es positiva; si las dos cargas tienen signos opuestos, la fuerza es de atracción y F_r es negativa. La fuerza *no* es constante durante el desplazamiento, y se tiene que integrar para calcular el trabajo $W_{a\to b}$ que realiza esta fuerza sobre q_0 a medida que q_0 se mueve de a a b:

$$W_{a\to b} = \int_{r_a}^{r_b} F_r\,dr = \int_{r_a}^{r_b} \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{qq_0}{r^2}dr = \frac{qq_0}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_b}\right) \qquad (23.8)$$

El trabajo efectuado por la fuerza eléctrica para esta trayectoria particular depende solo de los puntos en los extremos.

Consideremos ahora un desplazamiento más general (figura 23.6) en el que a y b *no* están en la misma línea radial. De la ecuación (23.1), el trabajo efectuado sobre q_0 durante este desplazamiento está dado por

$$W_{a\to b} = \int_{r_a}^{r_b} F\cos\phi\,dl = \int_{r_a}^{r_b} \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{qq_0}{r^2}\cos\phi\,dl$$



23.6 El trabajo efectuado sobre la carga q_0 por el campo eléctrico de carga q no depende de la trayectoria seguida, sino solo de las distancias r_a y r_b.

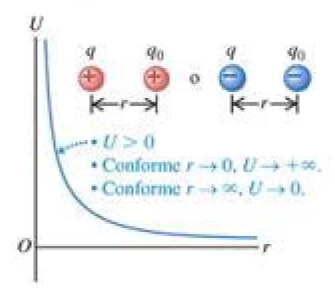
Pero la figura 23.6 muestra que $\cos\phi\,dl = dr$. Es decir, el trabajo realizado durante un desplazamiento pequeño $d\vec{l}$ depende solo del cambio dr de la distancia r entre las cargas, la cual es la *componente radial* del desplazamiento. Así, la ecuación (23.8) es válida incluso con respecto a este desplazamiento más general; el trabajo que efectúa sobre q_0 el campo eléctrico $\vec{E}$ producido por q solo depende de r_a y r_b, y no de los detalles de la trayectoria. Asimismo, si q_0 regresa a su punto inicial a por una trayectoria diferente, el trabajo total que se realiza en el desplazamiento de ida y vuelta es igual a cero [la integral en la ecuación (23.8) es de r_a a r_a]. Estas son las características propias de una fuerza conservativa, según se definió en la sección 7.3. Así, la fuerza sobre q_0 es *conservativa*.

Se ve que las ecuaciones (23.2) y (23.8) son consistentes si se define $U_a = qq_0/4\pi\epsilon_0 r_a$ como la energía potencial cuando q_0 está a una distancia r_a de q, y se define $U_b = qq_0/4\pi\epsilon_0 r_b$ como la energía potencial cuando q_0 está a una distancia r_b de q. De esta forma, la energía potencial U cuando la carga de prueba q_0 está a *cualquier* distancia r de la carga q es

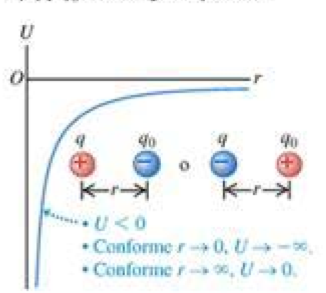
$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{qq_0}{r} \qquad \text{(energía potencial eléctrica de dos cargas puntuales } q \text{ y } q_0) \qquad (23.9)$$

23.7 Gráficas de la energía potencial U de dos cargas puntuales q y q_0 contra su separación r.

a) q y q_0 tienen el mismo signo.



b) q y q_0 tienen signos opuestos.



La ecuación (23.9) es válida independientemente de los signos de q y q_0. La energía potencial es positiva si las cargas q y q_0 tienen el mismo signo (figura 23.7*a*), y negativa si tienen signos opuestos (figura 23.7*b*).

CUIDADO **Energía potencial eléctrica contra fuerza eléctrica** Hay que tener cuidado de no confundir la ecuación (23.9) de la energía potencial de dos cargas puntuales con la expresión similar en la ecuación (23.7) de la componente radial de la fuerza eléctrica que una carga ejerce sobre la otra. La energía potencial U es proporcional a $1/r$, mientras que la componente de la fuerza, F_r, es proporcional a $1/r^2$.

La energía potencial siempre se define en relación con algún punto de referencia donde $U = 0$. En la ecuación (23.9), U es igual a cero cuando q y q_0 están infinitamente alejadas y $r = \infty$. Por lo tanto, U representa el trabajo que realizaría el campo de q sobre la carga de prueba q_0 si esta última se desplazara de una distancia inicial r al infinito. Si q y q_0 tienen el mismo signo, la interacción será de repulsión, este trabajo será positivo y U será positiva en cualquier separación finita (figura 23.7*a*). Si las cargas tienen signos opuestos, la interacción es de atracción, el trabajo efectuado será negativo y U será negativa (figura 23.7*b*).

Es importante resaltar que la energía potencial U dada por la ecuación (23.9) es una propiedad *compartida* de las dos cargas. Si la distancia entre q y q_0 cambia de r_a a r_b, el cambio en la energía potencial es el mismo si q permanece fija y q_0 se mueve, o si q_0 se mantiene fija y es q la que se mueve. Por esta razón, nunca se usa la frase "la energía potencial eléctrica *de* una carga puntual". (De igual manera, si una masa m se encuentra a una altura h sobre la superficie de la Tierra, la energía potencial gravitacional es una propiedad compartida de la masa m y la Tierra. En las secciones 7.1 y 13.3, se hizo énfasis en este hecho).

La ecuación (23.9) también se cumple si la carga q_0 está afuera de una *distribución* de carga con simetría esférica con carga total q; la distancia r va de q_0 al centro de la distribución. Esto es porque la ley de Gauss dice que el campo eléctrico afuera de tal distribución es el mismo que habría si toda la carga q estuviera concentrada en el centro (véase el ejemplo 22.9 de la sección 22.4).



Ejemplo 23.1 Conservación de la energía con fuerzas eléctricas

Un positrón (antipartícula del electrón) tiene una masa de 9.11×10^{-31} kg y una carga $q_0 = +e = 1.60 \times 10^{-19}$ C. Suponga que un positrón se mueve en la vecindad de una partícula α (alfa) cuya carga es $q = +2e = 3.20 \times 10^{-19}$ C y con masa 6.64×10^{-27} kg. La partícula α tiene una masa 7000 veces mayor que la del positrón, por lo que se supondrá que está en reposo. Cuando el positrón está a 1.00×10^{-10} m de la partícula α, se aleja de esta con una rapidez de 3.00×10^6 m/s. *a)* ¿Cuál es la rapidez del positrón cuando las dos partículas están separadas una distancia de 2.00×10^{-10} m? *b)* ¿Cuál es la rapidez del positrón cuando está muy alejado de la partícula alfa? *c)* Suponga que las condiciones iniciales son las mismas, pero la partícula que se mueve es un electrón (con la misma masa que el positrón, pero con carga $q_0 = -e$). Describa el movimiento subsiguiente.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: La fuerza eléctrica entre un positrón (o un electrón) y la partícula α es conservativa, por lo que la energía mecánica (cinética más potencial) se conserva. La energía potencial U a cualquier distancia r está dada por la ecuación (23.9). La función de la energía potencial de los incisos *a)* y *b)* se parece a la de la figura 23.7*a*, y la función del inciso *c)* se parece a la de la figura 23.7*b*. Se conoce la rapidez del positrón $v_a = 3.00 \times 10^6$ m/s cuando la separación entre las partículas es $r_a = 1.00 \times 10^{-10}$ m. En los incisos *a)* y *b)* se usan las ecuaciones (23.3) y (23.9) para encontrar la rapidez de $r = r_b = 2.00 \times 10^{-10}$ m y $r = r_c \rightarrow \infty$, respectivamente. En el inciso *c)* se sustituye el positrón por un electrón y se vuelve a resolver el problema.

EJECUTAR: *a)* Ambas partículas tienen carga positiva, de modo que el positrón aumenta su rapidez conforme se aleja de la partícula α. De acuerdo con la ecuación de la conservación de la energía, la ecuación (23.3), la energía cinética final es

$$K_b = \tfrac{1}{2}mv_b^2 = K_a + U_a - U_b$$

En esta expresión,

$$K_a = \tfrac{1}{2}mv_a^2 = \tfrac{1}{2}(9.11 \times 10^{-31}\text{ kg})(3.00 \times 10^6\text{ m/s})^2$$
$$= 4.10 \times 10^{-18}\text{ J}$$
$$U_a = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{qq_0}{r_a} = (9.0 \times 10^9\text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2) \times \frac{(3.20 \times 10^{-19}\text{ C})(1.60 \times 10^{-19}\text{ C})}{1.00 \times 10^{-10}\text{ m}}$$
$$= 4.61 \times 10^{-18}\text{ J}$$
$$U_b = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{qq_0}{r_b} = 2.30 \times 10^{-18}\text{ J}$$

De modo que la energía cinética del positrón y su rapidez en $r = r_b = 2.00 \times 10^{-10}$ m son

$$K_b = \tfrac{1}{2}mv_b^2 = 4.10 \times 10^{-18}\text{ J} + 4.61 \times 10^{-18}\text{ J} - 2.30 \times 10^{-18}\text{ J}$$
$$= 6.41 \times 10^{-18}\text{ J}$$
$$v_b = \sqrt{\frac{2K_b}{m}} = \sqrt{\frac{2(6.41 \times 10^{-18}\text{ J})}{9.11 \times 10^{-31}\text{ kg}}} = 3.8 \times 10^6\text{ m/s}$$

b) Cuando el positrón y la partícula alfa están muy separados de modo que $r = r_c \to \infty$, la energía potencial final U_c tiende a cero. Nuevamente, a partir de la conservación de la energía, la energía cinética final y la rapidez del positrón son

$$K_c = K_a + U_a - U_c = 4.10 \times 10^{-18}\,\text{J} + 4.61 \times 10^{-18}\,\text{J} - 0$$
$$= 8.71 \times 10^{-18}\,\text{J}$$
$$v_c = \sqrt{\frac{2K_c}{m}} = \sqrt{\frac{2(8.71 \times 10^{-18}\,\text{J})}{9.11 \times 10^{-31}\,\text{kg}}} = 4.4 \times 10^6\ \text{m/s}$$

c) El electrón y la partícula α tienen cargas opuestas, de modo que la fuerza es de atracción y el electrón desacelera conforme se aleja. El cambio de signo de la partícula en movimiento de $+e$ a $-e$ quiere decir que la energía potencial inicial es ahora $U_a = -4.61 \times 10^{-18}$ J, la cual representa la energía *negativa* mecánica total:

$$K_a + U_a = (4.10 \times 10^{-18}\,\text{J}) - (4.61 \times 10^{-18}\,\text{J})$$
$$= -0.51 \times 10^{-18}\,\text{J}$$

La energía mecánica total tiene que ser positiva para que el electrón se mueva infinitamente lejos de la partícula α. Al igual que una piedra lanzada con baja rapidez hacia arriba desde la superficie de la Tierra, alcanzará su separación máxima $r = r_d$ de la partícula α antes de invertir su dirección. En este punto, su rapidez y energía cinética K_d son iguales a cero, de modo que en la separación R_d tenemos

$$U_d = K_a + U_a - K_d = (-0.51 \times 10^{-18}\,\text{J}) - 0$$
$$U_d = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{qq_0}{r_d} = -0.51 \times 10^{-18}\,\text{J}$$
$$r_d = \frac{1}{U_d}\frac{qq_0}{4\pi\epsilon_0}$$
$$= \frac{(9.0 \times 10^9\,\text{N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2)}{-0.51 \times 10^{-18}\,\text{J}}(3.20 \times 10^{-19}\,\text{C})(-1.60 \times 10^{-19}\text{C})$$
$$= 9.0 \times 10^{-10}\,\text{m}$$

Para $r_b = 2.00 \times 10^{-10}$ m, tenemos que $U_b = -2.30 \times 10^{-18}$ J, de manera que la energía cinética y la rapidez del electrón en este punto son

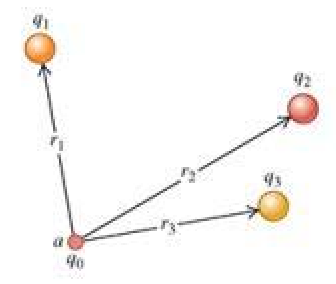
$$K_b = \tfrac{1}{2}mv_b^2 = 4.10 \times 10^{-18}\,\text{J} + (-4.61 \times 10^{-18}\,\text{J})$$
$$- (-2.30 \times 10^{-18}\,\text{J}) = 1.79 \times 10^{-18}\,\text{J}$$
$$v_b = \sqrt{\frac{2K_b}{m}} = \sqrt{\frac{2(1.79 \times 10^{-18}\,\text{J})}{9.11 \times 10^{-31}\,\text{kg}}} = 2.0 \times 10^6\ \text{m/s}$$

EVALUAR: Ambas partículas se comportan como se esperaba conforme se alejan de la partícula α: el positrón acelera, y el electrón desacelera y, con el tiempo, regresa. ¿Con qué rapidez se tendría que mover un electrón en $r_a = 1.00 \times 10^{-10}$ m para viajar infinitamente lejos de la partícula α? (*Sugerencia:* Véase el ejemplo 13.4 de la sección 13.3).

Energía potencial eléctrica con varias cargas puntuales

Suponga que el campo eléctrico $\vec{E}$ en el que se desplaza la carga q_0 se debe a *varias* cargas puntuales $q_1, q_2, q_3, \ldots$ a distancias $r_1, r_2, r_3, \ldots$ de q_0, como se ilustra en la figura 23.8. Por ejemplo, q_0 podría ser un ion positivo que se mueve en presencia de otros iones (figura 23.9). El campo eléctrico total en cada punto es la *suma vectorial* de los campos debidos a las cargas individuales, y el trabajo total realizado sobre q_0 durante cualquier desplazamiento es la suma de las contribuciones de las cargas individuales. A partir de la ecuación (23.9) se concluye que la energía potencial asociada con la carga de prueba q_0 en el punto a en la figura 23.8 es una suma *algebraica* (*no* la suma vectorial):

$$U = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{q_1}{r_1} + \frac{q_2}{r_2} + \frac{q_3}{r_3} + \cdots\right) = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0}\sum_i \frac{q_i}{r_i} \quad \begin{array}{l}\text{(carga puntual}\\ q_0 \text{ y conjunto}\\ \text{de cargas } q_i)\end{array} \qquad (23.10)$$



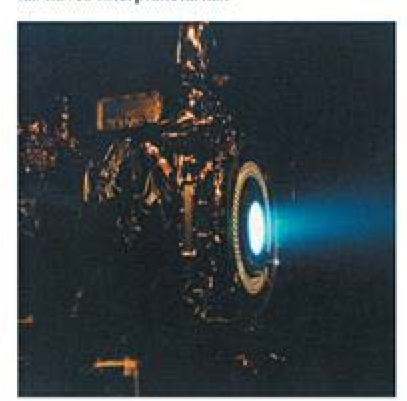
23.8 La energía potencial asociada con la carga q_0 en el punto a depende de las cargas q_1, q_2 y q_3 y de sus distancias r_1, r_2 y r_3 del punto a.

Cuando q_0 está en un punto b diferente, la energía potencial está dada por la misma expresión, pero $r_1, r_2, \ldots$ son las distancias desde $q_1, q_2, \ldots$ al punto b. El trabajo efectuado sobre la carga q_0 cuando se desplaza de a a b a lo largo de cualquier trayectoria es igual a la diferencia $U_a - U_b$ entre las energías potenciales cuando q_0 está en a y luego en b.

Se puede representar *cualquier* distribución de carga como un conjunto de cargas puntuales, por lo que la ecuación (23.10) indica que siempre es posible encontrar una función de la energía potencial para *cualquier* campo eléctrico estático. Se infiere que **para todo campo eléctrico debido a una distribución de carga estática, la fuerza ejercida por ese campo es conservativa.**

Las ecuaciones (23.9) y (23.10) definen que U es igual a cero cuando todas las distancias $r_1, r_2, \ldots$ son infinitas, es decir, cuando la carga de prueba q_0 está muy lejos de todas las cargas que producen el campo. Igual que para cualquier función de la energía potencial, el punto donde $U = 0$ es arbitrario; siempre se puede sumar una constante que iguale U a cero en cualquier punto que se elija. En los problemas de electrostática, por lo general, lo más sencillo es elegir que este punto se encuentre en el infinito. Cuando se analicen circuitos eléctricos en los capítulos 25 y 26, habrá otras elecciones que resulten más convenientes.

23.9 Este motor de iones para naves espaciales utiliza fuerzas eléctricas para expulsar un chorro de iones positivos de xenón (Xe^+) con una rapidez superior a 30 km/s. La propulsión que ocasiona es muy baja (alrededor de 0.09 newtons), pero es posible mantenerla continuamente durante varios días, en contraste con los cohetes de combustible químico, que generan una enorme propulsión durante un breve lapso (véase la figura 8.33). Los motores de iones se han utilizado para maniobrar las naves interplanetarias.



La ecuación (23.10) da la energía potencial asociada con la presencia de la carga de prueba q_0 en el campo $\vec{E}$ producido por $q_1, q_2, q_3, \ldots$ Pero también hay energía potencial implicada en el arreglo de estas cargas. Si se comienza con las cargas $q_1, q_2, q_3, \ldots$, todas separadas entre sí por distancias infinitas, y luego se acercan de manera que la distancia entre q_i y q_j sea r_{ij}, la energía potencial *total* U es la suma de las energías potenciales de interacción de cada par de cargas. Esto se escribe como

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i<j} \frac{q_i q_j}{r_{ij}} \qquad (23.11)$$

Esta suma se extiende sobre todos los *pares* de cargas; no se permite que $i = j$ (porque eso sería la interacción de una carga consigo misma), y solo se incluyen términos con $i < j$ para garantizar que cada par se tome en cuenta solo una vez. Así, para tomar en cuenta la interacción entre q_3 y q_4, se incluye un término con $i = 3$ y $j = 4$, pero no un término con $i = 4$ y $j = 3$.

Interpretación de la energía potencial eléctrica

Como comentario final, a continuación se exponen dos puntos de vista sobre la energía potencial eléctrica. Se ha definido la energía potencial eléctrica en términos del trabajo realizado *por el campo eléctrico* sobre una partícula con carga que se mueve en el campo, en forma similar a la definición de energía potencial que se dio en el capítulo 7, del volumen 1, en términos del trabajo efectuado por la gravedad o por un resorte. Cuando una par-tícula se desplaza del punto a al punto b, el trabajo que realiza sobre ella el campo eléctrico es $W_{a\to b} = U_a - U_b$. Por lo tanto, la diferencia de energía potencial $U_a - U_b$ es igual *al trabajo que efectúa la fuerza eléctrica cuando la partícula se desplaza de a a b.* Cuando U_a es mayor que U_b, el campo realiza trabajo positivo sobre la partícula conforme "cae" de un punto de mayor energía potencial (a) a otro con menor energía potencial (b).

Un punto de vista alternativo pero equivalente es considerar cuánto trabajo se hubiera tenido que realizar para "subir" la partícula desde un punto b, en el que la energía potencial es U_b, hasta un punto a en el que la energía potencial tiene un valor mayor U_a (por ejemplo, al empujar dos cargas positivas para acercarlas). Para mover la partícula lentamente (de manera que no se le imparta ninguna energía cinética), es necesario ejercer una fuerza externa adicional $\vec{F}_{ext}$ que es igual y opuesta a la fuerza del campo eléctrico y realiza un trabajo positivo. La diferencia de energía potencial $U_a - U_b$ se define entonces como *el trabajo que debe efectuar una fuerza externa para desplazar lentamente la partícula desde b hasta a en contra de la fuerza eléctrica.* Como $\vec{F}_{ext}$ es el negativo de la fuerza del campo eléctrico y el desplazamiento ocurre en dirección opuesta, esta definición de la diferencia de potencial $U_a - U_b$ es equivalente a la que se dio antes. Este punto de vista alternativo también funciona si U_a es menor que U_b, lo que corresponde a "bajar" la partícula; un ejemplo de esto es alejar dos cargas positivas una de otra. En este caso, $U_a - U_b$ de nuevo es igual al trabajo realizado por la fuerza externa, pero ahora este trabajo es negativo.

En la siguiente sección se considerarán estos dos puntos de vista para interpretar lo que se conoce como *potencial* eléctrico, o energía potencial por unidad de carga.

Ejemplo 23.2 Sistema de cargas puntuales

Dos cargas puntuales se localizan en el eje x: $q_1 = -e$ en $x = 0$ y $q_2 = +e$ en $x = a$. *a*) Determine el trabajo que debe realizar una fuerza externa para llevar una tercera carga puntual $q_3 = +e$ del infinito a $x = 2a$. *b*) Determine la energía potencial total del sistema de tres cargas.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: La figura 23.10 presenta el arreglo final de las tres cargas. En el inciso *a*) necesitamos obtener el trabajo W que debe realizar sobre q_3 una fuerza externa $\vec{F}_{ext}$ para traer a q_3 del infinito a $x = 2a$. Esto se hace usando la ecuación (23.10) para obtener la energía potencial asociada con q_3 en presencia de q_1 y q_2. En el inciso *b*) se emplea la ecuación (23.11), que es expresión de la energía potencial de un conjunto de cargas puntuales, para determinar la energía potencial total del sistema.

23.10 Diagrama de la situación después de que se ha traído la tercera carga desde el infinito.

$q_1 = -e$ $\quad q_2 = +e$ $\quad q_3 = +e$

$x = 0$ $\quad x = a$ $\quad x = 2a$

EJECUTAR: *a*) El trabajo W es igual a la diferencia entre **i.** la energía potencial U asociada con q_3 cuando está en $x = 2a$ y **ii.** la energía potencial que tiene cuando está infinitamente lejos. La segunda de estas es igual a cero, por lo que el trabajo requerido es igual a U. Las distancias entre las cargas son $r_{13} = 2a$ y $r_{23} = a$, por lo que a partir de la ecuación (23.10),

$$W = U = \frac{q_3}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{q_1}{r_{13}} + \frac{q_2}{r_{23}}\right) = \frac{+e}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{-e}{2a} + \frac{+e}{a}\right) = \frac{+e^2}{8\pi\epsilon_0 a}$$

El trabajo es positivo, tal como lo esperábamos. Si q_3 se trae del infinito a lo largo del eje $+x$, es atraída por q_1 pero repelida con más fuerza por q_2; por ello, debe hacerse un trabajo positivo para llevar q_3 a la posición $x = 2a$.

b) La energía potencial total del sistema de tres cargas está dada por la ecuación (23.11):

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_{i<j}\frac{q_i q_j}{r_{ij}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{q_1q_2}{r_{12}} + \frac{q_1q_3}{r_{13}} + \frac{q_2q_3}{r_{23}}\right)$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{(-e)(e)}{a} + \frac{(-e)(e)}{2a} + \frac{(e)(e)}{a}\right] = \frac{-e^2}{8\pi\epsilon_0 a}$$

EVALUAR: El resultado negativo en el inciso *b*) significa que el sistema tiene menos energía potencial de la que tendría si las tres cargas estuvieran infinitamente alejadas. Una fuerza externa tendría que hacer trabajo *negativo* para traerlas del infinito y acomodarlas en su arreglo, y trabajo *positivo* para llevarlas de regreso al infinito.

Evalúe su comprensión de la sección 23.1 Considere el sistema de tres cargas puntuales del ejemplo 21.4 (sección 21.3) y que se ilustra en la figura 21.14. *a*) ¿Cuál es el signo de la energía potencial total de este sistema? **i.** positivo; **ii.** negativo; **iii.** cero. *b*) ¿Cuál es el signo de la cantidad total de trabajo que tendría que hacerse para llevar las cargas infinitamente lejos una de otra? **i.** positivo; **ii.** negativo; **iii.** cero. |



23.2 Potencial eléctrico

En la sección 23.1 se estudió la energía potencial U asociada con una carga de prueba q_0 en un campo eléctrico. Ahora nos interesa describir esta energía potencial "por unidad de carga", de la misma forma como el campo eléctrico describe la fuerza por unidad de carga sobre una partícula cargada en el campo. Esto nos lleva al concepto de *potencial eléctrico*, al que con frecuencia se le llama simplemente *potencial*. Este concepto es muy útil en los cálculos que implican energías de partículas con carga. También facilita muchos cálculos relacionados con el campo eléctrico porque el potencial eléctrico se relaciona estrechamente con el campo eléctrico $\vec{E}$. Cuando se necesita determinar un campo eléctrico, a menudo es más fácil determinar primero el potencial y después, a partir de este, el campo.

El **potencial** es *la energía potencial por unidad de carga*. El potencial V se define, en cualquier punto del campo eléctrico, como la energía potencial U *por unidad de carga* asociada con una carga de prueba q_0 en ese punto:

$$V = \frac{U}{q_0} \quad \text{o bien,} \quad U = q_0 V \qquad (23.12)$$

Tanto la energía potencial como la carga son escalares, por lo que el potencial es una cantidad escalar. Sus unidades se determinan a partir de la ecuación (23.12), al dividir unidades de energía entre las de carga. La unidad de potencial en el SI se llama **volt** (1 V), en honor del científico italiano y experimentador en el campo de la electricidad Alejandro Volta (1745-1827), y es igual a 1 joule por coulomb:

$$1\text{ V} = 1\text{ volt} = 1\text{ J/C} = 1\text{ joule/coulomb}$$

La ecuación (23.2) iguala el trabajo realizado por la fuerza eléctrica durante un desplazamiento de a a b con la cantidad $-\Delta U = -(U_b - U_a)$, sobre la base de "trabajo por unidad de carga". Al dividir esta ecuación entre q_0 se obtiene:

$$\frac{W_{a\to b}}{q_0} = -\frac{\Delta U}{q_0} = -\left(\frac{U_b}{q_0} - \frac{U_a}{q_0}\right) = -(V_b - V_a) = V_a - V_b \qquad (23.13)$$

donde $V_a = U_a/q_0$ es la energía potencial por unidad de carga en el punto a; V_b se define de forma análoga. V_a y V_b se denominan el *potencial en el punto a* y *potencial en el punto b*, respectivamente. De este modo, el trabajo realizado por unidad de carga por la fuerza eléctrica cuando un cuerpo con carga se desplaza de a a b es igual al potencial en a menos el potencial en b.

23.11 El voltaje de esta batería es igual a la diferencia de potencial $V_{ab} = V_a - V_b$ entre su terminal positiva (punto a) y su terminal negativa (punto b).



La diferencia $V_a - V_b$ se llama *potencial de* a *con respecto a* b; en ocasiones esa diferencia se abrevia como $V_{ab} = V_a - V_b$ (observe el orden de los subíndices). Con frecuencia, esta expresión se conoce como diferencia de potencial entre a y b; pero esto es una ambigüedad, a menos que se especifique cuál es el punto de referencia. En los circuitos eléctricos, que se analizarán en capítulos posteriores, la diferencia de potencial entre dos puntos con frecuencia se denomina **voltaje** (figura 23.11). Así, la ecuación (23.13) establece: **V_{ab}, el potencial de a con respecto a b, es igual al trabajo realizado por la fuerza eléctrica cuando una UNIDAD de carga se desplaza de a a b.**

Otra manera de interpretar la diferencia de potencial V_{ab} en la ecuación (23.13) es usar el punto de vista alternativo que se mencionó al final de la sección 23.1. Desde ese punto de vista, $U_a - U_b$ es la cantidad de trabajo que debe realizar una fuerza *externa* para desplazar con lentitud una partícula de carga q_0 de b a a en contra de la fuerza eléctrica. El trabajo que debe hacer *por unidad de carga* la fuerza externa es, por lo tanto, $(U_a - U_b)/q_0 = V_a - V_b = V_{ab}$. En otras palabras, **$V_{ab}$, el potencial de a con respecto a b, es igual al trabajo que debe efectuarse para desplazar con lentitud una UNIDAD de carga de b a a contra la fuerza eléctrica.**

El instrumento que mide la diferencia de potencial entre dos puntos se llama *voltímetro*. (En el capítulo 26 se analizará cómo funciona este dispositivo). Son comunes los voltímetros capaces de medir diferencias de potencial de 1 μV, y es posible obtener sensibilidades de hasta 10^{-12} V.

Cálculo del potencial eléctrico

Para obtener el potencial V debido a una sola carga puntual q, se divide la ecuación (23.9) entre q_0:

$$V = \frac{U}{q_0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r} \quad \text{(potencial debido a una carga puntual)} \tag{23.14}$$

donde r es la distancia de la carga puntual q al punto en que se evalúa el potencial. Si q es positiva, el potencial que produce es positivo en todos los puntos; si q es negativa, produce un potencial negativo en todo lugar. En cualquier caso, V es igual a cero en $r = \infty$, una distancia infinita de la carga puntual. Observe que el potencial, como el campo eléctrico, es independiente de la carga de prueba q_0 que se utiliza para definirlo.

De manera similar, para obtener el potencial debido a un conjunto de cargas puntuales, se divide la ecuación (23.10) entre q_0:

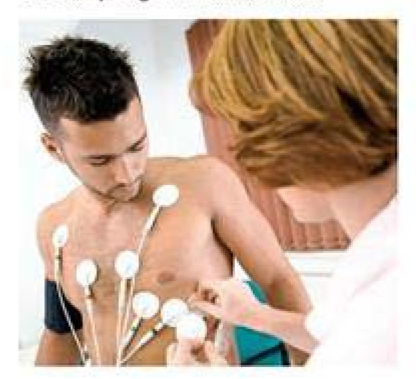
$$V = \frac{U}{q_0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_i \frac{q_i}{r_i} \quad \text{(potencial debido a un conjunto de cargas puntuales)} \tag{23.15}$$

En esta expresión, r_i es la distancia de la i-ésima carga, q_i, al punto en el que se evalúa V. Así como el campo eléctrico debido a un conjunto de cargas puntuales es la suma *vectorial* de los campos producidos por cada carga, el potencial eléctrico debido a una colección de cargas puntuales es la suma *escalar* de los potenciales debidos a cada carga. Cuando se tiene una distribución continua de carga a lo largo de una línea, sobre una superficie o a través de un volumen, se divide la carga en elementos dq, y la suma en la ecuación (23.15) se convierte en una integral:

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{dq}{r} \quad \text{(potencial debido a una distribución continua de carga)} \tag{23.16}$$

donde r es la distancia que hay entre el elemento con carga dq y el punto del campo donde se desea calcular V. Estudiaremos varios ejemplos de estos casos. El potencial definido por las ecuaciones (23.15) y (23.16) es igual a cero en puntos que están infinitamente lejos de *todas* las cargas. Más adelante encontraremos casos en que la distribución de carga misma se extiende al infinito. En tales casos se verá que

Aplicación Electrocardiografía
Los electrodos que se usan para obtener un electrocardiograma (ECG) miden la diferencia de potencial (normalmente no mayor que 1 mV = 10^{-3} V) entre diversas partes de la piel de los pacientes. Estos son indicadores de las diferencias de potencial entre regiones del corazón, y constituyen un método eficaz para identificar anormalidades en la actividad eléctrica que rige la función cardiaca.



no se puede establecer $V = 0$ en el infinito, por lo que es necesario tener cuidado en el uso y la interpretación de las ecuaciones (23.15) y (23.16).

CUIDADO **¿Qué es el potencial eléctrico?** Antes de entrar en los detalles del cálculo del potencial eléctrico, debemos detenernos y recordar qué es el potencial. El *potencial* eléctrico en cierto punto es la energía potencial que estaría asociada a una carga *unitaria* colocada en ese punto. Por eso, el potencial se mide en joules por coulomb, o volts. Asimismo, hay que tener muy presente que no es necesario que haya una carga en un punto dado para que ahí exista un potencial V. (De igual forma, un campo eléctrico puede existir en un punto dado aun si no hay una carga que responda a él).

Obtención del potencial eléctrico a partir del campo eléctrico

Cuando se tiene un conjunto de cargas puntuales, la ecuación (23.15) es por lo general la forma más fácil de calcular el potencial V. Pero en ciertos problemas en los que se conoce el campo eléctrico o se puede calcular sin mayor dificultad, es más fácil determinar V a partir de $\vec{E}$. La fuerza $\vec{F}$ sobre una carga de prueba q_0 se escribe como $\vec{F} = q_0\vec{E}$, por lo que, según la ecuación (23.1), el trabajo realizado por la fuerza eléctrica conforme la carga de prueba se desplaza de a a b está dado por:

$$W_{a\to b} = \int_a^b \vec{F}\cdot d\vec{l} = \int_a^b q_0\vec{E}\cdot d\vec{l}$$

Si esto se divide entre q_0 y se compara el resultado con la ecuación (23.13), se encuentra que

$$V_a - V_b = \int_a^b \vec{E}\cdot d\vec{l} = \int_a^b E\cos\phi\, dl \quad \text{(diferencia de potencial como una integral de } \vec{E}\text{)} \qquad (23.17)$$

El valor de $V_a - V_b$ es independiente de la trayectoria seguida de a a b, del mismo modo que el valor de $W_{a\to b}$ es independiente de la trayectoria. Para interpretar la ecuación (23.17), hay que recordar que $\vec{E}$ es la fuerza eléctrica por unidad de carga sobre una carga de prueba. Si la integral de línea $\int_a^b \vec{E}\cdot d\vec{l}$ es positiva, el campo eléctrico efectúa un trabajo positivo sobre una carga de prueba positiva conforme esta se desplaza de a a b. En este caso, la energía potencial eléctrica disminuye a medida que la carga de prueba se desplaza, por lo que la energía potencial por unidad de carga también decrece; por consiguiente, V_b es menor que V_a, y $V_a - V_b$ es positiva.

Como ilustración, considere una carga puntual positiva (figura 23.12*a*). El campo eléctrico se aleja de la carga, y $V = q/4\pi\epsilon_0 r$ es positivo a cualquier distancia finita de la carga. Si nos alejamos de la carga, en dirección de $\vec{E}$, nos movemos hacia valores más bajos de V; si nos acercamos a la carga, en dirección opuesta a $\vec{E}$, nos desplazamos hacia valores mayores de V. Para la carga puntual negativa de la figura 23.12*b*, $\vec{E}$ está dirigido hacia la carga y $V = q/4\pi\epsilon_0 r$ es negativo a cualquier distancia finita de la carga. En este caso, si nos desplazamos hacia la carga, nos moveremos en la dirección de $\vec{E}$ y en la dirección decreciente de V (hacia valores más negativos). Al alejarnos de la carga, en dirección opuesta a la de $\vec{E}$, nos desplazamos hacia valores crecientes de V (menos negativos). La regla general, válida para *cualquier* campo eléctrico, es la siguiente: desplazarse en la dirección de $\vec{E}$ significa hacerlo en la dirección *decreciente* de V, y desplazarse *contra* la dirección de $\vec{E}$ significa moverse en la dirección *creciente* de V.

Asimismo, una carga de prueba positiva q_0 experimenta una fuerza eléctrica en la dirección de $\vec{E}$, hacia menores valores de V; una carga de prueba negativa experimenta una fuerza opuesta a $\vec{E}$, hacia valores más grandes de V. Así, una carga positiva tiende a "caer" de una región de potencial elevado a otra de menor potencial. Lo contrario también se cumple para una carga negativa.

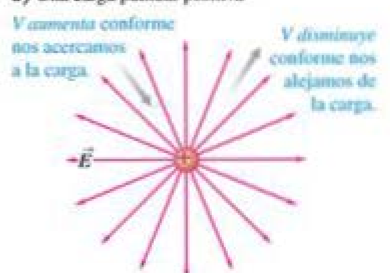
Observe que la ecuación (23.17) se puede rescribir como

$$V_a - V_b = -\int_b^a \vec{E}\cdot d\vec{l} \qquad (23.18)$$

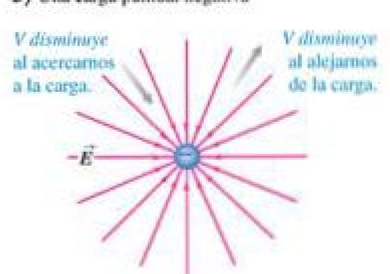
La diferencia con la integral de la ecuación (23.17) es que esta tiene signo negativo y los límites están invertidos; de ahí que las ecuaciones (23.17) y (23.18) sean equivalentes. Pero la ecuación (23.18) tiene una interpretación un poco diferente. Para

23.12 Si nos movemos en la dirección de $\vec{E}$, el potencial eléctrico V disminuye; si nos movemos en dirección opuesta a $\vec{E}$, V se incrementa.

a) Una carga puntual positiva



b) Una carga puntual negativa



mover una unidad de carga lentamente en contra de la fuerza eléctrica, se debe aplicar una fuerza *externa* por unidad de carga igual a $-\vec{E}$, igual y opuesta a la fuerza eléctrica por unidad de carga $\vec{E}$. La ecuación (23.18) dice que $V_a - V_b = V_{ab}$, el potencial de a con respecto a b, es igual al trabajo realizado por unidad de carga por esta fuerza externa para desplazar una unidad de carga de b a a. Esta es la misma interpretación alternativa que se analizó con la ecuación (23.13).

Las ecuaciones (23.17) y (23.18) demuestran que la unidad de la diferencia de potencial (1 V) es igual a la unidad del campo eléctrico (1 N/C) multiplicada por la unidad de distancia (1 m). Así, la unidad de campo eléctrico se expresa como 1 *volt por metro* (1 V/m), o como 1 N/C:

$$1 \text{ V/m} = 1 \text{ volt/metro} = 1 \text{ N/C} = 1 \text{ newton/coulomb}$$

En la práctica, la unidad habitual para la magnitud del campo eléctrico es el volt por metro.

Electrón volts

La magnitud e de la carga del electrón se usa para definir una unidad de energía que es útil en muchos cálculos en los sistemas atómico y nuclear. Cuando una partícula con carga q se desplaza de un punto donde el potencial es V_b a otro donde es V_a, el cambio en la energía potencial U es

$$U_a - U_b = q(V_a - V_b) = qV_{ab}$$

Si la carga q es igual a la magnitud e de la carga del electrón, 1.602×10^{-19} C, y la diferencia de potencial es $V_{ab} = 1$ V, el cambio en la energía es

$$U_a - U_b = (1.602 \times 10^{-19} \text{ C})(1 \text{ V}) = 1.602 \times 10^{-19} \text{ J}$$

Esta cantidad de energía se define como 1 **electrón volt** (1 eV):

$$1 \text{ eV} = 1.602 \times 10^{-19} \text{ J}$$

A menudo se utilizan los múltiplos meV, keV, MeV, GeV y TeV.

CUIDADO **Electrón volts contra volts** Recuerde que el electrón volt es una unidad de energía, ¡*no* una unidad de potencial ni de diferencia de potencial! ❙

Cuando una partícula con carga e se mueve a través de una diferencia de potencial de 1 volt, el cambio en la *energía* potencial es 1 eV. Si la carga es algún múltiplo de e, digamos Ne, el cambio en la energía potencial en electrón volts es N veces la diferencia de potencial expresada en volts. Por ejemplo, cuando una partícula alfa, que tiene una carga de $2e$, se desplaza entre dos puntos con diferencia de potencial de 1000 V, el cambio en la energía potencial es 2(1000 eV) = 2000 eV. Para confirmar esto, se escribe

$$\begin{aligned} U_a - U_b = qV_{ab} &= (2e)(1000 \text{ V}) = (2)(1.602 \times 10^{-19} \text{ C})(1000 \text{ V}) \\ &= 3.204 \times 10^{-16} \text{ J} = 2000 \text{ eV} \end{aligned}$$

Si bien se ha definido el electrón volt para cuantificar la energía *potencial*, se puede usar para *cualquier* forma de energía, como la energía cinética de una partícula en movimiento. Cuando se habla de "un millón de electrón volts protón", significa que hay un protón cuya energía cinética es de un millón de electrón volts (1 MeV), lo que es igual a $(10^6)(1.602 \times 10^{-19} \text{ J}) = 1.602 \times 10^{-13}$ J. El Gran Colisionador de Hadrones, cerca de Ginebra, Suiza, está diseñado para acelerar protones a una energía cinética de 7 TeV (7×10^{12} eV).



Ejemplo 23.3 Fuerza eléctrica y potencial eléctrico

Un protón (carga $+e = 1.602 \times 10^{-19}$ C) se desplaza en línea recta de un punto a a otro punto b una distancia $d = 0.50$ m. A lo largo de esta línea, el campo eléctrico es uniforme con magnitud $E = 1.5 \times 10^7$ V/m $= 1.5 \times 10^7$ N/C en la dirección de a a b. Determine *a*) la fuerza sobre el protón; *b*) el trabajo realizado sobre el protón por el campo; *c*) la diferencia de potencial $V_a - V_b$.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Este problema usa la relación entre el campo eléctrico y la fuerza eléctrica. También utiliza la relación entre fuerza, trabajo y diferencia de energía potencial. Se da el campo eléctrico, por lo que es fácil encontrar la fuerza eléctrica que se ejerce sobre el protón. El cálculo del trabajo que realiza esta fuerza sobre el protón también es sencillo porque $\vec{E}$ es uniforme, lo que significa que la fuerza sobre el protón es constante. Una vez que se conoce el trabajo, se determina $V_a - V_b$ empleando la ecuación (23.13).

EJECUTAR: *a*) La fuerza sobre el protón tiene la misma dirección que el campo eléctrico, y su magnitud es

$$F = qE = (1.602 \times 10^{-19}\ \text{C})(1.5 \times 10^7\ \text{N/C}) = 2.4 \times 10^{-12}\ \text{N}$$

b) La fuerza es constante y está en la misma dirección que el desplazamiento, de manera que el trabajo efectuado sobre el protón es

$$W_{a\to b} = Fd = (2.4 \times 10^{-12}\ \text{N})(0.50\ \text{m}) = 1.2 \times 10^{-12}\ \text{J}$$
$$= (1.2 \times 10^{-12}\ \text{J})\frac{1\ \text{eV}}{1.602 \times 10^{-19}\ \text{J}}$$
$$= 7.5 \times 10^6\ \text{eV} = 7.5\ \text{MeV}$$

c) De la ecuación (23.13), la diferencia de potencial es el trabajo por unidad de carga, que es

$$V_a - V_b = \frac{W_{a\to b}}{q} = \frac{1.2 \times 10^{-12}\ \text{J}}{1.602 \times 10^{-19}\ \text{C}}$$
$$= 7.5 \times 10^6\ \text{J/C} = 7.5 \times 10^6\ \text{V}$$
$$= 7.5\ \text{MV}$$

Se obtiene el mismo resultado con más facilidad si se recuerda que 1 electrón volt es igual a 1 volt multiplicado por la carga e. Como el trabajo realizado es 7.5×10^6 eV y la carga es e, entonces, la diferencia de potencial es $(7.5 \times 10^6\ \text{eV})/e = 7.5 \times 10^6$ V.

EVALUAR: El resultado del inciso *c*) se comprueba con las ecuaciones (23.17) o (23.18). El ángulo ϕ entre el campo constante $\vec{E}$ y el desplazamiento es igual a cero, por lo que la ecuación (23.17) se convierte en

$$V_a - V_b = \int_a^b E\cos\phi\, dl = \int_a^b E\, dl = E\int_a^b dl$$

La integral de dl de a a b es exactamente la distancia d, por lo que una vez más se obtiene

$$V_a - V_b = Ed = (1.5 \times 10^7\ \text{V/m})(0.50\ \text{m}) = 7.5 \times 10^6\ \text{V}$$

Ejemplo 23.4 Potencial debido a dos cargas puntuales



Un dipolo eléctrico está formado por dos cargas puntuales, $q_1 = +12$ nC y $q_2 = -12$ nC, colocadas a una distancia de 10.0 cm (figura 23.13). Calcule los potenciales eléctricos en los puntos a, b y c.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Este es el mismo ordenamiento de cargas que el del ejemplo 21.8, en el cual se calculó el *campo* eléctrico en cada punto por medio de una suma *vectorial*. La incógnita es el *potencial* eléctrico V en tres puntos, lo que se obtiene haciendo la suma *algebraica* en la ecuación (23.15).

EJECUTAR: En el punto a tenemos que $r_1 = 0.060$ m y $r_2 = 0.040$ m, de modo que la ecuación (23.15) se convierte en

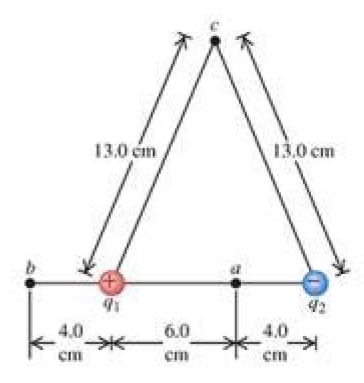
$$V_a = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_i \frac{q_i}{r_i} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1}{r_1} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_2}{r_2}$$
$$= (9.0 \times 10^9\ \text{N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2)\frac{12 \times 10^{-9}\ \text{C}}{0.060\ \text{m}}$$
$$+ (9.0 \times 10^9\ \text{N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2)\frac{(-12 \times 10^{-9}\ \text{C})}{0.040\ \text{m}}$$
$$= 1800\ \text{N}\cdot\text{m/C} + (-2700\ \text{N}\cdot\text{m/C})$$
$$= 1800\ \text{V} + (-2700\ \text{V}) = -900\ \text{V}$$

De forma análoga, se puede demostrar que el potencial en el punto b (donde $r_1 = 0.040$ m y $r_2 = 0.140$ m) es $V_b = 1930$ V y que el potencial en el punto c (donde $r_1 = r_2 = 0.130$ m) es $V_c = 0$.

EVALUAR: Confirmaremos que estos resultados son lógicos. El punto a está más cerca de la carga de -12 nC que de la carga de $+12$ nC, de modo que el potencial a es negativo. El potencial es positivo en el punto b, que está más cerca de la carga de $+12$ nC que de la carga de -12 nC. Finalmente, el punto c está a la misma distancia de la carga de $+12$ nC y de la de -12 nC, de modo que el potencial es igual a cero. (El potencial también es igual a cero en un punto infinitamente alejado de ambas cargas).

Al comparar este ejemplo con el 21.8, se aprecia que es mucho más fácil calcular el potencial eléctrico (un escalar) que el campo eléctrico (un vector). Hay que aprovechar esta simplificación siempre que sea posible.

23.13 ¿Cuáles son los potenciales en los puntos a, b y c debidos a este dipolo eléctrico?





Ejemplo 23.5 Potencial y energía potencial

Calcule la energía potencial asociada con una carga puntual de +4.0 nC si se coloca en los puntos a, b y c de la figura 23.13.



IDENTIFICAR y PLANTEAR: La energía potencial U asociada con una carga puntual q, en un lugar donde el potencial eléctrico es V, es $U = qV$. Se utilizan los valores de V del ejemplo 23.4.

EJECUTAR: En los tres puntos obtenemos

$$U_a = qV_a = (4.0 \times 10^{-9}\ \text{C})(-900\ \text{J/C}) = -3.6 \times 10^{-6}\ \text{J}$$
$$U_b = qV_b = (4.0 \times 10^{-9}\ \text{C})(1930\ \text{J/C}) = 7.7 \times 10^{-6}\ \text{J}$$
$$U_c = qV_c = 0$$

Todos estos valores se obtienen al considerar U y V igual a cero en el infinito.

EVALUAR: Observe que el trabajo neto sobre la carga de 4.0 nC es *cero* si esta se desplaza del punto c al infinito *por cualquier trayectoria*. En particular, considere la trayectoria a lo largo de la bisectriz perpendicular de la línea que une las otras dos cargas q_1 y q_2 en la figura 23.13. Como se vio en el ejemplo 21.8 (sección 21.5), en los puntos situados sobre la bisectriz, la dirección de $\vec{E}$ es perpendicular a la misma. Por lo tanto, la fuerza sobre la carga de 4.0 nC es perpendicular a la trayectoria, y no se realiza ningún trabajo en cualquier desplazamiento a lo largo de ella.



Ejemplo 23.6 Cálculo del potencial por integración

Integrando el campo eléctrico como en la ecuación (23.17), calcule el potencial a una distancia r desde una carga puntual q.

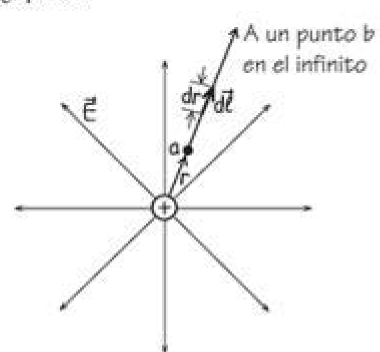
SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Ubicamos el punto a de la ecuación (23.17) a una distancia r y el punto b en el infinito (figura 23.14). Como de costumbre, hacemos que el potencial sea cero a una distancia infinita de la carga q.

EJECUTAR: Para resolver la integral, podemos elegir cualquier camino entre los puntos a y b. El más conveniente es una línea recta radial como se muestra en la figura 23.14, de manera que $d\vec{l}$ esté en la dirección radial y tenga magnitud dr. Al escribir $d\vec{l} = \hat{r}dr$, a partir de la ecuación (23.17) tenemos que

$$V - 0 = V = \int_r^\infty \vec{E} \cdot d\vec{l}$$
$$= \int_r^\infty \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2}\hat{r}\cdot\hat{r}dr = \int_r^\infty \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}dr$$
$$= -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}\Bigg|_r^\infty = 0 - \left(-\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}\right)$$
$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

23.14 Cálculo de la energía potencial por integración de $\vec{E}$ para una sola carga puntual.



EVALUAR: Este resultado concuerda con la ecuación (23.14) y es correcto para una carga q positiva o negativa.

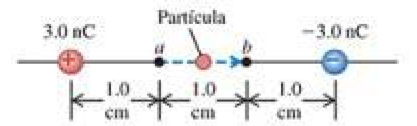
Ejemplo 23.7 Movimiento a través de una diferencia de potencial

En la figura 23.15, una partícula de polvo, cuya masa es $m = 5.0 \times 10^{-9}$ kg $= 5.0\ \mu$g y con carga $q_0 = 2.0$ nC, parte del reposo en un punto a y se mueve en línea recta hasta un punto b. ¿Cuál es su rapidez v en el punto b?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Sobre la partícula actúa solo la fuerza eléctrica conservativa, por lo que la energía mecánica se conserva: $K_a + U_a = K_b + U_b$. Las energías potenciales U se obtienen de los potenciales V correspondientes usando la ecuación (23.12): $U_a = q_0V_a$ y $U_b = q_0V_b$.

23.15 La partícula se mueve del punto a al punto b; su aceleración no es constante.



EJECUTAR: Tenemos que $K_a = 0$ y $K_b = \frac{1}{2}mv^2$. Al sustituir esto y las expresiones de U_a y U_b en la ecuación de conservación de la energía y despejar v, se encuentra que

$$0 + q_0V_a = \tfrac{1}{2}mv^2 + q_0V_b$$

$$v = \sqrt{\frac{2q_0(V_a - V_b)}{m}}$$

Se calculan los potenciales usando la ecuación (23.15), $V = q/4\pi\epsilon_0 r$:

$$V_a = (9.0 \times 10^9\ \text{N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2)\left(\frac{3.0 \times 10^{-9}\ \text{C}}{0.010\ \text{m}} + \frac{(-3.0 \times 10^{-9}\ \text{C})}{0.020\ \text{m}}\right)$$

$$= 1350\ \text{V}$$

$$V_b = (9.0 \times 10^9\ \text{N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2)\left(\frac{3.0 \times 10^{-9}\ \text{C}}{0.020\ \text{m}} + \frac{(-3.0 \times 10^{-9}\ \text{C})}{0.010\ \text{m}}\right)$$

$$= -1350\ \text{V}$$

$$V_a - V_b = (1350\ \text{V}) - (-1350\ \text{V}) = 2700\ \text{V}$$

Finalmente,

$$v = \sqrt{\frac{2(2.0 \times 10^{-9}\ \text{C})(2700\ \text{V})}{5.0 \times 10^{-9}\ \text{kg}}} = 46\ \text{m/s}$$

EVALUAR: El resultado es razonable: la carga de prueba positiva gana rapidez conforme se aleja de la carga positiva y se acerca a la carga negativa. Para comprobar la consistencia de las unidades en el último renglón del cálculo, se observa que $1\ \text{V} = 1\ \text{J/C}$, por lo que el numerador bajo el radical tiene unidades igual a J o $\text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}^2$.

Evalúe su comprensión de la sección 23.2 Si el *potencial* eléctrico en cierto punto es igual a cero, ¿el *campo* eléctrico en ese punto tiene que ser cero? (*Sugerencia:* Considere el punto *c* de los ejemplos 23.4 y 21.8). ❙

23.3 Cálculo del potencial eléctrico

Cuando se calcula el potencial debido a una distribución de carga, por lo general se sigue uno de dos caminos. Si se conoce la distribución de carga se emplea la ecuación (23.15) o la (23.16). O si se conoce el modo en que el campo eléctrico depende de la posición, se usa la ecuación (23.17) haciendo el potencial igual a cero en algún lugar conveniente. Algunos problemas requieren una combinación de estos enfoques.

Conforme se analicen los ejemplos, compárelos con aquellos relacionados con el cálculo del *campo* eléctrico en la sección 21.5. Verá que es mucho más fácil calcular potenciales eléctricos escalares que campos eléctricos vectoriales. El mensaje es claro: siempre que sea posible, resuelva los problemas utilizando el enfoque de energía (potencial eléctrico y energía potencial eléctrica) en lugar del enfoque de dinámica (campos eléctricos y fuerzas eléctricas).

Estrategia para resolver problemas 23.1 Cálculo del potencial eléctrico



IDENTIFICAR *los conceptos relevantes:* Recuerde que el potencial eléctrico es *energía potencial por unidad de carga*.

PLANTEAR *el problema* de acuerdo con los siguientes pasos:

1. Elabore un dibujo que muestre las ubicaciones y los valores de las cargas (que pueden ser puntuales o una distribución continua de carga), así como su elección de los ejes coordenados.
2. Indique en el dibujo la posición del punto en que se desea calcular el potencial eléctrico V. En ocasiones esta posición será arbitraria (por ejemplo, un punto a una distancia r del centro de una esfera con carga).

EJECUTAR *la solución* como sigue:

1. Para determinar el potencial debido a un conjunto de cargas puntuales, utilice la ecuación (23.15). Si se da una distribución continua de carga, hay que ver la manera de dividirla en elementos infinitesimales y luego emplear la ecuación (23.16). Realice la integración utilizando los límites adecuados que incluyan toda la distribución de carga.
2. Si se da el campo eléctrico, o si este se puede obtener con alguno de los métodos presentados en los capítulos 21 o 22, tal vez sea más fácil usar la ecuación (23.17) o (23.18) para calcular la diferencia de potencial entre los puntos *a* y *b*. Cuando sea pertinente, defina V igual a cero en algún lugar conveniente, y defina este como el punto *b*. (Para cargas puntuales, por lo general, este se ubicará en el infinito. Para otras distribuciones de carga, en especial aquellas que se extienden al infinito, quizá sea necesario que V_b sea igual a cero a cierta distancia finita de la distribución de carga). Entonces, el potencial en cualquier otro punto, digamos *a*, se obtiene con las ecuaciones (23.17) o (23.18) con $V_b = 0$.
3. Aun cuando el potencial V es una cantidad *escalar*, tal vez se tengan que usar las componentes de los vectores $\vec{E}$ y $d\vec{l}$ cuando se emplee la ecuación (23.17) o la (23.18) para calcular V.

EVALUAR *la respuesta:* Compruebe que la respuesta concuerde con la intuición. Si el resultado da V como una función de la posición, elabore la gráfica de esta función para ver si es razonable. Si se conoce el campo eléctrico, es posible hacer una comprobación aproximada del resultado de V verificando que V disminuye si nos movemos en la dirección de $\vec{E}$.



Ejemplo 23.8 Esfera conductora con carga

Una esfera conductora sólida de radio R tiene una carga total q. Obtenga el potencial eléctrico en todos los puntos, tanto fuera como dentro de la esfera.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: En el ejemplo 22.5 (sección 22.4) se empleó la ley de Gauss para determinar el *campo* eléctrico en todos los puntos para esta distribución de carga. El resultado se puede utilizar para determinar el potencial correspondiente.

EJECUTAR: Del ejemplo 22.5, el campo *afuera* de la esfera es el mismo que si la esfera se eliminara y se sustituyera por una carga puntual q. Se considera $V = 0$ en el infinito, como se hizo para una carga puntual. Por lo tanto, el potencial en un punto en el exterior de la esfera a una distancia r de su centro es el mismo que el potencial debido a una carga puntual q en el centro:

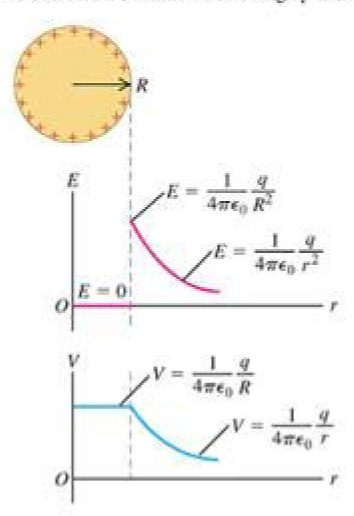
$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r}$$

El potencial en la superficie de la esfera es $V_{\text{superficie}} = q/4\pi\epsilon_0 R$.

En el *interior* de la esfera, $\vec{E}$ es igual a cero en todos los puntos. De esta forma, no se efectúa ningún trabajo sobre la carga de prueba que se mueve de un punto a otro dentro de la esfera. Esto significa que el potencial es el mismo en todos los puntos del interior de la esfera y es igual a su valor $q/4\pi\epsilon_0 R$ en la superficie.

EVALUAR: La figura 23.16 ilustra el campo y el potencial para una carga positiva q. En este caso, el campo eléctrico apunta radialmente alejándose de la esfera. Conforme nos alejamos de la esfera, en la dirección de $\vec{E}$, V disminuye (como debe ser).

23.16 Magnitud E del campo eléctrico y el potencial V en puntos dentro y fuera de una esfera conductora con carga positiva.



Ionización y descarga de una corona

Los resultados del ejemplo 23.8 tienen numerosas consecuencias prácticas; una de ellas se relaciona con el potencial máximo que puede aplicarse a un conductor en el aire. Este potencial está limitado, porque las moléculas de aire se *ionizan* y el aire se convierte en un conductor a una magnitud de campo eléctrico de aproximadamente 3×10^6 V/m. Por el momento, suponga que q es positiva. Cuando se comparan las expresiones del ejemplo 23.8 del potencial $V_{\text{superficie}}$ y la magnitud de campo $E_{\text{superficie}}$ en la superficie de una esfera conductora con carga, se observa que $V_{\text{superficie}} = E_{\text{superficie}}R$. Así, si E_m representa la magnitud de campo eléctrico a la que el aire se vuelve conductor (lo que se conoce como *resistencia dieléctrica* del aire), entonces el potencial máximo V_m que se puede aplicar a un conductor esférico es

$$V_m = RE_m$$

Para una esfera conductora de 1 cm de radio en el aire, $V_m = (10^{-2}\text{ m})(3 \times 10^6\text{ V/m}) = 30{,}000$ V. Ninguna cantidad de "carga" puede elevar el potencial de una esfera conductora de este tamaño en el aire más allá de 30,000 V, aproximadamente; si se intenta aumentar el potencial más allá de esto agregando carga adicional, se provocaría que el aire circundante se ionizara y se convirtiera en conductor, y la carga adicional escaparía al aire.

Para lograr potenciales aún mayores, las máquinas de alto voltaje como los generadores Van de Graaff usan terminales esféricas con radios muy grandes (véase la figura 22.26 y la fotografía que abre el capítulo 22). Por ejemplo, una terminal de radio R = 2 m tiene un potencial máximo $V_m = (2\text{ m})(3 \times 10^6\text{ V/M}) = 6 \times 10^6\text{ V} = 6$ MV.

El resultado del ejemplo 23.8 también explica lo que sucede con un conductor cargado de radio de curvatura muy *pequeño*, como un objeto afilado o un alambre fino. Como el potencial máximo es proporcional al radio, incluso potenciales relativamente pequeños aplicados a puntas agudas en el aire producen campos lo suficientemente ele-

vados justo afuera de las puntas para ionizar el aire circundante y convertirlo en un conductor. La corriente resultante y el resplandor asociado a ella (visible en un cuarto oscuro) se llama *corona*. Las impresoras láser y las máquinas de fotocopiado utilizan una corona de alambres muy finos para distribuir cargas sobre el tambor que forma las imágenes (véase la figura 21.2).

En situaciones en que es importante *evitar* que exista una corona, se usan conductores de radio grande. Ejemplo de esto es la esfera metálica en el extremo de las antenas de radio para automóviles, lo que evita la estática que provocaría la corona. Otro ejemplo es el extremo romo de los pararrayos metálicos (figura 23.17). Si hay un exceso de carga en la atmósfera, como ocurre durante las tormentas eléctricas, en el extremo romo se acumula una cantidad sustancial de carga del signo contrario. Como resultado, cuando la carga atmosférica se descarga a través de relámpagos, tiende a ser atraída hacia el pararrayos y no hacia otras estructuras cercanas que podrían resultar dañadas. (Un cable conductor que conecta el pararrayos con el suelo permite que la carga adquirida se disipe en forma inofensiva). Un pararrayos con extremo agudo permitiría que se acumulara menos carga y por ello sería menos eficaz.

23.17 El mástil metálico en la parte superior del edificio Empire State actúa como pararrayos. El edificio es azotado por relámpagos hasta 500 veces al año.

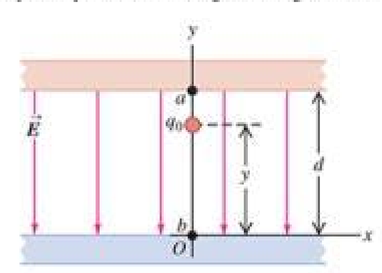


Ejemplo 23.9 Placas paralelas con cargas opuestas



Obtenga el potencial a cualquier altura y entre las dos placas paralelas con cargas opuestas que se estudiaron en la sección 23.1 (figura 23.18).

23.18 Las placas paralelas con carga de la figura 23.2.



SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Analizamos esta situación en la sección 23.1. Por la ecuación (23.5) sabemos que la *energía potencial* eléctrica U para una carga de prueba q_0 es $U = q_0Ey$. (Establecemos que $y = 0$ y $U = 0$ en la placa inferior). Se usa la ecuación (23.12), $U = q_0V$ para determinar el *potencial* eléctrico V en función de y.

EJECUTAR: El potencial $V(y)$ en la coordenada y es la energía potencial por unidad de carga:

$$V(y) = \frac{U(y)}{q_0} = \frac{q_0Ey}{q_0} = Ey$$

El potencial disminuye conforme nos movemos en la dirección de $\vec{E}$ de la placa superior a la inferior. En el punto a, donde $y = d$ y $V(y) = V_a$,

$$V_a - V_b = Ed \quad \text{y} \quad E = \frac{V_a - V_b}{d} = \frac{V_{ab}}{d}$$

donde V_{ab} es el potencial de la placa positiva con respecto a la placa negativa. Es decir, el campo eléctrico es igual a la diferencia de potencial entre las placas dividida entre la distancia que las separa. Para una diferencia de potencial dada V_{ab}, cuanto más pequeña sea la distancia d entre las dos placas, mayor será la magnitud de E del campo eléctrico. (Esta relación entre E y V_{ab} se cumple *solo* para la geometría plana descrita. *No* funciona en situaciones que implican cilindros o esferas concéntricos en los que el campo eléctrico no es uniforme).



EVALUAR: El resultado nos indica que $V = 0$ en la placa inferior (en $y = 0$). Esto es congruente con la elección de $U = q_0V = 0$ para una carga de prueba colocada en la placa inferior.

CUIDADO **El "potencial cero" es arbitrario** Quizá piense que si un cuerpo conductor tiene un potencial igual a cero, necesariamente debe tener también una carga neta de cero. ¡Pero no es así! Como ejemplo, la placa en $y = 0$ en la figura 23.18 tiene un potencial de cero ($V = 0$), pero tiene una carga por unidad de área, $-\sigma$, distinta de cero. No hay nada particularmente especial en el lugar donde el potencial es igual a cero; este lugar se puede *definir* donde se desee. **!**

Ejemplo 23.10 Una línea infinita con carga o un cilindro conductor con carga



Obtenga el potencial a la distancia r desde una línea muy larga de carga con densidad de carga lineal λ (carga por unidad de longitud).

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Tanto en el ejemplo 21.10 (sección 21.5) como en el 22.6 (sección 22.4), se determinó que el campo eléctrico a una distancia radial r de una línea recta y larga de carga (figura 23.19a) solo tiene una componente radial, dada por $E_r = \lambda/2\pi\epsilon_0 r$. Esta expresión se utiliza para obtener el potencial por integración de $\vec{E}$ como en la ecuación (23.17).

EJECUTAR: Como el campo solo tiene una componente radial, tenemos que $\vec{E} \cdot d\vec{l} = E_r\,dr$. Así, de acuerdo con la ecuación (23.17), el poten-

Continúa

cial de cualquier punto a con respecto a cualquier otro punto b, a distancias radiales r_a y r_b de la línea de carga, es

$$V_a - V_b = \int_a^b \vec{E}\cdot d\vec{l} = \int_a^b E_r\,dr = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\int_{r_a}^{r_b}\frac{dr}{r} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\ln\frac{r_b}{r_a}$$

Si se toma el punto b en el infinito y se establece que $V_b = 0$, se determina que V_a es *infinito* para cualquier distancia finita r_a a partir de la carga lineal: $V_a = (\lambda/2\pi\epsilon_0)\ln(\infty/r_a) = \infty$. ¡Esta *no* es una manera útil de definir V para este problema! La dificultad estriba en que la distribución de carga en sí se extiende al infinito.

Para sortear la dificultad, como se recomendó en la estrategia para resolver problemas 23.1, establecemos que $V_b = 0$ en el punto b a una distancia radial arbitraria pero *finita* r_0. Así, el potencial $V = V_a$ en el punto a a una distancia radial r está dado por $V - 0 = (\lambda/2\pi\epsilon_0)\ln(r_0/r)$, o bien,

$$V = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\ln\frac{r_0}{r}$$

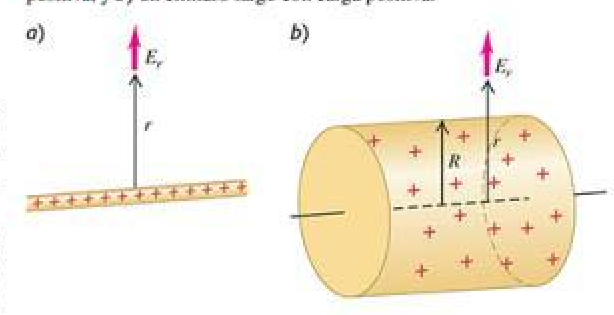
EVALUAR: De acuerdo con el resultado, si λ es positiva, entonces V disminuye conforme r aumenta. Es así como debería ser: V decrece conforme nos movemos en la dirección de $\vec{E}$.

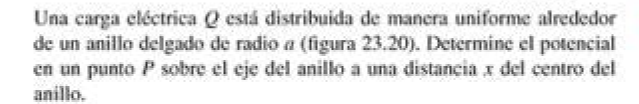
De acuerdo con el ejemplo 22.6, la expresión de E_r con la que se comenzó también se aplica afuera de un cilindro conductor largo con carga por unidad de longitud λ (figura 23.19*b*). De esta forma, nuestro resultado también da el potencial para ese cilindro, pero solo para valores de r (la distancia desde el eje del cilindro) mayores que o iguales al radio R del cilindro. Si se elige que r_0 sea el radio R del cilindro, de manera que $V = 0$ cuando $r = R$, entonces en cualquier punto para el que $r > R$,

$$V = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\ln\frac{R}{r}$$

En el interior del cilindro, $\vec{E} = \mathbf{0}$, y V tiene el mismo valor (cero) que en la superficie del cilindro.

23.19 Campo eléctrico afuera de *a*) un alambre largo con carga positiva, y *b*) un cilindro largo con carga positiva.





Ejemplo 23.11 Anillo con carga

Una carga eléctrica Q está distribuida de manera uniforme alrededor de un anillo delgado de radio a (figura 23.20). Determine el potencial en un punto P sobre el eje del anillo a una distancia x del centro del anillo.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Se divide el anillo en segmentos infinitesimales y se usa la ecuación (23.16) para obtener V. Todas las partes del anillo (es decir, todos los elementos de la distribución de carga) están a la misma distancia de P.

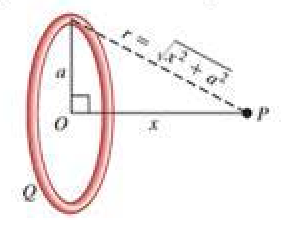
EJECUTAR: La figura 23.20 muestra que la distancia entre cada elemento de carga dq sobre el anillo y el punto P es $r = \sqrt{x^2 + a^2}$. Aquí se saca de la integral el factor $1/r$ de la ecuación (23.16), y

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{dq}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}\int dq = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{\sqrt{x^2+a^2}}$$

EVALUAR: Cuando x es mucho más grande que a, la expresión para V se vuelve aproximadamente igual a $V = Q/4\pi\epsilon_0 x$, que es el potencial de una carga puntual Q a una distancia x. A una distancia muy lejana del anillo con carga, su potencial eléctrico se asemeja al de una carga puntual. En el ejemplo 21.9 (sección 21.5) se llegó a una conclusión similar con respecto al *campo* eléctrico de un anillo.

Conocemos el campo eléctrico en todos los puntos a lo largo del eje x por el ejemplo 21.9 (sección 21.5), de modo que se puede calcular V a lo largo de este eje integrando $\vec{E}\cdot d\vec{l}$ como en la ecuación (23.17).

23.20 Toda la carga en un anillo con carga Q está a la misma distancia r de un punto P situado sobre el eje del anillo.



Ejemplo 23.12 Potencial de una línea de carga



Una carga eléctrica positiva Q está distribuida de manera uniforme a lo largo de una línea de longitud $2a$ que se encuentra a lo largo del eje y, entre $y = -a$ y $y = +a$ (figura 23.21). Determine el potencial eléctrico en el punto P sobre el eje x a una distancia x del origen.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Esta es la misma situación que la del ejemplo 21.10 (sección 21.5), donde se obtuvo una expresión para el

campo eléctrico $\vec{E}$ en un punto arbitrario del eje x. Se puede calcular V en el punto P integrando sobre la distribución de carga con la ecuación (23.16). A diferencia de la situación en el ejemplo 23.11, cada elemento de carga dQ se encuentra a una distancia *diferente* del punto P, por lo que la integración será un poco más complicada.

EJECUTAR: Igual que en el ejemplo 21.10, el elemento de carga dQ que corresponde a un elemento de longitud dy sobre la varilla es $dQ = (Q/2a)dy$. La distancia de dQ a P es $\sqrt{x^2 + y^2}$, y la contribución dV que el elemento de carga hace al potencial en P es

$$dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{2a}\frac{dy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

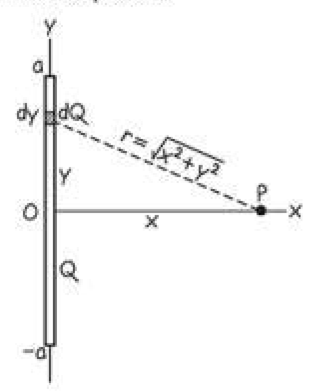
Para obtener el potencial en P debido a toda la varilla, se integra dV sobre la longitud de la varilla, de $y = -a$ a $y = a$:

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{2a}\int_{-a}^{a}\frac{dy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

La integral se puede consultar en una tabla. El resultado final es

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{2a}\ln\left(\frac{\sqrt{a^2 + x^2} + a}{\sqrt{a^2 + x^2} - a}\right)$$

23.21 Diagrama de este problema.



EVALUAR: El resultado se comprueba haciendo que x se aproxime al infinito. En este límite, el punto P está infinitamente lejos de toda la carga, por lo que es de esperar que V tienda a cero; se invita al lector a que verifique esto.

Conocemos el campo eléctrico en todos los puntos a lo largo del eje x por el ejemplo 21.10. Se invita al lector a usar esta información para obtener V a lo largo de este eje integrando $\vec{E}$ como en la ecuación (23.17).

Evalúe su comprensión de la sección 23.3 Si el *campo* eléctrico en cierto punto es igual a cero, ¿el *potencial* eléctrico en ese punto tiene que ser igual a cero? (*Sugerencia:* Considere el centro del anillo en los ejemplos 23.11 y 21.9). |

23.4 Superficies equipotenciales

Las líneas de campo (véase la sección 21.6) nos ayudan a visualizar los campos eléctricos. En forma similar, el potencial en varios puntos de un campo eléctrico puede representarse gráficamente por medio de *superficies equipotenciales*. Estas utilizan la misma idea fundamental que los mapas topográficos que emplean los excursionistas y alpinistas (figura 23.22). En un mapa topográfico, las curvas de nivel unen puntos que se encuentran a la misma altura. Se puede dibujar cualquier número de ellas, pero lo común es tener solo algunas curvas de nivel a intervalos de igual altura. Si una masa m se moviera sobre el terreno a lo largo de una curva de nivel, la energía potencial gravitacional mgy no cambiaría porque la altura y sería constante. Así, las curvas de nivel en un mapa topográfico en realidad son curvas de energía potencial gravitacional constante. Las curvas de nivel están muy cerca unas de otras en las regiones donde el terreno está muy inclinado y hay grandes cambios en la altura en una distancia horizontal pequeña; en cambio, las curvas de nivel están muy separadas en los sitios donde el terreno tiene poca pendiente. Una pelota que se suelta cuesta abajo experimentaría la mayor fuerza gravitacional ahí donde las curvas de nivel están muy cercanas entre sí.

Por analogía con las curvas de nivel en un mapa topográfico, una **superficie equipotencial** es una superficie tridimensional sobre la que el *potencial eléctrico* V es el mismo en todos los puntos. Si una carga de prueba q_0 se desplaza de un punto a otro sobre tal superficie, la energía potencial *eléctrica* q_0V permanece constante. En una región en la que existe un campo eléctrico, es posible construir una superficie equipotencial en cualquier punto. Los diagramas, por lo general, muestran solo algunas superficies equipotenciales representativas, a menudo con iguales diferencias de potencial entre superficies adyacentes. Ningún punto puede tener dos potenciales diferentes, por lo que las superficies equipotenciales de distintos potenciales nunca se tocan o intersecan.

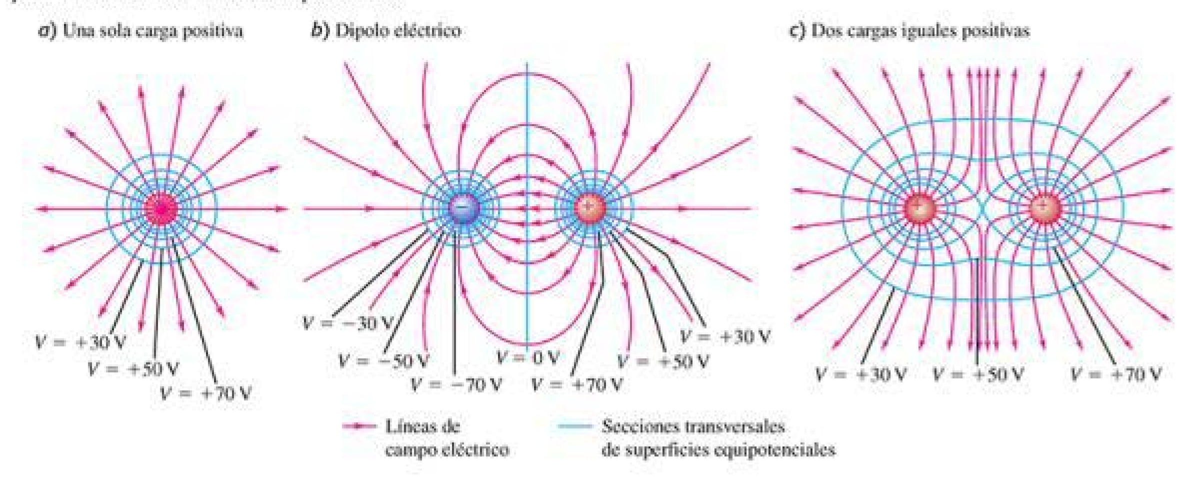
23.22 Las líneas de nivel en un mapa topográfico son curvas de altura constante, es decir, de energía potencial gravitacional constante.



Superficies equipotenciales y líneas de campo

Como la energía potencial no cambia a medida que una carga de prueba se mueve sobre una superficie equipotencial, el campo eléctrico no realiza trabajo sobre esa carga. De ello se deduce que $\vec{E}$ debe ser perpendicular a la superficie en cada punto, de manera que la fuerza eléctrica $q_0\vec{E}$ siempre es perpendicular al desplazamiento de una carga que se

23.23 Secciones transversales de superficies equipotenciales (líneas azules) y líneas de campo eléctricas (líneas rojas) para diferentes arreglos de cargas puntuales. Las diferencias de potencial son iguales entre superficies adyacentes. Compare estos diagramas con los de la figura 21.28, que solo muestran las líneas de campo eléctrico.



mueve sobre la superficie. **Las líneas de campo y las superficies equipotenciales siempre son perpendiculares entre sí.** En general, las líneas de campo son curvas, y las equipotenciales son superficies curvas. Para el caso especial de un campo *uniforme*, en el que las líneas de campo son rectas, paralelas y están igualmente espaciadas, las superficies equipotenciales son *planos* paralelos, perpendiculares a las líneas de campo.

La figura 23.23 muestra tres configuraciones de cargas. Las líneas de campo en el plano de las cargas están representadas por líneas rojas, y las intersecciones de las superficies equipotenciales con este plano (es decir, las secciones transversales de estas superficies) se indican con líneas azules. Las superficies equipotenciales reales son tridimensionales. En cada cruce de una línea equipotencial con una línea de campo, las dos son perpendiculares.

En la figura 23.23 aparecen dibujadas superficies equipotenciales de manera que las diferencias de potencial entre superficies adyacentes sean iguales. En las regiones donde la magnitud de $\vec{E}$ es grande, las superficies equipotenciales están cercanas entre sí porque el campo efectúa una cantidad relativamente grande de trabajo sobre una carga de prueba en un desplazamiento pequeño. Este es el caso cerca de la carga puntual en la figura 23.23*a* o entre las dos cargas puntuales en la figura 23.23*b*; observe que en estas regiones las líneas de campo también están más próximas. Esto tiene una analogía directa con la fuerza de la gravedad cuesta abajo, que es mayor en las regiones de un mapa topográfico donde las curvas de nivel están más cerca una de otra. A la inversa, en las zonas donde el campo es más débil, las superficies equipotenciales están más separadas; esto ocurre en radios mayores en la figura 23.23*a*, a la izquierda de la carga negativa o a la derecha de la positiva en la figura 23.23*b*, y a distancias mayores de ambas cargas en la figura 23.23*c*. (Tal vez parezca que dos superficies equipotenciales se intersecan en el centro de la figura 23.23*c*, violando la regla de que esto nunca puede suceder. De hecho, se trata de una sola superficie equipotencial en forma de “8”).

CUIDADO ***E*** **no necesariamente es constante en una superficie equipotencial** En una superficie equipotencial dada, el potencial V tiene el mismo valor en todos los puntos. Sin embargo, en general, la magnitud E del campo eléctrico *no* es la misma en todos los puntos de una superficie equipotencial. Por ejemplo, en la superficie equipotencial con la leyenda “$V = -30$ V” en la figura 23.23*b*, la magnitud E es menor a la izquierda de la carga negativa de lo que es entre las dos cargas. En la superficie equipotencial con forma de “8” en la figura 23.23*c*, $E = 0$ en el punto medio entre las dos cargas; en todos los demás puntos de esta superficie, E es distinta de cero.

Equipotenciales y conductores

El siguiente es un enunciado importante acerca de las superficies equipotenciales: **Cuando todas las cargas están en reposo, la superficie de un conductor siempre**

es una superficie equipotencial. Como el campo eléctrico $\vec{E}$ siempre es perpendicular a una superficie equipotencial, el enunciado se puede demostrar si se prueba que **cuando todas las cargas están en reposo, el campo eléctrico justo afuera de un conductor debe ser perpendicular a la superficie en cada punto** (figura 23.24). Se sabe que $\vec{E} = \mathbf{0}$ en todos los lugares del interior del conductor; de otro modo, las cargas se moverían. En particular, en cualquier punto apenas dentro de la superficie, la componente de $\vec{E}$ tangente a la superficie es cero. Se deduce que la componente tangencial de $\vec{E}$ también es igual a cero inmediatamente *afuera* de la superficie. Si no fuera así, una carga podría recorrer una trayectoria rectangular parcialmente adentro y parcialmente afuera (figura 23.25) y volvería a su punto de partida con una cantidad neta de trabajo realizado sobre ella. Esto violaría la naturaleza conservativa de los campos electrostáticos, por lo que la componente tangencial de $\vec{E}$ justo afuera de la superficie debe ser igual a cero en todos los puntos de la superficie. Así, $\vec{E}$ es perpendicular a la superficie en todos los puntos, lo que prueba el enunciado.

También se deduce que **cuando todas las cargas están en reposo, el volumen completo de un conductor sólido tiene el mismo potencial.** La ecuación (23.17) establece que la diferencia de potencial entre dos puntos a y b dentro del volumen de un conductor sólido, $V_a - V_b$, es igual a la integral de línea $\int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l}$ del campo eléctrico de a a b. Como $\vec{E} = \mathbf{0}$ en todos los lugares del interior del conductor, la integral garantiza un valor de cero para dos puntos a y b cualesquiera. De modo que el potencial es el mismo para dos puntos cualesquiera dentro del volumen del conductor. Esto se describe diciendo que el volumen del conductor es un *volumen equipotencial*.

Por último, ahora se puede demostrar el teorema que se citó sin la prueba correspondiente en la sección 22.5. El teorema es el siguiente: en una situación electrostática, si un conductor tiene una cavidad en cuyo interior no hay carga, entonces no puede haber carga neta *en ningún lugar* de la superficie de la cavidad. Esto significa que si usted está dentro de una caja conductora con carga, puede tocar con seguridad cualquier punto de las paredes interiores de la caja sin sufrir una descarga. Para probar este teorema, primero se demuestra que *todos los puntos en la cavidad tienen el mismo potencial*. En la figura 23.26, la superficie conductora A de la cavidad es una superficie equipotencial, como se acaba de demostrar. Suponga que el punto P en la cavidad tuviera un potencial diferente; entonces se podría construir una superficie equipotencial B diferente que incluyera el punto P.

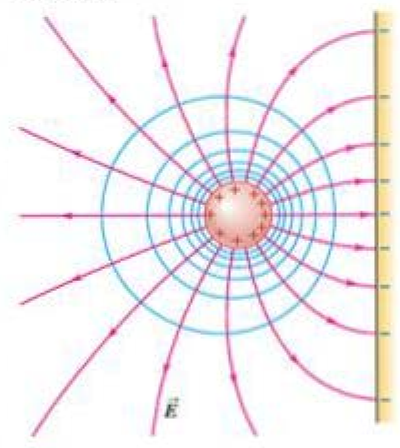
Ahora considere una superficie gaussiana, como se ilustra en la figura 23.26, entre las dos superficies equipotenciales. Por la relación entre $\vec{E}$ y las superficies equipotenciales, se sabe que el campo en cada punto entre las equipotenciales se dirige de A hacia B, o bien, en todos los puntos se dirige de B hacia A, dependiendo de cuál superficie equipotencial tenga un potencial mayor. En cualquier caso, es evidente que el flujo a través de esta superficie gaussiana es diferente de cero. Pero la ley de Gauss afirma que la carga encerrada por la superficie gaussiana no puede ser cero. Esto contradice nuestra suposición inicial de que en la cavidad *no* hay carga. Por lo tanto, el potencial en P *no puede* ser diferente del que hay en la pared de la cavidad.

Entonces, toda la región de la cavidad debe estar al mismo potencial. Pero para que esto sea verdadero, *el campo eléctrico dentro de la cavidad debe ser igual a cero en cualquier sitio*. Por último, la ley de Gauss demuestra que el campo eléctrico en cualquier punto sobre la superficie de un conductor es proporcional a la densidad de carga superficial σ en ese punto. Se concluye que *la densidad de carga superficial sobre la pared de la cavidad es igual a cero en todos los puntos*. Esta cadena de razonamientos parece tortuosa, pero su estudio cuidadoso resultará de gran utilidad.

CUIDADO **Superficies equipotenciales contra superficies gaussianas** No hay que confundir las superficies equipotenciales con las superficies gaussianas que se estudiaron en el capítulo 22, pues estas últimas son relevantes solo cuando se utiliza la ley de Gauss y se elige *cualquier* superficie gaussiana que sea conveniente. *No* tenemos libertad de elegir la forma de las superficies equipotenciales; la forma está determinada por la distribución de la carga.

Evalúe su comprensión de la sección 23.4 ¿Cambiarían las formas de las superficies equipotenciales en la figura 23.23, si se invirtiera el signo de cada carga?

23.24 Cuando las cargas están en reposo, una superficie conductora siempre es una superficie equipotencial. Las líneas de campo son perpendiculares a una superficie conductora.

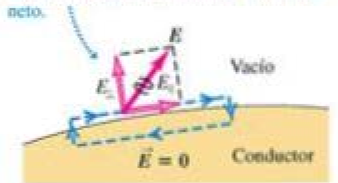


— Secciones transversales de las superficies equipotenciales

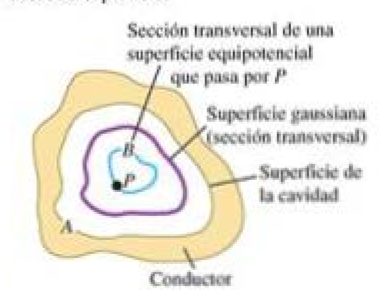
— Líneas de campo eléctrico

23.25 En todos los puntos de la superficie de un conductor, el campo eléctrico debe ser perpendicular a la superficie. Si $\vec{E}$ tuviera una componente tangencial, se realizaría una cantidad neta de trabajo sobre una carga de prueba al moverla en una trayectoria como la que se ilustra, lo que es imposible porque la fuerza eléctrica es conservativa.

Un campo eléctrico imposible
Si el campo eléctrico inmediatamente afuera de un conductor tuviera una componente tangencial $E_{\parallel}$, una carga podría moverse en un circuito cerrado realizando un trabajo neto.



23.26 Cavidad en un conductor. Si la cavidad no contiene carga, todos los puntos de tal cavidad están al mismo potencial, el campo eléctrico es igual a cero en cualquier lugar de ella, y no hay carga en ningún lugar sobre su superficie.





ActivPhysics 11.12.3: Electrical Potential, Field, and Force

23.5 Gradiente de potencial

El campo eléctrico y el potencial se relacionan estrechamente. La ecuación (23.17), que se replantea a continuación, expresa un aspecto de esa relación:

$$V_a - V_b = \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

Si se conoce $\vec{E}$ en varios puntos, esta ecuación se puede utilizar para calcular las diferencias de potencial. En esta sección se muestra cómo hacer lo contrario: si se conoce el potencial V en varios puntos, es posible determinar $\vec{E}$. Considerando que V es función de las coordenadas (x, y, z) de un punto en el espacio, se demostrará que las componentes de $\vec{E}$ se relacionan directamente con las *derivadas parciales* de V con respecto a x, y y z.

En la ecuación (23.17), $V_a - V_b$ es el potencial de a con respecto a b, es decir, el cambio de potencial encontrado en un desplazamiento de b a a. Esto se escribe como

$$V_a - V_b = \int_b^a dV = -\int_a^b dV$$

donde dV es el cambio infinitesimal del potencial que acompaña a un elemento infinitesimal $d\vec{l}$ de la trayectoria de b a a. Al compararla con la ecuación (23.17), se tiene

$$-\int_a^b dV = \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

Estas dos integrales deben ser iguales para *cualquier* par de límites a y b, y para que esto se cumpla los *integrandos* deben ser iguales. Por lo tanto, para *cualquier* desplazamiento infinitesimal $d\vec{l}$,

$$-dV = \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

Para interpretar esta expresión, se escribe $\vec{E}$ y $d\vec{l}$ en términos de sus componentes: $\vec{E} = \hat{\imath} E_x + \hat{\jmath} E_y + \hat{k} E_z$ y $d\vec{l} = \hat{\imath}\, dx + \hat{\jmath}\, dy + \hat{k}\, dz$. Así, se tiene que

$$-dV = E_x dx + E_y dy + E_z dz$$

Suponga que el desplazamiento es paralelo al eje x, por lo que $dy = dz = 0$. Entonces, $-dV = E_x dx$ o $E_x = -(dV/dx)_{y,z\ \text{constantes}}$, donde el subíndice nos recuerda que en la derivada solo varía x; recuerde que V, en general, es una función de x, y y z. Pero esto es exactamente lo que significa la derivada parcial $\partial V/\partial x$. Las componentes y y z de $\vec{E}$ se relacionan con las derivadas correspondientes de V en la misma forma, por lo que se tiene

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} \qquad E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} \qquad E_z = -\frac{\partial V}{\partial z} \qquad \text{(componentes de } \vec{E} \text{ en términos de } V\text{)} \qquad (23.19)$$

Esto es congruente con las unidades de campo eléctrico, V/m. En términos de vectores unitarios, $\vec{E}$ se escribe como

$$\vec{E} = -\left(\hat{\imath}\frac{\partial V}{\partial x} + \hat{\jmath}\frac{\partial V}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial V}{\partial z}\right) \qquad (\vec{E} \text{ en términos de } V) \qquad (23.20)$$

En notación vectorial, la siguiente operación se llama **gradiente** de la función f:

$$\vec{\nabla} f = \left(\hat{\imath}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{\jmath}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}\right) f \qquad (23.21)$$

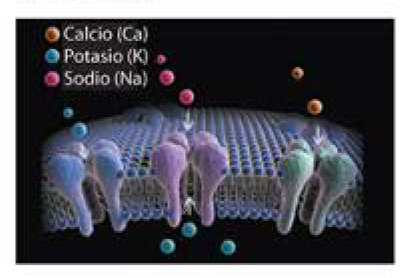
El operador denotado por el símbolo $\vec{\nabla}$ se llama "grad" o "del". Así, en notación vectorial,

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V \qquad (23.22)$$

Esto se lee como: "$\vec{E}$ es el negativo del gradiente de V" o "$\vec{E}$ es igual al grad negativo de V". La cantidad $\vec{\nabla} V$ se llama *gradiente de potencial*.

Aplicación Gradiente de potencial a través de la membrana celular

El interior de una célula humana tiene un potencial eléctrico V más bajo que el que hay en el exterior. (La diferencia de potencial cuando la célula está inactiva es aproximadamente de −70 mV en el caso de las neuronas, y de aproximadamente −95 mV en las células de los sistemas muscular y óseo). Por lo tanto, hay un gradiente de potencial $\vec{\nabla} V$ que apunta del *interior* al *exterior* de la membrana celular, y un campo eléctrico $\vec{E} = -\vec{\nabla} V$ que apunta del *exterior* al *interior*. Este campo afecta el flujo hacia adentro o hacia afuera de la célula a través de canales especiales en la membrana.



En cada punto, el gradiente de potencial apunta en la dirección en que V se *incrementa* con más rapidez con un cambio de posición. De modo que, en cada punto, la dirección de $\vec{E}$ es la dirección en que V *disminuye* más rápido y siempre es perpendicular a la superficie equipotencial que pasa a través del punto. Esto concuerda con nuestra observación en la sección 23.2, acerca de que desplazarse en dirección del campo eléctrico significa desplazarse en dirección decreciente del potencial.

La ecuación (23.22) no depende de la elección particular del punto cero para V. Si se cambiara el punto cero, el efecto sería cambiar V en cada punto en la misma cantidad; las derivadas de V serían las mismas.

Si $\vec{E}$ es radial con respecto a un punto o un eje, y r es la distancia a partir del punto o eje, la relación correspondiente a las ecuaciones (23.19) es

$$E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} \qquad \text{(campo eléctrico radial)} \qquad (23.23)$$

A menudo se puede calcular el campo eléctrico generado por una distribución de carga en cualquiera de dos formas: directamente, con la suma de los campos $\vec{E}$ de cargas puntuales, o primero calculando el potencial y luego obteniendo su gradiente para determinar el campo. Generalmente el segundo método resulta más fácil porque el potencial es una cantidad *escalar* que requiere, cuando mucho, la integración de una función escalar. El campo eléctrico es una cantidad *vectorial* y requiere el cálculo de componentes para cada elemento de carga y la integración por separado de cada componente. Así, muy independiente de su significado fundamental, el potencial ofrece una técnica de cálculo muy útil en los cálculos del campo. A continuación se presentan dos ejemplos en los que se aprovecha el conocimiento de V para determinar el campo eléctrico.

Conviene recalcar una vez más que si se conoce $\vec{E}$ como función de la posición, se puede calcular V utilizando la ecuación (23.17) o la (23.18), y si se conoce V como función de la posición, se calcula $\vec{E}$ con las ecuaciones (23.19), (23.20) o (23.23). La obtención de V a partir de $\vec{E}$ requiere integración, y la obtención de $\vec{E}$ a partir de V requiere diferenciación.



Ejemplo 23.13 Potencial y campo de una carga puntual

De acuerdo con la ecuación (23.14), el potencial a una distancia radial r de una carga puntual q es $V = q/4\pi\epsilon_0 r$. Obtenga el campo eléctrico vectorial a partir de esta expresión de V.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Este problema utiliza la relación general entre el potencial eléctrico en función de la posición y el vector campo eléctrico. Por simetría, el campo eléctrico solo tiene una componente radial E_r, y para encontrarla se usa la ecuación (23.23).

EJECUTAR: De acuerdo con la ecuación (23.23),

$$E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} = -\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r}\right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2}$$

Por lo tanto, el campo eléctrico vectorial es

$$\vec{E} = \hat{r}E_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2}\hat{r}$$

EVALUAR: El resultado concuerda con la ecuación (21.7), como debe ser.

Un enfoque alternativo es ignorar la simetría radial, escribir la distancia radial como $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, y tomar las derivadas de V con respecto a x, y y z como en la ecuación (23.20). Se obtiene

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{qx}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$

$$= -\frac{qx}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$

y de manera similar,

$$\frac{\partial V}{\partial y} = -\frac{qy}{4\pi\epsilon_0 r^3} \qquad \frac{\partial V}{\partial z} = -\frac{qz}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$

De acuerdo con la ecuación (23.20),

$$\vec{E} = -\left[\hat{\imath}\left(-\frac{qx}{4\pi\epsilon_0 r^3}\right) + \hat{\jmath}\left(-\frac{qy}{4\pi\epsilon_0 r^3}\right) + \hat{k}\left(-\frac{qz}{4\pi\epsilon_0 r^3}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2}\left(\frac{x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k}}{r}\right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2}\hat{r}$$

Este enfoque produce la misma respuesta, pero con un poco más de esfuerzo. Como resulta evidente, es mejor aprovechar la simetría de la distribución de carga siempre que sea posible.



Ejemplo 23.14 Potencial y campo de un anillo con carga

En el ejemplo 23.11 (sección 23.3) se determinó que para un anillo cargado de radio a y carga total Q, el potencial en el punto P sobre el eje de simetría del anillo a una distancia x del centro es

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{\sqrt{x^2 + a^2}}$$

Calcule el campo eléctrico en P.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: La figura 23.20 ilustra la situación. Se da V en función de x a lo largo del eje x, y se desea obtener el campo eléctrico en un punto sobre este eje. Por simetría de la distribución de carga, el campo eléctrico a lo largo del eje de simetría del anillo (x) solo tiene una componente x, la cual se calcula con la primera de las ecuaciones (23.19).

EJECUTAR: La componente x del campo eléctrico es

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Qx}{(x^2 + a^2)^{3/2}}$$

EVALUAR: Esto concuerda con el resultado del ejemplo 21.9.

CUIDADO **No use expresiones donde no se aplican** En este ejemplo, V no es una función de y o z sobre el eje del anillo, de modo que $\partial V/\partial y = \partial V/\partial z = 0$ y $E_y = E_z = 0$. Pero eso no significa que sea verdad *en cualquier lugar*; las expresiones de V y E_x son válidas *solo sobre el eje del anillo*. Si se tuviera la expresión de V válida en *todos* los puntos del espacio, entonces se podría usar para encontrar las componentes de $\vec{E}$ en cualquier punto utilizando las ecuaciones (23.19).

Evalúe su comprensión de la sección 23.5 En cierta región del espacio, el potencial está dado por $V = A + Bx + Cy^3 + Dxy$, donde A, B, C y D son constantes positivas. ¿Cuál de estos enunciados sobre el campo eléctrico $\vec{E}$ en esta región del espacio es correcto? (Puede haber más de una respuesta correcta). **i.** Aumentar el valor de A incrementará el valor de $\vec{E}$ en todos los puntos; **ii.** aumentar el valor de A disminuirá el valor de $\vec{E}$ en todos los puntos; **iii.** $\vec{E}$ no tiene componente z; **iv.** el campo eléctrico es igual a cero en el origen ($x = 0$, $y = 0$, $z = 0$).





Energía potencial eléctrica: La fuerza eléctrica generada por cualquier conjunto de cargas en reposo es una fuerza conservativa. El trabajo W realizado por una fuerza eléctrica sobre una partícula con carga que se mueve en un campo eléctrico se representa por el cambio en la función U de energía potencial.

La energía potencial eléctrica de dos cargas puntuales q y q_0 depende de su separación r. La energía potencial eléctrica de una carga q_0 en presencia de un conjunto de cargas q_1, q_2, q_3 depende de la distancia de q_0 a cada una de las demás cargas. (Véase los ejemplos 23.1 y 23.2).

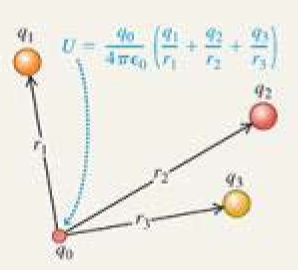
$$W_{a\to b} = U_a - U_b \quad (23.2)$$

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{qq_0}{r} \quad (23.9)$$

(dos cargas puntuales)

$$U = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{q_1}{r_1} + \frac{q_2}{r_2} + \frac{q_3}{r_3} + \cdots\right) = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0}\sum_i \frac{q_i}{r_i} \quad (23.10)$$

(q_0 en presencia de otras cargas puntuales)



Potencial eléctrico: El potencial, denotado por V, es la energía potencial por unidad de carga. La diferencia de potencial entre dos puntos es igual a la cantidad de trabajo que se requeriría para trasladar una unidad de carga de prueba positiva entre esos puntos. El potencial V debido a una cantidad de carga se calcula mediante una suma (si la carga es un conjunto de cargas puntuales) o mediante integración (si la carga es una distribución). (Véase los ejemplos 23.3, 23.4, 23.5, 23.7, 23.11 y 23.12).

La diferencia de potencial entre dos puntos a y b, también llamada potencial de a con respecto a b, está dada por la integral de línea de $\vec{E}$. El potencial en un punto dado se encuentra obteniendo primero $\vec{E}$ y después resolviendo la integral. (Véase los ejemplos 23.6, 23.8, 23.9 y 23.10).

$$V = \frac{U}{q_0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r} \quad (23.14)$$

(debido a una carga puntual)

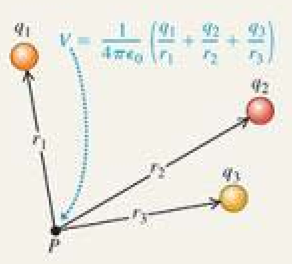
$$V = \frac{U}{q_0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_i \frac{q_i}{r_i} \quad (23.15)$$

(debido a un conjunto de cargas puntuales)

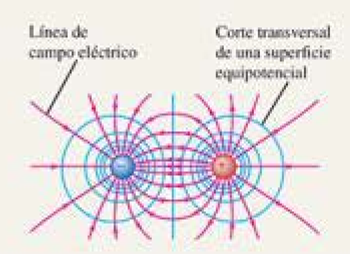
$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{dq}{r} \quad (23.16)$$

(debido a una distribución de carga)

$$V_a - V_b = \int_a^b \vec{E}\cdot d\vec{l} = \int_a^b E\cos\phi\, dl \quad (23.17)$$



Superficies equipotenciales: Una superficie equipotencial es aquella en la que el potencial tiene el mismo valor en cada punto. En el punto en que una línea de campo cruza una superficie equipotencial, ambas son perpendiculares. Cuando todas las cargas están en reposo, la superficie de un conductor siempre es una superficie equipotencial y todos los puntos en el interior del conductor están al mismo potencial. Cuando una cavidad dentro de un conductor no contiene carga, toda la cavidad es una región equipotencial y no hay carga superficial en ninguna parte de la superficie de la cavidad.



Cálculo del campo eléctrico a partir del potencial eléctrico: Si se conoce el potencial V en función de las coordenadas x, y y z, las componentes del campo eléctrico $\vec{E}$ en cualquier punto están dadas por las derivadas parciales de V. (Véase los ejemplos 23.13 y 23.14).

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} \quad E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} \quad E_z = -\frac{\partial V}{\partial z} \quad (23.19)$$

$$\vec{E} = -\left(\hat{\imath}\frac{\partial V}{\partial x} + \hat{\jmath}\frac{\partial V}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial V}{\partial z}\right) \quad (23.20)$$

(forma vectorial)



PROBLEMA PRÁCTICO Una carga puntual y una línea de carga

Una carga eléctrica positiva Q está distribuida de manera uniforme a lo largo de una varilla delgada de longitud $2a$. La varilla se encuentra a lo largo del eje x entre $x = -a$ y $x = +a$. Calcule la cantidad de trabajo que se debe realizar para traer una carga puntual positiva q del infinito al punto $x = +L$ sobre el eje x donde $L > a$.

GUÍA DE SOLUCIÓN

Véase el área de estudio MasteringPhysics® para consultar una solución con Video Tutor.

IDENTIFICAR y PLANTEAR

1. En este problema se debe calcular primero el potencial V en $x = +L$ debido a la varilla con carga. Luego se calcula el cambio en la energía potencial necesaria para traer la carga puntual q del infinito (donde $V = 0$), a $x = +L$.
2. Para calcular V se divide la varilla en segmentos infinitesimales de longitud dx'. ¿Cuánta carga existe sobre uno de estos segmentos? Considere un segmento ubicado en $x = x'$, donde $-a \le x' \le a$. ¿Cuál es el potencial dV en $x = +L$ debido a este segmento?
3. El potencial total en $x = +L$ es la integral de dV, que incluye las contribuciones de todos los segmentos para x' de $-a$ a $+a$. Defina esta integral.

EJECUTAR

4. Integre la expresión del paso 3 para obtener el potencial V en $x = +L$. Una sustitución normal sencilla hará la tarea; use una tabla de integrales solo como último recurso.
5. Utilice el resultado del paso 4 para obtener la energía potencial para una carga puntual q colocada en $x = +L$.
6. Use el resultado del paso 5 con la finalidad de obtener el trabajo que se debe realizar para traer la carga puntual del infinito a $x = +L$.

EVALUAR

7. ¿Cómo cambia el resultado del paso 5 en el límite cuando $a \to 0$? ¿Esto es razonable?
8. Suponga que la carga puntual q fuera negativa en lugar de positiva. ¿Cómo afectaría esto al resultado del paso 4? ¿Y el del paso 5?

Problemas

Para tareas asignadas por el profesor, visite www.masteringphysics.com



•, ••, •••: Problemas de dificultad creciente. **PA**: Problemas acumulativos que incorporan material de capítulos anteriores. **CALC**: Problemas que requieren cálculo. **BIO**: Problemas de ciencias biológicas.

PREGUNTAS PARA ANÁLISIS

P23.1 Un estudiante dijo: "Como el potencial eléctrico siempre es proporcional a la energía potencial, ¿por qué molestarse con el concepto de potencial?". ¿Qué respondería usted?

P23.2 El potencial (en relación con un punto en el infinito) a media distancia entre dos cargas de igual magnitud y signo opuesto es igual a cero. ¿Es posible traer una carga de prueba del infinito a ese punto medio en forma tal que no se efectúe trabajo en ninguna parte del desplazamiento? Si es así, describa cómo se puede lograr. Si no es posible, explique por qué.

P23.3 ¿Es posible tener una configuración de dos cargas puntuales separadas por una distancia finita de manera que la energía potencial eléctrica del arreglo sea la misma que la de las dos cargas separadas por una distancia infinita? ¿Por qué? ¿Qué pasaría si hubiera tres cargas? Explique su razonamiento.

P23.4 Como el potencial puede tener cualquier valor que se desee dependiendo de la elección del nivel de referencia de potencial cero, ¿cómo "sabe" un voltímetro qué lectura hacer cuando se conecta entre dos puntos?

P23.5 Si $\vec{E}$ es igual a cero en cualquier lugar a lo largo de cierta trayectoria que vaya del punto A al B, ¿cuál es la diferencia de potencial entre esos dos puntos? ¿Significa esto que $\vec{E}$ es igual a cero en todos los puntos a lo largo de *cualquier* trayectoria de A a B? Explique su respuesta.

P23.6 Si $\vec{E}$ es igual a cero a través de cierta región del espacio, ¿el potencial también es necesariamente igual a cero en esa región? ¿Por qué? Si no es así, ¿qué *puede* decirse acerca del potencial?

P23.7 Si se resuelve la integral del campo eléctrico $\int \vec{E} \cdot d\vec{l}$ para una trayectoria *cerrada* como la que se aprecia en la figura P23.7, la integral *siempre* será igual a cero, independientemente de la forma de la trayectoria y de dónde se localicen las cargas en relación con esta. Explique por qué es así.

Figura **P23.7**

P23.8 La diferencia de potencial entre dos terminales de una batería AA (de las que se usan en las linternas y los estéreos portátiles) es de 1.5 V. Si se colocan dos baterías AA extremo con extremo, con la terminal positiva de una batería en contacto con la terminal negativa de la otra, ¿cuál es la diferencia de potencial entre las terminales en los extremos expuestos de la combinación? ¿Qué pasa si las dos terminales positivas se tocan entre sí? Explique su razonamiento.

P23.9 Es fácil producir una diferencia de potencial de varios miles de volts entre el cuerpo de una persona y el piso, frotando los zapatos sobre una alfombra de nailon. Cuando usted toca una perilla metálica, recibe una descarga moderada. Sin embargo, es probable que el contacto con una línea eléctrica de voltaje comparable sea mortal. ¿A qué se debe la diferencia?

P23.10 Si se conoce el potencial eléctrico en un solo punto, ¿se puede determinar $\vec{E}$ en ese punto? Si es así, ¿cómo? Si no es posible, ¿por qué?

P23.11 Como las líneas de campo eléctrico y las superficies equipotenciales siempre son perpendiculares, dos superficies equipotenciales nunca se cruzan; si lo hicieran, la dirección de $\vec{E}$ sería ambigua en los puntos de intersección. Pero dos superficies equipotenciales parecen cruzarse en el centro de la figura 23.23*c*. Explique por qué no hay ambigüedad acerca de la dirección de $\vec{E}$ en este caso particular.

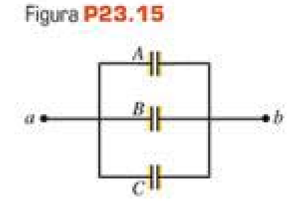
P23.12 Un campo eléctrico uniforme está dirigido hacia el este. El punto B está a 2.00 m al oeste del punto A, el punto C está a 2.00 m al este del punto A, y el punto D se localiza a 2.00 m al sur de A. En cada punto, B, C y D, ¿el potencial es mayor, menor o igual al del punto A? Exponga el razonamiento que sustenta sus respuestas.

P23.13 Es frecuente que se diga que si un punto A tiene un potencial más elevado que un punto B, entonces A tiene un potencial positivo y B un potencial negativo. ¿Se concluye por fuerza que un punto con potencial positivo está cargado positivamente, o que un punto con potencial negativo está cargado negativamente? Ilustre sus respuestas con ejemplos claros y sencillos.

P23.14 Una esfera conductora va a cargarse trayendo hacia ella poco a poco una carga positiva hasta que la carga total sea Q. Se afirma que el trabajo total que se requiere para tal efecto es proporcional a Q^2. ¿Esto es correcto? ¿Por qué?

P23.15 Tres pares de placas metálicas paralelas (A, B y C) están conectadas como se ilustra en la figura P23.15, y una batería mantiene un potencial de 1.5 V a través de ab. ¿Qué se puede decir acerca de la diferencia de potencial a través de cada par de placas? ¿Por qué?

Figura **P23.15**



P23.16 Se coloca una esfera conductora entre dos placas paralelas con carga como las que se ilustran en la figura 23.2. ¿El campo eléctrico dentro de la esfera depende precisamente de dónde se coloque la esfera entre las placas? ¿Qué pasa con el potencial eléctrico dentro de la esfera? ¿Las respuestas a estas preguntas dependen de si en la esfera hay o no una carga neta? Explique su razonamiento.

P23.17 Un conductor con una carga neta Q tiene una cavidad hueca y vacía en su interior. ¿El potencial varía de un punto a otro dentro del material del conductor? ¿Qué sucede dentro de la cavidad? ¿Cómo se compara el potencial en el interior de la cavidad con el potencial dentro del material del conductor?

P23.18 Una línea de cd de alto voltaje cae sobre un automóvil, por lo que toda la carrocería metálica del vehículo está a un potencial de 10,000 V con respecto al suelo. ¿Qué pasa a los ocupantes: *a*) cuando están sentados en el interior del automóvil, y *b*) cuando salen de este? Explique su razonamiento.

P23.19 Cuando se acerca una tormenta eléctrica, los marineros en altamar en ocasiones observan un fenómeno llamado "fuego de San Elmo", que consiste en un resplandor azuloso en las puntas de los mástiles. ¿Qué es lo que lo causa? ¿Por qué ocurre en los extremos de los mástiles? ¿Por qué es más pronunciado el efecto cuando los mástiles se encuentran húmedos? (*Sugerencia:* Considere que el agua de mar es un buen conductor de la electricidad).

P23.20 Una carga puntual positiva se coloca cerca de un plano conductor muy grande. Un profesor de física asevera que el campo creado por esta configuración es el mismo que el que se obtendría si se retirara el plano y se colocara una carga puntual negativa de igual magnitud en la posición equivalente a una imagen de espejo detrás de la posición inicial del plano. ¿Es correcto esto? ¿Por qué? (*Sugerencia:* Estudie la figura 23.23*b*).

P23.21 En electrónica se acostumbra definir el potencial del suelo igual a cero (piense en la Tierra como en un conductor muy grande). ¿Esto es congruente con el hecho de que la Tierra tiene una carga eléctrica neta diferente de cero? (Consulte el ejercicio 21.32).

EJERCICIOS

Sección 23.1 Energía potencial eléctrica

23.1 •• Una carga puntual $q_1 = +2.40\ \mu C$ se mantiene estacionaria en el origen. Una segunda carga puntual $q_2 = -4.30\ \mu C$ se mueve del punto $x = 0.150$ m, $y = 0$ al punto $x = 0.250$ m, $y = 0.250$ m. ¿Cuánto trabajo realiza la fuerza eléctrica sobre q_2?

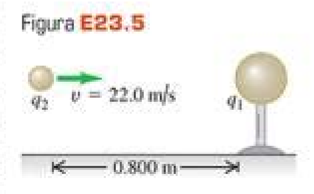
23.2 • Una carga puntual q_1 se mantiene estacionaria en el origen. Se coloca una segunda carga q_2 en el punto a, y la energía potencial eléctrica del par de cargas es $+5.4 \times 10^{-8}$ J. Cuando la segunda carga se mueve al punto b, la fuerza eléctrica sobre la carga realiza -1.9×10^{-8} J de trabajo. ¿Cuál es la energía potencial eléctrica del par de cargas cuando la segunda carga se encuentra en el punto b?

23.3 •• **Energía del núcleo.** ¿Cuánto trabajo se necesita para ensamblar un núcleo atómico que contiene tres protones (como el del berilio) si se modela como un triángulo equilátero de lado 2.00×10^{-15} m con un protón en cada vértice? Suponga que los protones parten desde muy lejos.

23.4 •• *a*) ¿Cuánto trabajo se requiere para empujar dos protones con mucha lentitud desde una separación de 2.00×10^{-10} m (una distancia atómica común) hasta 3.00×10^{-15} m (una distancia nuclear común)? *b*) Si los dos protones se liberan desde el reposo, cuando están separados la distancia del inciso *a*), ¿con qué rapidez se moverán cuando alcancen su separación original?

23.5 •• Una esfera metálica pequeña tiene una carga neta $q_1 = -2.80\ \mu C$ y se mantiene en posición estacionaria por medio de soportes aislantes. Una segunda esfera metálica pequeña con carga neta $q_2 = -7.80\ \mu C$ y masa de 1.50 g es proyectada hacia q_1. Cuando las dos esferas están a una distancia de 0.800 m una de otra, q_2 se mueve hacia q_1 con una rapidez de 22.0 m/s (figura E23.5). Suponga que las dos esferas pueden considerarse como cargas puntuales y que se ignora la fuerza de gravedad. *a*) ¿Cuál es la rapidez de q_2 cuando las esferas están a 0.400 m una de la otra? *b*) ¿Qué tan cerca de q_1 llega q_2?

Figura **E23.5**



23.6 •• BIO **Energía en el par de bases del ADN, I.** (Véase el ejercicio 21.23). *a*) Calcule la energía potencial eléctrica del enlace adenina-timina, usando las mismas combinaciones de moléculas (O—H—N y N—H—N) del ejercicio 21.23. *b*) Compare esta energía con la energía potencial del par protón-electrón en el átomo de hidrógeno.

23.7 •• BIO **Energía en el par de bases del ADN, II.** (Véase el ejercicio 21.24). Calcule la energía potencial eléctrica del enlace guanina-citosina, usando las mismas combinaciones de moléculas (O—H—O, N—H—N y O—H—N) del ejercicio 21.24.

23.8 •• Se colocan tres cargas puntuales iguales de 1.20 μC en las esquinas de un triángulo equilátero cuyos lados miden 0.500 m de longitud. ¿Cuál es la energía potencial del sistema? (Considere la energía potencial de las tres cargas igual a cero cuando se encuentren separadas por una distancia infinita).

23.9 •• Dos protones se liberan a partir del reposo cuando están separados 0.750 nm. *a*) ¿Cuál es la rapidez máxima que alcanzan? ¿En qué instante se presenta esta rapidez? *b*) ¿Cuál es la aceleración máxima que alcanzan? ¿En qué instante se presenta esta aceleración?

23.10 •• Cuatro electrones se localizan en las esquinas de un cuadrado de 10.0 nm de lado, con una partícula alfa en su punto medio. ¿Cuánto trabajo se necesita hacer para mover la partícula alfa al punto medio de uno de los lados del cuadrado?

23.11 •• Tres cargas puntuales que al principio están infinitamente alejadas entre sí, se colocan en las esquinas de un triángulo equilátero con lados igual a d. Dos de las cargas puntuales son idénticas y tienen una carga q. Si se requiere un trabajo neto igual a cero para situar las tres cargas en las esquinas del triángulo, ¿cuál debe ser el valor de la tercera carga?

23.12 •• Iniciando con una separación de varios metros, dos protones son lanzados por un acelerador ciclotrón directamente uno en dirección del otro con una rapidez de 1000 km/s, medida con respecto a la Tierra. Encuentre la fuerza eléctrica máxima que ejercerá cada protón sobre el otro.

Sección 23.2 Potencial eléctrico

23.13 • Una partícula pequeña tiene una carga de $-5.00\ \mu C$ y masa de 2.00×10^{-4} kg. Se desplaza desde el punto A, donde el potencial eléctrico es $V_A = +200$ V, hasta el punto B, donde el potencial eléctrico es $V_B = +800$ V. La fuerza eléctrica es la única que actúa sobre la partícula, la cual tiene una rapidez de 5.00 m/s en el punto A. ¿Cuál es su rapidez en el punto B? ¿Se mueve más rápido o más lento en B que en A? Explique su respuesta.

23.14 • Una partícula con una carga de +4.20 nC está en un campo eléctrico uniforme $\vec{E}$ dirigido hacia la izquierda. Se libera desde el reposo y se mueve a la izquierda; después de que se ha desplazado 6.00 cm, su energía cinética es de $+1.50 \times 10^{-6}$ J. *a*) ¿Qué trabajo realizó la fuerza eléctrica? *b*) ¿Cuál es el potencial del punto de inicio con respecto al punto final? *c*) ¿Cuál es la magnitud de $\vec{E}$?

23.15 • Una carga de 28.0 nC se coloca en un campo eléctrico uniforme que está dirigido verticalmente hacia arriba y tiene una magnitud de 4.00×10^4 V/m. ¿Qué trabajo realiza la fuerza eléctrica cuando la carga se mueve *a*) 0.450 m a la derecha; *b*) 0.670 m hacia arriba; *c*) 2.60 m con un ángulo de 45.0° hacia abajo con respecto a la horizontal?

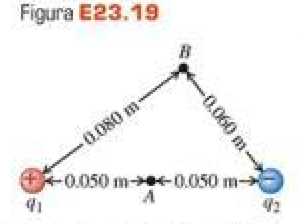
23.16 • Dos cargas puntuales estacionarias de +3.00 nC y +2.00 nC están separadas por una distancia de 50.0 cm. Se libera un electrón desde el reposo en un punto a la mitad de camino entre las dos cargas y se mueve a lo largo de la línea que las conecta. ¿Cuál es la rapidez del electrón cuando está a 10.0 cm de la carga de +3.00 nC?

23.17 •• Las cargas puntuales $q_1 = +2.00\ \mu$C y $q_2 = -2.00\ \mu$C están colocadas en esquinas adyacentes de un cuadrado que tiene una longitud de 3.00 cm por lado. El punto *a* se encuentra en el centro del cuadrado, y el punto *b* en la esquina vacía más cercana a q_2. Tome el potencial eléctrico como cero a una distancia lejana de ambas cargas. *a*) ¿Cuál es el potencial eléctrico en el punto *a* debido a q_1 y q_2? *b*) ¿Cuál es el potencial eléctrico en el punto *b*? *c*) Una carga puntual $q_3 = -5.00\ \mu$C se mueve del punto *a* al punto *b*. ¿Cuánto trabajo se realiza sobre q_3 por las fuerzas eléctricas ejercidas por q_1 y q_2? ¿El trabajo es positivo o negativo?

23.18 • Dos cargas de igual magnitud *Q* se mantienen separadas una distancia *d*. Considere solo puntos sobre la línea que pasa a través de ambas cargas. *a*) Si las dos cargas tienen el mismo signo, encuentre la ubicación de todos los puntos (si los hay) en los que **i.** el potencial (en relación con el infinito) es igual a cero (en estos puntos, ¿el campo eléctrico es cero?), y **ii.** el campo eléctrico es igual a cero (en estos puntos, ¿el potencial es cero?). *b*) Repita el inciso *a*) para dos cargas que tienen signos opuestos.

23.19 • Dos cargas puntuales $q_1 = +2.40$ nC y $q_2 = -6.50$ nC están separadas 0.100 m. El punto *A* está a la mitad de la distancia entre ellas; el punto *B* está a 0.080 m de q_1 y a 0.060 m de q_2 (figura E23.19). Considere el potencial eléctrico como cero en el infinito. Determine *a*) el potencial en el punto *A*; *b*) el potencial en el punto *B*; *c*) el trabajo realizado por el campo eléctrico sobre una carga de 2.50 nC que viaja del punto *B* al punto *A*.

Figura **E23.19**



23.20 • Una carga positiva $+q$ se localiza en el punto $x = 0$, $y = -a$, y una carga negativa $-q$ se encuentra en el punto $x = 0$, $y = +a$. *a*) Obtenga una expresión para el potencial *V* en los puntos sobre el eje *x* como función de la coordenada *y*. Considere *V* igual a cero a una distancia infinita de las cargas. *b*) Elabore la gráfica de *V* en puntos sobre el eje *y* como función de *y* en el intervalo de $y = -4a$ a $y = +4a$. *c*) Demuestre que para $y > a$, el potencial en un punto sobre el eje positivo *y* está dado por $V = -(1/4\pi\epsilon_0)2qa/y^2$. *d*) ¿Cuáles son las respuestas a los incisos *a*) y *c*) si las dos cargas se intercambian de manera que $+q$ esté en $y = +a$ y $-q$ esté en $y = -a$?

23.21 •• Una carga positiva *q* está fija en el punto $x = 0$, $y = 0$, y una carga negativa $-2q$ se encuentra fija en el punto $x = a$, $y = 0$. *a*) Señale las posiciones de las cargas en un diagrama. *b*) Obtenga una expresión para el potencial *V* en puntos sobre el eje *x* como función de la coordenada *x*. Considere *V* igual a cero a una distancia infinita de las cargas. *c*) ¿En qué posiciones sobre el eje *x*, $V = 0$? *d*) Elabore la gráfica de *V* en puntos sobre el eje *x* como función de *x* en el intervalo de $x = -2a$ a $x = +2a$. *e*) ¿Cuál es la respuesta para el inciso *b*) cuando $x >> a$? Explique por qué se obtiene este resultado.

23.22 •• Considere la configuración de cargas descrita en el ejercicio 23.21. *a*) Obtenga una expresión para el potencial *V* en puntos sobre el eje *y* como función de la coordenada *y*. Considere *V* igual a cero a una distancia infinita de las cargas. *b*) En qué posiciones sobre el eje *y*, $V = 0$? *c*) Elabore la gráfica de *V* en puntos sobre el eje *y* como función de *y* en el intervalo de $y = -2a$ a $y = +2a$. *d*) ¿Cuál es la respuesta al inciso *a*) cuando $y > a$? Explique por qué se obtiene este resultado.

23.23 •• *a*) Un electrón se acelera de 3.00×10^6 m/s a 8.00×10^6 m/s. ¿A través de qué diferencia de potencial debe pasar el electrón para que esto suceda? *b*) ¿A través de qué diferencia de potencial debe pasar el electrón si ha de disminuir su velocidad de 8.00×10^6 m/s hasta detenerse?

23.24 • A cierta distancia de una carga puntual, el potencial y la magnitud del campo eléctrico debido a esa carga son 4.98 V y 12.0 V/m, respectivamente. (Considere el potencial como cero en el infinito). *a*) ¿Cuál es la distancia a la carga puntual? *b*) ¿Cuál es la magnitud de la carga? *c*) ¿El campo eléctrico está dirigido hacia la carga puntual o se aleja de esta?

23.25 • Un campo eléctrico uniforme tiene una magnitud *E* y está dirigido en la dirección negativa de *x*. La diferencia de potencial entre el punto *a* (en $x = 0.60$ m) y el punto *b* (en $x = 0.90$ m) es de 240 V. *a*) ¿Cuál punto, *a* o *b*, tiene el potencial más alto? *b*) Calcule el valor de *E*. *c*) Una carga puntual negativa $q = -0.200\ \mu$C se desplaza de *b* a *a*. Calcule el trabajo realizado por el campo eléctrico sobre la carga puntual.

23.26 • Para cada una de las siguientes configuraciones de dos cargas puntuales, encuentre todos los puntos a lo largo de la línea que pasa a través de ambas cargas para las que el potencial eléctrico *V* es igual a cero (considere que $V = 0$ a una distancia infinita de las cargas) y para las que el campo eléctrico *E* es cero: *a*) cargas $+Q$ y $+2Q$ separadas por una distancia *d*, y *b*) cargas $-Q$ y $+2Q$ separadas por una distancia *d*. *c*) ¿*V* y *E* son iguales a cero en los mismos lugares? Explique su respuesta.

Sección 23.3 Cálculo del potencial eléctrico

23.27 •• Un cascarón esférico delgado de radio $R_1 = 3.00$ cm es concéntrico con otro cascarón esférico delgado más grande de radio $R_2 = 5.00$ cm. Ambos cascarones están hechos con material aislante. El cascarón más pequeño tiene una carga $q_1 = +6.00$ nC distribuida de manera uniforme sobre su superficie, y el más grande tiene una carga $q_2 = -9.00$ nC distribuida de manera uniforme sobre su superficie. Considere el potencial eléctrico igual a cero a una distancia infinita de ambos cascarones. *a*) ¿Cuál es el potencial eléctrico debido a los dos cascarones a las siguientes distancias de su centro común **i.** $r = 0$; **ii.** $r = 4.00$ cm; **iii.** $r = 6.00$ cm? *b*) ¿Cuál es la magnitud de la diferencia de potencial entre las superficies de los dos cascarones? ¿Cuál cascarón tiene un potencial mayor: el interior o el exterior?

23.28 • Una carga eléctrica total de 3.50 nC está distribuida de manera uniforme sobre la superficie de una esfera de metal con radio de 24.0 cm. Si el potencial es igual a cero en un punto en el infinito, encuentre el valor del potencial a las siguientes distancias del centro de la esfera: *a*) 48.0 cm; *b*) 24.0 cm; *c*) 12.0 cm.

23.29 •• Un anillo delgado uniformemente cargado tiene un radio de 15.0 cm y carga total de +24.0 nC. Se coloca un electrón sobre el eje del anillo a una distancia de 30.0 cm de su centro y queda restringido a permanecer sobre ese eje. Después se libera el electrón desde el reposo. *a*) Describa el movimiento posterior del electrón. *b*) Determine la rapidez del electrón cuando alcanza el centro del anillo.

23.30 •• Una línea de carga, infinitamente larga, tiene una densidad de carga lineal de 5.00×10^{-12} C/m. Un protón (masa de 1.67×10^{-27} kg, carga de $+1.60 \times 10^{-19}$ C) se localiza a 18.0 cm de la línea y se mueve directamente hacia ella con una rapidez de 1.50×10^3 m/s. *a*) Calcule la energía cinética inicial del protón. *b*) ¿A qué distancia de la línea de carga llega el protón?

23.31 • Un alambre muy largo tiene una densidad de carga lineal uniforme λ. Se utiliza un voltímetro para medir la diferencia de potencial y se encuentra que cuando un sensor del instrumento se coloca a 2.50 cm del alambre y el otro sensor se sitúa a 1.00 cm más lejos del alambre, el aparato lee 575 V. *a*) ¿Cuál es el valor de λ? *b*) Si ahora se coloca un sensor a 3.50 cm del alambre y el otro a 1.00 cm más lejos, ¿el voltímetro leerá 575 V? Si no es así, ¿la lectura estará por encima o por debajo de 575 V? ¿Por qué? *c*) Si se sitúan ambos sensores a 3.50 cm del alambre, pero a 17.0 cm uno de otro, ¿cuál será la lectura del voltímetro?

23.32 •• Un cilindro aislante muy largo y cargado tiene un radio de 2.50 cm y una densidad lineal uniforme de 15.0 nC/m. Si se coloca el sensor de un voltímetro en la superficie, ¿a qué distancia de la superficie debe situarse el otro sensor para que la lectura sea de 175 V?

23.33 •• Un cascarón cilíndrico aislante muy largo con radio de 6.00 cm tiene una densidad de carga lineal de 8.50 μC/m distribuida de manera uniforme en su superficie exterior. ¿Cuál sería la lectura de un voltímetro si se conectara entre *a*) la superficie del cilindro y un punto a 4.00 cm por arriba de la superficie, y *b*) la superficie y un punto a 1.00 cm del eje central del cilindro?

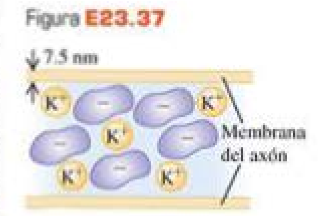
23.34 • Un anillo con diámetro de 8.00 cm está fijo en un lugar y tiene una carga de +5.00 μC distribuida de manera uniforme sobre su circunferencia. *a*) ¿Cuánto trabajo se requiere para desplazar una esfera diminuta con carga de +3.00 μC y masa de 1.50 g desde una distancia muy lejana hasta el centro del anillo? *b*) ¿Es necesario seguir una trayectoria a lo largo del eje del anillo? ¿Por qué? *c*) Si la esfera se desplaza ligeramente del centro del anillo, ¿qué haría y cuál sería la velocidad máxima que alcanzaría?

23.35 •• Una esfera muy pequeña con carga positiva $q = +8$ μC se libera a partir del reposo en un punto a 1.50 cm de una línea muy larga con una densidad de carga lineal uniforme $\lambda = +3.00$ μC/m. ¿Cuál es la energía cinética de la esfera cuando se encuentra a 4.50 cm de la línea de carga si la única fuerza sobre ella es la ejercida por la línea de carga?

23.36 • Una carga $Q = 500$ μC está distribuida de manera uniforme en el volumen de una esfera aislante que tiene un radio $R = 12.0$ cm. Una esfera pequeña con carga $q = +3.00$ μC y masa igual a 6.00×10^{-5} kg se proyecta hacia el centro de la esfera grande desde una gran distancia inicial. La esfera grande se mantiene en una posición fija y la esfera pequeña puede considerarse como una carga puntual. ¿Qué rapidez mínima debe tener la esfera pequeña para acercarse a 8.00 cm de la superficie de la esfera grande?

23.37 • BIO **Axones.** Las neuronas son las unidades básicas del sistema nervioso. Tienen estructuras tubulares largas, llamadas *axones*, que transportan señales eléctricas lejos de los extremos de las neuronas. El axón contiene una solución de iones de potasio (K^+) con iones negativos orgánicos grandes. La membrana del axón impide la salida de los iones grandes, pero los iones más pequeños K^+ sí pueden penetrar la membrana en algunas cantidades (figura E23.37). Esto deja una carga negativa en exceso en el interior de la superficie de la membrana del axón y un exceso de carga positiva en la superficie exterior, creándose una diferencia de potencial a través de la membrana que impide el paso de más iones K^+. Las mediciones indican que esta diferencia de potencial es normalmente de 70 mV aproximadamente. El grosor de la membrana del axón varía entre 5 y 10 nm aproximadamente, de modo que usaremos un promedio de 7.5 nm. La membrana se puede modelar como una lámina grande que tiene densidades de carga iguales y opuestas sobre sus caras. *a*) Calcule el campo eléctrico dentro de la membrana del axón, suponiendo (de forma poco realista) que está llena de aire. ¿Hacia dónde apunta: hacia adentro o hacia afuera del axón? *b*) ¿Cuál es el potencial más elevado: el de la superficie interior o el de la superficie exterior de la membrana del axón?

Figura **E23.37**



23.38 • PA Dos placas conductoras paralelas y grandes, que tienen cargas opuestas de igual magnitud, están separadas por una distancia de 2.20 cm. *a*) Si la densidad de carga superficial de cada placa tiene una magnitud de 47.0 nC/m^2, ¿cuál es la magnitud de $\vec{E}$ en la región entre las placas? *b*) ¿Cuál es la diferencia de potencial entre las dos placas? *c*) Si la separación entre las placas se duplica mientras la densidad de carga superficial se mantiene constante en el valor que se obtuvo en el inciso *a*), ¿qué sucede con la magnitud del campo eléctrico y con la diferencia de potencial?

23.39 • Dos placas metálicas, grandes y paralelas tienen cargas opuestas de igual magnitud. Están separadas por una distancia de 45.0 mm, y la diferencia de potencial entre ellas es de 360 V. *a*) ¿Cuál es la magnitud del campo eléctrico (el cual se supone uniforme) en la región entre las placas? *b*) ¿Cuál es la magnitud de la fuerza que ejerce este campo sobre una partícula con carga de +2.40 nC? *c*) Utilice los resultados del inciso *b*) para calcular el trabajo realizado por el campo sobre la partícula conforme se desplaza de la placa de mayor potencial a la de menor potencial. *d*) Compare el resultado del inciso *c*) con el cambio de energía potencial de la misma carga, calculado a partir del potencial eléctrico.

23.40 • BIO **Sensibilidad eléctrica de los tiburones.** Ciertos tiburones pueden detectar un campo eléctrico tan débil como 1.0 μV/m. Para entender qué tan débil es este campo, considere que se desea producirlo entre dos placas metálicas paralelas conectándolas a una batería normal AA de 1.5 V; ¿a qué distancia tendrían que estar las placas?

23.41 •• *a*) Demuestre que V para un cascarón esférico de radio R, que tiene una carga q distribuida de manera uniforme sobre su superficie, es igual que V para un conductor sólido con radio R y carga q. *b*) Se frota un globo inflado sobre una alfombra, con lo que adquiere un potencial que es 1560 V más bajo que su potencial antes de haberse cargado. Si la carga está distribuida de manera uniforme sobre la superficie del globo y el radio de este es de 15 cm, ¿cuál es la carga neta en el globo? *c*) A la luz de su diferencia de potencial de 1200 V en relación con usted, ¿piensa que este globo es peligroso? Explique su respuesta.

23.42 •• *a*) ¿Cuánta carga excedente se debe colocar en una esfera de cobre de 25.0 cm de diámetro de manera que el potencial de su centro, en relación con el infinito, sea de 1.50 kV? *b*) ¿Cuál es el potencial de la superficie de la esfera en relación con el infinito?

23.43 • El campo eléctrico en la superficie de una esfera de cobre con carga, sólida y con radio de 0.200 m es de 3800 N/C, dirigido hacia el centro de la esfera. ¿Cuál es el potencial en el centro de la esfera si se considera un potencial igual a cero a una distancia infinitamente grande con respecto a la esfera?

Sección 23.4 Superficies equipotenciales y Sección 23.5 Gradiente de potencial

23.44 • Una lámina muy grande de plástico tiene una densidad de carga uniforme de −6.00 nC/m^2 en una cara. *a*) Conforme usted se aleja de la lámina a lo largo de una línea perpendicular a ella, ¿el potencial aumenta o disminuye? ¿Cómo lo sabe, sin efectuar cálculos? ¿La respuesta depende del lugar que elija como punto de referencia para el potencial? *b*) Encuentre el espaciamiento entre superficies equipotenciales que difieren en 1.00 V una de otra. ¿Qué tipo de superficies son estas?

23.45 • CALC En cierta región del espacio, el potencial eléctrico está dado por $V(x, y, z) = Axy - Bx^2 + Cy$, donde A, B y C son constantes positivas. *a*) Calcule las componentes x, y y z del campo eléctrico. *b*) ¿En qué puntos el campo eléctrico es igual a cero?

23.46 • CALC En cierta región del espacio, el potencial eléctrico está dado por $V = +Ax^2y - Bxy^2$, donde $A = 5.00$ V/m^3 y $B = 8.00$ V/m^3. Calcule la magnitud y dirección del campo eléctrico en el punto de la región de coordenadas $x = 2.00$ m, $y = 0.400$ m, y $z = 0$.

23.47 •• **CALC** Una esfera metálica con radio r_a está apoyada en un soporte aislante en el centro de un cascarón esférico, hueco, metálico y con radio r_b. En la esfera interior hay una carga $+q$ y en la exterior otra $-q$. *a*) Calcule el potencial $V(r)$ para **i.** $r < r_a$; **ii.** $r_a < r < r_b$; **iii.** $r > r_b$. (*Sugerencia:* El potencial neto es la suma de los potenciales debidos a las esferas individuales). Considere V igual a cero cuando r es infinito. *b*) Demuestre que el potencial de la esfera interior con respecto al de la esfera exterior es

$$V_{ab} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_b}\right)$$

c) Utilice la ecuación (23.23) y el resultado del inciso *a*) para mostrar que el campo eléctrico en cualquier punto entre las esferas tiene una magnitud de

$$E(r) = \frac{V_{ab}}{(1/r_a - 1/r_b)}\frac{1}{r^2}$$

d) Use la ecuación (23.23) y el resultado del inciso *a*) para obtener el campo eléctrico en un punto fuera de la esfera más grande a una distancia r del centro, donde $r > r_b$. *e*) Suponga que la carga en la esfera exterior no es $-q$, sino una carga negativa de diferente magnitud, por ejemplo, $-Q$. Demuestre que las respuestas para los incisos *b*) y *c*) son las mismas que antes, pero la del inciso *d*) es distinta.

23.48 • Una esfera metálica con radio $r_a = 1.20$ cm está sostenida por un soporte aislante en el centro de un cascarón esférico, hueco, metálico y con radio $r_b = 9.60$ cm. En la esfera interior se coloca una carga $+q$ y en la exterior otra $-q$. Se elige que la magnitud de q sea tal que haga que la diferencia de potencial entre las esferas alcance los 500 V, con la esfera interior a un potencial más elevado. *a*) Use el resultado del ejercicio 23.47*b*) para calcular q. *b*) Con ayuda del resultado del ejercicio 23.47*a*), elabore un diagrama de las superficies equipotenciales que correspondan a 500, 400, 300, 200, 100 y 0 V. *c*) En el diagrama muestre las líneas de campo eléctrico. ¿Las líneas de campo eléctrico y las superficies equipotenciales son perpendiculares entre sí? Cuando la magnitud de $\vec{E}$ es máxima, ¿las superficies equipotenciales están más cercanas?

23.49 • Un cilindro muy largo de 2.00 cm de radio tiene una densidad de carga uniforme de 1.50 nC/m. *a*) Describa la forma de las superficies equipotenciales de este cilindro. *b*) Tome el nivel de referencia de manera que el potencial cero sea la superficie del cilindro, y obtenga el radio de las superficies equipotenciales que tienen potenciales de 10.0 V, 20.0 V y 30.0 V. *c*) ¿Están igualmente espaciadas las superficies equipotenciales? Si no es así, ¿se acercan o se alejan conforme r se incrementa?

PROBLEMAS

23.50 • **PA** Una carga puntual $q_1 = +5.00\ \mu$C se encuentra fija en el espacio. Desde una distancia horizontal de 6.00 cm, una pequeña esfera con masa igual a 4.00×10^{-3} kg y carga $q_2 = +2.00\ \mu$C se dispara hacia la carga fija con una rapidez inicial de 40.0 m/s. Se ignora la gravedad. ¿Cuál es la aceleración de la esfera en el instante en que su rapidez es de 25.0 m/s?

23.51 ••• Una carga puntual $q_1 = 4.00$ nC está situada en el origen, y una segunda carga puntual $q_2 = -3.00$ nC está en el eje x en $x = +20.0$ cm. Una tercera carga puntual $q_3 = 2.00$ nC se coloca sobre el eje x entre q_1 y q_2. (Considere la energía potencial de las tres cargas igual a cero cuando estén separadas por una distancia infinita). *a*) ¿Cuál es la energía potencial del sistema de tres cargas si q_3 se coloca en $x = +10.0$ cm? *b*) ¿Dónde debe situarse q_3 para que la energía potencial del sistema sea igual a cero?

23.52 ••• Una esfera pequeña con masa de 5.00×10^{-7} kg y carga de $+3.00\ \mu$C se libera del reposo a una distancia de 0.400 m arriba de una lámina aislante horizontal grande con una carga que tiene una densidad de carga superficial uniforme $\sigma = +8.00$ pC/m^2. Usando conceptos de energía, calcule la rapidez de la esfera cuando se encuentra a 0.100 m arriba de la lámina cargada.

23.53 •• **Determinación del tamaño del núcleo.** Cuando el radio 226 se desintegra, emite una partícula alfa (el núcleo del helio), y el producto final es el radón 222. Esta desintegración se puede modelar visualizando el radio 226 formado por una partícula alfa emitida desde la superficie del núcleo simétricamente esférico del radón 222, y tratar a la partícula alfa como una carga puntual. La energía de la partícula alfa se ha medido en el laboratorio y el valor obtenido es de 4.79 MeV cuando la partícula alfa se encuentra infinitamente lejos del núcleo. Como el radón es mucho más pesado que la partícula alfa, podemos suponer que el núcleo de radón no se mueve significativamente con la desintegración. El núcleo del radón contiene 86 protones, mientras que las partículas alfa tienen dos protones, y el núcleo del radio tiene 88 protones. *a*) ¿Cuál es la energía potencial eléctrica de la combinación alfa-radón justo antes de la desintegración, en MeV y en joules? *b*) Use el resultado del inciso *a*) para calcular el radio del núcleo del radón.

23.54 •• **PA** Un protón y una partícula alfa son liberados a partir del reposo cuando están separados una distancia de 0.225 nm. La partícula alfa (un núcleo de helio) tiene prácticamente cuatro veces la masa y dos veces la carga de un protón. Calcule la *rapidez* y *aceleración* máximas de cada una de estas partículas. ¿Cuándo ocurren estos máximos: en seguida de la liberación de las partículas o después de un tiempo muy largo?

23.55 • Una partícula con carga de +7.60 nC está en un campo eléctrico uniforme dirigido a la izquierda. Otra fuerza, además de la eléctrica, actúa sobre la partícula de manera que cuando parte del reposo se desplaza a la derecha. Después de haberse movido 8.00 cm, la fuerza adicional ha efectuado un trabajo de 6.50×10^{-5} J y la partícula tiene una energía cinética de 4.35×10^{-5} J. *a*) ¿Qué trabajo realizó la fuerza eléctrica? *b*) ¿Cuál es el potencial del punto de inicio con respecto al del punto final? *c*) ¿Cuál es la magnitud del campo eléctrico?

23.56 • **PA** En el *modelo de Bohr* del átomo de hidrógeno, un electrón gira alrededor de un solo protón en un círculo de radio r. Suponga que el protón permanece en reposo. *a*) Igualando la fuerza eléctrica con la masa del electrón multiplicada por su aceleración, obtenga una expresión para la rapidez del electrón. *b*) Obtenga una expresión para la energía cinética del electrón, y demuestre que su magnitud es solo la mitad de la energía potencial eléctrica. *c*) Obtenga una expresión para la energía total, y evalúela con $r = 5.29 \times 10^{-11}$ m. Exprese el resultado numérico en joules y en electrón volts.

23.57 •• **CALC** Un diodo de bulbo de vacío consiste en electrodos cilíndricos concéntricos, el cátodo negativo y el ánodo positivo. A causa de la acumulación de carga cerca del cátodo, el potencial eléctrico entre los electrodos no es una función lineal de la posición, tampoco de una geometría plana, sino que está dado por

$$V(x) = Cx^{4/3}$$

donde x es la distancia desde el cátodo, y C es una constante característica de un diodo en particular y de las condiciones de operación. Suponga que la distancia entre el cátodo y el ánodo es de 13.0 mm y que la diferencia de potencial entre los electrodos es de 240 V. *a*) Determine el valor de C. *b*) Obtenga una fórmula para el campo eléctrico entre los electrodos como función de x. *c*) Determine la fuerza sobre un electrón cuando este se encuentra en el punto medio entre los electrodos.

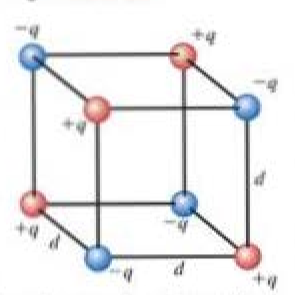
23.58 •• Dos esferas aislantes idénticas con cargas opuestas, cada una de 50.0 cm de diámetro y con carga uniforme de magnitud 250 μC, están colocadas con sus centros separados por una distancia de 1.00 m (figura P23.58). *a*) Si se conecta un voltímetro entre los puntos más cercanos (*a* y *b*) de sus superficies, ¿cuál será la lectura? *b*) ¿Cuál punto, *a* o *b*, está en el potencial más elevado? ¿Cómo se puede saber esto sin efectuar cálculos?

Figura **P23.58**



23.59 •• **Cristal iónico.** La figura P23.59 muestra ocho cargas puntuales situadas en las esquinas de un cubo con lados de longitud *d*. Los valores de las cargas son $+q$ y $-q$, como se indica. Este es un modelo de la celda de un cristal cúbico iónico. Por ejemplo, en el cloruro de sodio (NaCl) los iones positivos son Na^+ y los negativos son Cl^-. *a*) Calcule la energía potencial *U* de esta configuración. (Considere la energía potencial de las ocho cargas igual a cero cuando están separadas por una distancia infinita). *b*) En el inciso *a*), se debe haber calculado que $U < 0$. Explique la relación entre este resultado y la observación de que tales cristales iónicos existen en la naturaleza.

Figura **P23.59**

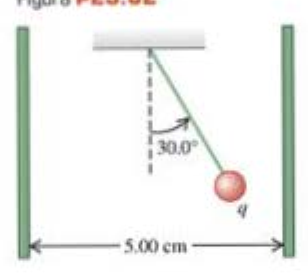


23.60 • *a*) Calcule la energía potencial de un sistema de dos esferas pequeñas, una con carga de 2.00 μC y la otra con carga de -3.50 μC, con sus centros separados por una distancia de 0.250 m. Suponga una energía potencial igual a cero cuando las cargas están separadas por una distancia infinita. *b*) Suponga que una de las esferas permanece en su lugar y la otra, con masa de 1.50 g, se aleja de ella. ¿Qué rapidez inicial mínima sería necesario que tuviera la esfera en movimiento para escapar por completo de la atracción de la esfera fija? (Para escapar, la esfera en movimiento debe tener una velocidad igual a cero cuando se encuentre a una distancia infinita de la esfera fija).

23.61 •• **El ion H_2^+.** El ion H_2^+ está compuesto por dos protones, cada uno con carga $+e = 1.60 \times 10^{-19}$ C, y un electrón de carga $-e$ y masa 9.11×10^{-31} kg. La separación entre los protones es de 1.07×10^{-10} m. Los protones y el electrón se consideran como cargas puntuales. *a*) Suponga que el electrón se localiza en el punto medio entre los dos protones. ¿Cuál es la energía potencial de la interacción entre el electrón y los dos protones? (No incluya la energía potencial debida a la interacción entre los dos protones). *b*) Suponga que el electrón del inciso *a*) tiene una velocidad de magnitud 1.50×10^6 m/s en una dirección a lo largo de la bisectriz perpendicular de la línea que une los dos protones. ¿A qué distancia del punto medio entre los dos protones se mueve el electrón? Como las masas de los protones son mucho mayores que la del electrón, los movimientos de los protones son muy lentos y se pueden ignorar. (*Nota:* Una descripción realista del movimiento del electrón requiere el uso de la mecánica cuántica, no de la newtoniana).

23.62 •• **PA** Una esfera pequeña con masa de 1.50 g cuelga de una cuerda entre dos placas verticales paralelas separadas por una distancia de 5.00 cm (figura P23.62). Las placas son aislantes y tienen densidades superficiales de carga uniformes de $+\sigma$ y $-\sigma$. La carga sobre la esfera es $q = 8.90 \times 10^{-6}$ C. ¿Qué diferencia de potencial entre las placas ocasionará que la cuerda forme un ángulo de 30.0° con respecto a la vertical?

Figura **P23.62**



23.63 • **CALC** **Cilindros coaxiales.** Un cilindro metálico largo con radio *a* está apoyado en un soporte aislante sobre el eje de un tubo metálico largo y hueco de radio *b*. La carga positiva por unidad de longitud del cilindro interior es igual a λ, y en el cilindro exterior hay una carga negativa igual por unidad de longitud. *a*) Calcule el potencial $V(r)$ para **i.** $r < a$; **ii.** $a < r < b$; **iii.** $r > b$. (*Sugerencia:* El potencial neto es la suma de los potenciales debidos a los conductores individuales). Considere $V = 0$ en $r = b$. *b*) Demuestre que el potencial del cilindro interior con respecto al del exterior es

$$V_{ab} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\ln\frac{b}{a}$$

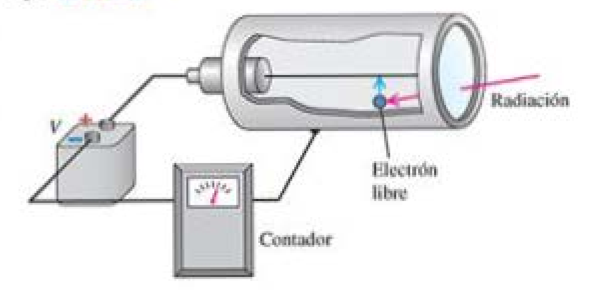
c) Use la ecuación (23.23) y el resultado del inciso *a*) para demostrar que el campo eléctrico en cualquier punto entre los cilindros tiene una magnitud igual a

$$E(r) = \frac{V_{ab}}{\ln(b/a)}\frac{1}{r}$$

d) ¿Cuál es la diferencia de potencial entre los dos cilindros si el cilindro exterior no tiene carga neta?

23.64 •• Un *contador Geiger* detecta radiaciones como las partículas alfa utilizando el hecho de que la radiación ioniza el aire a lo largo de su trayectoria. Un alambre delgado está colocado en el eje de un cilindro de metal hueco y aislado de este (figura P23.64). Entre el alambre y el cilindro exterior se establece una diferencia de potencial grande, con el alambre con el potencial más elevado; esto produce un campo eléctrico intenso dirigido radialmente hacia afuera. Cuando una radiación ionizante entra al aparato, se ionizan algunas moléculas de aire. Los electrones libres producidos son acelerados por el campo eléctrico hacia el alambre y, en el camino, ionizan muchas más moléculas de aire. Entonces se produce un pulso de corriente que puede detectarse mediante circuitos electrónicos adecuados y convertirse en un "clic" audible. Suponga que el radio del alambre central es de 145 μm y que el radio del cilindro hueco es de 1.80 cm. ¿Cuál es la diferencia de potencial entre el alambre y el cilindro que produce un campo eléctrico de 2.00×10^4 V/m a una distancia de 1.20 cm del eje del alambre? (El alambre y el cilindro son muy largos en comparación con sus radios, por lo que se aplican los resultados del problema 23.63).

Figura **P23.64**



23.65 • **PA** **Desviación en un TRC.** Es frecuente que los osciloscopios y monitores de computadora tengan tubos de rayos catódicos (TRC). En la figura P23.65 se proyecta un electrón con rapidez inicial de 6.50×10^6 m/s a lo largo de la mitad del eje de las placas deflectoras de un tubo de rayos catódicos. La diferencia de potencial entre las dos placas es de 22.0 V y la placa inferior es la de potencial más alto. *a*) ¿Cuál es la fuerza (magnitud y dirección) sobre el electrón cuando está entre las placas? *b*) ¿Cuál es la aceleración del electrón

(magnitud y dirección) cuando actúa sobre él la fuerza del inciso *a*)? *c*) ¿Qué distancia por debajo del eje se ha movido el electrón cuando alcanza el final de las placas? *d*) ¿Con qué ángulo con respecto al eje se mueve cuando abandona las placas? *e*) ¿A qué distancia por debajo del eje golpeará la pantalla fluorescente S?

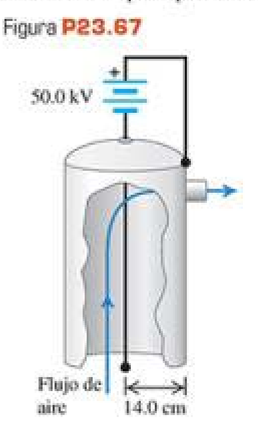
Figura **P23.65**



23.66 •• PA **Placas deflectoras de un osciloscopio.** Las placas deflectoras verticales de un osciloscopio estudiantil común son un par de cuadrados metálicos paralelos con cargas iguales pero de signo contrario. Las dimensiones típicas son de unos 3.0 cm por lado, con una separación de 5.0 mm aproximadamente. La diferencia de potencial entre las placas es de 25.0 V. Las placas están lo suficientemente cerca para ignorar los efectos de borde. En estas condiciones: *a*) ¿cuánta carga hay en cada placa, y *b*) cuál es la intensidad del campo eléctrico entre las placas? *c*) Si un electrón es lanzado del reposo desde la placa negativa, ¿qué tan rápido se mueve cuando alcanza la placa positiva?

23.67 •• Los *precipitadores electrostáticos* usan fuerzas eléctricas para eliminar partículas contaminantes de humo, en particular en las chimeneas de las plantas generadoras de energía a base de carbón. Un modelo de precipitador consiste en un cilindro metálico vertical hueco, con un alambre delgado aislado del cilindro, que recorre su eje (figura P23.67). Entre el alambre y el cilindro exterior se establece una diferencia de potencial elevada; el alambre tiene el menor potencial. Esto genera un campo eléctrico radial intenso dirigido hacia adentro. El campo crea una región de aire ionizado cerca del alambre. El humo entra al precipitador por la base, la ceniza y polvo capturan electrones, y los contaminantes cargados son acelerados por el campo eléctrico hacia la pared del cilindro exterior. Suponga que el radio del alambre central es 90.0 μm, el radio del cilindro es de 14.0 cm, y se establece una diferencia de potencial de 50.0 kV entre el alambre y el cilindro. También suponga que el alambre y el cilindro son muy largos en comparación con el radio del cilindro, por lo que se aplican los resultados del problema 23.63. *a*) ¿Cuál es la magnitud del campo eléctrico en el punto medio entre el alambre y la pared del cilindro? *b*) ¿Qué magnitud de carga debe tener una partícula de ceniza de 30.0 μg si el campo eléctrico calculado en el inciso *a*) debe ejercer una fuerza equivalente a 10 veces el peso de la partícula?

Figura **P23.67**



23.68 •• CALC Un disco de radio R tiene una densidad de carga superficial σ. *a*) Si el disco se considera como una serie de anillos concéntricos delgados, calcule el potencial eléctrico V en un punto sobre el eje del disco a una distancia x del centro del disco. Suponga que el potencial es igual a cero en el infinito. (*Sugerencia:* Use el resultado del ejemplo 23.11 en la sección 23.3). *b*) Calcule $-\partial V/\partial x$. Demuestre que el resultado concuerda con la expresión para E_x calculada en el ejemplo 21.11 (sección 21.5).

23.69 •• CALC *a*) A partir de la expresión para E obtenida en el problema 22.42, obtenga las expresiones para el potencial eléctrico V como función de r, tanto dentro como fuera del cilindro. Sea $V = 0$ en la superficie del cilindro. En cada caso, exprese el resultado en términos de la carga por unidad de longitud λ de la distribución de carga. *b*) Elabore la gráfica de V y E como funciones de r, desde $r = 0$ hasta $r = 3R$.

23.70 • CALC Una varilla aislante delgada se dobla para formar un arco semicircular de radio a, y una carga eléctrica total Q está distribuida de manera uniforme a lo largo de la varilla. Calcule el potencial en el centro de curvatura del arco si se supone que el potencial es igual a cero en el infinito.

23.71 ••• CALC **Autoenergía de una esfera de carga.** Una esfera sólida de radio R contiene una carga total Q distribuida de manera uniforme en todo su volumen. Calcule la energía necesaria para ensamblar esta carga trayendo cargas infinitesimales desde muy lejos. Esta energía se llama "autoenergía" de la distribución de carga. (*Sugerencia:* Después de ensamblar una carga q en una esfera de radio r, ¿cuánta energía se necesitaría agregar a un cascarón esférico con espesor dr y carga dq? Después, integre para obtener la energía total).

23.72 •• CALC *a*) A partir de la expresión para E obtenida en el ejemplo 22.9 (sección 22.4), obtenga la expresión para el potencial eléctrico V como función de r tanto dentro como afuera de la esfera uniformemente cargada. Suponga que en el infinito $V = 0$. *b*) Elabore una gráfica de V y E como funciones de r, desde $r = 0$ hasta $r = 3R$.

23.73 •• Una carga $Q = +4.00\ \mu$C está distribuida de manera uniforme en el volumen de una esfera aislante que tiene un radio $R = 5.00$ cm. ¿Cuál es la diferencia de potencial entre el centro de la esfera y su superficie?

23.74 • Un cascarón esférico aislante con radio interior de 25.0 cm y radio exterior de 60.0 cm tiene una carga de +150.0 μC distribuida con uniformidad sobre su superficie externa (véase el ejercicio 23.41). El punto a está en el centro del cascarón, el punto b se encuentra en la superficie interna, y el punto c se localiza en la superficie exterior. *a*) ¿Cuál será la lectura de un voltímetro si se conecta entre los siguientes puntos: **i.** a y b; **ii.** b y c; **iii.** c y el infinito; **iv.** a y c? *b*) ¿Cuál tiene mayor potencial: **i.** a o b; **ii.** b o c; **iii.** a o c; *c*) ¿Cuál de las respuestas cambiaría de signo, si es el caso, considerando que la carga es de $-150\ \mu$C?

23.75 •• El ejercicio 23.41 demuestra que afuera de un cascarón esférico con carga superficial uniforme, el potencial es el mismo que si toda la carga estuviera concentrada en una carga puntual situada en el centro de la esfera. *a*) Utilice este resultado para demostrar que para dos cascarones esféricos aislantes cargados uniformemente, la fuerza que ejerce cada uno sobre el otro y su energía eléctrica mutua son las mismas que si toda la carga se concentrara en sus centros. (*Sugerencia:* Consulte la sección 13.6). *b*) ¿Este mismo resultado se cumple para esferas sólidas aislantes, con distribución de carga uniforme en todo su volumen? *c*) ¿Es válido este mismo resultado para la fuerza entre dos cascarones conductores con carga? ¿Y entre dos conductores sólidos con carga? Explique su respuesta.

23.76 •• PA Dos esferas de plástico, cada una con carga distribuida de manera uniforme en su interior, entran en contacto inicialmente y luego se liberan. Una esfera mide 60.0 cm de diámetro, tiene masa de 50.0 g y contiene $-10.0\ \mu$C de carga. La otra esfera tiene un diámetro de 40.0 cm, masa de 150.0 g y contiene $-30.0\ \mu$C de carga. Determine la aceleración y la rapidez máximas que alcanza cada esfera (en relación con el punto fijo de su localización inicial en el espacio), suponiendo que no hay más fuerzas que actúen sobre ellas. (*Sugerencia:* Considere que las cargas distribuidas de manera uniforme se comportan como si estuvieran concentradas en los centros de las dos esferas).

23.77 • CALC Use el campo eléctrico calculado en el problema 22.45 para determinar la diferencia de potencial entre la esfera conductora sólida y el cascarón esférico aislante delgado.

23.78 • CALC Considere una esfera conductora sólida dentro de una esfera conductora hueca, con los radios y las cargas que se especificaron en el problema 22.44. Considere $V = 0$ conforme $r \rightarrow \infty$. Use el campo eléctrico calculado en el problema 22.44 con la finalidad de determinar el potencial V para los siguientes valores de r: *a*) $r = c$ (en la superficie exterior de la esfera hueca); *b*) $r = b$ (en la superficie interior de la esfera hueca); *c*) $r = a$ (en la superficie de la esfera sólida); *d*) $r = 0$ (en el centro de la esfera sólida).

23.79 • CALC Una carga eléctrica se encuentra distribuida de manera uniforme a lo largo de una varilla delgada de longitud a, con carga

total Q. Considere el potencial igual a cero en el infinito. Determine el potencial en los siguientes puntos (figura P23.79): *a*) punto P, a una distancia x a la derecha de la varilla, y *b*) punto R, a una distancia y arriba del extremo derecho de la varilla. *c*) En los incisos *a*) y *b*), ¿a qué se reduce el resultado conforme x o y se vuelve mucho más grande que a?

Figura **P23.79**



23.80 • *a*) Si una gota de lluvia esférica de radio 0.650 mm tiene una carga de −3.60 pC distribuida de manera uniforme en su volumen, ¿cuál es el potencial en su superficie? (Considere el potencial igual a cero a una distancia infinita de la gota). *b*) Dos gotas idénticas, cada una con el radio y la carga especificados en el inciso *a*), chocan y forman una gota más grande. ¿Cuál es el radio de esta gota más grande, y cuál es el potencial en su superficie, si su carga está distribuida de manera uniforme en su volumen?

23.81 •• Dos esferas de metal de diferentes tamaños están cargadas de manera que el potencial eléctrico es el mismo en la superficie de cada una. La esfera A tiene un radio tres veces mayor que el de la esfera B. Sean Q_A y Q_B las cargas de las dos esferas, y E_A y E_B las magnitudes de los campos eléctricos en las superficies de las dos esferas. ¿Cuáles son *a*) la razón Q_B/Q_A y *b*) la razón E_B/E_A?

23.82 • Una partícula alfa con energía cinética de 11.0 MeV colisiona de frente con un núcleo de plomo en reposo. ¿Cuál es la distancia de la aproximación máxima de las dos partículas? (Suponga que el núcleo del plomo permanece estacionario y que puede tratarse como una carga puntual. El número atómico del plomo es 82. La partícula alfa es un núcleo de helio, con número atómico 2).

23.83 • Una esfera de metal de radio R_1 tiene una carga Q_1. Considere el potencial eléctrico igual a cero a una distancia infinita de la esfera. *a*) ¿Cuáles son el campo eléctrico y el potencial eléctrico en la superficie de la esfera? Esta esfera se conecta ahora mediante un alambre conductor largo y delgado con otra esfera de radio R_2 que está alejada varios metros de la primera. Antes de hacer la conexión, esta segunda esfera está descargada. Después de alcanzar el equilibrio electrostático, indique cuáles son *b*) la carga total en cada esfera; *c*) el potencial eléctrico en la superficie de cada esfera; *d*) el campo eléctrico en la superficie de cada esfera. Suponga que la cantidad de carga en el alambre es mucho menor que la carga en cada esfera.

23.84 ••• **CALC** Use la distribución de carga y el campo eléctrico calculados en el problema 22.65. *a*) Demuestre que para $r \geq R$ el potencial es idéntico al que produce una carga puntual Q. (Considere el potencial igual a cero en el infinito). *b*) Obtenga una expresión para el potencial eléctrico que sea válida en la región $r \leq R$.

23.85 •• **PA** **Fusión nuclear en el Sol.** La fuente de la energía del Sol es una secuencia de reacciones nucleares que tienen lugar en su núcleo. La primera de ellas implica la colisión de dos protones, que se funden para formar un núcleo más pesado y liberan energía. Para que ocurra este proceso, llamado *fusión nuclear*, los dos protones primero deben acercarse hasta que sus superficies entren en contacto. *a*) Suponga que ambos protones se mueven con la misma rapidez y que colisionan de frente. Si el radio del protón es 1.2×10^{-15} m, ¿cuál es la rapidez mínima que permitiría que la fusión nuclear ocurriera? La distribución de carga dentro de un protón tiene simetría esférica, por lo que el campo eléctrico y el potencial fuera del protón son los mismos que si se tratara de una carga puntual. La masa del protón es 1.67×10^{-27} kg. *b*) Otra reacción de fusión nuclear que sucede en el núcleo del Sol implica una colisión entre dos núcleos de helio, cada uno de los cuales tiene 2.99 veces la masa del protón, carga $+2e$ y radio de 1.7×10^{-15} m. Si se supone la misma geometría de colisión que en el inciso *a*), ¿cuál es la rapidez mínima que se requiere para que tenga lugar esta reacción de fusión si los núcleos deben aproximarse a una distancia de 3.5×10^{-15} m entre sus centros? Igual que para el protón, la carga del núcleo de helio está distribuida de manera uniforme en todo su volumen. *c*) En la sección 18.3 se demostró que la energía cinética de traslación media de una partícula con masa m en un gas a temperatura absoluta T es $\frac{3}{2}kT$, donde k es la constante de Boltzmann (que aparece en el apéndice F). Para que dos protones con energía cinética igual a este valor medio sean capaces de experimentar el proceso descrito en el inciso *a*), ¿cuál es la temperatura absoluta que se requiere? ¿Qué temperatura absoluta se requiere para que dos núcleos de helio sean capaces de experimentar el proceso que se describe en el inciso *b*)? (A estas temperaturas, los átomos están ionizados por completo, por lo que los núcleos y los electrones se mueven por separado). *d*) La temperatura en el núcleo del Sol es aproximadamente de 1.5×10^7 K. ¿Cómo se compara esta con las temperaturas calculadas en el inciso *c*)? ¿Cómo es posible que ocurran las reacciones descritas en los incisos *a*) y *b*) en el interior del Sol? (*Sugerencia:* Consulte el análisis de la distribución de rapidez molecular en la sección 18.5).

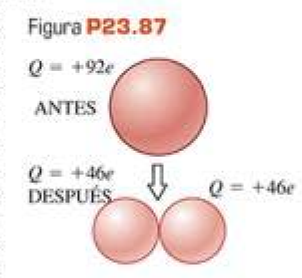
23.86 • **CALC** El potencial eléctrico V en cierta región del espacio está dado por

$$V(x, y, z) = A(x^2 - 3y^2 + z^2)$$

donde A es una constante. *a*) Obtenga una expresión para el campo eléctrico en cualquier punto de esta región. *b*) Se mide el trabajo realizado por el campo cuando una carga de prueba de 1.50 μC se mueve del punto $(x, y, z) = (0, 0, 0.250\text{ m})$ al origen y resulta ser de 6.00×10^{-5} J. Determine A. *c*) Determine el campo eléctrico en el punto (0, 0, 0.250 m). *d*) Demuestre que en todo plano paralelo al plano xz, las líneas equipotenciales son círculos. *e*) ¿Cuál es el radio de la línea equipotencial que corresponde a $V = 1280$ V y $y = 2.00$ m?

23.87 •• **Fisión nuclear.** El núcleo inestable del uranio 236 se puede considerar una esfera con carga uniforme $Q = +92e$ y radio $R = 7.4 \times 10^{-15}$ m. En la fisión nuclear, este núcleo se puede dividir en dos núcleos más pequeños, cada uno con la mitad de la carga y del volumen del núcleo original del uranio 236. Esta es una de las reacciones que ocurrieron en la bomba nuclear que se hizo detonar en Hiroshima, Japón, en agosto de 1945. *a*) Calcule los radios de los dos núcleos "hijos" de carga $+46e$. *b*) En un modelo sencillo del proceso de fisión, inmediatamente después que el núcleo de uranio 236 ha pasado por el proceso de fisión, los núcleos "hijos" están en reposo y apenas en contacto, como se ilustra en la figura P23.87. Calcule la energía cinética que cada uno de estos núcleos "hijos" tendrá cuando estén muy separados. *c*) En este modelo, la suma de las energías cinéticas de los dos núcleos "hijos", calculadas en el inciso *b*), es igual a la energía liberada por la fisión del núcleo de uranio 236. Calcule la energía liberada por la fisión de 10.0 kg de uranio 236. La masa atómica del uranio 236 es 236 u, donde 1 u = 1 unidad de masa atómica = 1.66×10^{-24} kg. Exprese su respuesta tanto en joules como en kilotones de TNT (1 kilotón de TNT libera 4.18×10^{12} J al explotar). *d*) En términos de este modelo, analice por qué una bomba atómica podría llamarse también "bomba eléctrica".

Figura **P23.87**



PROBLEMAS DE DESAFÍO

23.88 ••• **PA CALC** En cierta región, existe una distribución de carga con simetría esférica pero no uniforme. Es decir, la densidad de carga volumétrica $\rho(r)$ depende de la distancia r del centro de la distribu-

ción, pero no de los ángulos polares esféricos θ y ϕ. El potencial eléctrico $V(r)$ debido a esta distribución de carga es

$$V(r) = \begin{cases} \frac{\rho_0 a^2}{18\epsilon_0}\left[1 - 3\left(\frac{r}{a}\right)^2 + 2\left(\frac{r}{a}\right)^3\right] & \text{para } r \leq a \\ 0 & \text{para } r \geq a \end{cases}$$

donde ρ_0 es una constante con unidades de C/m^3, y a es una constante en metros. *a*) Obtenga expresiones de $\vec{E}$ para las regiones $r \leq a$ y $r \geq a$. [*Sugerencia:* Utilice la ecuación (23.23)]. Explique por qué $\vec{E}$ solo tiene una componente radial. *b*) Obtenga una expresión para $\rho(r)$ en cada una de las dos regiones $r \leq a$ y $r \geq a$. [*Sugerencia:* Utilice la ley de Gauss para dos cascarones esféricos, uno de radio r y otro de radio $r + dr$. La carga contenida en el cascarón esférico infinitesimal de radio dr es $dq = 4\pi r^2 \rho(r)\, dr$]. *c*) Demuestre que la carga neta contenida en el volumen de una esfera de radio mayor o igual que a es cero. [*Sugerencia:* Integre las expresiones obtenidas en el inciso *b*) para $\rho(r)$ sobre un volumen esférico de radio mayor o igual que a]. ¿Este resultado es congruente con el campo eléctrico para $r > a$ que se calculó en el inciso *a*)?

23.89 ••• PA En los experimentos en que colisionan núcleos atómicos, suceden choques de frente como los descritos en el problema 23.82, pero son más comunes los que "fallan". Suponga que la partícula alfa en el problema 23.82 no "acertó" en el centro del núcleo de plomo, sino que tuvo un momento angular inicial distinta de cero (con respecto al núcleo de plomo estacionario) de magnitud $L = p_0 b$, donde p_0 es la magnitud del momento lineal inicial de la partícula alfa y $b = 1.00 \times 10^{-12}$ m. ¿Cuál es la distancia de la máxima aproximación? Repita el ejercicio para $b = 1.00 \times 10^{-13}$ m y $b = 1.00 \times 10^{-14}$ m.

23.90 ••• CALC Un cilindro hueco, aislante, de paredes delgadas, radio R y longitud L (como el tubo de cartón de un rollo de papel sanitario) tiene carga Q distribuida de manera uniforme sobre su superficie. *a*) Calcule el potencial eléctrico en todos los puntos a lo largo del eje del tubo. Como origen tome el centro del tubo, y el potencial cero en el infinito. *b*) Demuestre que si $L \ll R$, el resultado del inciso *a*) se reduce al potencial sobre el eje de un anillo de carga de radio R. (Véase el ejemplo 23.11 en la sección 23.3). *c*) Utilice el resultado del inciso *a*) para determinar el campo eléctrico en todos los puntos a lo largo del eje del tubo.

23.91 ••• **Experimento de la gota de aceite de Millikan.** La carga de un electrón fue medida por primera vez por el físico estadounidense Robert Millikan entre 1909 y 1913. En su experimento roció gotas muy finas (alrededor de 10^{-4} mm de diámetro) de aceite en el espacio entre dos placas paralelas en posición horizontal separadas por una distancia d. Mantuvo una diferencia de potencial V_{AB} entre las placas paralelas, lo que ocasionó entre ellas un campo eléctrico dirigido hacia abajo. Algunas de las gotas de aceite adquirieron carga negativa por efecto de la fricción o por la ionización del aire circundante por medio de rayos x o radiactividad. Se observaron las gotas con un microscopio. *a*) Demuestre que una gota de aceite de radio r que esté en reposo entre las placas seguirá en reposo si la magnitud de la carga es

$$q = \frac{4\pi}{3}\frac{\rho r^3 g d}{V_{AB}}$$

donde ρ es la densidad del aceite. (Ignore la fuerza de flotabilidad del aire). Al ajustar V_{AB} para mantener una gota dada en reposo, es posible determinar la carga sobre esta, si se conoce su radio. *b*) Las gotas de aceite de Millikan eran demasiado pequeñas como para medir sus radios en forma directa. En vez de ello, Millikan determinó r eliminando el campo eléctrico y midiendo la *rapidez terminal* v_t de la gota al caer. (En la sección 5.3 se estudió el concepto de rapidez terminal). La fuerza de la viscosidad F sobre una esfera de radio r que se desplaza con rapidez v a través de un fluido con viscosidad η está dada por la ley de Stokes: $F = 6\pi\eta r v$. Cuando la gota cae con velocidad v_t, la fuerza de la viscosidad compensa exactamente el peso $w = mg$ de la gota. Demuestre que la magnitud de la carga sobre la gota es

$$q = 18\pi\frac{d}{V_{AB}}\sqrt{\frac{\eta^3 v_t^3}{2\rho g}}$$

Dentro de los límites del error experimental, cada una de las miles de gotas que Millikan y sus colaboradores midieron tenía una carga igual a cierto múltiplo entero pequeño de una carga básica e. Es decir, encontraron gotas con cargas $\pm 2e$, $\pm 5e$, etcétera, pero no valores tales como $0.76e$ o $2.49e$. Una gota con carga $-e$ adquiría un electrón adicional; si su carga era $-2e$, había adquirido dos electrones más, y así sucesivamente. *c*) En el aparato de Millikan para este experimento, se observó que una gota de aceite con carga caía 1.00 mm con rapidez constante en 39.3 s si $V_{AB} = 0$. La misma gota podía estar en reposo entre las dos placas separadas 1.00 mm si $V_{AB} = 9.16$ V. ¿Cuántos electrones en exceso había adquirido la gota, y cuál era su radio? La viscosidad del aire es 1.81×10^{-5} N·s/m^2 y la densidad del aceite es de 824 kg/m^3.

23.92 •• PA Dos cargas puntuales se desplazan hacia la derecha a lo largo del eje x. La carga puntual 1 tiene carga $q_1 = 2.00\ \mu$C, masa $m_1 = 6.00 \times 10^{-5}$ kg, y rapidez v_1. La carga puntual 2 se encuentra a la derecha de q_1 y tiene carga $q_2 = -5.00\ \mu$C, masa $m_2 = 3.00 \times 10^{-5}$ kg, y rapidez v_2. En un instante en particular, las cargas están separadas por una distancia de 9.00 mm y su rapidez es, en cada caso, $v_1 = 400$ m/s y $v_2 = 1300$ m/s. Las únicas fuerzas que actúan sobre las partículas son las que ejercen una sobre la otra. *a*) Determine la rapidez v_{cm} del centro de masa del sistema. *b*) La *energía relativa* E_{rel} del sistema se define como la energía total menos la energía cinética aportada por el movimiento del centro de masa:

$$E_{rel} = E - \tfrac{1}{2}(m_1 + m_2)v_{cm}^2$$

donde $E = \frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 + q_1 q_2/4\pi\epsilon_0 r$ es la energía total del sistema y r es la distancia entre las cargas. Demuestre que $E_{rel} = \frac{1}{2}\mu v^2 + q_1 q_2/4\pi\epsilon_0 r$, donde $\mu = m_1 m_2/(m_1 + m_2)$ denomina la *masa reducida* del sistema, y $v = v_2 - v_1$ es la rapidez relativa de las partículas en movimiento. *c*) Para los valores numéricos dados, calcule el valor numérico de E_{rel}. *d*) Con base en el resultado del inciso *c*), para las condiciones mencionadas, indique si las partículas escaparán una de la otra. Explique su respuesta. *e*) Si las partículas escapan, ¿cuál sería su rapidez final relativa cuando $r \to \infty$? Si las partículas no escapan, ¿cuál sería su distancia de máxima separación? Es decir, ¿cuál sería el valor de r cuando $v = 0$? *f*) Repita los incisos *c*) a *e*) para $v_1 = 400$ m/s y $v_2 = 1800$ m/s cuando la separación es de 9.00 mm.

Respuestas

Pregunta inicial del capítulo 

Se mantiene una diferencia de potencial grande y constante V_{ab} entre la herramienta de soldadura (*a*) y los elementos metálicos por soldar (*b*). De acuerdo con el ejemplo 23.9 (sección 23.3), el campo eléctrico entre dos conductores separados por una distancia *d* tiene magnitud $E = V_{ab}/d$. Entonces, *d* debe ser pequeña para que la magnitud del campo *E* sea lo suficientemente grande para que ionice el gas entre los conductores *a* y *b* (véase la sección 23.3) y produzca un arco a través de este gas.

Preguntas de las secciones Evalúe su comprensión

23.1 Respuestas: *a*) i, *b*) ii. Las tres cargas q_1, q_2 y q_3 son positivas, de modo que los tres términos de la suma de la ecuación (23.11), q_1q_2/r_{12}, q_1q_3/r_{13} y q_2q_3/r_{23}, son positivos. Por lo tanto, la energía potencial eléctrica total *U* es positiva. Esto significa que se requeriría trabajo positivo para llevar las tres cargas del infinito a las posiciones que se indican en la figura 21.14, y trabajo *negativo* para llevarlas de regreso de esas posiciones al infinito.

23.2 Respuesta: no Si $V = 0$ en cierto punto, $\vec{E}$ *no* tiene que ser igual a cero en ese punto. Un ejemplo de esto es el punto *c* en las figuras 21.23 y 23.13, para el que hay un campo eléctrico en dirección $+x$ (véase el ejemplo 21.9 en la sección 21.5) aun cuando $V = 0$ (véase el ejemplo 23.4). Este resultado no es sorprendente, ya que *V* y $\vec{E}$ son cantidades muy diferentes: *V* es la cantidad neta de trabajo que se requiere para llevar una carga unitaria del infinito al punto en cuestión, mientras que $\vec{E}$ es la fuerza eléctrica que actúa sobre una unidad de carga cuando llega a ese punto.

23.3 Respuesta: no Si $\vec{E} = \mathbf{0}$ en cierto punto, *V no* tiene que ser igual a cero en ese punto. Un ejemplo es el punto *O* en el centro del anillo con carga en las figuras 21.23 y 23.21. De acuerdo con el ejemplo 21.9 (sección 21.5), el campo eléctrico es igual a cero en *O* ya que las contribuciones del campo eléctrico de las diferentes partes del anillo se anulan por completo. Sin embargo, en el ejemplo 23.11, el potencial en *O no* es igual a cero: este punto corresponde a $x = 0$, por lo que $V = (1/4\pi\epsilon_0)(Q/a)$. Este valor de *V* corresponde al trabajo que se tendría que efectuar para desplazar una unidad de carga de prueba positiva a lo largo de una trayectoria del infinito al punto *O*; no es igual a cero porque el anillo con carga repele la carga de prueba, de manera que debe efectuarse trabajo positivo para llevar la carga de prueba en dirección del anillo.

23.4 Respuesta: no Si las cargas positivas en la figura 23.23 se sustituyeran por cargas negativas, y viceversa, las superficies equipotenciales serían iguales, pero el signo del potencial se invertiría. Por ejemplo, las superficies en la figura 23.23*b* con potencial $V = +30$ V y $V = -50$ V tendrían potenciales $V = -30$ V y $V = +50$ V, respectivamente.

23.5 Respuesta: iii. De acuerdo con las ecuaciones (23.19), las componentes del campo eléctrico son $E_x = -\partial V/\partial x = B + Dy$, $E_y = -\partial V/\partial y = 3Cy^2 + Dx$ y $E_z = -\partial V/\partial z = 0$. El valor de *A* no tiene efecto, lo que significa que se puede sumar una constante al potencial eléctrico en todos los puntos sin que cambien $\vec{E}$ o la diferencia de potencial entre dos puntos. El potencial no depende de *z*, por lo que la componente *z* de $\vec{E}$ es igual a cero. Observe que en el origen el campo eléctrico no es igual a cero porque tiene una componente *x* distinta de cero: $E_x = B$, $E_y = 0$, $E_z = 0$.

Problema práctico

Respuesta: $\dfrac{qQ}{8\pi\epsilon_0 a}\ln\left(\dfrac{L + a}{L - a}\right)$

24 CAPACITANCIA Y DIELÉCTRICOS



? La energía utilizada por el flash de una cámara fotográfica se almacena en un capacitor, el cual consiste en dos conductores cercanos entre sí, con cargas opuestas. Si la cantidad de carga en los conductores se duplica, ¿por qué factor se incrementa la energía almacenada?

OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

Al estudiar este capítulo, usted aprenderá:

- La naturaleza de los capacitores y la forma de calcular una cantidad que mide su capacidad para almacenar carga.
- Cómo analizar capacitores conectados en una red.
- A calcular la cantidad de energía almacenada en un capacitor.
- Qué son los dieléctricos y cómo se elaboran capacitores más eficaces.

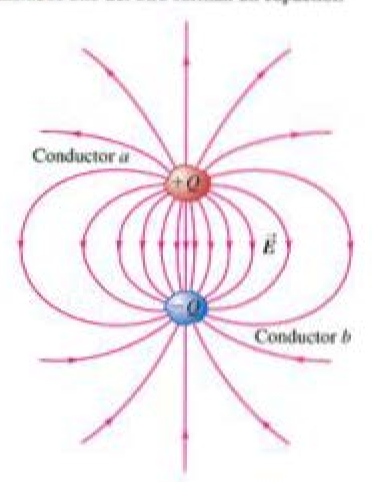
Cuando habilitamos una ratonera antigua de resorte o tensamos la cuerda de un arco, almacenamos energía mecánica en forma de energía potencial elástica. Un capacitor es un dispositivo que almacena energía potencial *eléctrica* y carga eléctrica. Para hacer un capacitor, basta aislar dos conductores uno del otro. Para almacenar energía en este dispositivo hay que transferir carga de un conductor al otro, de manera que uno tenga carga negativa y el otro tenga una cantidad igual de carga positiva. Debe realizarse trabajo para trasladar las cargas a través de la diferencia de potencial resultante entre los conductores, y el trabajo efectuado se almacena como energía potencial eléctrica.

Los capacitores tienen un gran número de aplicaciones prácticas en dispositivos tales como unidades de flash fotográfico, láseres pulsados, sensores de bolsas de aire para automóviles y receptores de radio y televisión. En capítulos posteriores revisaremos muchas de estas aplicaciones (en particular en el capítulo 31, en el que se verá el papel crucial que desempeñan los capacitores en los circuitos de corriente alterna que invaden nuestra sociedad tecnológica). No obstante, en este capítulo se hace énfasis en las propiedades fundamentales de los capacitores. Para un capacitor en particular, la razón entre la carga de cada conductor y la diferencia de potencial entre los conductores es una constante llamada *capacitancia*. La capacitancia depende de las dimensiones y las formas de los conductores y del material aislante (si lo hay) entre ellos. En comparación con el caso en que solo hay vacío entre los conductores, la capacitancia aumenta cuando está presente un material aislante (un *dieléctrico*). Esto sucede porque en el interior del material aislante ocurre una redistribución de la carga, llamada *polarización*. El estudio de la polarización ampliará nuestra comprensión de las propiedades eléctricas de la materia.

Los capacitores también ofrecen una forma nueva de pensar acerca de la energía potencial eléctrica. La energía almacenada en un capacitor con carga guarda relación con el campo eléctrico en el espacio entre los conductores. Veremos que la energía potencial eléctrica puede considerarse almacenada *en el campo mismo*. La idea de que el campo eléctrico es en sí un almacén de energía reside en el corazón de la teoría de las ondas electromagnéticas y de nuestra concepción moderna de la naturaleza de la luz, que estudiaremos en el capítulo 32.

24.1 Capacitores y capacitancia

Dos conductores cualesquiera separados por un aislante (o un vacío) forman un **capacitor** (figura 24.1). En la mayoría de las aplicaciones prácticas, cada conductor tiene inicialmente una carga neta cero, y los electrones son transferidos de un conductor al otro; a esta acción se le denomina *cargar* el capacitor. Entonces, los dos conductores tienen cargas de igual magnitud y signo contrario, y la carga *neta* en el capacitor en su conjunto es igual a cero. En este capítulo se supondrá que este es el caso. Cuando se dice que un capacitor tiene una carga Q, o que una carga Q está *almacenada* en el capacitor, significa que el conductor con el potencial más elevado tiene carga $+Q$ y el conductor con el potencial más bajo tiene carga $-Q$. Hay que tener presente esto en el análisis y los ejemplos que siguen.



24.1 Dos conductores cualesquiera a y b aislados uno del otro forman un capacitor.

En los diagramas de circuitos, un capacitor se representa con cualquiera de estos símbolos:

⊣⊢ ⊣(⊢

En cada uno de estos símbolos, las líneas verticales (rectas o curvas) representan los conductores, y las líneas horizontales representan los alambres conectados a uno y otro conductor. Una manera común de cargar un capacitor es conectar estos dos alambres a las terminales opuestas de una batería. Una vez establecidas las cargas Q y $-Q$ en los conductores, se desconecta la batería. Esto genera una *diferencia de potencial* fija V_{ab} entre los conductores (es decir, el potencial del conductor con carga positiva a con respecto al potencial del conductor con carga negativa b), que es exactamente igual al voltaje de la batería.

El campo eléctrico en cualquier punto de la región entre los conductores es proporcional a la magnitud de carga Q en cada conductor. Por lo tanto, la diferencia de potencial V_{ab} entre los conductores también es proporcional a Q. Si se duplica la magnitud de la carga en cada conductor, también se duplican la densidad de carga en cada punto, el campo eléctrico en cada punto y la diferencia de potencial entre los conductores; sin embargo, la *razón* entre la carga y la diferencia de potencial no cambia. Esta razón se llama **capacitancia** C del capacitor:

$$C = \frac{Q}{V_{ab}} \qquad \text{(definición de capacitancia)} \qquad (24.1)$$

La unidad del SI para la capacitancia es el **farad** (1 F), en honor del físico inglés del siglo XIX, Michael Faraday. De acuerdo con la ecuación (24.1), un farad es igual a un *coulomb por volt* (1 C/V):

$$1\ \text{F} = 1\ \text{farad} = 1\ \text{C/V} = 1\ \text{coulomb/volt}$$

CUIDADO **Capacitancia contra coulombs** No confunda el símbolo C de la capacitancia (que siempre aparece en cursivas) con la abreviatura C de los coulombs (que nunca se escribe con cursivas).

Cuanto mayor es la capacitancia C de un capacitor, mayor será la magnitud Q de la carga en cada conductor para una diferencia de potencial dada V_{ab}, y, por lo tanto, mayor será la cantidad de energía almacenada. (Hay que recordar que el potencial es energía potencial por unidad de carga). Así, *la capacitancia es una medida de la cantidad de energía que puede almacenar un capacitor*. Se verá que el valor de la capacitancia solo depende de las dimensiones de los conductores, así como de la naturaleza del material aislante que hay entre ellos. (El comentario anterior acerca de que la capacitancia es independiente de Q y de V_{ab} no se aplica a ciertos tipos especiales de materiales aislantes. Sin embargo, en este libro no se estudiarán esos materiales).

MasteringPHYSICS

ActivPhysics 11.11.6: Electric Potential: Qualitative Introduction
ActivPhysics 11.12.1 and 11.12.3: Electric Potential, Field, and Force

Cálculo de la capacitancia: Capacitores con vacío

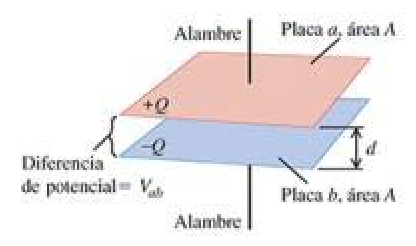
Es posible calcular la capacitancia C de un capacitor determinado obteniendo la diferencia de potencial V_{ab} entre los conductores para una magnitud de carga dada Q y

aplicando luego la ecuación (24.1). Por ahora solo se considerarán *capacitores con vacío*; es decir, se supondrá que los conductores que constituyen el capacitor están separados por un espacio vacío.

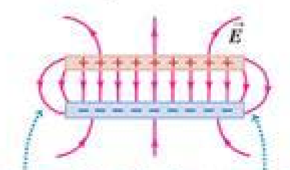
El tipo más sencillo de capacitor consiste en dos placas conductoras paralelas, cada una con área A, separadas por una distancia d que es pequeña en comparación con sus dimensiones (figura 24.2*a*). Cuando las placas tienen carga, el campo eléctrico está localizado casi por completo en la región entre las placas (figura 24.2*b*). Como se dijo en el ejemplo 22.8 (sección 22.4), el campo entre esas placas es esencialmente *uniforme*, y las cargas en las placas se distribuyen de manera uniforme en las superficies opuestas. Este arreglo recibe el nombre de **capacitor de placas paralelas**.

24.2 Capacitor de placas paralelas con carga.

a) Arreglo de las placas del capacitor



b) Vista lateral del campo eléctrico $\vec{E}$



Cuando la separación de las placas es pequeña en comparación con su tamaño, el campo eléctrico de los bordes es despreciable.

En el ejemplo 21.12 (sección 21.5) se calculó la magnitud del campo eléctrico E para este arreglo utilizando el principio de superposición de campos eléctricos, y de nuevo en el ejemplo 22.8 (sección 22.4) empleando la ley de Gauss. Sería una buena idea revisar esos ejemplos. Se vio que $E = \sigma/\epsilon_0$, donde σ es la magnitud (el valor absoluto) de la densidad de carga superficial en cada placa. Esta es igual a la magnitud de la carga total Q en cada placa dividida entre el área A de la placa, es decir, $\sigma = Q/A$, por lo que la magnitud del campo E se expresa como

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{Q}{\epsilon_0 A}$$

El campo es uniforme y la distancia entre las placas es d, por lo que la diferencia de potencial (o voltaje) entre las dos placas es

$$V_{ab} = Ed = \frac{1}{\epsilon_0}\frac{Qd}{A}$$

A partir de esto se observa que la capacitancia C de un capacitor de placas paralelas con vacío es

$$C = \frac{Q}{V_{ab}} = \epsilon_0 \frac{A}{d} \quad \text{(capacitancia de un capacitor de placas paralelas con vacío)} \qquad (24.2)$$

La capacitancia depende solo de la geometría del capacitor; es directamente proporcional al área A de cada placa e inversamente proporcional a su separación d. Las cantidades A y d son constantes para un capacitor dado, y ϵ_0 es una constante universal. Así, con vacío, la capacitancia C es una constante independiente de la carga en el capacitor o de la diferencia de potencial entre las placas. Si una de las placas del capacitor es flexible, la capacitancia C se modifica conforme cambia la separación d de las placas. Este es el principio de operación de un micrófono de condensador (figura 24.3).

24.3 Dentro de un micrófono de condensador hay un capacitor con una placa rígida y una placa flexible. Las dos placas se mantienen con una diferencia de potencial constante V_{ab}. Las ondas sonoras provocan que la placa flexible se mueva hacia atrás y hacia adelante, lo que hace variar la capacitancia C y ocasiona que la carga fluya hacia y desde el capacitor de acuerdo con la relación $C = Q/V_{ab}$. Así, la onda sonora se convierte en un flujo de carga que puede amplificarse y grabarse en forma digital.



Cuando hay materia entre las placas, sus propiedades afectan la capacitancia. En la sección 24.4 se volverá a tratar este asunto. Entre tanto, se debe hacer notar que si el espacio entre las placas contiene aire a presión atmosférica en lugar de vacío, la capacitancia difiere de lo que predice la ecuación (24.2) en menos del 0.06 por ciento.

En la ecuación (24.2), si A se expresa en metros cuadrados y d en metros, C está en farads. Las unidades de ϵ_0 son $C^2/N \cdot m^2$, por lo que se observa que

$$1\ F = 1\ C^2/N \cdot m = 1\ C^2/J$$

Como $1\ V = 1\ J/C$ (energía por unidad de carga), esto es congruente con la definición $1\ F = 1\ C/V$. Por último, las unidades de ϵ_0 se expresan como $1\ C^2/N \cdot m^2 = 1\ F/m$, por lo que

$$\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}\ F/m$$

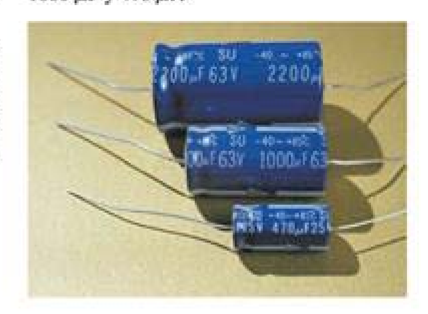
Esta relación es útil en los cálculos de la capacitancia y también ayuda a comprobar que la ecuación (24.2) es consistente en términos de dimensiones.

Un farad es una capacitancia muy grande, como lo ilustra el siguiente ejemplo. En muchas aplicaciones, las unidades más convenientes de capacitancia son el *micro-*

farad (1 μF = 10^{-6} F) y el *picofarad* (1 pF = 10^{-12} F). Por ejemplo, la unidad de flash fotográfico utiliza un capacitor de algunos cientos de microfarads (figura 24.4), mientras que las capacitancias en el circuito de sintonía de un aparato de radio por lo común están entre 10 y 100 picofarads.

Para *cualquier* capacitor con vacío, la capacitancia C solo depende de las formas, las dimensiones y la separación de los conductores que constituyen el capacitor. Si las formas del conductor son más complejas que las del capacitor de placas paralelas, la expresión de la capacitancia es más complicada que la ecuación (24.2). En los siguientes ejemplos se ilustra el cálculo de C para otras dos geometrías distintas de los conductores.

24.4 Los capacitores comerciales están etiquetados con el valor de su capacitancia. Para estos capacitores, C = 2200 μF, 1000 μF y 470 μF.





Ejemplo 24.1 Tamaño de un capacitor de 1 F

Las placas paralelas de un capacitor de 1.0 F están separadas 1.0 mm. ¿Cuál es el área de las placas?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Este problema utiliza la relación entre la capacitancia C, la separación d de las placas y el área A de estas (la incógnita) para un capacitor de placas paralelas. Se despeja A de la ecuación (24.2).

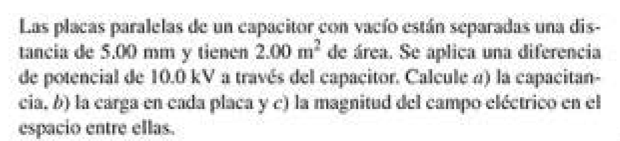
EJECUTAR: De acuerdo con la ecuación (24.2),

$$A = \frac{Cd}{\epsilon_0} = \frac{(1.0\ \text{F})(1.0 \times 10^{-3}\ \text{m})}{8.85 \times 10^{-12}\ \text{F/m}} = 1.1 \times 10^8\ \text{m}^2$$

EVALUAR: Esto corresponde a un cuadrado ¡de alrededor de 10 km (cerca de 6 millas) por lado! El volumen de este capacitor sería por lo menos $Ad = 1.1 \times 10^5\ \text{m}^3$, equivalente a un cubo de 50 m por lado aproximadamente. De hecho, es posible fabricar capacitores de 1 F que miden unos cuantos *centímetros* por lado. La clave está en que exista una sustancia apropiada entre las placas en lugar del vacío, de modo que (entre otras cosas) la separación d de las placas se pueda reducir en gran medida. En la sección 24.4 se estudiará esto con más detalle.



Ejemplo 24.2 Propiedades de un capacitor de placas paralelas



Las placas paralelas de un capacitor con vacío están separadas una distancia de 5.00 mm y tienen 2.00 m^2 de área. Se aplica una diferencia de potencial de 10.0 kV a través del capacitor. Calcule *a*) la capacitancia, *b*) la carga en cada placa y *c*) la magnitud del campo eléctrico en el espacio entre ellas.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Se conocen los datos del área de las placas A, la separación d entre ellas y la diferencia de potencial $V_{ab} = 1.00 \times 10^4$ V para este capacitor de placas paralelas. Las incógnitas son la capacitancia C, la carga Q en cada placa y la magnitud del campo eléctrico E. Se utiliza la ecuación (24.2) para calcular C y después se usa la ecuación (24.1) y V_{ab} para obtener Q. Se emplea $E = Q/\epsilon_0 A$ para obtener E.

EJECUTAR: *a*) De acuerdo con la ecuación (24.2),

$$C = \epsilon_0 \frac{A}{d} = (8.85 \times 10^{-12}\ \text{F/m})\frac{(2.00\ \text{m}^2)}{5.00 \times 10^{-3}\ \text{m}}$$
$$= 3.54 \times 10^{-9}\ \text{F} = 0.00354\ \mu\text{F}$$

b) La carga en el capacitor es

$$Q = CV_{ab} = (3.54 \times 10^{-9}\ \text{C/V})(1.00 \times 10^4\ \text{V})$$
$$= 3.54 \times 10^{-5}\ \text{C} = 35.4\ \mu\text{C}$$

La placa con mayor potencial tiene una carga de +35.4 μC, y la otra tiene una carga de −35.4 μC.

c) La magnitud del campo eléctrico es

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{Q}{\epsilon_0 A} = \frac{3.54 \times 10^{-5}\ \text{C}}{(8.85 \times 10^{-12}\ \text{C}^2/\text{N}\cdot\text{m}^2)(2.00\ \text{m}^2)}$$
$$= 2.00 \times 10^6\ \text{N/C}$$

EVALUAR: También podemos calcular E recordando que el campo eléctrico tiene igual magnitud que el gradiente de potencial [ecuación (23.22)]. Como el campo entre las placas es uniforme,

$$E = \frac{V_{ab}}{d} = \frac{1.00 \times 10^4\ \text{V}}{5.00 \times 10^{-3}\ \text{m}} = 2.00 \times 10^6\ \text{V/m}$$

(Recuerde que 1 N/C = 1 V/m).



Ejemplo 24.3 Capacitor esférico

Dos esferas huecas conductoras y concéntricas están separadas por vacío (figura 24.5). La esfera hueca interior tiene una carga total $+Q$ y radio exterior r_a, y la esfera hueca exterior tiene carga $-Q$ y radio interior r_b. Determine la capacitancia de este capacitor esférico.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Por definición, la capacitancia C es la magnitud Q de la carga en cualquiera de las esferas dividida entre la diferencia de potencial V_{ab} entre las mismas. Primero calcularemos V_{ab}, y luego usaremos la ecuación (24.1) para calcular la capacitancia $C = Q/V_{ab}$.

EJECUTAR: Usando una superficie gaussiana como la mostrada en la figura 24.5, en el ejemplo 22.5 (sección 22.4) calculamos que la carga en una esfera conductora produce un campo igual a cero *dentro* de la esfera, de modo que la esfera exterior no contribuye al campo entre las esferas. Por lo tanto, el campo eléctrico *y* el potencial eléctrico entre las esferas huecas son iguales que los que hay en la parte exterior de una esfera conductora de carga $+Q$. Ese problema se consideró en el ejemplo 23.8 (sección 23.3), de modo que el mismo resultado se aplica aquí: el potencial en cualquier punto entre las esferas es $V = Q/4\pi\epsilon_0 r$. Por lo tanto, el potencial del conductor interior (positivo) en $r = r_a$ con respecto al del conductor exterior (negativo) en $r = r_b$ es

$$V_{ab} = V_a - V_b = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_a} - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_b}$$
$$= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_b}\right) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{r_b - r_a}{r_a r_b}$$

Entonces, la capacitancia es

$$C = \frac{Q}{V_{ab}} = 4\pi\epsilon_0 \frac{r_a r_b}{r_b - r_a}$$

Como ejemplo, si $r_a = 9.5$ cm y $r_b = 10.5$ cm,

$$C = 4\pi(8.85 \times 10^{-12}\ \text{F/m})\frac{(0.095\ \text{m})(0.105\ \text{m})}{0.010\ \text{m}}$$
$$= 1.1 \times 10^{-10}\ \text{F} = 110\ \text{pF}$$

EVALUAR: Podemos relacionar la expresión de C con la de un capacitor de placas paralelas. La cantidad $4\pi r_a r_b$ es intermedia entre las áreas $4\pi r_a^2$ y $4\pi r_b^2$ de las dos esferas; de hecho, es la *media geométrica* de las dos áreas, lo que se indica con A_{gm}. La distancia entre las esferas es $d = r_b - r_a$, por lo que se escribe $C = 4\pi\epsilon_0 r_a r_b/(r_b - r_a) = \epsilon_0 A_{gm}/d$. Esto tiene la misma forma para placas paralelas: $C = \epsilon_0 A/d$. Si la distancia entre las esferas es muy pequeña en comparación con sus radios, la capacitancia es la misma que para placas paralelas con la misma área y separación.

24.5 Capacitor esférico.





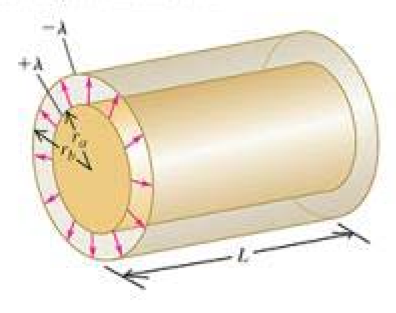
Ejemplo 24.4 Capacitor cilíndrico

Dos conductores cilíndricos coaxiales y largos están separados por un vacío (figura 24.6). El cilindro interior tiene un radio r_a y densidad de carga lineal $+\lambda$. El cilindro exterior tiene un radio interior r_b y densidad de carga lineal $-\lambda$. Obtenga la capacitancia por unidad de longitud para este capacitor.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Igual que en el ejemplo 24.3, se usa la definición de capacitancia, $C = Q/V_{ab}$. Usamos también el resultado del ejemplo 23.10 (sección 23.3) para obtener la diferencia de potencial V_{ab} entre los cilindros, y calcular la carga Q en los cilindros de longitud L a partir de la densidad de carga lineal. Luego se calcula la capacitancia C correspondiente usando la ecuación (24.1). La incógnita es la capacitancia dividida entre L.

24.6 Un capacitor cilíndrico largo. En esta figura la densidad de carga lineal λ se supone positiva. La magnitud de carga en una longitud L de cualquier cilindro es λL.



EJECUTAR: Como en el ejemplo 24.3, el potencial V entre los cilindros no se ve afectado por la presencia del cilindro exterior con carga. Por lo que el resultado del ejemplo 23.10 para el potencial afuera de un cilindro conductor con carga también se cumple en este ejemplo para el potencial en el espacio entre los cilindros:

$$V = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\ln\frac{r_0}{r}$$

donde r_0 es el radio *finito*, arbitrario, en el que $V = 0$. Se toma el radio $r_0 = r_b$, el radio de la superficie interior del cilindro exterior. Entonces, el potencial en la superficie exterior del cilindro interior (donde $r = r_a$) es igual al potencial V_{ab} del cilindro interior a (positivo) con respecto al cilindro exterior b (negativo):

$$V_{ab} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\ln\frac{r_b}{r_a}$$

Si λ es positiva como en la figura 24.6, entonces V_{ab} también es positivo: el cilindro interior está a un potencial más elevado que el exterior.

La carga total Q en una longitud L es $Q = \lambda L$, por lo que, a partir de la ecuación (24.1), la capacitancia C de una longitud L es

$$C = \frac{Q}{V_{ab}} = \frac{\lambda L}{\dfrac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\ln\dfrac{r_b}{r_a}} = \frac{2\pi\epsilon_0 L}{\ln(r_b/r_a)}$$

La capacitancia por unidad de longitud es

$$\frac{C}{L} = \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln(r_b/r_a)}$$

Si se sustituye $\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}$ F/m = 8.85 pF/m, se obtiene

$$\frac{C}{L} = \frac{55.6 \text{ pF/m}}{\ln(r_b/r_a)}$$

EVALUAR: La capacitancia de los cilindros coaxiales está determinada en su totalidad por las dimensiones, tal como ocurre en el caso de las placas paralelas y los capacitores esféricos. Los cables coaxiales comunes están fabricados de este modo, pero con un material aislante en lugar de vacío entre los conductores. El cable típico para conectar un televisor a la entrada de TV por cable tiene una capacitancia por unidad de longitud de 69 pF/m.

Evalúe su comprensión de la sección 24.1 Un capacitor tiene vacío en el espacio entre los conductores. Si se duplica la cantidad de carga en cada conductor, ¿qué pasa con la capacitancia? **i.** Aumenta; **ii.** disminuye; **iii.** permanece igual; **iv.** la respuesta depende del tamaño o la forma de los conductores.



24.2 Capacitores en serie y en paralelo

Los capacitores se fabrican con ciertas capacitancias y voltajes de trabajo estándar (figura 24.7). Sin embargo, estos valores estándar podrían no ser los que se necesitan en una aplicación específica. Se pueden obtener los valores requeridos combinando capacitores; las posibles combinaciones son muchas, pero las más sencillas son la conexión en serie y la conexión en paralelo.



24.7 Algunos de los capacitores disponibles en el mercado.

Capacitores en serie

La figura 24.8*a* muestra un diagrama de una **conexión en serie**. Se conectan en serie dos capacitores (uno en seguida del otro) mediante alambres conductores entre los puntos a y b. Inicialmente, ambos capacitores están sin carga. Cuando se aplica una diferencia de potencial V_{ab} positiva y constante entre los puntos a y b, los capacitores se cargan; la figura muestra que la carga en *todas* las placas conductoras tiene la misma magnitud. Para saber por qué, primero observe que la placa superior de C_1 adquiere una carga positiva Q. El campo eléctrico de esta carga positiva atrae carga negativa hacia la placa inferior de C_1 hasta que todas las líneas de campo que comienzan en la placa superior terminan en la placa inferior. Para ello se requiere que la placa inferior tenga carga $-Q$. Estas cargas negativas tuvieron que venir de la placa superior de C_2, la cual se carga positivamente con carga $+Q$. Luego, esta carga positiva atrae la carga negativa $-Q$ desde la conexión en el punto b a la placa inferior de C_2. La carga total en la placa inferior de C_1 y la placa superior de C_2, en conjunto, debe ser siempre igual a cero porque estas placas solo están conectadas una con otra y con nada más. Así, *en una conexión en serie, la magnitud de la carga en todas las placas es la misma.*

En relación con la figura 24.8*a*, las diferencias de potencial entre los puntos a y c, c y b, y a y b pueden representarse como

$$V_{ac} = V_1 = \frac{Q}{C_1} \qquad V_{cb} = V_2 = \frac{Q}{C_2}$$

$$V_{ab} = V = V_1 + V_2 = Q\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right)$$

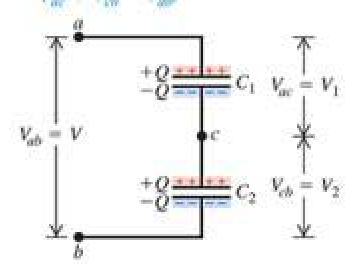
por lo que

$$\frac{V}{Q} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \tag{24.3}$$

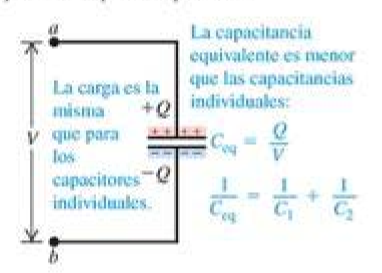
Siguiendo la convención habitual, los símbolos V_1, V_2 y V se utilizan para indicar las *diferencias* de potencial V_{ac} (a través del primer capacitor), V_{cb} (a través del segundo capacitor) y V_{ab} (a través de toda la combinación de capacitores), respectivamente.

24.8 Conexión en serie de dos capacitores.

a) Dos capacitores en serie



b) Un solo capacitor equivalente



Aplicación Capacitancia y pantallas táctiles
La pantalla táctil de un teléfono móvil, un reproductor MP3 o (como se muestra aquí) un dispositivo médico usan la física de capacitores. Detrás de la pantalla hay dos recubrimientos paralelos, uno detrás de otro, de tiras delgadas de un conductor transparente como lo es el óxido de indio. Entre los dos recubrimientos se mantiene un voltaje determinado. Las tiras de un recubrimiento son perpendiculares a las del otro; los puntos donde las dos tiras se traslapan actúan como una red de capacitores. Cuando usted pasa su dedo (un conductor) por un punto de la pantalla, su dedo y el recubrimiento conductor frontal actúan como un segundo capacitor en serie. El circuito formado por los recubrimientos conductores detecta la ubicación del cambio de capacitancia y, por lo tanto, detecta el lugar donde usted tocó la pantalla.



La **capacitancia equivalente** C_{eq} de la combinación en serie se define como la capacitancia de un *solo* capacitor para el que la carga Q es la misma de la combinación, cuando la diferencia de potencial V es igual. En otras palabras, la combinación se puede sustituir por un *capacitor equivalente* de capacitancia C_{eq}. Para un capacitor así, como el que se ilustra en la figura 24.8*b*,

$$C_{eq} = \frac{Q}{V} \quad \text{o bien,} \quad \frac{1}{C_{eq}} = \frac{V}{Q} \tag{24.4}$$

Al combinar las ecuaciones (24.3) y (24.4), se obtiene

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

Este análisis se puede ampliar a cualquier número de capacitores conectados en serie. Se obtiene el siguiente resultado para el *recíproco* de la capacitancia equivalente:

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + \cdots \quad \text{(capacitores en serie)} \tag{24.5}$$

El recíproco de la capacitancia equivalente de una combinación en serie es igual a la suma de los recíprocos de las capacitancias individuales. En una conexión en serie, la capacitancia equivalente siempre es *menor* que cualquiera de las capacitancias individuales.

CUIDADO Capacitores en serie En una combinación en serie, la magnitud de la carga es la misma en todas las placas de todos los capacitores; sin embargo, las diferencias de potencial de los capacitores individuales *no* son las mismas a menos que sus capacitancias individuales sean iguales. Las diferencias de potencial de los capacitores individuales se suman para dar la diferencia de potencial total a través de la combinación en serie: $V_{total} = V_1 + V_2 + V_3 + \cdots$.

Capacitores en paralelo

El arreglo que se muestra en la figura 24.9*a* se llama **conexión en paralelo**. Dos capacitores están conectados en paralelo entre los puntos *a* y *b*. En este caso, las placas superiores de los dos capacitores están conectadas mediante alambres conductores para formar una superficie equipotencial, y las placas inferiores forman otra. Entonces, *en una conexión en paralelo, la diferencia de potencial para todos los capacitores individuales es la misma*, y es igual a $V_{ab} = V$. Sin embargo, las cargas Q_1 y Q_2 no son necesariamente iguales, ya que pueden llegar cargas a cada capacitor de manera independiente desde la fuente (como una batería) de voltaje V_{ab}. Las cargas son

$$Q_1 = C_1V \quad \text{y} \quad Q_2 = C_2V$$

La carga *total* Q de la combinación, y por consiguiente la carga total del capacitor equivalente, es

$$Q = Q_1 + Q_2 = (C_1 + C_2)V$$

por lo que

$$\frac{Q}{V} = C_1 + C_2 \tag{24.6}$$

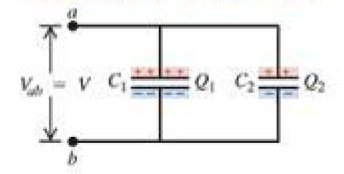
La combinación en paralelo es equivalente a un solo capacitor con la misma carga total $Q = Q_1 + Q_2$ y diferencia de potencial V de la combinación (figura 24.9*b*). La capacitancia equivalente de la combinación, C_{eq}, es la misma que la capacitancia Q/V de este capacitor equivalente único. Así, a partir de la ecuación (24.6),

$$C_{eq} = C_1 + C_2$$

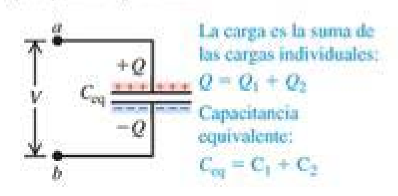
24.9 Conexión en paralelo de dos capacitores.

a) Dos capacitores en paralelo

Capacitores en paralelo:
- Los capacitores tienen el mismo potencial V.
- La carga en cada capacitor depende de su capacitancia: $Q_1 = C_1V$, $Q_2 = C_2V$.



b) Capacitor equivalente



De igual forma es posible demostrar que para cualquier número de capacitores en paralelo,

$$C_{eq} = C_1 + C_2 + C_3 + \cdots \qquad \text{(capacitores en paralelo)} \qquad (24.7)$$

La capacitancia equivalente de una combinación en paralelo es igual a la *suma* de las capacitancias individuales. En una conexión en paralelo, la capacitancia equivalente siempre es *mayor que* cualquier capacitancia individual.

CUIDADO **Capacitores en paralelo** Las diferencias de potencial son las mismas para todos los capacitores en una combinación en paralelo; sin embargo, las cargas en los capacitores individuales *no* son las mismas a menos que sus capacitancias individuales sean iguales. Las cargas en los capacitores individuales se suman para dar la carga total de la combinación en paralelo: $Q_{total} = Q_1 + Q_2 + Q_3 + \cdots$. [Compare estos enunciados con los del párrafo "Cuidado" que sigue a la ecuación (24.5)].


Video Tutor Demo

Estrategia para resolver problemas 24.1 Capacitancia equivalente



IDENTIFICAR *los conceptos relevantes:* El concepto de capacitancia equivalente es útil siempre que se conectan dos o más capacitores.

PLANTEAR *el problema* de acuerdo con los siguientes pasos:
1. Elabore un diagrama del arreglo de los capacitores.
2. Identifique todos los grupos de capacitores que están conectados en serie o en paralelo.
3. Recuerde que cuando se dice que un capacitor "tiene carga Q", significa que la placa con mayor potencial tiene carga $+Q$, y la otra placa tiene carga $-Q$.

EJECUTAR *la solución* como sigue:
1. Use la ecuación (24.5) para calcular la capacitancia equivalente de los capacitores conectados en serie, como en la figura 24.8. Cada uno de estos capacitores tiene la *misma carga*, en el entendido de que estaban sin carga antes de conectarse; esa carga es la misma que la de un capacitor equivalente. La diferencia de potencial a través de la combinación es la suma de las diferencias de potencial de los capacitores individuales.
2. Use la ecuación (24.7) para calcular la capacitancia equivalente de los capacitores conectados en paralelo, como en la figura 24.9. Todos estos capacitores tiene la *misma diferencia de potencial* a través de ellos; esa diferencia de potencial es la misma que la de un capacitor equivalente. La carga total en la combinación es la suma de las cargas de los capacitores individuales.
3. Después de sustituir todos los grupos en serie o en paralelo que identificó inicialmente, tal vez descubra que aparecen más de tales grupos. Sustituya esos grupos usando el mismo procedimiento anterior hasta que ya no haya más sustituciones. Si luego se necesita calcular la carga o la diferencia de potencial para un capacitor individual original, tiene que volver a seguir sus pasos.

EVALUAR *la respuesta:* Compruebe que el resultado tenga sentido. Si los capacitores están conectados en serie, la capacitancia equivalente C_{eq} debe ser *menor* que cualquiera de las capacitancias individuales. Si los capacitores están conectados en paralelo, C_{eq} debe ser *mayor* que cualquiera de las capacitancias individuales.

Ejemplo 24.5 Capacitores en serie y en paralelo



En las figuras 24.8 y 24.9, sean $C_1 = 6.0\ \mu F$, $C_2 = 3.0\ \mu F$ y $V_{ab} = 18$ V. Obtenga la capacitancia y la carga equivalentes, y la diferencia de potencial para cada capacitor cuando los capacitores se conectan *a*) en serie (figura 24.8) y *b*) en paralelo (figura 24.9).

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: En ambos incisos de este ejemplo una incógnita es la capacitancia equivalente C_{eq}, que para la combinación en serie del inciso *a*) está dada por la ecuación (24.5), y para la combinación en paralelo del inciso *b*) por la ecuación (24.7). En cada inciso podemos encontrar la carga y la diferencia de potencial utilizando la definición de capacitancia, ecuación (24.1), y las reglas descritas en la Estrategia para resolver problemas 24.1.

EJECUTAR: *a*) De acuerdo con la ecuación (24.5), para una combinación en serie,

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{1}{6.0\ \mu F} + \frac{1}{3.0\ \mu F} \qquad C_{eq} = 2.0\ \mu F$$

La carga Q en cada capacitor en serie es igual a la carga en un capacitor equivalente:

$$Q = C_{eq}V = (2.0\ \mu F)(18\ V) = 36\ \mu C$$

La diferencia de potencial a través de cada capacitor es inversamente proporcional a su capacitancia:

$$V_{ac} = V_1 = \frac{Q}{C_1} = \frac{36\ \mu C}{6.0\ \mu F} = 6.0\ V$$

$$V_{cb} = V_2 = \frac{Q}{C_2} = \frac{36\ \mu C}{3.0\ \mu F} = 12.0\ V$$

b) Según la ecuación (24.7), para una combinación en paralelo,

$$C_{eq} = C_1 + C_2 = 6.0\ \mu F + 3.0\ \mu F = 9.0\ \mu F$$

La diferencia de potencial a través de cada uno de los capacitores es la misma que la del capacitor equivalente, 18 V. La carga en cada capacitor es directamente proporcional a su capacitancia:

$$Q_1 = C_1V = (6.0\ \mu F)(18\ V) = 108\ \mu C$$

$$Q_2 = C_2V = (3.0\ \mu F)(18\ V) = 54\ \mu C$$

EVALUAR: Como se esperaba, la capacitancia equivalente C_{eq} para la combinación en serie del inciso *a*) es menor que C_1 o C_2, en tanto que

Continúa

para la combinación en paralelo del inciso *b*), es mayor que C_1 o C_2. Para dos capacitores en serie, como en el inciso *a*), la carga es la misma en cualquier capacitor y la diferencia de potencial *más grande* ocurre a través del capacitor con la *menor* capacitancia. Además, la suma de las diferencias de potencial a través de los capacitores individuales en serie es igual a la diferencia de potencial del capacitor equivalente: $V_{ac} + V_{cb} = V_{ab} = 18$ V. En contraste, para dos capacitores en paralelo, como en el inciso *b*), cada capacitor tiene la misma diferencia de potencial y la *mayor* carga está en el capacitor con la *mayor* capacitancia. ¿Puede usted demostrar que la carga total $Q_1 + Q_2$ en la combinación en paralelo es igual a la carga $Q = C_{eq}V$ del capacitor equivalente?

Ejemplo 24.6 Red de capacitores



Obtenga la capacitancia equivalente de la red de cinco capacitores que se muestra en la figura 24.10*a*.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Estos capacitores no están conectados todos en serie ni todos en paralelo. Sin embargo, podemos identificar partes del arreglo que *sí están* en serie o en paralelo. Combinaremos esto como se describió en la Estrategia para resolver problemas 24.1 para calcular la capacitancia equivalente neta, usando la ecuación (24.5) de conexiones en serie, y la ecuación (24.7) de conexiones en paralelo.

EJECUTAR: Los subtítulos de la figura 24.10 describen el procedimiento. Primero se usa la ecuación (24.5) para sustituir la combinación en serie de 12 μF y 6 μF por su capacitancia equivalente C':

$$\frac{1}{C'} = \frac{1}{12\,\mu\text{F}} + \frac{1}{6\,\mu\text{F}} \qquad C' = 4\,\mu\text{F}$$

Esto da la combinación equivalente que se ilustra en la figura 24.10*b*. Ahora vemos tres capacitores en paralelo, y usamos la ecuación (24.7) para sustituirlos por su capacitancia equivalente C'':

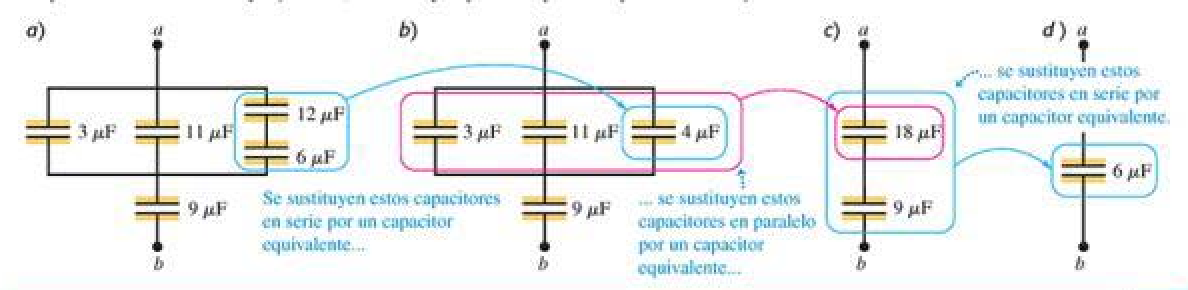
$$C'' = 3\,\mu\text{F} + 11\,\mu\text{F} + 4\,\mu\text{F} = 18\,\mu\text{F}$$

Esto da la combinación equivalente de la figura 24.10*c*, la cual tiene dos capacitores en serie. Se usa la ecuación (24.5) para sustituirlos por su capacitancia equivalente C_{eq}, la cual es nuestra incógnita (figura 24.10*d*):

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{18\,\mu\text{F}} + \frac{1}{9\,\mu\text{F}} \qquad C_{eq} = 6\,\mu\text{F}$$

EVALUAR: Si la diferencia de potencial a través de toda la red de la figura 24.10*a* es $V_{ab} = 9.0$ V, la carga neta de la red es $Q = C_{eq}V_{ab} = (6\,\mu\text{F})(9.0\text{ V}) = 54\,\mu$C. ¿Puede calcular la carga en los cinco capacitores individuales y el voltaje a través de ellos?

24.10 *a*) Red de capacitores entre los puntos *a* y *b*. *b*) Los capacitores de 12 y 6 μF conectados en serie en *a*) se sustituyen por un capacitor equivalente de 4 μF. *c*) Los capacitores en paralelo de 3, 11 y 4 μF en *b*) se sustituyen por un capacitor equivalente de 18 μF. *d*) Por último, los capacitores en serie de 18 y 9 μF en *c*) se sustituyen por un capacitor equivalente de 6 μF.



Evalúe su comprensión de la sección 24.2 Se desea conectar un capacitor de 4 μF y otro de 8 μF. *a*) ¿Con qué tipo de conexión tendrá el capacitor de 4 μF una diferencia de potencial más grande que el de 8 μF? **i.** En serie; **ii.** en paralelo; **iii.** indistintamente, en serie o paralelo; **iv.** ni en serie ni en paralelo. *b*) ¿Con qué tipo de conexión tendrá el capacitor de 4 μF una carga mayor que la carga del capacitor de 8 μF? **i.** En serie; **ii.** en paralelo; **iii.** indistintamente, en serie o paralelo; **iv.** ni en serie ni en paralelo. | MP

24.3 Almacenamiento de energía en capacitores y energía de campo eléctrico

Muchas de las aplicaciones más importantes de los capacitores dependen de su capacidad para almacenar energía. La energía potencial eléctrica almacenada en un capacitor cargado es exactamente igual a la cantidad de trabajo requerido para cargarlo, es decir, para separar cargas opuestas y colocarlas en conductores diferentes. Cuando el capacitor se descarga, esta energía almacenada se recupera en forma de trabajo realizado por las fuerzas eléctricas.

Se puede obtener la energía potencial U de un capacitor, calculando el trabajo W que se requiere para cargarlo. Suponga que cuando se carga el capacitor, la carga final es Q y la diferencia de potencial final es V. Según la ecuación (24.1), estas cantidades están relacionadas por

$$V = \frac{Q}{C}$$

Sean q y v la carga y la diferencia de potencial, respectivamente, en una etapa intermedia del proceso de carga; entonces, $v = q/C$. En esta etapa, el trabajo dW requerido para transferir un elemento adicional de carga dq es

$$dW = v\,dq = \frac{q\,dq}{C}$$

El trabajo total W necesario para incrementar la carga q del capacitor, de cero a un valor final Q, es

$$W = \int_0^W dW = \frac{1}{C}\int_0^Q q\,dq = \frac{Q^2}{2C} \quad \text{(trabajo para cargar el capacitor)} \quad (24.8)$$

Esto también es igual al trabajo total realizado por el campo eléctrico sobre la carga cuando el capacitor se descarga. Entonces, q *disminuye* desde un valor inicial Q hasta cero conforme los elementos de carga dq "caen" a través de las diferencias de potencial v que varían desde V hasta cero.

Si se define la energía potencial de un capacitor *sin carga* como cero, entonces W en la ecuación (24.8) es igual a la energía potencial U del capacitor con carga. La carga final almacenada es $Q = CV$, por lo que U (que es igual a W) se expresa como

$$U = \frac{Q^2}{2C} = \tfrac{1}{2}CV^2 = \tfrac{1}{2}QV \quad \text{(energía potencial almacenada en un capacitor)} \quad (24.9)$$

Cuando Q está en coulombs, C en farads (coulombs por volt) y V en volts (joules por coulomb), U se expresa en joules.

La última forma de la ecuación (24.9), $U = \frac{1}{2}QV$, indica que el trabajo total W requerido para cargar el capacitor es igual a la carga total Q multiplicada por la diferencia de potencial *media* $\frac{1}{2}V$ durante el proceso de carga.

La expresión $U = \frac{1}{2}(Q^2/C)$ en la ecuación (24.9) indica que un capacitor con carga es el análogo eléctrico de un resorte estirado con energía potencial elástica $U = \frac{1}{2}kx^2$. La carga Q es análoga a la elongación x, y el *recíproco* de la capacitancia, $1/C$, es análogo a la constante de fuerza k. La energía suministrada a un capacitor en el proceso de carga es análoga al trabajo que se realiza sobre un resorte al estirarlo.

Las ecuaciones (24.8) y (24.9) plantean que la capacitancia mide la propiedad de un capacitor para almacenar tanto energía como carga. Si un capacitor se carga conectándolo a una batería o a otra fuente que suministre una diferencia de potencial fija V, entonces un incremento en el valor de C implica una carga mayor $Q = CV$ y una cantidad más grande de energía almacenada $U = \frac{1}{2}CV^2$. Si en lugar de lo anterior, el objetivo es transferir una cantidad dada de carga Q de un conductor al otro, la ecuación (24.8) indica que el trabajo W requerido es inversamente proporcional a C; cuanto mayor sea la capacitancia, más fácil será dar a un capacitor una cantidad fija de carga.

Aplicaciones de los capacitores: Almacenamiento de energía

La mayoría de las aplicaciones de los capacitores aprovechan su propiedad de almacenar y liberar energía. En las unidades de flashes fotográficos electrónicos, ? la energía almacenada en un capacitor (véase la figura 24.4) se libera al oprimir el botón del obturador. Esto proporciona una dirección a la carga de una placa del capacitor a la otra a través del tubo del flash. Una vez establecida esta dirección, la energía almacenada se convierte rápidamente en un destello de luz breve, pero intenso. Un ejemplo extremo del mismo principio es la máquina Z en Sandia National

Laboratories de Nuevo México, que se usa en experimentos de fusión nuclear controlada (figura 24.11). Un banco de capacitores cargados libera más de un millón de joules de energía en unas cuantas mil millonésimas de segundo. En ese breve lapso, la potencia de salida de la máquina Z es de 2.9×10^{14} W, que equivale a ¡80 veces la producción de electricidad de todas las plantas de energía de la Tierra!

En otras aplicaciones, la energía se libera con más lentitud. Los resortes de la suspensión de un automóvil ayudan a hacer más suave la marcha al absorber la energía de las sacudidas bruscas y liberarla en forma gradual; de manera similar, un capacitor en un circuito electrónico mitiga las variaciones indeseables del voltaje debido a sobrecargas de tensión. Estos circuitos se estudiarán con detalle en el capítulo 26.

24.11 La máquina Z utiliza un gran número de capacitores en paralelo para dar una capacitancia equivalente C enorme (véase la sección 24.2). De ahí que sea posible almacenar una gran cantidad de energía $U = \frac{1}{2}CV^2$ incluso con una diferencia de potencial modesta V. Los arcos mostrados en la figura se producen cuando los capacitores descargan su energía en un blanco, no mayor que un carrete de hilo. Esto hace que el objetivo se caliente a una temperatura superior a 2×10^9 K.



Energía del campo eléctrico

Un capacitor puede cargarse trasladando electrones directamente de una placa a otra. Esto requiere efectuar trabajo contra el campo eléctrico entre las placas. Así, es posible considerar la energía como si estuviera almacenada *en el campo*, en la región entre las placas. Para desarrollar esta relación, debemos encontrar la energía *por unidad de volumen* en el espacio entre las placas paralelas de un capacitor con área A y separación d. Esta se denomina **densidad de energía** y se expresa con u. De la ecuación (24.9) se desprende que el total de energía potencial almacenada es $\frac{1}{2}CV^2$ y el volumen entre las placas es Ad; por lo tanto, la densidad de energía es

$$u = \text{Densidad de energía} = \frac{\frac{1}{2}CV^2}{Ad} \qquad (24.10)$$

De acuerdo con la ecuación (24.2), la capacitancia C está dada por $C = \epsilon_0 A/d$. La diferencia de potencial V está relacionada con la magnitud E del campo eléctrico por $V = Ed$. Si estas expresiones se utilizan en la ecuación (24.10), los factores geométricos A y d se anulan y se obtiene

$$u = \tfrac{1}{2}\epsilon_0 E^2 \qquad \text{(densidad de energía eléctrica en un vacío)} \qquad (24.11)$$

Aunque esta relación se obtuvo solo para un capacitor de placas paralelas, es válida para cualquier capacitor con vacío y, desde luego, *para cualquier configuración de campo eléctrico en el vacío*. Este resultado tiene una implicación interesante. El vacío se considera como espacio en el que no hay materia; sin embargo, el vacío puede tener campos eléctricos y, por lo tanto, energía. Así que, después de todo, el espacio "vacío" en realidad no lo está del todo. Esta idea y la ecuación (24.11) se utilizarán en el capítulo 32 en relación con la energía transportada por las ondas electromagnéticas.

CUIDADO **La energía del campo eléctrico es energía potencial eléctrica** Es un error común creer que la energía del campo eléctrico es una nueva clase de energía, distinta de la energía potencial eléctrica descrita anteriormente. Pero *no* es así; tan solo es una forma diferente de interpretar la energía potencial eléctrica. Se puede considerar la energía de un sistema de cargas como una propiedad compartida de todas las cargas, o pensar en la energía como una propiedad del campo eléctrico que crean las cargas. Cualquiera de estas interpretaciones lleva al mismo valor de la energía potencial.

Ejemplo 24.7 Transferencia de carga y energía entre capacitores



Se conecta un capacitor de capacitancia $C_1 = 8.0\ \mu$F a una fuente de energía, cargándolo con una diferencia de potencial $V_0 = 120$ V, desconectando luego la fuente de energía (figura 24.12). El interruptor S está abierto. *a*) ¿Cuál es la carga Q_0 en C_1? *b*) ¿Cuál es la energía almacenada en C_1? *c*) El capacitor de capacitancia $C_2 = 4.0\ \mu$F está inicialmente descargado. Se cierra el interruptor S. Después de que deja de fluir carga, ¿cuál es la diferencia de potencial a través de cada capacitor, y cuál es la carga en cada uno? *d*) ¿Cuál es la energía final del sistema?

24.12 Cuando se baja el interruptor S, el capacitor con carga C_1 se conecta a otro capacitor sin carga C_2. La parte central del interruptor es una manija aislante; la carga solo puede fluir entre las dos terminales superiores y entre las dos terminales inferiores.

Q_0 · $V_0 = 120$ V · $C_1 = 8.0\ \mu$F · S · $C_2 = 4.0\ \mu$F

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: En los incisos *a*) y *b*) la carga Q_0 y la energía almacenada $U_{inicial}$ para el capacitor con carga C_1 se calculan con las ecuaciones (24.1) y (24.9), respectivamente. Después de bajar el interruptor *S*, un alambre conecta las placas superiores de los dos capacitores, y otro alambre conecta las placas inferiores; los capacitores ahora están conectados en paralelo. En el inciso *c*) se emplean las características de la conexión en paralelo para determinar la manera en que los dos capacitores comparten la carga Q_0. En el inciso *d*) se utiliza otra vez la ecuación (24.9) para calcular la energía almacenada en los capacitores C_1 y C_2; la energía del sistema es la suma de estos valores.

EJECUTAR: *a*) La carga inicial Q_0 en C_1 es

$$Q_0 = C_1V_0 = (8.0\ \mu\text{F})(120\ \text{V}) = 960\ \mu\text{C}$$

b) La energía almacenada inicialmente en C_1 es

$$U_{\text{inicial}} = \tfrac{1}{2}Q_0V_0 = \tfrac{1}{2}(960 \times 10^{-6}\ \text{C})(120\ \text{V}) = 0.058\ \text{J}$$

c) Cuando se baja el interruptor, la carga positiva Q_0 se distribuye en las placas superiores de ambos capacitores, y la carga negativa $-Q_0$ se distribuye en las placas inferiores. Sean Q_1 y Q_2 las magnitudes de las cargas finales en los dos capacitores. La conservación de la carga requiere que $Q_1 + Q_2 = Q_0$. La diferencia de potencial V entre las placas es igual en ambos capacitores porque están conectados en paralelo, de modo que las cargas son $Q_1 = C_1V$ y $Q_2 = C_2V$. Ahora existen tres ecuaciones independientes que relacionan las tres incógnitas Q_1, Q_2 y V. Al despejarlas, tenemos

$$V = \frac{Q_0}{C_1 + C_2} = \frac{960\ \mu\text{C}}{8.0\ \mu\text{F} + 4.0\ \mu\text{F}} = 80\ \text{V}$$

$$Q_1 = 640\ \mu\text{C} \qquad Q_2 = 320\ \mu\text{C}$$

d) La energía final del sistema es

$$U_{\text{final}} = \tfrac{1}{2}Q_1V + \tfrac{1}{2}Q_2V = \tfrac{1}{2}Q_0V$$
$$= \tfrac{1}{2}(960 \times 10^{-6}\ \text{C})(80\ \text{V}) = 0.038\ \text{J}$$

EVALUAR: La energía final es menor que la energía original; la diferencia se convirtió en energía de algún otro tipo. Los conductores se calientan un poco debido a su resistencia, y algo de energía se irradia como ondas electromagnéticas. En los capítulos 26 y 31 se estudiará con más detalle el comportamiento de los capacitores.

Ejemplo 24.8 Energía del campo eléctrico



a) ¿Cuál es la magnitud requerida del campo eléctrico para almacenar 1.00 J de energía potencial eléctrica en un volumen de 1.00 m^3 en vacío? *b*) Si la magnitud del campo eléctrico es 10 veces mayor, ¿cuánta energía se almacena por metro cúbico?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Se utiliza la relación entre la magnitud E del campo eléctrico y la densidad de energía u. En el inciso *a*) se emplea la información dada para obtener u, y después se usa la ecuación (24.11) para encontrar el valor de E que se requiere. En el inciso *b*), la ecuación (24.11) nos dice cómo varía u en relación con E.

EJECUTAR: *a*) La densidad deseada de energía es $u = 1.00\ \text{J/m}^3$. Entonces, de acuerdo con la ecuación (24.11):

$$E = \sqrt{\frac{2u}{\epsilon_0}} = \sqrt{\frac{2(1.00\ \text{J/m}^3)}{8.85 \times 10^{-12}\ \text{C}^2/\text{N}\cdot\text{m}^2}}$$
$$= 4.75 \times 10^5\ \text{N/C} = 4.75 \times 10^5\ \text{V/m}$$

b) La ecuación (24.11) indica que u es proporcional a E^2. Si E se incrementa en un factor de 10, u aumenta en un factor de $10^2 = 100$, y la densidad de energía es $u = 100\ \text{J/m}^3$.

EVALUAR: El aire seco puede soportar un campo eléctrico de aproximadamente 3×10^6 V/m sin experimentar la *ruptura del dieléctrico*, la cual analizaremos en la sección 24.4. Entonces veremos que las magnitudes del campo en los aislantes prácticos llegan a ser tan grandes como este valor o incluso más.

Ejemplo 24.9 Dos maneras de calcular la energía almacenada en un capacitor



El capacitor esférico descrito en el ejemplo 24.3 (sección 24.1) tiene cargas $+Q$ y $-Q$ en sus conductores interior y exterior. Calcule la energía potencial eléctrica almacenada en el capacitor *a*) usando la capacitancia C obtenida en el ejemplo 24.3, y *b*) por integración de la densidad de energía u del campo eléctrico.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Se puede determinar la energía U almacenada en un capacitor de dos maneras: en términos del trabajo realizado para colocar las cargas en los dos conductores, y en términos de la energía en el campo eléctrico entre los conductores. Las dos descripciones son equivalentes, por lo que deben dar el mismo resultado. En el ejemplo 24.3 se obtuvo la capacitancia C y la magnitud E del campo en el espacio entre los conductores. (El campo eléctrico es cero dentro de la esfera interior y también afuera de la esfera exterior, porque una superficie gaussiana de radio $r < r_a$ o $r > r_b$ encierra una carga neta igual a cero. Por lo tanto, la densidad de energía es diferente de cero solo en el espacio entre las esferas $r_a < r < r_b$). En el inciso *a*), se utilizará la ecuación (24.9) para obtener U. En el inciso *b*) se empleará la ecuación (24.11) con la finalidad de determinar u, la cual integraremos sobre el volumen entre las esferas para obtener U.

EJECUTAR: *a*) A partir del ejemplo 24.3, el capacitor esférico tiene una capacitancia

$$C = 4\pi\epsilon_0 \frac{r_ar_b}{r_b - r_a}$$

donde r_a y r_b son los radios de las esferas conductoras interior y exterior, respectivamente. De acuerdo con la ecuación (24.9), la energía almacenada en este capacitor es

$$U = \frac{Q^2}{2C} = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0}\frac{r_b - r_a}{r_ar_b}$$

Continúa

b) El campo eléctrico en la región $r_a < r < r_b$ entre las dos esferas conductoras tiene una magnitud $E = Q/4\pi\epsilon_0 r^2$. La densidad de energía en esta región es

$$u = \tfrac{1}{2}\epsilon_0 E^2 = \tfrac{1}{2}\epsilon_0\left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\right)^2 = \frac{Q^2}{32\pi^2\epsilon_0 r^4}$$

La densidad de energía *no* es uniforme, sino que disminuye rápidamente al aumentar la distancia desde el centro del capacitor. Para encontrar la energía total del campo eléctrico se integra u (energía por unidad de volumen) en la región $r_a < r < r_b$. Se divide esta región en esferas huecas de radio r, área superficial $4\pi r^2$, espesor dr y volumen $dV = 4\pi r^2\, dr$. Entonces,

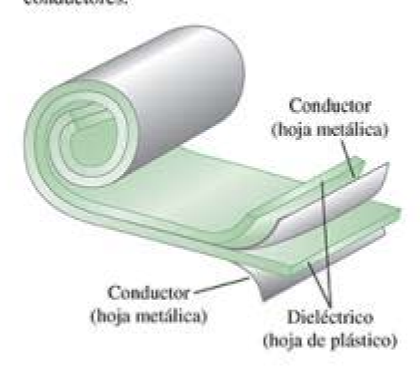
$$U = \int u\, dV = \int_{r_a}^{r_b}\left(\frac{Q^2}{32\pi^2\epsilon_0 r^4}\right)4\pi r^2\, dr$$
$$= \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0}\int_{r_a}^{r_b}\frac{dr}{r^2} = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0}\left(-\frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_a}\right)$$
$$= \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0}\frac{r_b - r_a}{r_a r_b}$$

EVALUAR: La energía potencial eléctrica puede considerarse como asociada a las *cargas*, como en el inciso *a*), o con el *campo*, como en el inciso *b*); la cantidad de energía almacenada es la misma en cualquier caso.

Evalúe su comprensión de la sección 24.3 Se desea conectar un capacitor de 4 μF con otro de 8 μF. ¿Con qué tipo de conexión tendrá el capacitor de 4 μF una cantidad mayor de *energía almacenada* que el de 8 μF? **i.** En serie; **ii.** en paralelo; **iii.** con cualquiera, ya sea en serie o en paralelo; **iv.** ni en serie ni en paralelo.



24.4 Dieléctricos



24.13 Un tipo común de capacitor utiliza láminas dieléctricas para separar los conductores.

La mayoría de los capacitores tienen un material no conductor o **dieléctrico** entre sus placas conductoras. Un tipo común de capacitor emplea tiras largas de hojas metálicas como placas, separadas por tiras de hojas de materiales plásticos, como PET. Estos materiales dispuestos en forma de emparedado se enrollan para formar una unidad capaz de proveer una capacitancia de varios microfarads en un paquete compacto (figura 24.13).

La colocación de un dieléctrico sólido entre las placas de un capacitor tiene tres funciones. La primera es que resuelve el problema mecánico de mantener dos hojas metálicas grandes con una separación muy pequeña sin que hagan contacto.

La segunda función es que un dieléctrico incrementa al máximo posible la diferencia de potencial entre las placas del capacitor. Como se describió en la sección 23.3, si cualquier material aislante se somete a un campo eléctrico suficientemente grande, experimenta una ionización parcial que permite la conducción a través de él. Este fenómeno se llama **ruptura del dieléctrico**. Muchos materiales dieléctricos toleran sin romperse campos eléctricos más intensos que los que soporta el aire. Así que el uso de un dieléctrico permite que un capacitor mantenga una mayor diferencia de potencial V y que, por lo tanto, almacene cantidades más grandes de carga y energía.

La tercera función es que la capacitancia de un capacitor de dimensiones dadas es *mayor* cuando entre sus placas hay un material dieléctrico en lugar de vacío. Este efecto se demuestra con ayuda de un *electrómetro* sensible, un dispositivo que mide la diferencia de potencial entre dos conductores sin permitir un flujo apreciable de carga entre uno y otro. La figura 24.14*a* ilustra un electrómetro conectado a través de un capacitor con carga, con magnitud de carga Q en cada placa y diferencia de potencial V_0. Cuando entre las placas se inserta una lámina sin carga de material dieléctrico, como vidrio, parafina o poliestireno, los experimentos indican que la diferencia de potencial *disminuye* a un valor V (figura 24.14*b*). Al retirar el dieléctrico, la diferencia de potencial vuelve a su valor original V_0, lo que demuestra que la carga original en las placas no ha cambiado.

La capacitancia original C_0 está dada por $C_0 = Q/V_0$, y la capacitancia C con el dieléctrico presente es $C = Q/V$. La carga Q es la misma en ambos casos, y V es menor que V_0, de donde se concluye que la capacitancia C con el dieléctrico presente es *mayor que* C_0. Cuando el espacio entre las placas está lleno por completo por el dieléctrico, la razón entre C y C_0 (igual a la razón entre V_0 y V) se denomina **constante dieléctrica** del material, K:

$$K = \frac{C}{C_0} \quad \text{(definición de constante dieléctrica)} \qquad (24.12)$$

Cuando la carga es constante, $Q = C_0V_0 = CV$ y $C/C_0 = V_0/V$. En este caso, la ecuación (24.12) se puede replantear como

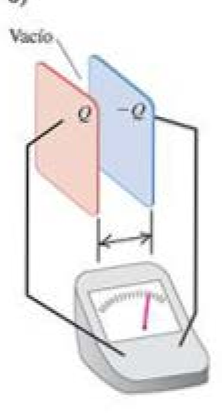
$$V = \frac{V_0}{K} \qquad \text{(donde } Q \text{ es constante)} \tag{24.13}$$

Con el dieléctrico presente, la diferencia de potencial para una carga Q dada se *reduce* en un factor de K.

La constante dieléctrica K es solo un número. Como C siempre es mayor que C_0, K siempre es mayor que la unidad. En la tabla 24.1 se incluyen algunos valores representativos de K. Para el vacío, $K = 1$, por definición. Para el aire a temperaturas y presiones ordinarias, K es alrededor de 1.0006; este valor es tan cercano a 1 que, para fines prácticos, un capacitor con aire es equivalente a uno con vacío. Observe que aunque el agua tiene un valor de K muy grande, por lo general no es un dieléctrico muy práctico como para usarlo en capacitores. La razón es que si bien el agua pura es un conductor muy deficiente, por otro lado, es un excelente solvente iónico. Cualquier ion disuelto en el agua haría que las cargas fluyeran entre las placas del capacitor, por lo que este se descargaría.

24.14 Efecto de un dieléctrico entre las placas paralelas de un capacitor. *a*) Con una carga determinada, la diferencia de potencial es V_0. *b*) Con la misma carga pero con un dieléctrico entre las placas, la diferencia de potencial V es menor que V_0.

a)



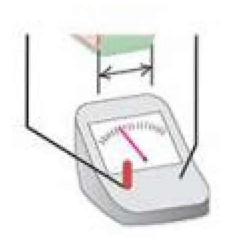


Tabla 24.1 Valores de la constante dieléctrica, K, a 20°C

Material	K	Material	K
Vacío	1	Cloruro de polivinilo	3.18
Aire (a 1 atm)	1.00059	Plexiglás®	3.40
Aire (a 100 atm)	1.0548	Vidrio	5–10
Teflón	2.1	Neopreno	6.70
Polietileno	2.25	Germanio	16
Benceno	2.28	Glicerina	42.5
Mica	3–6	Agua	80.4
PET	3.1	Titanato de estroncio	310

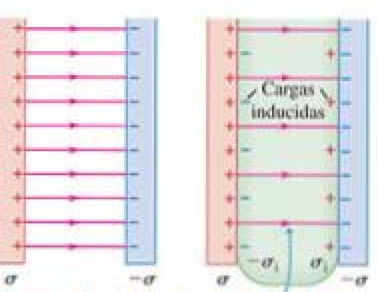
Ningún dieléctrico real es un aislante perfecto. Por consiguiente, siempre hay cierta *corriente de fuga* entre las placas con carga de un capacitor con dieléctrico. En la sección 24.2 se ignoró tácitamente este efecto en la obtención de las expresiones para las capacitancias equivalentes de capacitores conectados en serie, ecuación (24.5), y en paralelo, ecuación (24.7). Pero si la corriente de fuga fluye un tiempo suficientemente prolongado como para cambiar de manera sustancial las cargas con respecto a los valores usados para obtener las ecuaciones (24.5) y (24.7), tales ecuaciones podrían dejar de ser exactas.

Carga inducida y polarización

Cuando se inserta un material dieléctrico entre las placas de un capacitor al mismo tiempo que la carga se mantiene constante, la diferencia de potencial entre aquellas disminuye en un factor K. Por lo tanto, el campo eléctrico entre las placas debe disminuir en el mismo factor. Si E_0 es el valor con vacío y E es el valor con dieléctrico, entonces

$$E = \frac{E_0}{K} \qquad \text{(cuando } Q \text{ es constante)} \tag{24.14}$$

Como la magnitud del campo eléctrico es menor cuando el dieléctrico está presente, la densidad de carga superficial (que crea el campo) también debe ser menor. La carga superficial en las placas conductoras no cambia, pero en cada superficie del dieléctrico aparece una carga *inducida* de signo contrario (figura 24.15). Originalmente, el dieléctrico era neutro y todavía lo es; las cargas superficiales inducidas surgen como resultado de la *redistribución* de la carga positiva y negativa dentro del material dieléctrico; este fenómeno se llama **polarización**. La polarización se mencionó por primera vez en la sección 21.2, y se sugiere al lector que relea la explicación de la figura 21.8. Se supondrá que la carga superficial inducida es *directamente proporcional* a la magnitud E del campo eléctrico en el material; de hecho, este es el caso de muchos dieléctricos comunes. (Esta proporcionalidad directa es análoga a la ley de



Para una densidad de carga determinada σ, las cargas inducidas en las superficies del dieléctrico reducen el campo eléctrico entre las placas.

Hooke para un resorte). En este caso, K es una constante para un material en particular. Cuando el campo eléctrico es muy intenso o si el dieléctrico está hecho de ciertos materiales cristalinos, la relación entre la carga inducida y el campo eléctrico es más compleja; no consideraremos aquí este tipo de casos.

Es posible obtener una relación entre esta carga superficial inducida y la carga en las placas. Se denotará como σ_i la magnitud de la carga inducida por unidad de área en las superficies del dieléctrico (la densidad de carga superficial inducida). La magnitud de la densidad de carga superficial en las placas del capacitor es σ, como de costumbre. Entonces, la carga superficial *neta* en cada lado del capacitor tiene una magnitud $(\sigma - \sigma_i)$, como se ilustra en la figura 24.15*b*. Como vimos en los ejemplos 21.12 (sección 21.5) y 22.8 (sección 22.4), el campo entre las placas se relaciona con la densidad neta de carga superficial mediante $E = \sigma_{neta}/\epsilon_0$. Sin el dieléctrico y con este, respectivamente, se tiene

$$E_0 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \qquad E = \frac{\sigma - \sigma_i}{\epsilon_0} \tag{24.15}$$

Al usar estas expresiones en la ecuación (24.14) y reordenar el resultado, se encuentra que

$$\sigma_i = \sigma\left(1 - \frac{1}{K}\right) \quad \text{(densidad de carga superficial inducida)} \tag{24.16}$$

Esta ecuación muestra que cuando K es muy grande, σ_i casi es tan grande como σ. En este caso, σ_i casi anula a σ, y el campo y la diferencia de potencial son mucho menores que sus valores en el vacío.

El producto $K\epsilon_0$ se llama **permitividad** del dieléctrico, y se denota con ϵ:

$$\epsilon = K\epsilon_0 \quad \text{(definición de permitividad)} \tag{24.17}$$

En términos de ϵ, el campo eléctrico dentro del dieléctrico se expresa como

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon} \tag{24.18}$$

La capacitancia cuando hay un dieléctrico presente está dada por

$$C = KC_0 = K\epsilon_0\frac{A}{d} = \epsilon\frac{A}{d} \quad \text{(capacitor de placas paralelas dieléctrico entre las placas)} \tag{24.19}$$

La obtención de la ecuación (24.11) se repite para la densidad de energía u en un campo eléctrico para el caso en que hay un dieléctrico presente. El resultado es

$$u = \tfrac{1}{2}K\epsilon_0 E^2 = \tfrac{1}{2}\epsilon E^2 \quad \text{(densidad de energía eléctrica en un dieléctrico)} \tag{24.20}$$

En el espacio vacío, donde $K = 1$, $\epsilon = \epsilon_0$ y las ecuaciones (24.19) y (24.20) se reducen a las ecuaciones (24.2) y (24.11), respectivamente, para un capacitor de placas paralelas con vacío. Por esta razón, en ocasiones ϵ_0 se llama "permitividad del espacio libre" o "permitividad del vacío". Como K es solo un número, ϵ y ϵ_0 tienen las mismas unidades, $C^2/N \cdot m^2$ o F/m.

La ecuación (24.19) muestra que es posible obtener capacitancias muy elevadas con placas que tienen una gran área superficial A y están separadas una distancia pequeña d por un dieléctrico con un valor elevado de K. En un *capacitor electrolítico de doble capa*, hay partículas diminutas de carbono adheridas a cada capa: el valor de A es el área superficial combinada de las partículas, la cual puede ser enorme. Las placas con partículas adheridas están separadas por una lámina dieléctrica muy delgada. Un capacitor de esta clase llega a tener una capacitancia de 5000 farads y puede caber en la palma de la mano (compárelo con el del ejemplo 24.1 de la sección 24.1).

Varios dispositivos prácticos aprovechan la manera en que un capacitor responde ante un cambio en la constante dieléctrica. Un ejemplo es el localizador eléctrico de clavos, que utilizan quienes hacen reparaciones en el hogar para localizar clavos

metálicos ocultos tras la superficie de un muro. Consiste en una placa metálica con circuitos asociados. La placa actúa como la mitad de un capacitor, y el muro como la otra mitad. Si el localizador de clavos pasa por encima de un objeto metálico, la constante dieléctrica efectiva del capacitor cambia, lo que modifica la capacitancia y activa una señal.

Estrategia para resolver problemas 24.2 Dieléctricos

MP

IDENTIFICAR *los conceptos relevantes:* Las relaciones de esta sección son útiles siempre que haya un campo eléctrico en un dieléctrico, como el que existe entre las placas de un capacitor con carga. Normalmente se debe relacionar la diferencia de potencial V_{ab} entre las placas, la magnitud E del campo eléctrico en el capacitor, la densidad de carga σ en las placas y la densidad de carga inducida σ_i sobre las superficies del capacitor.

PLANTEAR *el problema* de acuerdo con los siguientes pasos:

1. Elabore un boceto de la situación.
2. Identifique las incógnitas y determine cuáles de las ecuaciones de esta sección le servirán para encontrar esas incógnitas.

EJECUTAR *la solución* como sigue:

1. En problemas como en el siguiente ejemplo, es fácil perderse en un laberinto de fórmulas. Pregúntese a cada paso qué tipo de cantidad representa cada símbolo. Por ejemplo, distinga con claridad entre las cargas y las densidades de carga, y entre los campos eléctricos y las diferencias de potencial eléctrico.
2. Compruebe la consistencia de las unidades. Las distancias deben estar expresadas en metros. Un microfarad es igual a 10^{-6} farads, etcétera. No confunda el valor numérico de ϵ_0 con el valor de $1/4\pi\epsilon_0$. La magnitud del campo eléctrico se expresa tanto en N/C como en V/m. Las unidades de ϵ_0 son $C^2/N \cdot m^2$ o F/m.

EVALUAR *la respuesta:* Con un dieléctrico presente, *a*) la capacitancia siempre es mayor que sin el dieléctrico; *b*) para una cantidad dada de carga en el capacitor, el campo eléctrico y la diferencia de potencial son menores que sin el dieléctrico, y *c*) la densidad de carga superficial inducida σ_i en el dieléctrico es de menor magnitud que la densidad de carga σ en las placas del capacitor.

Ejemplo 24.10 Capacitor con y sin dieléctrico



Suponga que cada una de las placas paralelas en la figura 24.15 tiene un área de 2000 cm² (2.00×10^{-1} m²) y que están separadas 1.00 cm (1.00×10^{-2} m). El capacitor está conectado a una fuente de energía y se carga a una diferencia de potencial $V_0 = 3.00$ kV; después se desconecta de la fuente de energía y se inserta entre las placas una lámina de material plástico aislante, llenando por completo el espacio entre ellas. Se observa que la diferencia de potencial disminuye a 1.00 kV y que la carga en cada placa del capacitor permanece constante. Calcule *a*) la capacitancia original C_0; *b*) la magnitud de la carga Q en cada placa; *c*) la capacitancia C después de haber insertado el dieléctrico; *d*) la constante dieléctrica K del dieléctrico; *e*) la permitividad ϵ del dieléctrico; *f*) la magnitud Q_i de la carga inducida en cada cara del dieléctrico; *g*) el campo eléctrico original E_0 entre las placas; y *h*) el campo eléctrico E después de insertar el dieléctrico.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Este problema usa la mayoría de las relaciones que se han estudiado para capacitores y dieléctricos. (Las relaciones de energía se tratan en el ejemplo 24.11). La mayoría de las incógnitas se pueden obtener de diferentes maneras. Los métodos que se usan a continuación son una muestra; invitamos al lector a pensar en otros métodos y a comparar los resultados.

EJECUTAR: *a*) Con vacío entre las placas se usa la ecuación (24.19) con $K = 1$:

$$C_0 = \epsilon_0 \frac{A}{d} = (8.85 \times 10^{-12}\ \text{F/m}) \frac{2.00 \times 10^{-1}\ \text{m}^2}{1.00 \times 10^{-2}\ \text{m}}$$
$$= 1.77 \times 10^{-10}\ \text{F} = 177\ \text{pF}$$

b) A partir de la definición de capacitancia, ecuación (24.1),

$$Q = C_0 V_0 = (1.77 \times 10^{-10}\ \text{F})(3.00 \times 10^3\ \text{V})$$
$$= 5.31 \times 10^{-7}\ \text{C} = 0.531\ \mu\text{C}$$

c) Cuando se inserta el dieléctrico, Q permanece sin cambio, pero la diferencia de potencial disminuye a $V = 1.00$ kV. Así, de acuerdo con la ecuación (24.1), la nueva capacitancia es

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{5.31 \times 10^{-7}\ \text{C}}{1.00 \times 10^3\ \text{V}} = 5.31 \times 10^{-10}\ \text{F} = 531\ \text{pF}$$

d) Según la ecuación (24.12), la constante dieléctrica es

$$K = \frac{C}{C_0} = \frac{5.31 \times 10^{-10}\ \text{F}}{1.77 \times 10^{-10}\ \text{F}} = \frac{531\ \text{pF}}{177\ \text{pF}} = 3.00$$

En forma alternativa, a partir de la ecuación (24.13),

$$K = \frac{V_0}{V} = \frac{3000\ \text{V}}{1000\ \text{V}} = 3.00$$

e) Al sustituir el valor de K del inciso *d*) en la ecuación (24.17), la permitividad es

$$\epsilon = K\epsilon_0 = (3.00)(8.85 \times 10^{-12}\ \text{C}^2/\text{N} \cdot \text{m}^2)$$
$$= 2.66 \times 10^{-11}\ \text{C}^2/\text{N} \cdot \text{m}^2$$

f) Multiplicando ambos lados de la ecuación (24.16) por el área A de la placa, se obtiene la carga inducida $Q_i = \sigma_i A$ en términos de la carga $Q = \sigma A$ en cada placa:

$$Q_i = Q\left(1 - \frac{1}{K}\right) = (5.31 \times 10^{-7}\ \text{C})\left(1 - \frac{1}{3.00}\right)$$
$$= 3.54 \times 10^{-7}\ \text{C}$$

Continúa

g) Como el campo eléctrico entre las placas es uniforme, su magnitud es la diferencia de potencial dividida entre la separación de las placas:

$$E_0 = \frac{V_0}{d} = \frac{3000\ \text{V}}{1.00 \times 10^{-2}\ \text{m}} = 3.00 \times 10^5\ \text{V/m}$$

h) Después de insertar el dieléctrico,

$$E = \frac{V}{d} = \frac{1000\ \text{V}}{1.00 \times 10^{-2}\ \text{m}} = 1.00 \times 10^5\ \text{V/m}$$

o, de acuerdo con la ecuación (24.18),

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon} = \frac{Q}{\epsilon A} = \frac{5.31 \times 10^{-7}\ \text{C}}{(2.66 \times 10^{-11}\ \text{C}^2/\text{N}\cdot\text{m}^2)(2.00 \times 10^{-1}\ \text{m}^2)}$$
$$= 1.00 \times 10^5\ \text{V/m}$$

o bien, a partir de la ecuación (24.15),

$$E = \frac{\sigma - \sigma_i}{\epsilon_0} = \frac{Q - Q_i}{\epsilon_0 A}$$
$$= \frac{(5.31 - 3.54) \times 10^{-7}\ \text{C}}{(8.85 \times 10^{-12}\ \text{C}^2/\text{N}\cdot\text{m}^2)(2.00 \times 10^{-1}\ \text{m}^2)}$$
$$= 1.00 \times 10^5\ \text{V/m}$$

o, de la ecuación (24.14),

$$E = \frac{E_0}{K} = \frac{3.00 \times 10^5\ \text{V/m}}{3.00} = 1.00 \times 10^5\ \text{V/m}$$

EVALUAR: Al insertar el dieléctrico se incrementa la capacitancia en un factor de $K = 3.00$, y el campo eléctrico entre las placas se reduce en un factor de $1/K = 1/3.00$. Eso ocurre porque se desarrollan cargas inducidas en las caras del dieléctrico de magnitud $Q(1 - 1/K) = Q(1 - 1/3.00) = 0.667\ Q$.

Ejemplo 24.11 Almacenamiento de energía con y sin dieléctrico



Calcule la energía almacenada por el campo eléctrico del capacitor del ejemplo 24.10, así como la densidad de energía, tanto antes como después de haber insertado el dieléctrico.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Consideraremos ahora las ideas de la energía almacenada en un capacitor y de la densidad de energía del campo eléctrico. Se usa la ecuación (24.9) para obtener la energía almacenada y la ecuación (24.20) para calcular la densidad de energía.

EJECUTAR: De acuerdo con la ecuación (24.9), las energías almacenadas U_0 y U con y sin el dieléctrico insertado son

$$U_0 = \tfrac{1}{2}C_0V_0^2 = \tfrac{1}{2}(1.77 \times 10^{-10}\ \text{F})(3000\ \text{V})^2 = 7.97 \times 10^{-4}\ \text{J}$$
$$U = \tfrac{1}{2}CV^2 = \tfrac{1}{2}(5.31 \times 10^{-10}\ \text{F})(1000\ \text{V})^2 = 2.66 \times 10^{-4}\ \text{J}$$

La energía final es un tercio de la energía original.

La ecuación (24.20) proporciona las densidades de energía sin el dieléctrico y con este:

$$u_0 = \tfrac{1}{2}\epsilon_0 E_0^2 = \tfrac{1}{2}(8.85 \times 10^{-12}\ \text{C}^2/\text{N}\cdot\text{m}^2)(3.00 \times 10^5\ \text{N/C})^2$$
$$= 0.398\ \text{J/m}^3$$
$$u = \tfrac{1}{2}\epsilon E^2 = \tfrac{1}{2}(2.66 \times 10^{-11}\ \text{C}^2/\text{N}\cdot\text{m}^2)(1.00 \times 10^5\ \text{N/C})^2$$
$$= 0.133\ \text{J/m}^3$$

La densidad de energía con el dieléctrico es un tercio de la densidad de energía original.

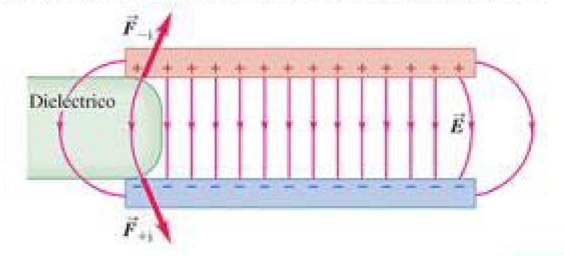
EVALUAR: La respuesta para u_0 se comprueba al notar que el volumen entre las placas es $V = (0.200\ \text{m}^2)(0.0100\ \text{m}) = 0.00200\ \text{m}^3$. Como el campo eléctrico es uniforme entre las placas, u_0 también es uniforme y la densidad de energía es simplemente la energía almacenada dividida entre el volumen:

$$u_0 = \frac{U_0}{V} = \frac{7.97 \times 10^{-4}\ \text{J}}{0.00200\ \text{m}^3} = 0.398\ \text{J/m}^3$$

Lo que concuerda con la respuesta anterior. Se puede utilizar el mismo enfoque para comprobar el resultado de u.

En general, cuando se inserta un dieléctrico en un capacitor mientras la carga en cada placa permanece igual, la permitividad ϵ se incrementa en un factor de K (la constante dieléctrica), y el campo eléctrico E y la densidad de energía $u = \frac{1}{2}\epsilon E^2$ disminuyen en un factor de $1/K$. ¿A dónde se fue la energía? La respuesta está en el campo alrededor de los bordes de un capacitor real de placas paralelas. Como se aprecia en la figura 24.16, ese campo tiende a atraer al dieléctrico hacia el espacio entre las placas, y al hacerlo efectúa un trabajo sobre él. Se podría acoplar un resorte en el extremo izquierdo del dieléctrico de la figura 24.16 y usar esta fuerza para estirar el resorte. Puesto que el campo realiza un trabajo, la densidad de energía del campo disminuye.

24.16 El campo en los bordes del capacitor ejerce fuerzas $\vec{F}_{-i}$ y $\vec{F}_{+i}$ sobre las cargas inducidas superficiales negativas y positivas de un dieléctrico, lo que atrae al dieléctrico hacia el interior del capacitor.



Ruptura del dieléctrico

Ya se mencionó que cuando un dieléctrico se somete a un campo eléctrico suficientemente intenso, tiene lugar la *ruptura del dieléctrico* y entonces el dieléctrico se convierte en conductor. Esto ocurre cuando el campo eléctrico es tan intenso que arranca los electrones de sus moléculas y los lanza sobre otras moléculas, con lo cual se liberan aún más electrones. Esta avalancha de carga en movimiento forma una

chispa o arco eléctrico. Un relámpago es un ejemplo notable de la ruptura del dieléctrico en el aire.

Debido a la ruptura del dieléctrico, los capacitores siempre tienen voltajes máximos nominales. Cuando un capacitor se somete a un voltaje excesivo, se forma un arco a través de la capa de dieléctrico, y lo quema o perfora. Este arco crea una trayectoria conductora (un cortocircuito) entre los conductores. Si la trayectoria conductora permanece después de haberse extinguido el arco, el dispositivo queda inutilizado de manera permanente en su función de capacitor.

La magnitud máxima de campo eléctrico a que puede someterse un material sin que ocurra la ruptura se denomina **rigidez dieléctrica**. Esta magnitud se ve afectada de manera significativa por la temperatura, las impurezas, las pequeñas irregularidades en los electrodos metálicos y otros factores que son difíciles de controlar. Por esta razón, solo pueden darse cifras aproximadas de las rigideces dieléctricas. La rigidez dieléctrica del aire seco es de alrededor de 3×10^6 V/m. En la tabla 24.2 se presentan valores de la rigidez dieléctrica de unos cuantos materiales aislantes comunes. Observe que todos los valores son mucho mayores que el del aire. Por ejemplo, una capa de policarbonato de 0.01 mm de espesor (el espesor práctico más pequeño) tiene 10 veces la rigidez dieléctrica del aire y soporta un voltaje máximo cercano a $(3 \times 10^7 \text{ V/m})(1 \times 10^{-5} \text{ m}) = 300$ V.

Tabla 24.2 Constante dieléctrica y rigidez dieléctrica de algunos materiales aislantes

Material	Constante dieléctrica, K	Rigidez dieléctrica, E_m (V/m)
Policarbonato	2.8	3×10^7
Poliéster	3.3	6×10^7
Polipropileno	2.2	7×10^7
Poliestireno	2.6	2×10^7
Vidrio pyrex	4.7	1×10^7

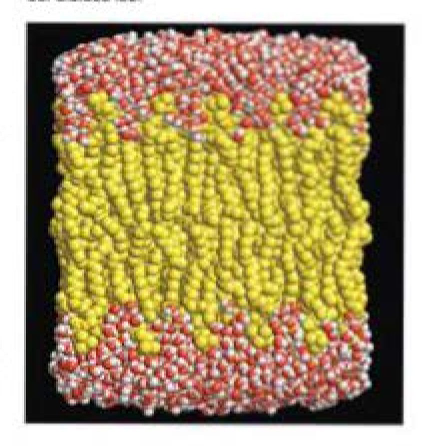
Evalúe su comprensión de la sección 24.4 El espacio entre las placas de un capacitor aislado de placas paralelas está ocupado por un bloque de material dieléctrico con constante dieléctrica K. Las dos placas del capacitor tienen cargas Q y $-Q$. Se extrae el bloque dieléctrico. Si las cargas no cambian, ¿cómo se modifica la energía en el capacitor cuando se retira el material dieléctrico? **i.** Se incrementa; **ii.** disminuye; **iii.** permanece igual.

24.5 Modelo molecular de la carga inducida

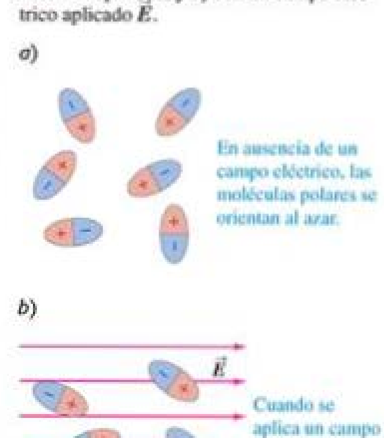
En la sección 24.4 se estudiaron las cargas superficiales inducidas sobre un dieléctrico en un campo eléctrico. Ahora veremos cómo se originan estas cargas superficiales. Si el material fuera un *conductor*, la respuesta sería sencilla. Los conductores contienen carga que tiene libertad de movimiento y, cuando está presente un campo eléctrico, algunas de ellas se redistribuyen en la superficie de manera que no hay campo eléctrico dentro del conductor. Pero un dieléctrico ideal *no* tiene cargas con libertad para moverse, así que, ¿cómo puede surgir una carga superficial?

Para comprender esto, se tiene que analizar otra vez el reacomodo de la carga a nivel *molecular*. Algunas moléculas, como las de H_2O y N_2O, tienen cantidades iguales de cargas positivas y negativas, pero con una distribución desigual, con exceso de carga positiva concentrada en un lado de la molécula y carga negativa en el otro. Como se describió en la sección 21.7, tal arreglo recibe el nombre de *dipolo eléctrico*, y la molécula se llama *molécula polar*. Cuando no está presente un campo eléctrico en un gas o un líquido con moléculas polares, estas se orientan al azar (figura 24.17*a*). Sin embargo, al colocarse en un campo eléctrico, tienden a orientarse como en la figura 24.17*b*, como resultado de las torcas del campo eléctrico descritas en la sección 21.7. En virtud de la agitación térmica, la alineación de las moléculas con respecto a $\vec{E}$ no es perfecta.

Aplicación Membrana celular dieléctrica La membrana de una célula viva se comporta como un dieléctrico entre las placas de un capacitor. La membrana está formada por dos placas de moléculas lípidas, con sus extremos insolubles en agua en medio y sus extremos solubles (mostrados en rojo) sobre las superficies de la membrana. Los fluidos conductores sobre cualquier lado de la membrana (agua con iones negativos en el interior de la célula, agua con iones positivos afuera) actúan como las placas de un capacitor con carga, y la membrana no conductora actúa como un dieléctrico con K igual a 10, aproximadamente. La diferencia de potencial V a través de la membrana es de alrededor de 0.07 V y el espesor d de la membrana es de aproximadamente 7×10^{-9} m, de modo que el campo eléctrico $E = V/d$ en la membrana es de unos 10^7 V/m, cercano a la rigidez dieléctrica de la membrana. Si la membrana estuviera hecha de aire, V y E serían más grandes por un factor de $K \approx 10$ y se presentaría la ruptura del dieléctrico.



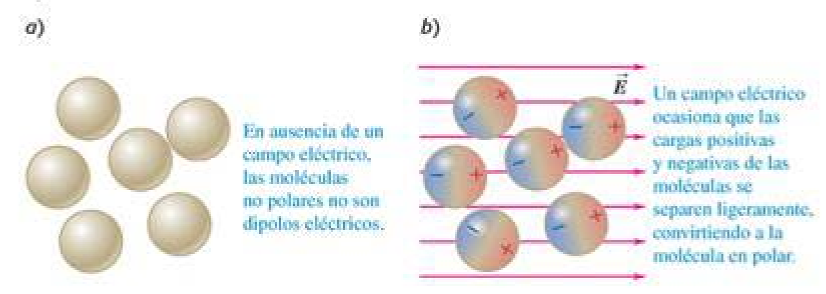
24.17 Moléculas polares *a*) sin un campo eléctrico aplicado, y *b*) con un campo eléctrico aplicado $\vec{E}$.





PhET: Molecular Motors
PhET: Optical Tweezers and Applications
PhET: Stretching DNA

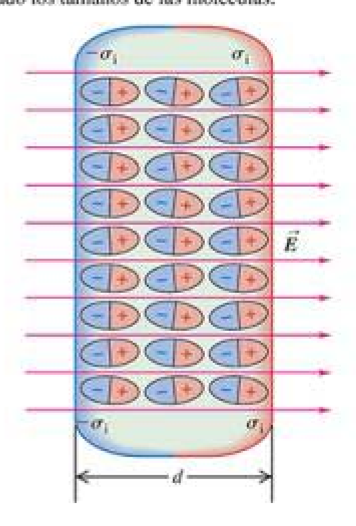
24.18 Moléculas no polares *a*) sin un campo eléctrico aplicado, y *b*) con un campo eléctrico aplicado $\vec{E}$.



Incluso una molécula que normalmente *no* es polar se *convierte* en un dipolo al colocarse en un campo eléctrico debido a que este empuja las cargas positivas en las moléculas en la dirección del campo, y a las negativas en dirección opuesta. Esto ocasiona una redistribución de la carga dentro de la molécula (figura 24.18). Tales dipolos se llaman dipolos *inducidos*.

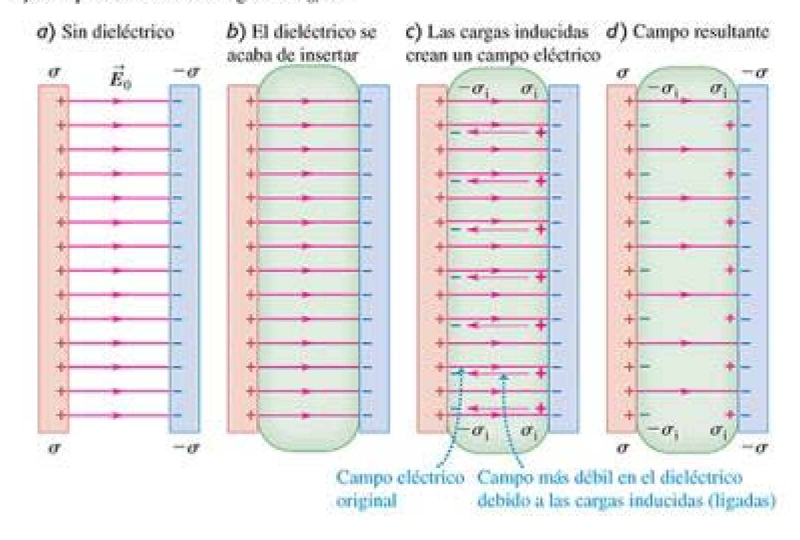
Ya sea con moléculas polares o no polares, la redistribución de la carga causada por el campo origina la formación de una capa de carga en cada superficie del material dieléctrico (figura 24.19). Estas capas son las cargas superficiales descritas en la sección 24.4; su densidad de carga superficial se denota con σ_i. Las cargas *no* tienen libertad para moverse indefinidamente como lo harían en un conductor porque cada una está unida a una molécula. En realidad se llaman **cargas ligadas** para diferenciarlas de las **cargas libres** que se agregan y se retiran de las placas conductoras de un capacitor. En el interior del material, la carga neta por unidad de volumen permanece igual a cero. Como se ha visto, esta redistribución de carga recibe el nombre de *polarización*, y se dice que el material está *polarizado*.

24.19 La polarización de un dieléctrico en un campo eléctrico $\vec{E}$ da lugar a la formación de capas delgadas de cargas ligadas en las superficies, lo que crea densidades superficiales de carga σ_i y $-\sigma_i$. Por claridad, se han exagerado los tamaños de las moléculas.



Los cuatro incisos de la figura 24.20 ilustran el comportamiento de un trozo de dieléctrico cuando se inserta en el campo entre un par de placas de capacitor con cargas opuestas. La figura 24.20*a* muestra el campo original. La figura 24.20*b* presenta la situación después de haber insertado el dieléctrico, pero antes de que ocurra el reacomodo de las cargas. La figura 24.20*c* ilustra con flechas más delgadas el campo adicional que se establece en el dieléctrico por sus cargas superficiales inducidas. Este campo es *opuesto* al original, pero no tan grande como para anularlo por completo, ya que las cargas en el dieléctrico no tienen libertad para moverse en forma indefinida. Por consiguiente, el campo resultante en el dieléctrico, que se presenta en la figura 24.20*d*,

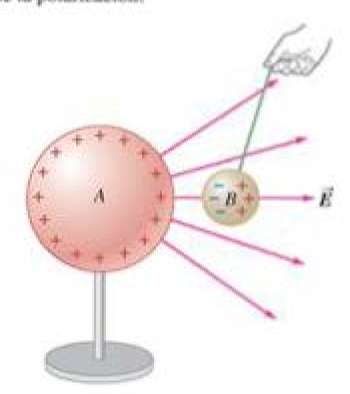
24.20 *a*) Campo eléctrico de magnitud E_0 entre dos placas con carga. *b*) Introducción de un dieléctrico de constante dieléctrica K. *c*) Las cargas superficiales inducidas y su campo. *d*) Campo resultante de magnitud E_0/K.



disminuyó su magnitud. En la representación con líneas de campo, algunas de ellas salen de la placa positiva y van a través del dieléctrico, mientras que otras terminan en las cargas inducidas en las caras del dieléctrico.

Como se vio en la sección 21.2, la polarización también es la razón por la que un cuerpo con carga, como una varilla de plástico electrificada, puede ejercer una fuerza sobre un cuerpo *sin carga*, como un trozo de papel o una cáscara pequeña de limón. En la figura 24.21 se presenta una esfera B dieléctrica sin carga en el campo radial de un cuerpo con carga positiva A. Las cargas positivas inducidas en B experimentan una fuerza hacia la derecha, mientras que la fuerza en las cargas inducidas negativas va hacia la izquierda. Las cargas negativas están más cerca de A, por lo que se encuentran en un campo más intenso que las cargas positivas. La fuerza hacia la izquierda es mayor que la que va hacia la derecha, y B es atraída hacia A, aun cuando su carga neta es igual a cero. La atracción ocurre sin importar que el signo de la carga de A sea positivo o negativo (véase la figura 21.8). Además, el efecto no está limitado a los dieléctricos; un cuerpo conductor sin carga sería atraído de igual manera.

24.21 Una esfera B neutra en el campo eléctrico radial de una esfera A con carga positiva es atraída hacia la carga a causa de la polarización.



Evalúe su comprensión de la sección 24.5 Un capacitor tiene cargas Q y $-Q$ en sus dos placas paralelas. Después se inserta un bloque de dieléctrico con $K = 3$ en el espacio entre las placas, como se ilustra en la figura 24.20. Ordene las siguientes magnitudes de campo eléctrico en forma decreciente. **i.** El campo antes de insertar el dieléctrico; **ii.** el campo resultante después de haber insertado el dieléctrico; **iii.** el campo debido a las cargas ligadas. ❙

24.6 La ley de Gauss en los dieléctricos

El análisis de la sección 24.4 puede extenderse para reformular la ley de Gauss de manera que sea útil en el caso particular de los dieléctricos. La figura 24.22 es un acercamiento de la placa izquierda del capacitor y la superficie izquierda del dieléctrico de la figura 24.15*b*. Se aplicará la ley de Gauss a la caja rectangular que se muestra en corte transversal mediante la línea púrpura; el área superficial de los lados izquierdo y derecho es A. El lado izquierdo está en el conductor que forma la placa izquierda del capacitor, por lo que el campo eléctrico en cualquier sitio de esa superficie es igual a cero. El lado derecho está en el dieléctrico, donde el campo eléctrico tiene magnitud E, y $E_\perp = 0$ en cualquier lugar de las otras cuatro caras. La carga total encerrada, incluida la carga de la placa del capacitor y la carga inducida en la superficie del dieléctrico, es $Q_{enc} = (\sigma - \sigma_i)A$, por lo que la ley de Gauss da

$$EA = \frac{(\sigma - \sigma_i)A}{\epsilon_0} \qquad (24.21)$$

Tal como está, esta ecuación no es muy esclarecedora porque relaciona dos cantidades desconocidas: E dentro del dieléctrico y la densidad de carga superficial inducida σ_i. Pero ahora se puede usar la ecuación (24.16), desarrollada para esta misma situación, con la finalidad de simplificar la ecuación eliminando σ_i. La ecuación (24.16) es

$$\sigma_i = \sigma\left(1 - \frac{1}{K}\right) \quad \text{o bien,} \quad \sigma - \sigma_i = \frac{\sigma}{K}$$

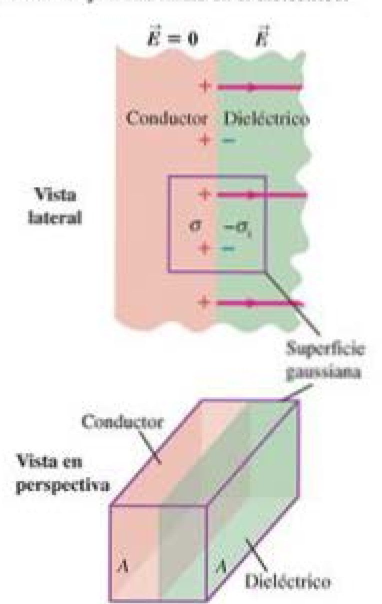
Al combinarse con la ecuación (24.21) se obtiene

$$EA = \frac{\sigma A}{K\epsilon_0} \quad \text{o bien,} \quad KEA = \frac{\sigma A}{\epsilon_0} \qquad (24.22)$$

La ecuación (24.22) plantea que el flujo de $K\vec{E}$, no $\vec{E}$, a través de la superficie gaussiana en la figura 24.22 es igual a la carga *libre* encerrada σA dividida entre ϵ_0. Resulta que, para *cualquier* superficie gaussiana, siempre que la carga inducida sea proporcional al campo eléctrico en el material, la ley de Gauss puede expresarse como

$$\oint K\vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{\text{enc-libre}}}{\epsilon_0} \quad \text{(ley de Gauss en un dieléctrico)} \qquad (24.23)$$

24.22 Ley de Gauss con un dieléctrico. Esta figura presenta un acercamiento de la placa izquierda del capacitor de la figura 24.15*b*. La superficie gaussiana es una caja rectangular que tiene una mitad en el conductor y la otra mitad en el dieléctrico.



donde $Q_{\text{enc-libre}}$ es la carga *libre* total (no la carga ligada) encerrada por la superficie gaussiana. La importancia de estos resultados es que las caras derechas solo contienen la carga *libre* en el conductor, no la carga ligada (inducida). En realidad, aunque no lo hemos demostrado, la ecuación (24.23) sigue siendo válida aun cuando diferentes partes de la superficie gaussiana estén dentro de los dieléctricos que tengan valores distintos de K, siempre y cuando el valor de K en cada dieléctrico sea independiente del campo eléctrico (que por lo general es el caso para los campos eléctricos que no son demasiado intensos) y se utilice el valor adecuado de K para cada punto de la superficie gaussiana.



Ejemplo 24.12 Capacitor esférico con dieléctrico

Use la ley de Gauss para obtener la capacitancia en el capacitor esférico del ejemplo 24.3 (sección 24.1), si el volumen entre las esferas huecas está lleno de un aceite aislante cuya constante dieléctrica es igual a K.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: La simetría esférica del problema no cambia con la presencia del dieléctrico, de modo que, al igual que en el ejemplo 24.3, se utiliza una superficie gaussiana esférica concéntrica de radio r entre las esferas. Como hay un dieléctrico, la ley de Gauss se emplea en la forma de la ecuación (24.23).

EJECUTAR: De acuerdo con la ecuación (24.23),

$$\oint K\vec{E} \cdot d\vec{A} = \oint KE\,dA = KE \oint dA = (KE)(4\pi r^2) = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

$$E = \frac{Q}{4\pi K\epsilon_0 r^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon r^2}$$

donde $\epsilon = K\epsilon_0$. En comparación con el caso en que hay vacío entre las esferas huecas conductoras, el campo eléctrico se reduce en un factor de $1/K$. La diferencia de potencial V_{ab} entre las esferas huecas disminuye en el mismo factor, con lo que la capacitancia $C = Q/V_{ab}$ se *incrementa* en un factor de K, al igual que para un capacitor de placas paralelas cuando se inserta un dieléctrico. Utilizando el resultado del ejemplo 24.3, se determina que la capacitancia con el dieléctrico es

$$C = \frac{4\pi K\epsilon_0 r_a r_b}{r_b - r_a} = \frac{4\pi\epsilon r_a r_b}{r_b - r_a}$$

EVALUAR: Si el dieléctrico llena por completo el volumen entre los dos conductores, la capacitancia es simplemente el producto de K por el valor sin dieléctrico. El resultado es más complicado si el dieléctrico llena solo parcialmente este volumen (véase el problema de desafío 24.78).

Evalúe su comprensión de la sección 24.6 Una carga puntual única q está incrustada en un dieléctrico cuya constante dieléctrica es K. En cierto punto dentro del dieléctrico a una distancia r de la carga puntual, ¿cuál es la magnitud del campo eléctrico? **i.** $q/4\pi\epsilon_0 r^2$; **ii.** $Kq/4\pi\epsilon_0 r^2$; **iii.** $q/4\pi K\epsilon_0 r^2$; **iv.** ninguna de las anteriores. ❙

RESUMEN

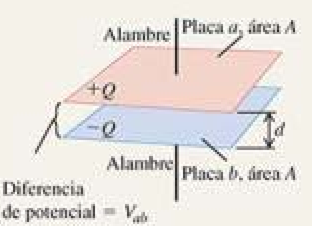


Capacitores y capacitancia: Un capacitor es cualquier par de conductores separados por un material aislante. Cuando el capacitor está cargado, hay cargas de igual magnitud Q y signo opuesto en los dos conductores, y el potencial V_{ab} del conductor con carga positiva con respecto al que tiene carga negativa es proporcional a Q. La capacitancia C se define como la razón entre Q y V_{ab}. La unidad del SI para la capacitancia es el farad (F): 1 F = 1 C/V.

Un capacitor de placas paralelas consiste en dos placas conductoras paralelas, cada una con área A, separadas por una distancia d. Si están separadas por vacío, la capacitancia solo depende de A y d. Para otras geometrías, la capacitancia se obtiene a partir de la definición $C = Q/V_{ab}$. (Véase los ejemplos 24.1 a 24.4).

$$C = \frac{Q}{V_{ab}} \qquad (24.1)$$

$$C = \frac{Q}{V_{ab}} = \epsilon_0 \frac{A}{d} \qquad (24.2)$$



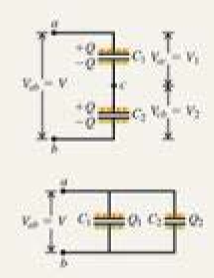
Capacitores en serie y en paralelo: Cuando se conectan en serie capacitores con capacitancias $C_1, C_2, C_3, \ldots$, el recíproco de la capacitancia equivalente C_{eq} es igual a la suma de los recíprocos de las capacitancias individuales. Cuando los capacitores se conectan en paralelo, la capacitancia equivalente C_{eq} es igual a la suma de las capacitancias individuales. (Véase los ejemplos 24.5 y 24.6).

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + \cdots \qquad (24.5)$$

(capacitores en serie)

$$C_{eq} = C_1 + C_2 + C_3 + \cdots \qquad (24.7)$$

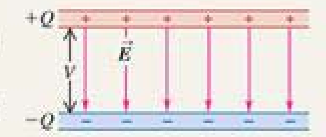
(capacitores en paralelo)



Energía en un capacitor: La energía U que se requiere para cargar un capacitor C a una diferencia de potencial V y carga Q, es igual a la energía almacenada en el capacitor. Esta energía se puede considerar como si residiera en el campo eléctrico entre los conductores; la densidad de energía u (energía por unidad de volumen) es proporcional al cuadrado de la magnitud del campo eléctrico. (Véase los ejemplos 24.7 a 24.9).

$$U = \frac{Q^2}{2C} = \tfrac{1}{2}CV^2 = \tfrac{1}{2}QV \qquad (24.9)$$

$$u = \tfrac{1}{2}\epsilon_0 E^2 \qquad (24.11)$$



Dieléctricos: Cuando el espacio entre conductores está ocupado por un material dieléctrico, la capacitancia se incrementa en un factor K, llamado constante dieléctrica del material. La cantidad $\epsilon = K\epsilon_0$ se llama permitividad del dieléctrico. Para una cantidad fija de carga en las placas del capacitor, las cargas inducidas en la superficie del dieléctrico disminuyen el campo eléctrico y la diferencia de potencial entre las placas en el mismo factor K. La carga superficial proviene de la polarización, que es el reacomodo microscópico de la carga en el dieléctrico. (Véase el ejemplo 24.10).

Bajo la influencia de campos eléctricos suficientemente intensos, los dieléctricos se vuelven conductores, una situación que se conoce como ruptura del dieléctrico. El campo máximo que un material puede soportar sin sufrir ruptura se llama rigidez dieléctrica.

En un dieléctrico la expresión para la densidad de energía es la misma que en el vacío, pero sustituyendo ϵ_0 por $\epsilon = K\epsilon$. (Véase el ejemplo 24.11).

La ley de Gauss en un dieléctrico tiene casi la misma forma que en el vacío, con dos diferencias clave: $\vec{E}$ se sustituye por $K\vec{E}$ y Q_{enc} se sustituye por $Q_{enc\text{-}libre}$, que incluye solo la carga libre (no la ligada) encerrada por la superficie gaussiana. (Véase el ejemplo 24.12).

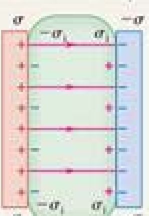
$$C = KC_0 = K\epsilon_0 \frac{A}{d} = \epsilon \frac{A}{d} \qquad (24.19)$$

(capacitor de placas paralelas con un dieléctrico)

$$u = \tfrac{1}{2}K\epsilon_0 E^2 = \tfrac{1}{2}\epsilon E^2 \qquad (24.20)$$

$$\oint K\vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{enc\text{-}libre}}{\epsilon_0} \qquad (24.23)$$

Dieléctrico entre las placas





PROBLEMA PRÁCTICO **Energía del campo eléctrico y capacitancia en un conductor esférico**

Una esfera conductora sólida de radio R tiene una carga Q. Calcule la densidad de energía del campo eléctrico en un punto a una distancia r desde el centro de la esfera para *a*) $r < R$ y *b*) $r > R$. *c*) Calcule la energía total del campo eléctrico asociada con la esfera cargada. *d*) ¿Cuánto trabajo se requiere para colocar la carga Q sobre la esfera? *e*) Use el resultado del inciso *c*) para calcular la capacitancia de la esfera. (Visualice el segundo conductor como una esfera hueca conductora de radio infinito).

GUÍA DE SOLUCIÓN

Véase el área de estudio MasteringPhysics® para consultar una solución con Video Tutor.



IDENTIFICAR y PLANTEAR

1. En este caso se conoce el campo eléctrico para todos los valores de r por el ejemplo 22.5 (sección 22.4). Se usarán estos para calcular la densidad de energía u y la energía *total* U del campo eléctrico. Luego se calcula la capacitancia a partir de la relación $U = Q^2/2C$.
2. Para calcular U considere una esfera hueca de radio r y espesor dr que tiene un volumen $dV = 4\pi r^2 dr$. La energía almacenada en este volumen es $u\,dV$ y la energía total es la integral de $u\,dV$ de $r = 0$ a $r \rightarrow \infty$. Defina esta integral.

EJECUTAR

3. Calcule u para $r < R$ y para $r > R$.
4. Sustituya los resultados del paso 3 en la expresión del paso 2. Luego resuelva la integral para obtener la energía total U del campo eléctrico.
5. Use sus conocimientos de la energía almacenada en una distribución de carga para calcular el trabajo requerido para colocar la carga Q.
6. Calcule la capacitancia de la esfera.

EVALUAR

7. ¿Dónde es mayor la densidad de energía del campo eléctrico? ¿Dónde es mínima?
8. ¿Cómo se verían afectados los resultados si la esfera sólida se sustituyera por una esfera conductora hueca con el mismo radio R?
9. Es posible calcular la diferencia de potencial entre la esfera y el infinito usando $C = Q/V$. ¿Esto concuerda con el resultado del ejemplo 23.8 (sección 23.3)?

Problemas

Para tareas asignadas por el profesor, visite www.masteringphysics.com



•, ••, •••: Problemas de dificultad creciente. **PA**: Problemas acumulativos que incorporan material de capítulos anteriores. **CALC**: Problemas que requieren cálculo. **BIO**: Problemas de ciencias biológicas.

PREGUNTAS PARA ANÁLISIS

P24.1 La ecuación (24.2) indica que la capacitancia de un capacitor de placas paralelas aumenta a medida que la separación d entre las placas disminuye. Sin embargo, existe un límite práctico en cuanto a qué tan pequeña puede ser d, lo que también impone un límite superior a la magnitud de C. Explique qué es lo que fija los límites para d. (*Sugerencia:* Piense en lo que sucede con la magnitud del campo eléctrico cuando $d \rightarrow 0$).

P24.2 Suponga que varios capacitores diferentes de placas paralelas se cargan con una fuente de voltaje constante. Pensando en el movimiento y la posición reales de las cargas a nivel atómico, ¿por qué es razonable que las capacitancias sean proporcionales a las áreas de las placas? ¿Por qué es razonable que las capacitancias sean *inversamente* proporcionales a la distancia entre las placas?

P24.3 Suponga que las dos placas de un capacitor tienen áreas diferentes. Cuando el capacitor se carga conectándolo a una batería, ¿las cargas en las dos placas tienen igual o diferente magnitud? Explique su razonamiento.

P24.4 En el Fermi National Accelerator Laboratory (Fermilab), en Illinois, los protones se aceleran en un anillo de 2 km de radio hasta alcanzar una rapidez cercana a la de la luz. La energía para este proceso se almacena en capacitores del tamaño de una casa. Cuando esos capacitores se están cargando emiten un sonido muy intenso. ¿Cuál es el origen de ese sonido?

P24.5 En el capacitor de placas paralelas de la figura 24.2, suponga que las placas se separan de manera que d es mucho mayor que el tamaño de las placas. *a*) ¿Es exacto decir que el campo eléctrico entre las placas es uniforme? ¿Por qué? *b*) En la situación que se ilustra en la figura 24.2, la diferencia de potencial entre las placas es $V_{ab} = Qd/\epsilon_0 A$. Si las placas se separan según la descripción anterior, ¿V_{ab} es mayor o menor que lo que indica esta fórmula? Explique su razonamiento. *c*) Con las placas separadas de acuerdo con la descripción anterior, ¿la capacitancia es mayor, menor o igual a la que da la ecuación (24.2)? Explique su razonamiento.

P24.6 Un capacitor de placas paralelas se carga con una batería y se mantiene conectado a esta. Después se duplica la separación entre las placas. ¿Cómo cambian el campo eléctrico, la carga en las placas y la energía total? Explique su razonamiento.

P24.7 Un capacitor de placas paralelas se carga conectándolo a una batería y luego se desconecta de esta. Después se duplica la separación entre las placas. ¿Cómo cambian el campo eléctrico, la diferencia de potencial y la energía total? Dé una explicación de su razonamiento.

P24.8 Dos capacitores de placas paralelas, idénticos, pero con la excepción de que uno tiene el doble de separación entre sus placas, se cargan con la misma fuente de voltaje. ¿Cuál capacitor tiene el campo eléctrico más intenso entre las placas? ¿Cuál capacitor tiene mayor carga? ¿Cuál tiene mayor densidad de energía? Explique su razonamiento.

P24.9 Las placas con carga de un capacitor se atraen entre sí, por lo que el hecho de separarlas requiere trabajo realizado por alguna fuente externa. ¿A dónde va la energía agregada por ese trabajo? Explique su razonamiento.

P24.10 Las dos placas de un capacitor reciben cargas $\pm Q$. Después se desconecta el capacitor del dispositivo de carga de manera que las

cargas en las placas no cambian, y el capacitor se sumerge en un tanque de aceite. El campo eléctrico entre las placas, ¿aumenta, disminuye o permanece igual? Explique su razonamiento. ¿Cómo podría medirse el campo?

P24.11 Como se aprecia en la tabla 24.1, el agua tiene una constante dieléctrica muy grande, $K = 80.4$. ¿Por qué cree que no es común utilizar agua como dieléctrico en los capacitores?

P24.12 ¿La rigidez dieléctrica es lo mismo que la constante dieléctrica? Explique las diferencias entre las dos cantidades. ¿Existe alguna relación sencilla entre la rigidez dieléctrica y la constante dieléctrica? (Consulte la tabla 24.2).

P24.13 Un capacitor construido con tiras de aluminio separadas por una película de PET estuvo sometido a un voltaje excesivo, y la ruptura resultante del dieléctrico hizo agujeros en el PET. Después de esto, se observó que la capacitancia era aproximadamente la misma que antes, pero el voltaje de ruptura era mucho menor. ¿Por qué?

P24.14 Suponga que usted acerca un bloque dieléctrico al espacio entre las placas de un capacitor con carga y se prepara para introducirlo entre ellas. ¿Qué fuerza sentiría? ¿Qué le dice esta fuerza acerca de la energía almacenada entre las placas una vez que el dieléctrico esté en su lugar, en relación con el momento en que no lo estaba?

P24.15 La frescura del pescado se puede medir si se coloca un ejemplar entre las placas de un capacitor y se mide la capacitancia. ¿Cómo funciona esto? (*Sugerencia:* Considere que el pescado se seca conforme pasa el tiempo. Consulte la tabla 24.1).

P24.16 Los capacitores *electrolíticos* usan como dieléctrico una capa muy delgada de óxido no conductor entre una placa metálica y una solución conductora. Analice la ventaja de un capacitor como este en relación con uno construido usando un dieléctrico sólido entre las placas metálicas.

P24.17 En términos de la constante dieléctrica K, ¿qué sucede con el flujo eléctrico a través de la superficie gaussiana que se ilustra en la figura 24.22, cuando se inserta el dieléctrico en el espacio antes vacío entre las placas? Explique su respuesta.

P24.18 Un capacitor de placas paralelas está conectado a una fuente de energía que mantiene una diferencia de potencial fija entre las placas. *a*) Si luego se coloca una lámina de dieléctrico entre las placas, ¿qué sucede con **i.** el campo eléctrico entre las placas, **ii.** la magnitud de la carga en cada placa, y **iii.** la energía almacenada en el capacitor? *b*) Ahora suponga que, antes de insertar el dieléctrico, se desconecta el capacitor con carga de la fuente de energía. En este caso, ¿qué pasa con **i.** el campo eléctrico entre las placas, **ii.** la magnitud de la carga en cada placa, y **iii.** la energía almacenada en el capacitor? Explique cualquier diferencia que exista entre las dos situaciones.

P24.19 Los dieléctricos líquidos que tienen moléculas polares (como el agua) siempre tienen constantes dieléctricas que disminuyen al aumentar la temperatura. ¿Por qué?

P24.20 Un conductor es un caso extremo de dieléctrico ya que, si se le aplica un campo eléctrico, las cargas tienen libertad para moverse dentro del conductor generando "cargas inducidas". ¿Cuál es la constante dieléctrica de un conductor perfecto: $K = 0$, $K \to \infty$, o algún valor intermedio? Explique su razonamiento.

EJERCICIOS

Sección 24.1 Capacitores y capacitancia

24.1 • Las placas de un capacitor de placas paralelas están separadas 2.50 mm y cada una tiene una carga de magnitud igual a 80.0 nC. Las placas están en el vacío. El campo eléctrico entre las placas tiene una magnitud de 4.00×10^6 V/m. ¿Cuál es la diferencia de potencial entre las placas? *b*) ¿Cuál es el área de cada placa? *c*) ¿Cuál es la capacitancia?

24.2 • Las placas de un capacitor de placas paralelas están separadas 3.28 mm, y cada una tiene un área de 12.2 cm^2. Cada placa tiene una carga de magnitud igual a 4.35×10^{-8} C. Las placas están en el vacío. *a*) ¿Cuál es la capacitancia? *b*) ¿Cuál es la diferencia de potencial entre las placas? *c*) ¿Cuál es la magnitud del campo eléctrico entre las placas?

24.3 • Un capacitor de aire de placas paralelas y capacitancia de 245 pF tiene una carga con magnitud de 0.148 μC en cada placa. Las placas están separadas 0.328 mm. *a*) ¿Cuál es la diferencia de potencial entre las placas? *b*) ¿Cuál es el área de cada placa? *c*) ¿Cuál es la magnitud del campo eléctrico entre las placas? *d*) ¿Cuál es la densidad de carga superficial en cada placa?

24.4 •• **Capacitancia de un osciloscopio.** Los osciloscopios tienen placas metálicas paralelas en su interior para que desvíen el haz de electrones. Estas placas se llaman *placas de desviación*, y normalmente son cuadrados de 3.0 cm por lado y están separadas 5.0 mm, con vacío entre ellas. ¿Cuál es la capacitancia de estas placas de desviación y, por lo tanto, del osciloscopio? (*Nota:* Esta capacitancia en ocasiones tiene un efecto en el circuito en estudio y debe tomarse en cuenta al efectuar los cálculos).

24.5 • Un capacitor de placas paralelas circulares de 10.0 μF está conectado a una batería de 12.0 V. *a*) ¿Cuál es la carga en cada placa? *b*) ¿Cuánta carga habría en las placas si se duplicara la separación y el capacitor siguiera conectado a la batería? *c*) ¿Cuánta carga habría en las placas si el capacitor se conectara a la batería de 12.0 V después de duplicar el radio de cada placa sin modificar su separación?

24.6 • Un capacitor de placas paralelas de 10.0 μF está conectado a una batería de 12.0 V. Después de que el capacitor se carga por completo, la batería se desconecta sin que haya pérdida de carga en las placas. *a*) Se conecta un voltímetro a través de las dos placas sin descargarlas. ¿Cuál es su lectura? *b*) ¿Cuál sería la lectura del voltímetro si **i.** la separación de las placas se duplica; **ii.** el radio de cada placa se duplica, pero la separación entre ellas permanece igual?

24.7 •• ¿A qué distancia deben colocarse dos monedas de un centavo de dólar para formar un capacitor de 1.00 pF? ¿Su respuesta sugiere que se justifica tratar las monedas como láminas infinitas? Explique su respuesta.

24.8 • Un capacitor lleno de aire, con placas circulares paralelas de 5.00 pF, va a usarse en un circuito en el que estará sometido a potenciales de hasta 1.00×10^2 V. El campo eléctrico entre las placas no va a ser mayor de 1.00×10^4 N/C. Suponga que, como ingeniero eléctrico en ciernes de Live-Wire Electronics, se le asignan las siguientes tareas: *a*) diseñar el capacitor determinando las dimensiones físicas y la separación que debe tener; *b*) determinar la carga máxima que pueden tener sus placas.

24.9 • Un capacitor de aire de placas paralelas almacena una carga de magnitud 240.0 pC en cada placa, cuando la diferencia de potencial entre las placas es de 42.0 V. *a*) Si el área de la placa es de 6.80 cm^2, ¿cuál es la separación entre las placas? *b*) Si la separación entre las placas es el doble del valor calculado en el inciso *a*), ¿qué diferencia de potencial se requiere para que el capacitor almacene una carga de 240.0 pC en cada placa?

24.10 • Un capacitor cilíndrico consiste en un núcleo interior sólido de un conductor con radio de 0.250 cm, rodeado por un tubo conductor exterior hueco. Los dos conductores están separados por aire, y la longitud del cilindro es de 12.0 cm. La capacitancia es de 36.7 pF. *a*) Calcule el radio interior del tubo hueco. *b*) Cuando el capacitor está cargado a 125 V, ¿cuál es la carga por unidad de longitud λ del capacitor?

24.11 • Un capacitor está construido con dos cilindros coaxiales huecos, de hierro, uno dentro del otro. El cilindro interior tiene carga

negativa y el exterior tiene carga positiva; la magnitud de la carga en cada uno es 10.0 pC. El cilindro interior tiene un radio de 0.50 mm y el exterior de 5.00 mm, y la longitud de cada cilindro es de 18.0 cm. *a*) ¿Cuál es su capacitancia? *b*) ¿Qué diferencia de potencial es necesario aplicar para tener tales cargas en los cilindros?

24.12 •• Un capacitor cilíndrico tiene un conductor interno de 1.5 mm de radio y un conductor externo de 3.5 mm de radio. Los dos conductores están separados por vacío, y el capacitor completo mide 2.8 m de largo. *a*) ¿Cuál es la capacitancia por unidad de longitud? *b*) El potencial del conductor interno es 350 mV mayor que el del conductor externo. Determine la carga (magnitud y signo) en ambos conductores.

24.13 •• Un capacitor esférico contiene una carga de 3.30 nC cuando está conectado a una diferencia de potencial de 220 V. Si sus placas están separadas por vacío y el radio interno de la esfera exterior es de 4.00 cm, calcule: *a*) la capacitancia; *b*) el radio de la esfera interior; *c*) el campo eléctrico inmediatamente afuera de la superficie de la esfera interior.

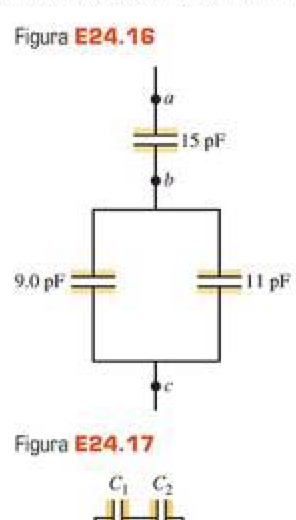
24.14 • Un capacitor esférico está formado por dos esferas huecas conductoras concéntricas y separadas por vacío. La esfera interior tiene un radio de 15.0 cm y la capacitancia es de 116 pF. *a*) ¿Cuál es el radio de la esfera exterior? *b*) Si la diferencia de potencial entre las dos esferas es de 220 V, ¿cuál es la magnitud de la carga en cada esfera?

Sección 24.2 Capacitores en serie y en paralelo

24.15 • BIO **Anguilas eléctricas.** Las anguilas y los peces eléctricos generan grandes diferencias de potencial que usan para aturdir a sus enemigos y presas. Estos potenciales son producidos por células capaces de generar, cada una, 0.10 V. Estas células se pueden modelar como capacitores cargados. *a*) ¿Cómo se deben conectar estas células (en serie o en paralelo) para producir un potencial total de más de 0.10 V? *b*) Usando la conexión del inciso *a*), ¿cuántas células deben conectarse para producir la descarga de 500 V de la anguila eléctrica?

24.16 • Para el sistema de capacitores que se ilustra en la figura E24.16, calcule la capacitancia equivalente *a*) entre *b* y *c*, y *b*) entre *a* y *c*.

Figura **E24.16**



24.17 • En la figura E24.17, cada capacitor tiene $C = 4.00\ \mu F$ y $V_{ab} = +28.0$ V. Calcule *a*) la carga en cada capacitor; *b*) la diferencia de potencial a través de cada capacitor; *c*) la diferencia de potencial entre los puntos *a* y *d*.

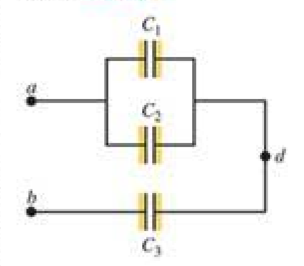
Figura **E24.17**

24.18 • En la figura 24.8*a*, sean $C_1 = 3.00\ \mu F$, $C_2 = 5.00\ \mu F$ y $V_{ab} = +52.0$ V. Calcule *a*) la carga en cada capacitor y *b*) la diferencia de potencial a través de cada capacitor.

24.19 • En la figura 24.9*a*, sean $C_1 = 3.00\ \mu F$, $C_2 = 5.00\ \mu F$ y $V_{ab} = +52.0$ V. Calcule *a*) la carga en cada capacitor y *b*) la diferencia de potencial a través de cada capacitor.

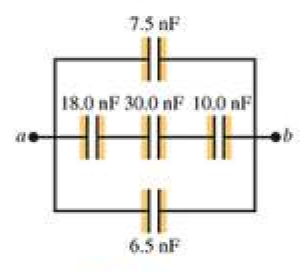
24.20 • En la figura E24.20, $C_1 = 6.00\ \mu F$, $C_2 = 3.00\ \mu F$ y $C_3 = 5.00\ \mu F$. La red de capacitores está conectada a un potencial aplicado V_{ab}. Después de que las cargas en los capacitores han alcanzado sus valores finales, la carga en C_2 es de 40.0 μF. *a*) ¿Cuáles son las cargas en los capacitores C_1 y C_3? *b*) ¿Cuál es el voltaje V_{ab} aplicado?

Figura **E24.20**



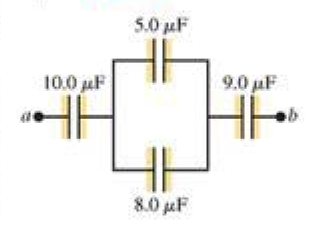
24.21 •• Para el sistema de capacitores mostrado en la figura E24.21, se mantiene una diferencia de potencial de 25 V a través de *ab*. *a*) ¿Cuál es la capacitancia equivalente de este sistema entre *a* y *b*? *b*) ¿Cuánta carga se almacena en este sistema? *c*) ¿Cuánta carga almacena el capacitor de 6.5 nF? *d*) ¿Cuál es la diferencia de potencial a través del capacitor de 7.5 nF?

Figura **E24.21**



24.22 • En la figura E24.22 se ilustra un sistema de cuatro capacitores, donde la diferencia de potencial a través de *ab* es de 50.0 V. *a*) Determine la capacitancia equivalente de este sistema entre *a* y *b*. *b*) ¿Cuánta carga se almacena en esta combinación de capacitores? *c*) ¿Cuánta carga se almacena en cada uno de los capacitores de 10.0 y 9.0 μF?

Figura **E24.22**



24.23 •• Suponga que el capacitor de 3 μF en la figura 24.10*a* se retirara para sustituirse por otro diferente, y que esto cambiara la capacitancia equivalente entre los puntos *a* y *b* a 8 μF. ¿Cuál sería la capacitancia del capacitor de reemplazo?

Sección 24.3 Almacenamiento de energía en capacitores y energía de campo eléctrico

24.24 • Un capacitor de placas paralelas separadas por aire tiene una capacitancia de 920 pF. La carga en cada placa es de 2.55 μC. *a*) ¿Cuál es la diferencia de potencial entre las placas? *b*) Si la carga se mantiene constante, ¿cuál será la diferencia de potencial entre las placas, si la separación se duplica? *c*) ¿Cuánto trabajo se requiere para duplicar la separación?

24.25 • Un capacitor de placas paralelas separadas por aire, de 5.80 μF, tiene una separación de 5.00 mm y está cargado a una diferencia de potencial de 400 V. Calcule la densidad de energía en la región comprendida entre las placas, en unidades de J/m^3.

24.26 • Un capacitor con aire está hecho de dos placas paralelas planas separadas 1.50 mm. La magnitud de la carga en cada placa es de 0.0180 μC cuando la diferencia de potencial es de 200 V. *a*) ¿Cuál es la capacitancia? *b*) ¿Cuál es el área de cada placa? *c*) ¿Cuál es el voltaje máximo que puede aplicarse sin que haya ruptura del dieléctrico? (En el caso del aire, la ruptura del dieléctrico ocurre con una intensidad de campo eléctrico de 3.0×10^6 V/m). *d*) Cuando la carga es de 0.0180 μC, ¿cuál es la energía total almacenada?

24.27 • Un capacitor tiene placas paralelas con vacío entre ellas, con área de placa igual a *A*, una separación *x*, y cargas $+Q$ y $-Q$ en las placas. El capacitor se desconecta de la fuente de carga, por lo que la carga en cada placa permanece fija. *a*) ¿Cuál es la energía total almacenada en el capacitor? *b*) Se separan las placas una distancia adicional

dx. ¿Cuál es el cambio en la energía almacenada? *c*) Si *F* es la fuerza con la que las placas se atraen entre sí, entonces el cambio en la energía almacenada debe ser igual al trabajo $dW = Fdx$ realizado para separar las placas. Obtenga una expresión para *F*. *d*) Explique por qué *F no* es igual a *QE*, donde *E* es el campo eléctrico entre las placas.

24.28 •• Un capacitor de placas paralelas con vacío entre ellas tiene 8.38 J de energía almacenada. La separación entre las placas es de 2.30 mm. Si la separación disminuye a 1.15 mm, ¿cuál es la energía almacenada *a*) si el capacitor se desconecta de la fuente de potencial de manera que la carga en las placas permanece constante, y *b*) si el capacitor sigue conectado a la fuente de potencial de manera que la diferencia de potencial entre las placas permanece constante?

24.29 • Se tienen dos capacitores idénticos y una fuente externa de potencial. *a*) Compare la energía total almacenada en los capacitores cuando se conectan en serie y en paralelo al potencial aplicado. *b*) Compare la cantidad máxima de carga almacenada en cada caso. *c*) El almacenamiento de energía en un capacitor está limitado por el campo eléctrico máximo entre las placas. ¿Cuál es la razón del campo eléctrico para las combinaciones en serie y paralelo?

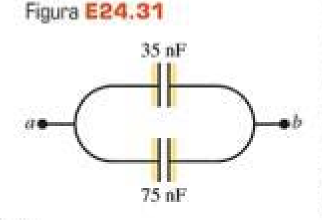
24.30 • Para la red de capacitores que se ilustra en la figura E24.30, la diferencia de potencial a través de *ab* es de 36 V. Calcule *a*) la carga total almacenada en esta red; *b*) la carga en cada capacitor; *c*) la energía total almacenada en la red; *d*) la energía almacenada en cada capacitor; *e*) la diferencia de potencial a través de cada capacitor.

Figura **E24.30**



24.31 • Para la red de capacitores que se ilustra en la figura E24.31, la diferencia de potencial a través de *ab* es 220 V. Calcule *a*) la carga total almacenada en la red; *b*) la carga en cada capacitor; *c*) la energía total almacenada en la red; *d*) la energía almacenada en cada capacitor; *e*) la diferencia de potencial a través de cada capacitor.

Figura **E24.31**



24.32 • Un capacitor cilíndrico de 0.350 m de longitud consiste en un núcleo conductor sólido con radio de 1.20 mm, y un tubo exterior conductor hueco con radio interior de 2.00 mm. Los dos conductores están separados por aire y se cargan a una diferencia de potencial de 6.00 V. Calcule *a*) la carga por unidad de longitud para el capacitor; *b*) la carga total en el capacitor; *c*) la capacitancia; *d*) la energía almacenada en el capacitor cuando está cargado por completo.

24.33 • Un capacitor cilíndrico de aire tiene una longitud de 15.0 m y almacena 3.20×10^{-9} J de energía cuando la diferencia de potencial entre los dos conductores es de 4.00 V. *a*) Calcule la magnitud de la carga en cada conductor. *b*) Calcule la razón de los radios de los conductores interior y exterior.

24.34 •• Un capacitor está formado por dos esferas huecas conductoras concéntricas separadas por vacío. La esfera interior tiene un radio de 12.5 cm, y la exterior tiene un radio de 14.8 cm. Se aplica al capacitor una diferencia de potencial de 120 V. *a*) ¿Cuál es la densidad de energía en $r = 12.6$ cm, inmediatamente afuera de la esfera interior? *b*) ¿Cuál es la densidad de energía en $r = 14.7$ cm, inmediatamente adentro de la esfera exterior? *c*) Para un capacitor de placas paralelas, la densidad de energía es uniforme en la región entre las placas, excepto cerca de los bordes de estas. ¿Esto también se cumple para un capacitor esférico?

Sección 24.4 Dieléctricos

24.35 • Se conecta un capacitor de 12.5 μF a una fuente de poder que mantiene una diferencia de potencial constante de 24.0 V a través de las placas. Entre las placas se coloca un trozo de material cuya constante dieléctrica es de 3.75 llenando por completo el espacio que hay entre ellas. *a*) ¿Cuánta energía hay almacenada en el capacitor antes y después de insertar el dieléctrico? *b*) ¿En cuánto cambia la energía durante la inserción? ¿Aumenta o disminuye?

24.36 • Un capacitor de placas paralelas tiene capacitancia $C_0 = 5.00$ pF cuando hay aire entre sus placas. La separación entre las placas es de 1.50 mm. *a*) ¿Cuál es la magnitud máxima de carga *Q* que puede colocarse en cada placa si el campo eléctrico entre ellas no debe exceder 3.00×10^4 V/m? *b*) Se inserta un dieléctrico con $K = 2.70$ entre las placas del capacitor, llenando por completo el volumen entre ellas. Ahora, ¿cuál es la magnitud máxima de carga en cada placa si el campo eléctrico entre ellas no excede 3.00×10^4 V/m?

24.37 • Dos placas paralelas tienen cargas iguales de signo contrario. Cuando se evacua el espacio entre las placas, el campo eléctrico es $E = 3.20 \times 10^5$ V/m. Cuando el espacio se llena con un dieléctrico, el campo eléctrico es $E = 2.50 \times 10^5$ V/m. *a*) ¿Cuál es la densidad de carga en cada superficie del dieléctrico? *b*) ¿Cuál es la constante dieléctrica?

24.38 • Un aficionado a la electrónica quiere construir un capacitor sencillo de 1.0 nF para sintonizar su radio de cristal, con dos láminas de aluminio como placas y algunas hojas de papel entre ellas como dieléctrico. El papel tiene una constante dieléctrica de 3.0, y el espesor de una hoja es de 0.20 mm. *a*) Si las hojas de papel miden 22×28 cm y el aficionado corta el aluminio con las mismas dimensiones, ¿cuántas hojas de papel debe colocar entre las placas para lograr la capacitancia adecuada? *b*) Suponga que, por conveniencia, él quiere utilizar, en lugar de papel, una sola hoja de cartón con la misma constante dieléctrica pero con espesor de 12.0 mm. ¿Qué área de hoja de aluminio necesitará para hacer sus placas y obtener 1.0 nF de capacitancia? *c*) Suponga que recurre a la alta tecnología y encuentra una hoja de teflón del mismo espesor que el cartón para utilizarla como dieléctrico. ¿Necesitará un área más grande o más pequeña de teflón en comparación con la de cartón? Explique su respuesta.

24.39 • El dieléctrico que ha de usarse en un capacitor de placas paralelas tiene una constante dieléctrica de 3.60 y rigidez dieléctrica de 1.60×10^7 V/m. El capacitor debe tener una capacitancia de 1.25×10^{-9} F y debe soportar una diferencia de potencial máxima de 5500 V. ¿Cuál es el área mínima que deben tener las placas del capacitor?

24.40 •• BIO **Potencial en células humanas.** Algunas membranas celulares del cuerpo humano tienen una capa de carga negativa en la superficie interior y una capa de carga positiva de igual magnitud en la superficie exterior. Suponga que la densidad de carga en cualquier superficie es de $\pm 0.50 \times 10^{-3}$ C/m^2, la membrana celular tiene 5.0 nm de espesor, y el material de la membrana celular es aire. *a*) Calcule la magnitud de $\vec{E}$ en la pared entre las dos capas de carga. *b*) Calcule la diferencia de potencial entre el interior y el exterior de la célula. ¿Cuál tiene el potencial más alto? *c*) Una célula normal del cuerpo humano tiene un volumen de 10^{-16} m^3. Estime la energía total del campo eléctrico almacenada en la membrana de una célula de este tamaño. (*Sugerencia:* Suponga que la célula es esférica y calcule el volumen de la membrana celular). *d*) En realidad la membrana celular no está hecha de aire, sino de tejido con una constante dieléctrica de 5.4. Repita los incisos *a*) y *b*) para este caso.

24.41 • Un capacitor tiene placas paralelas con área de 12 cm^2 separadas por una distancia de 2.0 mm. El espacio entre las placas está lleno de poliestireno (consulte la tabla 24.2). *a*) Determine la permitividad del poliestireno. *b*) Calcule el voltaje máximo permisible a través del capacitor para evitar la ruptura del dieléctrico. *c*) Con el voltaje igual al valor obtenido en el inciso *b*), determine la densidad de carga superficial en cada placa y la densidad de carga superficial inducida en la superficie del dieléctrico.

24.42 • Se mantiene una diferencia de potencial constante de 12 V entre las terminales de un capacitor de 0.25 μF de placas paralelas con aire entre ellas. *a*) Se inserta una lámina de PET entre las placas de manera que llene por completo el espacio. Cuando se hace esto, ¿cuánta carga adicional fluye hacia la placa positiva del capacitor? (Consulte la tabla 24.1). *b*) ¿Cuál es la carga total inducida en cada cara de la lámina de PET? *c*) ¿Qué efecto tiene la lámina de PET en el campo eléctrico entre las placas? Explique cómo se puede conciliar este hecho con el incremento de la carga en las placas, el cual actúa para *aumentar* el campo eléctrico.

24.43 • Cuando se conecta un capacitor con aire de 360 nF (1 nF = 10^{-9} F) a una fuente de poder, la energía almacenada en el capacitor es de 1.85×10^{-5} J. Mientras el capacitor se mantiene conectado a la fuente de poder, se inserta un trozo de material dieléctrico que llena por completo el espacio entre las placas. Esto incrementa la energía almacenada en 2.32×10^{-5} J. *a*) ¿Cuál es la diferencia de potencial entre las placas del capacitor? *b*) ¿Cuál es la constante dieléctrica del trozo de material?

24.44 • Un capacitor de placas paralelas tiene una capacitancia C = 12.5 pF cuando el volumen entre las placas está lleno de aire. Las placas son circulares con radio de 3.00 cm. El capacitor está conectado a una batería y una carga de magnitud 25.0 pC va hacia cada placa. Con el capacitor aún conectado a la batería, se inserta un bloque de dieléctrico entre las placas llenando por completo el espacio entre ellas. Después de insertar el dieléctrico, la carga en cada placa tiene una magnitud de 45.0 pC. *a*) ¿Cuál es la constante dieléctrica K del dieléctrico? *b*) ¿Cuál es la diferencia de potencial entre las placas antes y después de haber insertado el dieléctrico? *c*) ¿Cuál es el campo eléctrico en el punto medio entre las placas antes y después de insertar el dieléctrico?

Sección 24.6 La ley de Gauss en los dieléctricos

24.45 • El volumen entre las placas paralelas de un capacitor está lleno de plástico cuya constante dieléctrica es K. La magnitud de la carga en cada placa es Q. Cada placa tiene área A, con una distancia d entre ambas. *a*) Utilice la ley de Gauss como se plantea en la ecuación (24.23) para calcular la magnitud del campo eléctrico en el dieléctrico. *b*) Use el campo eléctrico obtenido en el inciso *a*) para calcular la diferencia de potencial entre las dos placas. *c*) Con el resultado del inciso *b*), determine la capacitancia del capacitor. Compare su resultado con la ecuación (24.12).

24.46 • Las placas paralelas de un capacitor tienen un área de 0.0225 m^2 y están separadas por 1.00 mm de teflón. *a*) Calcule la carga en las placas cuando están cargadas a una diferencia de potencial de 12.0 V. *b*) Use la ley de Gauss (ecuación 24.23) para calcular el campo eléctrico dentro del teflón. *c*) Aplique la ley de Gauss para determinar el campo eléctrico si se desconecta la fuente de voltaje y se retira el teflón.

PROBLEMAS

24.47 • Las unidades de flash electrónico de las cámaras fotográficas contienen un capacitor que almacena energía para producir el destello. En una de estas unidades, el fulgor dura $\frac{1}{675}$ s con una salida media de potencia luminosa de 2.70×10^5 W. *a*) Si la conversión de energía eléctrica en luz tiene una eficiencia del 95% (el resto se convierte en energía térmica), ¿cuánta energía debe almacenarse en el capacitor para obtener un destello? *b*) El capacitor tiene una diferencia de potencial entre sus placas de 125 V, cuando la energía almacenada es igual al valor calculado en el inciso *a*). ¿Cuál es la capacitancia?

24.48 • Las placas paralelas de un capacitor con aire miden 16 cm cuadrados de superficie, con una separación de 3.7 mm. El capacitor se conecta a una batería de 12 V. *a*) ¿Cuál es la capacitancia? *b*) ¿Cuál es la carga en cada placa? *c*) ¿Cuál es el campo eléctrico entre las placas? *d*) ¿Cuál es la energía almacenada en el capacitor? *e*) Si la batería se desconecta y luego se separan las placas hasta estar a 7.4 mm, ¿cuáles son las respuestas para los incisos *a*) a *d*)?

24.49 •• Suponga que la batería del problema 24.48 permanece conectada mientras se separan las placas. ¿Cuáles son las respuestas para los incisos *a*) a *d*) después de haber separado las placas?

24.50 ••• BIO **Membranas celulares.** Las membranas de las células (la pared que las rodea) normalmente tienen un espesor de 7.5 nm. Son parcialmente permeables para permitir que material con carga entre y salga, según sea necesario. En las caras interior y exterior de las membranas hay densidades de carga iguales pero de signo contrario, para impedir que cargas adicionales crucen la membrana celular. Se puede modelar la membrana celular como un capacitor de placas paralelas, con la membrana que contiene proteínas incrustada en un material orgánico que le da una constante dieléctrica de alrededor de 10. (Véase la figura P24.50). *a*) ¿Cuál es la capacitancia por centímetro cuadrado de una membrana celular? *b*) En su estado de reposo normal una célula tiene una diferencia de potencial de 85 mV a través de su membrana. ¿Cuál es el campo eléctrico dentro de ella?

Figura **P24.50**



24.51 • Un capacitor está hecho de dos cilindros coaxiales huecos de cobre, uno dentro del otro. En el espacio entre los cilindros hay aire. El cilindro interior tiene una carga positiva neta, y el exterior una carga negativa. El cilindro interior tiene un radio de 2.50 mm, y el exterior tiene un radio de 3.10 mm; la longitud de cada cilindro es de 36.0 cm. Si la diferencia de potencial entre las superficies de los dos cilindros es de 80.0 V, ¿cuál es la magnitud del campo eléctrico en un punto entre los dos cilindros que se encuentra a 2.80 mm de su eje común y en el punto medio entre los extremos de los cilindros?

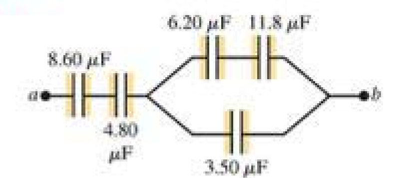
24.52 ••• En cierto tipo de teclado de computadora, cada tecla tiene una pequeña placa metálica que funciona como una de las placas de un capacitor de placas paralelas relleno de aire. Cuando se oprime la tecla, la separación de las placas disminuye y la capacitancia aumenta. Los circuitos electrónicos detectan el cambio de la capacitancia y con ello la tecla que se oprimió. En un teclado en particular, el área de cada placa metálica es de 42.0 mm^2, y la separación entre las placas es de 0.700 mm antes de oprimir la tecla. *a*) Calcule la capacitancia antes de oprimir la tecla. *b*) Si los circuitos son capaces de detectar un cambio en la capacitancia de 0.250 pF, ¿qué distancia hay que oprimir la tecla para que los circuitos detecten el cambio?

24.53 •• Un capacitor de 20.0 μF está cargado con una diferencia de potencial de 800 V. Las terminales del capacitor cargado se conectan entonces a las de un capacitor descargado de 10.0 μF. Calcule *a*) la carga original del sistema, *b*) la diferencia de potencial final a través de cada capacitor, *c*) la energía final del sistema, y *d*) la disminución de energía cuando los capacitores se conectan.

24.54 •• En la figura 24.9*a*, sean C_1 = 9.0 μF, C_2 = 4.0 μF y V_{ab} = 36 V. Suponga que los capacitores con carga se desconectan de la fuente y uno del otro, para luego reconectarlos entre sí con las placas de signo *contrario*. ¿En cuánto disminuye la energía del sistema?

24.55 • Para la red de capacitores que se ilustra en la figura P24.55, la diferencia de potencial a través de *ab* es de 12.0 V. Calcule *a*) la energía total almacenada en la red, y *b*) la energía almacenada en el capacitor de 4.80 μF.

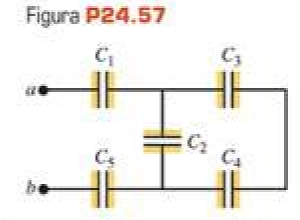
Figura **P24.55**



24.56 •• Se dispone de varios capacitores de 0.25 μF. El voltaje a través de cada uno no debe exceder 600 V. Se necesita construir un capacitor con capacitancia de 0.25 μF para conectarlo a través de una diferencia de potencial de 960 V. *a*) En un diagrama, muestre la manera de obtener un capacitor equivalente con las propiedades mencionadas. *b*) Ningún dieléctrico es un aislante perfecto que impida por completo el flujo de carga a través de su volumen. Suponga que el dieléctrico en uno de los capacitores en el diagrama es un conductor moderadamente bueno. En este caso, ¿qué ocurrirá cuando la combinación de capacitores se conecte a través de una diferencia de potencial de 960 V?

24.57 • En la figura P24.57, $C_1 = C_5 = 8.4$ μF y $C_2 = C_3 = C_4 = 4.2$ μF. El potencial aplicado es $V_{ab} = 220$ V. *a*) ¿Cuál es la capacitancia equivalente de la red entre los puntos *a* y *b*? *b*) Calcule la carga en cada capacitor y la diferencia de potencial a través de cada uno.

Figura **P24.57**

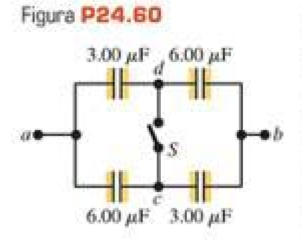


24.58 •• Usted trabaja en un proyecto de electrónica que requiere diversos capacitores, pero solo tiene disponible un gran inventario de 100 nF. Describa cómo se pueden conectar estos capacitores para producir cada una de las siguientes capacitancias: *a*) 50 nF; *b*) 450 nF; *c*) 25 nF; *d*) 75 nF.

24.59 •• En la figura E24.20, $C_1 = 3.00$ μF y $V_{ab} = 150$ V. La carga en el capacitor C_1 es de 150 μC y la carga en C_3 es de 450 μC. ¿Cuáles son los valores de las capacitancias de C_2 y C_3?

24.60 • Los capacitores en la figura P24.60 se encuentran inicialmente sin carga y están conectados, como se ilustra en el diagrama, con el interruptor *S* abierto. La diferencia de potencial aplicada es $V_{ab} = +210$ V. *a*) ¿Cuál es la di-ferencia de potencial V_{cd}? *b*) ¿Cuál es la diferencia de potencial a través de cada capacitor una vez cerrado el interruptor *S*? *c*) ¿Cuánta carga fluyó a través del interruptor cuando se cerró?

Figura **P24.60**

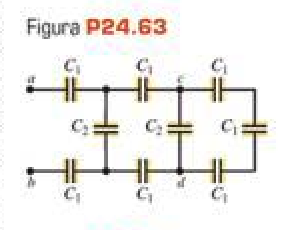


24.61 •• Tres capacitores con capacitancias de 8.4, 8.4 y 4.2 μF están conectados en serie a través de una diferencia de potencial de 36 V. *a*) ¿Cuál es la carga en el capacitor de 4.2 μF? *b*) ¿Cuál es la energía total almacenada en los tres capacitores? *c*) Los capacitores se desconectan de la diferencia de potencial sin permitir que se descarguen. Después se vuelven a conectar en paralelo entre sí, con las placas con carga positiva conectadas. ¿Cuál es el voltaje a través de cada capacitor en la combinación en paralelo? *d*) ¿Cuál es la energía total que ahora está almacenada en los capacitores?

24.62 • **Capacitancia en una nube cargada.** El centro de carga de una nube durante una tormenta, que se encuentra a 3.0 km sobre la superficie terrestre, contiene 20 C de carga negativa. Si se supone que el centro de carga tiene un radio de 1.0 km, y el centro de carga y la superficie de la Tierra se modelan como placas paralelas, calcule: *a*) la capacitancia del sistema; *b*) la diferencia de potencial entre el centro de carga y la superficie terrestre; *c*) la intensidad media del campo eléctrico entre la nube y la superficie terrestre; *d*) la energía eléctrica almacenada en el sistema.

24.63 •• En la figura P24.63, cada capacitancia C_1 es de 6.9 μF, y cada capacitancia C_2 es de 4.6 μF. *a*) Calcule la capacitancia equivalente de la red entre los puntos *a* y *b*. *b*) Determine la carga en cada uno de los tres capacitores más cercanos a *a* y *b* cuando $V_{ab} = 420$ V. *c*) Con 420 V a través de *a* y *b*, calcule V_{cd}.

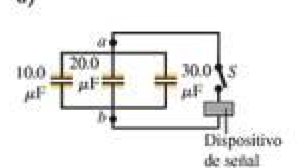
Figura **P24.63**



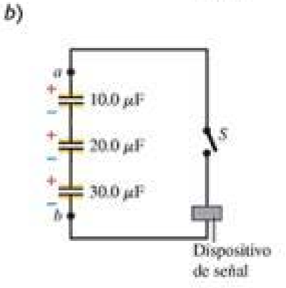
24.64 • Cada combinación de capacitores entre los puntos *a* y *b* en la figura P24.64 se conecta primero a una batería de 120 V, para cargarlos. Después, estas combinaciones se conectan para formar el circuito que se ilustra. Cuando se acciona el interruptor *S*, fluye la carga desde los capacitores, la cual activa el dispositivo de señal. ¿Cuánta carga fluye a través del dispositivo de señal en cada caso?

Figura **P24.64**

a)



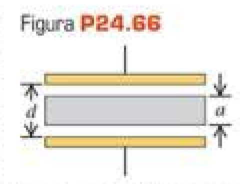
b)



24.65 • Un capacitor de placas paralelas que tiene solo aire entre las placas se carga conectándolo a una batería. Luego se desconecta el capacitor de la batería sin que ninguna carga salga de las placas. *a*) Cuando se coloca a través del capacitor, un voltímetro da una lectura de 45.0 V. Al insertar un dieléctrico entre las placas llenando por completo el espacio entre ellas, el voltímetro lee 11.5 V. ¿Cuál es la constante dieléctrica de este material? *b*) ¿Cuál será la lectura del voltímetro si se retira parte del dieléctrico de manera que solo ocupe la tercera parte del espacio entre las placas?

24.66 •• Un capacitor con aire está construido con dos placas planas, cada una con área *A*, separadas una distancia *d*. Después se inserta entre ellas un bloque metálico con espesor *a* (menor que *d*) y de la misma forma y tamaño que las placas, paralelo a estas y sin tocarlas (figura P24.66). *a*) ¿Cuál es la capacitancia de este arreglo? *b*) Exprese la capacitancia como un múltiplo de la capacitancia C_0 cuando el bloque de metal no está presente. *c*) Analice lo que ocurre con la capacitancia en los límites cuando $a \to 0$ y $a \to d$.

Figura **P24.66**



24.67 •• **Capacitancia de la Tierra.** Considere un capacitor esférico con un conductor esférico sólido de radio *R* y el otro conductor en el infinito. *a*) Use la ecuación (24.1) y lo que sabe acerca del potencial en la superficie de una esfera conductora con carga *Q* con la finalidad de deducir una expresión para la capacitancia de la esfera cargada. *b*) Use el resultado del inciso *a*) para calcular la capacitancia de la Tierra. La Tierra es un buen conductor y tiene un radio de 6380 km. Compare los resultados con la capacitancia de los capacitores comunes que se usan en los circuitos electrónicos y que tienen capacitancias que van de 10 a 100 pF.

24.68 •• Se aplica una diferencia de potencial $V_{ab} = 48.0$ V a través de la red de capacitores de la figura E24.17. Si $C_1 = C_2 = 4.00$ μF y

$C_4 = 8.00\ \mu\text{F}$, ¿cuál debe ser la capacitancia C_3 si el circuito está diseñado para almacenar 2.90×10^{-3} J de energía eléctrica?

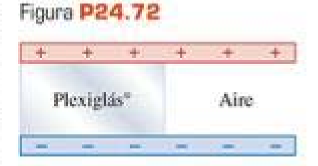
24.69 • **Capacitancia de la Tierra-ionosfera.** La Tierra puede considerarse como un capacitor de un solo conductor (véase el problema 24.67). También se puede considerar en combinación con una capa cargada de la atmósfera, la ionosfera, como un capacitor esférico de dos placas, donde la superficie terrestre es la placa negativa. La ionosfera se encuentra a una altitud de 70 km aproximadamente, y la diferencia de potencial entre esta y la superficie terrestre es de alrededor de 350,000 V. Calcule *a*) la capacitancia de este sistema; *b*) la carga total en el capacitor; *c*) la energía almacenada en el sistema.

24.70 • **CALC** El cilindro interior de un capacitor largo y cilíndrico tiene un radio r_a y densidad de carga lineal $+\lambda$. Está rodeado por una coraza cilíndrica, coaxial, conductora, con radio interior r_b y densidad de carga lineal $-\lambda$ (véase la figura 24.6). *a*) ¿Cuál es la densidad de energía en la región entre los conductores a una distancia r del eje? *b*) Integre la densidad de energía calculada en el inciso *a*) con respecto al volumen entre los conductores en una longitud L del capacitor, para obtener la energía total del campo eléctrico por unidad de longitud. *c*) Use la ecuación (24.9) y la capacitancia por unidad de longitud calculada en el ejemplo 24.4 (sección 24.1), para calcular U/L. ¿Concuerda el resultado con el que se obtuvo en el inciso *b*)?

24.71 •• **PA** Un capacitor tiene una diferencia de potencial de 2.25×10^3 V entre sus placas. Entre las placas del capacitor se conecta un pequeño alambre de aluminio con una temperatura inicial de 23.0°C y toda la energía almacenada en el capacitor calienta el alambre. Este último tiene una masa de 12.0 g. Si no hay pérdida de calor y la temperatura final del alambre es de 34.2°C, ¿cuál es la capacitancia del capacitor?

24.72 •• Un capacitor de placas paralelas está formado por dos placas de 12.0 cm por lado y 4.50 mm de separación. La mitad del espacio entre estas placas solo contiene aire, y la otra mitad contiene Plexiglás® con una constante dieléctrica igual a 3.40 (figura P24.72). A través de las placas se conecta una batería de 18.0 V. *a*) ¿Cuál es la capacitancia de esta combinación? (*Sugerencia:* ¿Puede visualizar este capacitor como dos capacitores equivalentes en paralelo?). *b*) ¿Cuánta energía se almacena en el capacitor? *c*) Si se retira el Plexiglás® y lo demás permanece igual, ¿cuánta energía se almacenará en el capacitor?

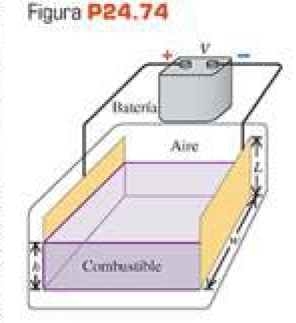
Figura **P24.72**



24.73 •• Un capacitor de placas paralelas tiene placas cuadradas de 8.00 cm por lado y 3.80 mm de separación. El espacio entre las placas está completamente lleno por dos bloques de dieléctrico cada uno de 8.00 cm por lado y 1.90 mm de espesor. Un trozo es de pyroglass y el otro es poliestireno. Si la diferencia de potencial entre las placas es de 86.0 V, ¿cuánta energía eléctrica se almacena en el capacitor?

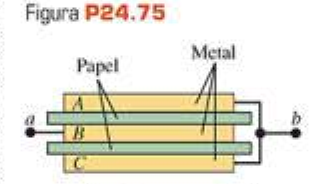
24.74 •• Un medidor de combustible utiliza un capacitor para determinar la altura que alcanza el combustible dentro de un tanque. La constante dieléctrica efectiva K_{ef} cambia a partir de un valor de 1 cuando el tanque está vacío, a un valor de K, la constante dieléctrica del combustible cuando el tanque está lleno. Circuitos electrónicos adecuados determinan la constante dieléctrica efectiva de la combinación de aire y combustible entre las placas del capacitor. Cada una de las dos placas rectangulares tiene un ancho w y longitud L (figura P24.74). La altura del combustible entre las placas es h. Se pueden ignorar los efectos de los bordes. *a*) Obtenga una expresión para K_{ef} como función de h. *b*) ¿Cuál es la constante dieléctrica efectiva para un tanque a la cuarta parte, a la mitad y a las tres cuartas partes de su volumen, si el combustible es gasolina ($K = 1.95$)? *c*) Repita el inciso *b*) para metanol ($K = 33.0$). *d*) ¿Para qué combustible resulta más práctico usar este medidor?

Figura **P24.74**



24.75 •• Tres placas metálicas cuadradas A, B y C, cada una de 12 cm de lado y 1.50 mm de espesor, se acomodan como se ilustra en la figura P24.75. Las placas están separadas por hojas de papel de 0.45 mm de espesor y constante dieléctrica de 4.2. Las placas exteriores se conectan entre sí y con el punto b. La placa interior se conecta al punto a. *a*) Copie el diagrama y muestre con signos más y menos la distribución de la carga en las placas cuando el punto a se mantiene a un potencial positivo en relación con el punto b. *b*) ¿Cuál es la capacitancia entre los puntos a y b?

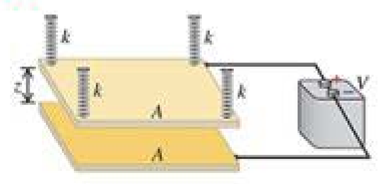
Figura **P24.75**



PROBLEMAS DE DESAFÍO

24.76 ••• **PA** El capacitor con aire entre las placas paralelas que se ilustra en la figura P24.76 consiste en dos placas conductoras horizontales de área A. La placa inferior descansa en un apoyo fijo, y la superior está sostenida por cuatro resortes con constante de elasticidad k, cada uno ubicado en una de las cuatro esquinas de la placa, como se observa en la figura. Cuando no tienen carga, las placas están separadas por una distancia z_0. Se conecta una batería a las placas y produce una diferencia de potencial V entre ellas. Esto ocasiona que la separación entre las placas disminuya a z. Ignore cualquier efecto de los bordes. *a*) Demuestre que la fuerza electrostática entre las placas con carga tiene una magnitud de $\epsilon_0 AV^2/2z^2$. (*Sugerencia:* Consulte el ejercicio 24.27). *b*) Obtenga una expresión que relacione la separación z entre las placas con la diferencia de potencial V. La ecuación resultante será de tercer grado con respecto a z. *c*) Dados los valores $A = 0.300\ \text{m}^2$, $z_0 = 1.20$ mm, $k = 25.0$ N/m y $V = 120$ V, encuentre los dos valores de z para los que la placa superior estará en equilibrio. (*Sugerencia:* Es posible resolver la ecuación cúbica insertando un valor de ensayo de z en la ecuación, y después ajustar la respuesta hasta que se satisfaga la ecuación con tres cifras significativas. La localización gráfica de las raíces de la ecuación cúbica puede ayudar a elegir los valores iniciales de z para este procedimiento de ensayo y error. Una raíz de la ecuación cúbica tiene un valor negativo sin significado físico). *d*) Para cada uno de los dos valores de z encontrados en el inciso *c*), ¿el equilibrio es estable o inestable? Para el equilibrio estable, un desplazamiento pequeño del objeto dará lugar a una fuerza neta que tiende a regresar al objeto a la posición de equilibrio. Para el equilibrio inestable, un desplazamiento pequeño originará una fuerza neta que aleje al objeto aún más del equilibrio.

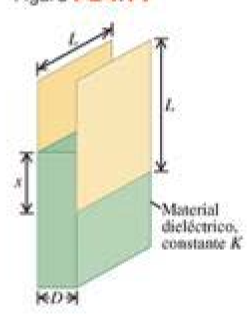
Figura **P24.76**



24.77 ••• Dos placas conductoras cuadradas con lados de longitud L están separadas por una distancia D. Se inserta un bloque dieléctrico con constante K y dimensiones $L \times L \times D$, a una distancia x en el espacio entre las placas, como se ilustra en la figura P24.77. *a*) Calcule la

capacitancia C de este sistema. *b*) Suponga que el capacitor está conectado a una batería que mantiene una diferencia de potencial constante V entre las placas. Si el dieléctrico se inserta una distancia adicional dx en el espacio entre las placas, demuestre que el cambio en la energía almacenada es


Figura **P24.77**

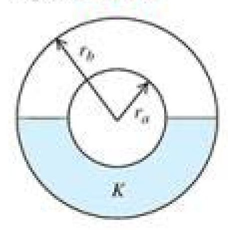


$$dU = +\frac{(K-1)\epsilon_0 V^2 L}{2D}dx$$

c) Suponga que antes de desplazar el bloque dieléctrico la distancia dx, las placas se desconectan de la batería, de manera que las cargas en ellas permanecen constantes. Determine la magnitud de la carga en cada placa y luego demuestre que cuando el dieléctrico se desplaza la distancia adicional dx en el espacio entre las placas, la energía almacenada cambia en una cantidad que es el *negativo* de la expresión para dU que se dio en el inciso *b*). *d*) Si F es la fuerza que las cargas de las placas ejercen sobre el dieléctrico, entonces dU debe ser igual al trabajo realizado *contra* esta fuerza para desplazar el material dieléctrico una distancia dx. De esta forma, $dU = -F\,dx$. Demuestre que la aplicación de esta expresión al resultado del inciso *b*) sugiere que la fuerza eléctrica sobre el dieléctrico lo empuja hacia *afuera* del capacitor, mientras que el resultado para el inciso *c*) sugiere que la fuerza atrae al dieléctrico hacia *adentro* del capacitor. *e*) La figura 24.16 indica que la fuerza en realidad atrae al dieléctrico hacia el capacitor. Explique por qué el resultado del inciso *b*) da una respuesta incorrecta para la dirección de la fuerza, y calcule la magnitud de tal fuerza. (Este método no requiere conocer la naturaleza del efecto del campo en los bordes).

24.78 ••• Un capacitor esférico aislado tiene carga $+Q$ en su conductor interior (radio r_a) y carga $-Q$ en su conductor exterior (radio r_b). Después, se llena la mitad del volumen entre los dos conductores con un líquido dieléctrico con constante K, como se muestra en el corte transversal de la figura P24.78. *a*) Encuentre la capacitancia del capacitor medio lleno. *b*) Calcule la magnitud de $\vec{E}$ en el volumen entre los dos conductores como función de la distancia r desde el centro del capacitor. Dé respuestas para las mitades superior e inferior de este volumen. *c*) Obtenga la densidad superficial de la carga libre en las mitades superior e inferior de los conductores interno y externo. *d*) Determine la densidad superficial de la carga ligada en las superficies interior ($r = r_a$) y exterior ($r = r_b$) del dieléctrico. *e*) ¿Cuál es la densidad de carga superficial ligada en la superficie plana del dieléctrico? Explique su respuesta.

Figura **P24.78**



Respuestas

Pregunta inicial del capítulo



La ecuación (24.9) indica que la energía almacenada en un capacitor con capacitancia C y carga Q es $U = Q^2/2C$. Si la carga Q se duplica, la energía almacenada se incrementa en un factor de $2^2 = 4$. Observe que si el valor de Q es demasiado grande, la magnitud del campo eléctrico dentro del capacitor superará la rigidez dieléctrica del material entre las placas y ocurrirá la ruptura del dieléctrico (véase la sección 24.4). Esto fija un límite práctico a la cantidad de energía que puede almacenarse.

Preguntas de las secciones Evalúe su comprensión

24.1 Respuesta: iii. La capacitancia no depende del valor de la carga Q. La duplicación del valor de Q hace que la diferencia de potencial V_{ab} se duplique, por lo que la capacitancia $C = Q/V_{ab}$ permanece sin cambio. Estos enunciados son verdaderos sin importar la geometría del capacitor.

24.2 Respuestas: *a*) i, *b*) iv. En una conexión en serie, los dos capacitores tienen la misma carga Q, pero distintas diferencias de potencial $V_{ab} = Q/C$; el capacitor con la menor capacitancia C tiene la mayor diferencia de potencial. En una conexión en paralelo, los dos capacitores tienen la misma diferencia de potencial V_{ab}, pero distintas cargas $Q = CV_{ab}$; el capacitor con la mayor capacitancia C tiene la carga más grande. Por lo tanto, un capacitor de 4 μF tendrá una diferencia de potencial más grande que otro capacitor de 8 μF si los dos están conectados en serie. El capacitor de 4 μF no puede tener más carga que el de 8 μF sin importar cómo se conecten: en una conexión en serie tendrán la misma carga, y en una en paralelo el capacitor de 8 μF tendrá más carga.

24.3 Respuesta: i. Los capacitores conectados en serie tienen la misma carga Q. Para comparar la cantidad de energía almacenada se utiliza la expresión $U = Q^2/2C$ de la ecuación (24.9); esto indica que el capacitor con la *menor* capacitancia ($C = 4\ \mu$F) tiene más energía almacenada en una combinación en serie. En contraste, los capacitores en paralelo tienen la misma diferencia de potencial V, por lo que para compararlos se emplea $U = \frac{1}{2}CV^2$ de la ecuación (24.9). Esto demuestra que en una combinación en paralelo, el capacitor con la *mayor* capacitancia ($C = 8\ \mu$F) tiene más energía almacenada. (Si en lugar de lo anterior se hubiera usado $U = \frac{1}{2}CV^2$ para analizar la combinación en serie, se habría tenido que explicar las distintas diferencias de potencial a través de los dos capacitores. En forma similar, el empleo de $U = Q^2/2C$ para estudiar la combinación en paralelo requeriría que se explicaran las diferentes cargas en los capacitores).

24.4 Respuestas: i. Aquí, Q permanece sin cambio, por lo que se emplea $U = Q^2/2C$ de la ecuación (24.9) para la energía almacenada. Si se retira el dieléctrico, la capacitancia se reduce en un factor de $1/K$; como U es inversamente proporcional a C, la energía almacenada *aumenta* en un factor de K. Se requiere trabajo para retirar el bloque dieléctrico del capacitor porque la curvatura del campo trata de atraerlo de regreso (figura 24.16). El trabajo que se hace pasa a la energía almacenada en el capacitor.

24.5 Respuesta: i, iii, ii. La ecuación (24.14) establece que si E_0 es la magnitud del campo eléctrico inicial (antes de insertar el dieléctrico), entonces la magnitud del campo resultante después de insertar el dieléctrico es $E_0/K = E_0/3$. La magnitud del campo resultante es igual a la diferencia entre la magnitud del campo inicial y la magnitud E_i del campo debido a las cargas ligadas (véase la figura 24.20). Por lo tanto, $E_0 - E_i = E_0/3$ y $E_i = 2E_0/3$.

24.6 Respuesta: iii. La ecuación (24.23) muestra que esta situación es la misma en una carga puntual aislada en el vacío pero sustituyendo $\vec{E}$ por $K\vec{E}$. Así, KE en el punto de interés es igual a $q/4\pi\epsilon_0 r^2$, y por eso $E = q/4\pi K\epsilon_0 r^2$. Al igual que en el ejemplo 24.12, si se llena el espacio con un dieléctrico, el campo eléctrico se reduce en un factor de $1/K$.

Problema práctico

Respuestas: ***a*) 0** ***b*)** $Q^2/32\pi^2\epsilon_0 r^4$ ***c*)** $Q^2/8\pi\epsilon_0 R$
***d*)** $Q^2/8\pi\epsilon_0 R$ ***e*)** $C = 4\pi\epsilon_0 R$

25 CORRIENTE, RESISTENCIA Y FUERZA ELECTROMOTRIZ



? En una linterna, ¿la cantidad de corriente que sale de la bombilla eléctrica es menor que, mayor que o igual a la cantidad de corriente que entra en la bombilla?

OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

Al estudiar este capítulo, usted aprenderá:

- El significado de la corriente eléctrica y cómo se desplaza la carga en un conductor.
- El significado de la resistividad y la conductividad de una sustancia.
- Cómo calcular la resistencia de un conductor a partir de sus dimensiones y su resistividad.
- Cómo una fuerza electromotriz (fem) hace posible que la corriente fluya en un circuito.
- Cómo efectuar cálculos que involucren energía y potencia en los circuitos.

En los cuatro capítulos anteriores estudiamos las interacciones de las cargas eléctricas *en reposo*; ahora estamos listos para estudiar las cargas *en movimiento*. Una *corriente eléctrica* consiste en cargas que se mueven de una región a otra. Si la carga sigue una trayectoria de conducción que forma un circuito cerrado, la trayectoria recibe el nombre de *circuito eléctrico*.

Básicamente, los circuitos eléctricos son un medio para transportar *energía* de un lugar a otro. A medida que las partículas con carga se desplazan por un circuito, la energía potencial eléctrica se transfiere de una fuente (como una batería o un generador) a un dispositivo donde se almacena o se convierte en otra forma de energía: sonido en un equipo estereofónico, o calor y luz en un tostador o una bombilla eléctrica. Los circuitos eléctricos son útiles porque permiten transportar energía sin que haya partes móviles (diferentes de las partículas con carga en movimiento). Los circuitos eléctricos son el corazón de linternas, computadoras, transmisores y receptores de radio y televisión, y sistemas domésticos e industriales de distribución de energía eléctrica. El sistema nervioso de un ser humano es un circuito eléctrico especializado que transporta señales vitales desde una parte del cuerpo hasta otra.

En el capítulo 26 veremos la manera de analizar circuitos eléctricos y estudiaremos algunas de sus aplicaciones prácticas. Sin embargo, antes de hacer esto, habrá que entender las propiedades básicas de las corrientes eléctricas, lo cual es el tema de este capítulo. Comenzaremos por describir la naturaleza de los conductores eléctricos y saber cómo los afecta la temperatura. Veremos por qué un alambre de cobre, corto, grueso y frío es mejor conductor que otro de acero, largo, delgado y caliente. Estudiaremos las propiedades de las baterías y observaremos cómo generan corriente y transfieren energía en un circuito. En este análisis, usaremos los conceptos de corriente, diferencia de potencial (o voltaje), resistencia y fuerza electromotriz. Por último, examinaremos las corrientes eléctricas en un material desde el punto de vista microscópico.

25.1 Corriente eléctrica

Una **corriente** es cualquier movimiento de carga de una región a otra. En esta sección estudiaremos las corrientes en los materiales conductores. La gran mayoría de aplicaciones tecnológicas de cargas en movimiento consideran corrientes de este tipo.

En situaciones electrostáticas (analizadas en los capítulos 21 a 24), el campo eléctrico dentro de un conductor es igual a cero, y *no* hay corriente. Sin embargo, esto no significa que todas las cargas en el interior del conductor estén en reposo. En un metal común, como el cobre o el aluminio, algunos de los electrones están en libertad para moverse dentro del material conductor. Estos electrones libres se mueven al azar en todas direcciones, en forma parecida a como lo hacen las moléculas de un gas, solo que con una rapidez mucho mayor, del orden de 10^6 m/s. No obstante, los electrones no escapan del material conductor, ya que son atraídos hacia los iones positivos del material. El movimiento de los electrones es aleatorio, por lo que no hay un flujo *neto* de carga en ninguna dirección y, por consiguiente, no existe corriente.

Ahora, considere lo que sucede cuando se genera un campo eléctrico $\vec{E}$ constante y estable dentro de un conductor. (Más adelante veremos cómo ocurre esto). En ese caso, una partícula con carga (como un electrón libre) en el interior del material conductor se somete a una fuerza constante $\vec{F} = q\vec{E}$. Si la partícula con carga se moviera en el *vacío*, esta fuerza constante ocasionaría una aceleración constante en la dirección de $\vec{F}$, y, después de cierto tiempo, la partícula con carga se desplazaría en esa dirección con gran rapidez. No obstante, una partícula con carga que se mueve en un *conductor* experimenta colisiones frecuentes con los iones masivos y casi estacionarios del material. En cada colisión, la dirección en que se mueve la partícula sufre un cambio aleatorio. El efecto neto del campo eléctrico $\vec{E}$ es que, además del movimiento al azar de las partículas con carga dentro del conductor, también hay un movimiento neto muy lento o de *arrastre* de las partículas con carga que se desplazan como grupo en la dirección de la fuerza eléctrica $\vec{F} = q\vec{E}$ (figura 25.1). Este movimiento queda descrito en términos de la **velocidad de arrastre** $\vec{v}_d$ de las partículas. Como resultado, existe una corriente neta en el conductor.

Si bien el movimiento aleatorio de los electrones tiene una rapidez media muy grande, aproximadamente 10^6 m/s, la rapidez de arrastre es muy baja, con frecuencia del orden de 10^{-4} m/s. Como los electrones se mueven con tanta lentitud, quizás usted se pregunte por qué la luz se enciende de inmediato cuando se activa el interruptor de una linterna. La razón es que el campo eléctrico se genera en el alambre conductor con una rapidez cercana a la de la luz, y todos los electrones a lo largo del alambre comienzan a moverse casi al mismo tiempo. En realidad, el tiempo que toma a cualquier electrón individual trasladarse del interruptor a la bombilla no es muy relevante. Una buena analogía es un grupo de soldados que esperan la orden del sargento para comenzar a marchar; la orden llega a los oídos de los soldados con la rapidez del sonido, que es mucho mayor que aquella con la que marchan, de modo que los soldados comienzan a marchar prácticamente al mismo tiempo.

25.1 Si no hay campo eléctrico en el interior de un conductor, un electrón se mueve aleatoriamente del punto P_1 al punto P_2 en el momento Δt. Si está presente un campo eléctrico $\vec{E}$ la fuerza eléctrica $\vec{F} = q\vec{E}$ impone un pequeño arrastre (muy exagerado en la ilustración), que lleva al electrón al punto P'_2, a una distancia $v_d \Delta t$ de P_2 en dirección de la fuerza.

Conductor sin campo interno $\vec{E}$

Trayectoria de un electrón sin campo $\vec{E}$. El electrón se mueve al azar.

Trayectoria del electrón con campo $\vec{E}$. El movimiento es sobre todo aleatorio, pero...

... el campo $\vec{E}$ da como resultado un desplazamiento neto a lo largo del conductor.

Conductor con campo interno $\vec{E}$

Un electrón tiene carga negativa q, por lo que la fuerza sobre él debida al campo $\vec{E}$ tiene la dirección opuesta a $\vec{E}$.

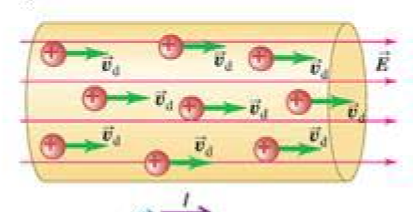
Dirección del flujo de corriente

El arrastre de las cargas en movimiento a través de un conductor puede interpretarse en términos de trabajo y energía. El campo eléctrico $\vec{E}$ efectúa trabajo sobre las cargas en movimiento. La energía cinética resultante se transfiere al material del conductor por las colisiones con los iones, los cuales vibran en torno a sus posiciones de equilibrio en la estructura cristalina del conductor. Esta transferencia de energía incrementa la energía de vibración media de los iones y, por consiguiente, la temperatura del material. Así, gran parte del trabajo realizado por el campo eléctrico se destina a calentar el conductor, *no* a hacer que las cargas se muevan cada vez más rápido. Este calentamiento a veces resulta útil, como en el caso de un tostador eléctrico, pero en muchas situaciones es tan solo un subproducto inevitable del flujo de la corriente.

En distintos materiales que conducen corriente, las cargas de las partículas en movimiento son positivas o negativas. En los metales, las cargas en movimiento siempre son electrones (negativos); en tanto que en un gas ionizado (plasma) o una solución iónica, las cargas en movimiento incluyen tanto electrones como iones con carga positiva. En un material semiconductor, como el germanio o el silicio, la conducción

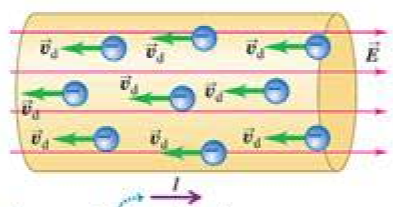
25.2 La misma corriente es producida por *a*) cargas positivas que se mueven en la dirección del campo eléctrico $\vec{E}$ o *b*) el mismo número de cargas negativas que se mueven con la misma rapidez en la dirección opuesta a $\vec{E}$.

a)



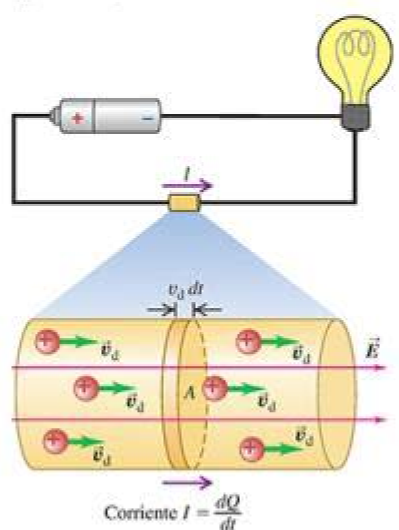
Una **corriente convencional** se trata como un flujo de cargas positivas, sin importar si las cargas libres en el conductor son positivas, negativas o ambas.

b)



En un conductor metálico, las cargas en movimiento son electrones, pero la *corriente* aún apunta en la dirección en que fluirían las cargas positivas.

25.3 La corriente I es la razón de transferencia de carga en el tiempo a través del área A de la sección transversal. En promedio, la componente aleatoria del movimiento de cada partícula con carga es cero, y la corriente va en la misma dirección de $\vec{E}$ sin que importe si las cargas en movimiento sean positivas (como se ilustra aquí) o negativas (véase la figura 25.2*b*).



ocurre en parte por los electrones y en parte por el movimiento de las *vacantes*, también llamadas *huecos*, que son sitios donde se han perdido electrones y actúan como cargas positivas.

La figura 25.2 muestra segmentos de dos materiales diferentes portadores de corriente. En la figura 25.2*a*, las cargas en movimiento son positivas, la fuerza eléctrica ocurre en la misma dirección de $\vec{E}$ y la velocidad de arrastre $\vec{v}_d$ va de izquierda a derecha. En la figura 25.2*b* las cargas son negativas, la fuerza eléctrica es opuesta a $\vec{E}$ y la velocidad de arrastre $\vec{v}_d$ va de derecha a izquierda. En ambos casos hay un flujo neto de carga positiva de izquierda a derecha, y las cargas positivas terminan a la derecha de las negativas. *Definimos* que la corriente, denotada por I, va en la dirección en la cual hay un flujo de carga *positiva*. Por ello, las corrientes se describen como si consistieran por completo en un flujo de carga positiva, aun en los casos en que se sabe que la corriente real se debe a electrones. Entonces, en las figuras 25.2*a* y 25.2*b* la corriente es hacia la derecha. Esta elección o convención sobre la dirección del flujo de la corriente se llama **corriente convencional**. Aunque la dirección de la corriente convencional *no* es necesariamente la misma en que se desplazan en realidad las partículas con carga, veremos que el signo de las cargas en movimiento tiene poca importancia en el análisis de los circuitos eléctricos.

La figura 25.3 muestra un segmento del conductor por el que fluye una corriente. Se considera que las cargas en movimiento son *positivas*, es decir, que se mueven en la misma dirección que la corriente. Definimos la corriente a través del área de sección transversal A como *la carga neta que fluye a través del área por unidad de tiempo*. De esta forma, si una carga neta dQ fluye a través de un área en el tiempo dt, la corriente I a través del área es

$$I = \frac{dQ}{dt} \qquad \text{(definición de corriente)} \qquad (25.1)$$

CUIDADO **La corriente no es un vector** Aunque nos referimos a la *dirección* de una corriente, la corriente, tal como está definida en la ecuación (25.1), *no* es una cantidad vectorial. En una varilla portadora de corriente, la corriente siempre va a lo largo de la longitud de la varilla, sin importar si esta es recta o curva. Ningún vector podría describir el movimiento a lo largo de una trayectoria curva, y por eso la corriente no es un vector. Por lo general, describiremos la dirección de la corriente con palabras (por ejemplo, "la corriente fluye por el circuito en el sentido horario") o eligiendo una corriente como positiva si fluye en un sentido a lo largo de un conductor, y negativa si fluye en sentido contrario.

La unidad del SI para la corriente es el **ampere**, el cual se define como *un coulomb por segundo* (1 A = 1 C/s). Esta unidad recibe su nombre en honor del científico francés André Marie Ampère (1775-1836). Cuando se enciende una linterna común (baterías tamaño D), la corriente en ella es aproximadamente de 0.5 a 1 A; la corriente en los cables del motor de arranque de un automóvil es de alrededor de 200 A. Las corrientes en los circuitos de radio y televisión por lo general se expresan en *miliamperes* (1 mA = 10^{-3} A) o *microamperes* (1 μA = 10^{-6} A), en tanto que las corrientes en los circuitos de computadoras se expresan en *nanoamperes* (1 nA = 10^{-9} A) o *picoamperes* (1 pA = 10^{-12} A).

Corriente, velocidad de arrastre y densidad de corriente

La corriente se puede expresar en términos de la velocidad de arrastre de las cargas en movimiento. Consideremos de nuevo la situación en la figura 25.3, que ilustra un conductor con área de sección transversal A y un campo eléctrico $\vec{E}$ dirigido de izquierda a derecha. Para comenzar, se supondrá que las cargas libres en el conductor son positivas; entonces, la velocidad de arrastre tiene la misma dirección del campo.

Suponga que hay n partículas con carga en movimiento por unidad de volumen. Llamaremos n a la **concentración** de partículas, cuya unidad correspondiente del SI es m^{-3}. Suponga que todas las partículas se mueven con la misma velocidad de arrastre de magnitud v_d. En un intervalo de tiempo dt, cada partícula se mueve una distancia $v_d\,dt$. Las partículas que fluyen hacia afuera del extremo derecho del cilindro sombreado cuya longitud es $v_d\,dt$ durante dt son partículas que estuvieron dentro del cilindro al inicio del intervalo dt. El volumen del cilindro es $Av_d\,dt$, y el número de

partículas dentro es $nAv_d\,dt$. Si cada partícula tiene una carga q, la carga dQ que fluye hacia afuera por el extremo del cilindro durante el tiempo dt es

$$dQ = q(nAv_d\,dt) = nqv_d A\,dt$$

y la corriente es

$$I = \frac{dQ}{dt} = nqv_d A$$

La corriente *por unidad de área de la sección transversal* se denomina **densidad de corriente** J:

$$J = \frac{I}{A} = nqv_d$$

Las unidades de la densidad de corriente son amperes por metro cuadrado (A/m^2).

Si las cargas en movimiento son negativas en vez de positivas, como en la figura 25.2*b*, la velocidad de arrastre es opuesta a $\vec{E}$. Sin embargo, la *corriente* aún tiene la misma dirección que $\vec{E}$ en cada punto del conductor. Entonces, la corriente I y la densidad de corriente J no dependen del signo de la carga, por lo que en las expresiones anteriores para I y J, la carga q se sustituye por su valor absoluto $|q|$:

$$I = \frac{dQ}{dt} = n|q|v_d A \qquad \text{(expresión general para la corriente)} \qquad (25.2)$$

$$J = \frac{I}{A} = n|q|v_d \qquad \text{(expresión general para la densidad de corriente)} \qquad (25.3)$$

La corriente en un conductor es el producto de la concentración de las partículas cargadas en movimiento, la magnitud de la carga de cada una de esas partículas, la magnitud de la velocidad de arrastre y el área de la sección transversal del conductor.

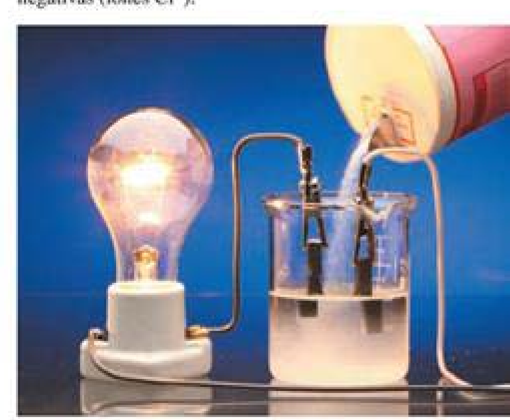
Se define también el *vector* densidad de corriente $\vec{J}$ que incluye la dirección de la velocidad de arrastre:

$$\vec{J} = nq\vec{v}_d \qquad \text{(vector densidad de corriente)} \qquad (25.4)$$

En la ecuación (25.4) *no* hay signos de valor absoluto. Si q es positiva, $\vec{v}_d$ tiene la misma dirección que $\vec{E}$; si q es negativa, $\vec{v}_d$ es opuesta a $\vec{E}$. En cualquier caso, $\vec{J}$ tiene la misma dirección que $\vec{E}$. La ecuación (25.3) da la *magnitud* J del vector densidad de corriente $\vec{J}$.

CUIDADO **Densidad de corriente contra corriente** Observe que la densidad de corriente $\vec{J}$ es un vector, pero la corriente I no lo es. La diferencia está en que la densidad de corriente $\vec{J}$ describe cómo fluyen las cargas en cierto punto, y la dirección del vector indica la dirección del flujo en ese punto. En cambio, la corriente I describe la forma en que fluyen las cargas a través de un objeto extendido, como un alambre. Por ejemplo, I tiene el mismo valor en todos los puntos del circuito de la figura 25.3, pero $\vec{J}$ no: la densidad de corriente está dirigida hacia abajo en el lado izquierdo del circuito y hacia arriba en el lado derecho. La magnitud de $\vec{J}$ también puede variar alrededor del circuito. En la figura 25.3, la magnitud de la densidad de corriente $J = I/A$ es menor en la batería (que tiene un área A grande de sección transversal) que en los alambres (los cuales tienen un área pequeña de sección transversal).

25.4 Parte del circuito eléctrico que incluye esta bombilla eléctrica pasa a través de un vaso de precipitados que contiene una solución de cloruro de sodio. La corriente en la solución es transportada tanto por cargas positivas (iones Na^+) como por cargas negativas (iones Cl^-).



En general, un conductor puede contener varias clases diferentes de partículas con carga en movimiento $q_1, q_2, \ldots$, concentraciones $n_1, n_2, \ldots$ y velocidades de arrastre con magnitudes $v_{d1}, v_{d2}, \ldots$ Un ejemplo es el flujo de corriente en una solución iónica (figura 25.4). En una solución de cloruro de sodio, la corriente es transportada tanto por los iones positivos de sodio como por los iones negativos de cloro; la corriente total I se encuentra sumando las corrientes debidas a cada clase de partícula con carga mediante la ecuación (25.2). Asimismo, el vector densidad de corriente $\vec{J}$ se obtiene con la ecuación (25.4) para cada tipo de partícula con carga y al sumar los resultados.

En la sección 25.4 se verá que es posible tener una corriente *estacionaria* (es decir, constante en el tiempo) únicamente si el material conductor forma un circuito cer-

rado, llamado *circuito completo*. En tal situación estacionaria, es constante la carga total en cada segmento del conductor. Por lo tanto, la razón de flujo de carga hacia *afuera* en el extremo de un segmento en cualquier instante es igual a la razón de flujo de carga hacia *dentro* en el otro extremo del segmento, en tanto que *la corriente es la misma en todas las secciones transversales del circuito.* Más adelante en este capítulo, cuando analicemos circuitos eléctricos, recurriremos a esta observación.

En muchos circuitos sencillos, como los de las linternas de mano o los de los taladros eléctricos inalámbricos, la dirección de la corriente siempre es la misma; a esto se le llama *corriente directa*. Pero los aparatos domésticos, como tostadores, refrigeradores y televisores utilizan *corriente alterna*, lo cual significa que la corriente cambia de dirección continuamente. En este capítulo solo consideraremos la corriente directa. La corriente alterna tiene muchas características especiales que ameritan un estudio detallado, las cuales analizaremos en el capítulo 31.



Ejemplo 25.1 Densidad de corriente y velocidad de arrastre en un alambre

Un alambre de cobre del número 18 (el calibre que por lo general se utiliza en el cableado para lámparas), tiene un diámetro de 1.02 mm, conduce una corriente constante de 1.67 A hacia una bombilla de 200 watts. En el alambre, la densidad de electrones libres es de 8.5×10^{28} electrones por metro cúbico. Determine *a*) la densidad de corriente y *b*) la rapidez de arrastre.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Este problema usa las relaciones entre corriente I, densidad de corriente J y rapidez de arrastre v_d. Se conocen I y el diámetro d del alambre, por lo que se emplea la ecuación (25.3) para calcular J. Después se utiliza la ecuación (25.3) de nuevo para obtener v_d a partir de J y la densidad de electrones conocida n.

EJECUTAR: *a*) El área de la sección transversal es

$$A = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi(1.02 \times 10^{-3}\text{ m})^2}{4} = 8.17 \times 10^{-7}\text{ m}^2$$

Entonces, la magnitud de la densidad de corriente es

$$J = \frac{I}{A} = \frac{1.67\text{ A}}{8.17 \times 10^{-7}\text{ m}^2} = 2.04 \times 10^6\text{ A/m}^2$$

b) De la ecuación (25.3) para la magnitud de la velocidad de arrastre v_d, se obtiene

$$v_d = \frac{J}{n|q|} = \frac{2.04 \times 10^6\text{ A/m}^2}{(8.5 \times 10^{28}\text{ m}^{-3})|-1.60 \times 10^{-19}\text{ C}|}$$
$$= 1.5 \times 10^{-4}\text{ m/s} = 0.15\text{ mm/s}$$

EVALUAR: A esta rapidez, un electrón requeriría 6700 s (casi 2 horas) para recorrer un alambre de 1 m de longitud. Las rapideces del movimiento aleatorio de los electrones son cercanas a 10^6 m/s, aproximadamente 10^{10} veces la rapidez de arrastre. ¡Imagine a los electrones rebotando por todas partes en forma frenética, con un arrastre sumamente lento!

Evalúe su comprensión de la sección 25.1 Suponga que se reemplaza el alambre del ejemplo 25.1 por otro de cobre de calibre 12, el cual tiene el doble de diámetro que uno de calibre 18. Si la corriente es la misma, ¿qué efecto tendría esto en la magnitud de la velocidad de arrastre v_d? **i.** Ninguno, v_d no cambiaría; **ii.** se duplicaría el valor de v_d; **iii.** v_d sería cuatro veces mayor; **iv.** v_d tendría un valor igual a la mitad; **v.** v_d sería la cuarta parte.

MP

25.2 Resistividad

La densidad de corriente $\vec{J}$ en un conductor depende del campo eléctrico $\vec{E}$ y de las propiedades del material. En general, esta dependencia es muy compleja. Pero para ciertos materiales, sobre todo los metálicos, a una temperatura dada, $\vec{J}$ es casi *directamente proporcional* a $\vec{E}$, y la razón de las magnitudes de E y J es constante. Esta relación, llamada ley de Ohm, fue descubierta en 1826 por el físico alemán Georg Simon Ohm (1787-1854). En realidad, la palabra "ley" debería escribirse entre comillas, ya que la **ley de Ohm**, al igual que la ecuación de los gases ideales y la ley de Hooke, es un *modelo idealizado* que describe muy bien el comportamiento de ciertos materiales, pero no es una descripción general de *toda* la materia. En el siguiente análisis supondremos que la ley de Ohm es válida, aun cuando existen muchos casos donde no lo es. La situación es comparable a nuestra representación del comportamiento de las fuerzas de fricción estática y cinética, las cuales fueron tratadas como si fueran directamente proporcionales a la fuerza normal, aunque sabíamos que en el mejor de los casos se trataba de una descripción aproximada.

Tabla 25.1 Resistividades a temperatura ambiente (20°C)

	Sustancia	ρ ($\Omega \cdot m$)		Sustancia	ρ ($\Omega \cdot m$)
Conductores			**Semiconductores**		
Metales	Plata	1.47×10^{-8}		Carbono puro (grafito)	3.5×10^{-5}
	Cobre	1.72×10^{-8}		Germanio puro	0.60
	Oro	2.44×10^{-8}		Silicio puro	2300
	Aluminio	2.75×10^{-8}	**Aislantes**		
	Tungsteno	5.25×10^{-8}		Ámbar	5×10^{14}
	Acero	20×10^{-8}		Vidrio	10^{10}–10^{14}
	Plomo	22×10^{-8}		Lucita	$>10^{13}$
	Mercurio	95×10^{-8}		Mica	10^{11}–10^{15}
Aleaciones	Manganina (84% Cu, 12% Mn, 4% Ni)	44×10^{-8}		Cuarzo (fundido)	75×10^{16}
	Constantán (60% Cu, 40% Ni)	49×10^{-8}		Azufre	10^{15}
	Nicromo	100×10^{-8}		Teflón	$>10^{13}$
				Madera	10^{8}–10^{11}

La **resistividad** ρ de un material se define como la razón de las magnitudes del campo eléctrico y la densidad de corriente:

$$\rho = \frac{E}{J} \qquad \text{(definición de resistividad)} \qquad (25.5)$$

Cuanto mayor sea la resistividad, mayor será el campo necesario para causar una densidad de corriente determinada, o menor será la densidad de corriente ocasionada por un campo dado. De la ecuación (25.5) se desprende que las unidades de ρ son $(\text{V/m})/(\text{A/m}^2) = \text{V} \cdot \text{m/A}$. Como se verá en la siguiente sección, 1 V/A se conoce como un *ohm* (1 Ω; se usa la letra griega Ω, omega, ya que corresponde al fonema "ohm"). Por consiguiente, las unidades del SI para ρ son $\Omega \cdot \text{m}$ (ohm-metros). La tabla 25.1 lista algunos valores representativos de resistividad. Un conductor perfecto tendría una resistividad igual a cero; y un aislante perfecto tendría resistividad infinita. Los metales y las aleaciones tienen las menores resistividades y son los mejores conductores. Las resistividades de los aislantes son mayores que las de los metales por un factor enorme, del orden de 10^{22}.

El recíproco de la resistividad es la **conductividad**. Sus unidades son $(\Omega \cdot \text{m})^{-1}$. Los buenos conductores de la electricidad tienen una conductividad mayor que la de los aislantes. La conductividad es el análogo eléctrico directo de la conductividad térmica. Si se compara la tabla 25.1 con la 17.5 (conductividades térmicas), se observa que los buenos conductores eléctricos, como los metales, por lo general son buenos conductores del calor. Los malos conductores de electricidad, como la cerámica y los materiales plásticos, también son conductores térmicos deficientes. En un metal los electrones libres que transportan la carga en la conducción eléctrica también son el mecanismo principal para la conducción del calor, por lo que se debería esperar que haya una correlación entre la conductividad eléctrica y la conductividad térmica. Debido a la enorme diferencia en conductividad entre los conductores eléctricos y los aislantes, es fácil confinar las corrientes eléctricas a trayectorias o circuitos bien definidos (figura 25.5). La variación en la conductividad *térmica* es mucho menor, solo aproximadamente de un factor de 10^3 y, por lo general, es imposible confinar corrientes de calor hasta ese grado.

Los *semiconductores* tienen resistividades intermedias entre las de los metales y las de los aislantes. Estos materiales son importantes por la forma en que sus resistividades se ven afectadas por la temperatura y por pequeñas cantidades de impurezas.

Un material que cumple razonablemente bien la ley de Ohm se llama conductor *óhmico* o conductor *lineal*. Para esos materiales, a una temperatura dada, ρ es una *constante* que no depende del valor de E. Muchos materiales cuyo comportamiento se aparta mucho de la ley de Ohm se denominan *no óhmicos* o *no lineales*. En estos materiales, J depende de E de forma más compleja.

Las analogías con el flujo de fluidos son de gran ayuda para desarrollar la intuición con respecto a la corriente y los circuitos eléctricos. Por ejemplo, en la fabricación de vino o jarabe de maple, en ocasiones el producto se filtra para retirar los sedimentos. Una bomba fuerza al fluido sometiéndolo a presión para que pase a través del filtro; si la razón de flujo (análoga a J) es proporcional a la diferencia de presión entre las corrientes del producto por arriba y por debajo del filtro (análoga a E), el comportamiento es parecido al que describe la ley de Ohm.

25.5 Los "alambres" de cobre, o pistas, en esta tarjeta de circuitos están impresos directamente sobre la superficie de la tarjeta aislante de color oscuro. Aun cuando las pistas se encuentran muy próximas entre sí (a un milímetro de distancia aproximadamente), la tarjeta tiene una resistividad tan grande (y baja conductividad), que ninguna corriente puede fluir entre las pistas.

Trayectorias conductoras (pistas)

Aplicación Resistividad y conducción nerviosa

Esta imagen de color falso de un microscopio electrónico muestra la sección transversal de una fibra nerviosa de aproximadamente 1 μm (10^{-6} m) de diámetro. Una capa de una sustancia aislante grasosa llamada mielina envuelve el material conductor del axón (neurita). La resistividad de la mielina es mucho mayor que la del axón, de modo que una señal eléctrica que viaja a través de la fibra nerviosa permanece confinada en el axón. Esto hace posible que una señal viaje mucho más rápido que si viajara en ausencia de la mielina.



Resistividad y temperatura

La resistividad de un conductor *metálico* casi siempre se incrementa al aumentar la temperatura, como se ilustra en la figura 25.6*a*. A medida que la temperatura se incrementa, los iones del conductor vibran con mayor amplitud, lo que hace más probable que un electrón en movimiento colisione contra un ion, como se ilustra en la figura 25.1; esto dificulta el arrastre de los electrones a través del conductor y, por lo tanto, reduce la corriente. En un pequeño intervalo de temperatura (hasta 100 C°, aproximadamente), la resistividad de un metal se representa en forma aproximada por la ecuación:

$$\rho(T) = \rho_0[1 + \alpha(T - T_0)] \quad \text{(dependencia de la resistividad con respecto a la temperatura)} \quad (25.6)$$

donde ρ_0 es la resistividad a una temperatura de referencia T_0 (a menudo 0°C o 20°C) y $\rho(T)$ es la resistividad a la temperatura T, que puede ser mayor o menor que T_0. El factor α se llama **coeficiente de temperatura de la resistividad**, y en la tabla 25.2 se presentan algunos de sus valores representativos. La resistividad de la aleación llamada manganina es prácticamente independiente de la temperatura.

Tabla 25.2 Coeficientes de temperatura de la resistividad (valores aproximados cerca de la temperatura ambiente)

Material	$\alpha\,[(°C)^{-1}]$	Material	$\alpha\,[(°C)^{-1}]$
Aluminio	0.0039	Plomo	0.0043
Latón	0.0020	Manganina	0.00000
Carbono (grafito)	−0.0005	Mercurio	0.00088
Constantán	0.00001	Nicromo	0.0004
Cobre	0.00393	Plata	0.0038
Hierro	0.0050	Tungsteno	0.0045

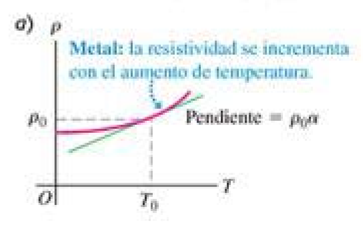
La resistividad del grafito (un no metal) *disminuye* con el aumento de temperatura, ya que a mayores temperaturas, "se desprenden" más electrones de los átomos y se vuelven móviles; de ahí que el coeficiente de temperatura de la resistividad del grafito sea negativo. Este mismo comportamiento sucede con los semiconductores (figura 25.6*b*). Por consiguiente, medir la resistividad de un pequeño cristal semiconductor significa medir la temperatura con mucha exactitud; este es el principio de una clase de termómetro llamado *termistor*.

Algunos materiales, que incluyen varias aleaciones y óxidos metálicos, muestran un fenómeno llamado *superconductividad*. Al inicio, conforme desciende la temperatura, la resistividad disminuye de manera uniforme, como la de cualquier metal. Pero después de cierta temperatura crítica, T_c, ocurre una fase de transición y la resistividad cae abruptamente hasta cero, como se indica en la figura 25.6*c*. Una vez que se genera una corriente en un superconductor en forma de anillo, continúa de manera indefinida sin la presencia de algún campo que la impulse.

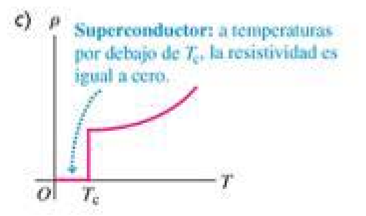
La superconductividad fue descubierta en 1911 por el físico holandés Heike Kamerlingh Onnes (1853-1926), quien notó que a temperaturas muy bajas, inferiores a 4.2 K, la resistividad del mercurio disminuía de manera repentina hasta cero. Durante los siguientes 75 años, la T_c más alta que se logró fue de 20 K. Esto quería decir que la superconductividad se conseguía únicamente cuando el material se enfriaba usando el costoso helio líquido, con punto de ebullición de 4.2 K, o el hidrógeno líquido explosivo, cuyo punto de ebullición es de 20.3 K. Sin embargo, en 1986, Karl Müller y Johannes Bednorz descubrieron un óxido de bario, lantano y cobre con T_c cercana a 40 K, con lo cual se inició la carrera por desarrollar materiales superconductores de "alta temperatura".

En 1987 se descubrió un óxido complejo de itrio, cobre y bario con un valor de T_c muy por arriba de la temperatura de ebullición de 77 K del nitrógeno líquido, un refrigerante de bajo costo y seguro. El récord actual (en 2010) para la T_c a presión atmosférica es de 138 K, y los materiales superconductores a temperatura ambiente pueden llegar a ser una realidad. Las implicaciones de tales descubrimientos para los sistemas de distribución de energía, diseño de computadoras y transporte son enormes. Mientras tanto, en aceleradores de partículas y ciertos trenes experimentales de levitación magnética, se utilizan electroimanes superconductores enfriados con helio líquido. Los super-

25.6 Variación de la resistividad ρ con la temperatura absoluta T para *a*) un metal normal, *b*) un semiconductor y *c*) un superconductor. En *a*) la aproximación lineal a ρ en función de T se muestra con una línea color verde; la aproximación coincide exactamente en $T = T_0$, donde $\rho = \rho_0$.







conductores tienen otras propiedades singulares que para explorarlas requieren la comprensión del magnetismo, un tema que estudiaremos más adelante en el capítulo 29.

Evalúe su comprensión de la sección 25.2 Se mantiene un campo eléctrico constante dentro de un elemento semiconductor, al mismo tiempo que se reduce la temperatura de este. ¿Qué sucede con la densidad de corriente en el semiconductor? **i.** Aumenta; **ii.** disminuye; **iii.** permanece igual. ❙



25.3 Resistencia



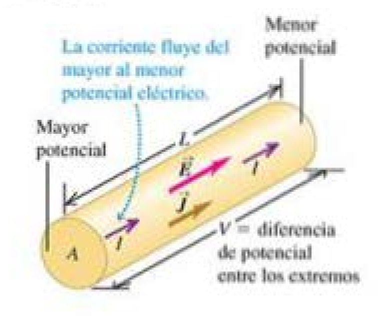
PhET: Resistance in a Wire

Para un conductor con resistividad ρ, la densidad de corriente $\vec{J}$ en un punto donde el campo eléctrico $\vec{E}$ está dado por la ecuación (25.5), que se escribe como

$$\vec{E} = \rho\vec{J} \qquad (25.7)$$

Cuando se cumple la ley de Ohm, ρ es constante e independiente de la magnitud del campo eléctrico, por lo que $\vec{E}$ es directamente proporcional a $\vec{J}$. Sin embargo, es frecuente que estemos más interesados en el total de corriente en un conductor que en $\vec{J}$ así como en la diferencia de potencial entre las terminales del conductor que en $\vec{E}$. Esto se debe principalmente a que la corriente y la diferencia de potencial son mucho más fáciles de medir que $\vec{J}$ y $\vec{E}$.

Suponga que el conductor es un alambre con sección transversal uniforme de área A y longitud L, como se indica en la figura 25.7. Sea V la diferencia de potencial entre los extremos de mayor y menor potencial del conductor, de manera que V es positiva. La *dirección* de la corriente siempre va del extremo de mayor potencial al de menor potencial. Esto se debe a que en un conductor la corriente fluye en la dirección de $\vec{E}$, sin importar el signo de las cargas en movimiento (figura 25.2), y porque $\vec{E}$ apunta en la dirección del potencial eléctrico *decreciente* (véase la sección 23.2). A medida que la corriente fluye a través de la diferencia de potencial, se pierde la energía potencial eléctrica; esta energía se transfiere a los iones del material conductor durante las colisiones.



25.7 Conductor con sección transversal uniforme. La densidad de corriente es uniforme en cualquier sección transversal, y el campo eléctrico es constante en toda la longitud.

También se puede relacionar el *valor* de la corriente I con la diferencia de potencial entre los extremos del conductor. Si las magnitudes de la densidad de corriente $\vec{J}$ y el campo eléctrico $\vec{E}$ son uniformes a través del conductor, la corriente total I está dada por $I = JA$, y la diferencia de potencial V entre los extremos es $V = EL$. Cuando se despejan J y E, respectivamente, en estas ecuaciones y se sustituyen los resultados en la ecuación (25.7), se obtiene lo siguiente:

$$\frac{V}{L} = \frac{\rho I}{A} \quad \text{o bien,} \quad V = \frac{\rho L}{A}I \qquad (25.8)$$

Esto demuestra que cuando ρ es constante, la corriente total I es proporcional a la diferencia de potencial V.

La razón de V a I para un conductor particular se llama **resistencia** R:

$$R = \frac{V}{I} \qquad (25.9)$$

Al comparar esta definición de R con la ecuación (25.8), se observa que la resistencia R de un conductor específico se relaciona con la resistividad ρ del material mediante

$$R = \frac{\rho L}{A} \quad \text{(relación entre la resistencia y la resistividad)} \qquad (25.10)$$

Si ρ es constante, como en el caso de los materiales óhmicos, entonces también lo es R.

La ecuación

$$V = IR \quad \text{(relación entre voltaje, corriente y resistencia)} \qquad (25.11)$$

suele conocerse como la ley de Ohm, pero es importante entender que el contenido real de la ley de Ohm es la proporcionalidad directa (para ciertos materiales) de V con

respecto a I, o de J con respecto a E. La ecuación (25.9) o la (25.11) *definen* la resistencia R para *cualquier* conductor, ya sea que cumpla o no la ley de Ohm, pero solo cuando R es constante es correcto llamar a esta relación ley de Ohm.

Interpretación de la resistencia

La ecuación (25.10) muestra que la resistencia de un alambre u otro conductor de sección transversal uniforme es directamente proporcional a su longitud e inversamente proporcional al área de su sección transversal. También es proporcional a la resistividad del material del que está hecho el conductor.

Una vez más, resulta útil la siguiente analogía del líquido que fluye. En forma similar a lo que describe la ecuación (25.10), una manguera angosta ofrece más resistencia al flujo de agua que una ancha, y una manguera larga tiene más resistencia que una corta (figura 25.8). Se puede incrementar la resistencia al flujo si se rellena la manguera con algodón o arena; esto equivale a incrementar la resistividad. La razón de flujo del agua es aproximadamente proporcional a la diferencia de presión entre los extremos de la manguera. La razón de flujo es análoga a la corriente, y la diferencia de presión es similar a la diferencia de potencial ("voltaje"). Sin embargo, no hay que llevar esta analogía demasiado lejos; la razón de flujo del agua en un tubo por lo general *no* es proporcional al área de su sección transversal (véase la sección 14.6).

25.8 Una manguera contra incendios larga ofrece mucha resistencia al flujo del agua. Para hacer que el agua fluya rápido a través de la manguera, el extremo de la toma debe estar a una presión mucho mayor que el extremo por donde sale el líquido. En forma similar, debe haber una diferencia de potencial grande entre los extremos de un conductor largo para que logre pasar por él una corriente eléctrica sustancial.



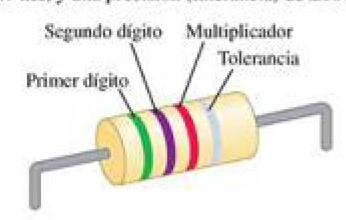
La unidad del SI para la resistencia es el **ohm**, que equivale a un volt por ampere ($1\ \Omega = 1\ \text{V/A}$). También son de uso común el *kiloohm* ($1\ \text{k}\Omega = 10^3\ \Omega$) y el *megaohm* ($1\ \text{M}\Omega = 10^6\ \Omega$). Un alambre de cobre de calibre 12 y 100 m de longitud, que es el tamaño usual en instalaciones domésticas, a temperatura ambiente tiene una resistencia de $0.5\ \Omega$ aproximadamente. Una bombilla eléctrica de 100 W y 120 V tiene una resistencia (a su temperatura de operación) de $140\ \Omega$. Si la misma corriente I fluye tanto por el alambre de cobre como por la bombilla, la diferencia de potencial $V = IR$ es mucho mayor a través de la bombilla, y se pierde mucho más energía potencial por carga en esta última. La energía que se pierde se convierte en luz y calor en el filamento de la bombilla. Usted no desearía que las instalaciones de su casa se calentaran al rojo vivo, por lo que su resistencia se mantiene baja empleando conductores de baja resistividad y una gran área de sección transversal.

Como la resistividad de un material varía con la temperatura, la resistencia de un conductor específico también cambia con la temperatura. Para intervalos de temperatura que no son demasiado elevados, esta variación sigue aproximadamente una relación lineal, parecida a la ecuación (25.6):

$$R(T) = R_0[1 + \alpha(T - T_0)] \qquad (25.12)$$

En esta ecuación, $R(T)$ es la resistencia a la temperatura T, y R_0 es la resistencia a la temperatura T_0, que con frecuencia se toma como 0°C o 20°C. El *coeficiente de temperatura de la resistencia* α es la misma constante que aparece en la ecuación (25.6), si las dimensiones L y A en la ecuación (25.10) no cambian significativamente con la temperatura; de hecho, este es el caso para la mayoría de materiales conductores (véase el problema 25.67). Dentro de los límites de validez de la ecuación (25.12), el *cambio* en la resistencia que resulta de un cambio de temperatura $T - T_0$ está dado por $R_0\alpha(T - T_0)$.

25.9 Este resistor tiene una resistencia de $5.7\ \text{k}\Omega$, y una precisión (tolerancia) de $\pm 10\%$.



El dispositivo de un circuito hecho para tener un valor específico de resistencia entre sus extremos se llama **resistor**. Se pueden adquirir fácilmente en el comercio resistores desde 0.01 hasta $10^7\ \Omega$. Es frecuente que los resistores individuales que se usan en los circuitos electrónicos sean cilíndricos, midan pocos milímetros de diámetro y de longitud, y tengan alambres que sobresalen de sus extremos. La resistencia se indica con un código estándar que usa tres o cuatro bandas de colores cerca de un extremo (figura 25.9), de acuerdo con el esquema mostrado en la tabla 25.3. Las primeras dos bandas (comenzando con la banda más próxima al extremo) son dígitos, y la tercera es un potencia de 10 por la que se multiplica, como se muestra en la figura 25.9. Por ejemplo, el verde-violeta-rojo significa $57 \times 10^2\ \Omega$, o bien, $5.7\ \text{k}\Omega$. La cuarta banda, si está presente, indica la precisión (tolerancia) del valor; la ausencia de banda significa ±20%, una banda plateada quiere decir ±10% y una dorada, ±5%. Otra característica importante de un resistor es la *energía eléctrica* máxima que es capaz de disipar sin sufrir daños. Volveremos a este punto en la sección 25.5.

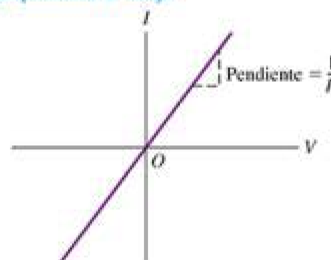
Tabla 25.3 Códigos de color para los resistores

Color	Valor como dígito	Valor como multiplicador
Negro	0	1
Café	1	10
Rojo	2	10^2
Naranja	3	10^3
Amarillo	4	10^4
Verde	5	10^5
Azul	6	10^6
Violeta	7	10^7
Gris	8	10^8
Blanco	9	10^9

25.10 Relaciones corriente-voltaje para dos dispositivos. Únicamente para un resistor que cumpla la ley de Ohm como en *a*), la corriente I es proporcional al voltaje V.

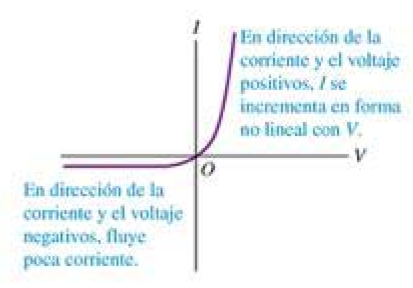
a)

Resistor óhmico (por ejemplo, un alambre de metal común): a cierta temperatura, la corriente es proporcional al voltaje.



b)

Diodo semiconductor: resistor no óhmico



Para un resistor que cumple la ley de Ohm, la gráfica de corriente como función de la diferencia de potencial (voltaje) es una línea recta (figura 25.10*a*). La pendiente de la recta es $1/R$. Si el signo de la diferencia de potencial cambia, también cambia el signo de la corriente generada; en la figura 25.7 esto corresponde a intercambiar los extremos de mayor y menor potencial del conductor, por lo que el campo eléctrico, la densidad de corriente y la corriente invierten su dirección. En dispositivos que no cumplen la ley de Ohm, la relación entre el voltaje y la corriente tal vez no esté en proporción directa, y quizá sea diferente para las dos direcciones de la corriente. La figura 25.10*b* muestra el comportamiento de un *diodo* semiconductor, un dispositivo que se usa para convertir corriente alterna en directa, y que realiza muchas funciones lógicas en los circuitos de cómputo. Para potenciales V positivos del ánodo (una de las dos terminales del diodo) con respecto del cátodo (la otra terminal), I aumenta en forma exponencial con el incremento de V; para potenciales negativos, la corriente es extremadamente pequeña. Así, una V positiva ocasiona que una corriente fluya en la dirección positiva, pero una diferencia de potencial del otro signo origina poca o ninguna corriente. De este modo, un diodo actúa en un circuito como una válvula de un solo sentido.



Ejemplo 25.2 Campo eléctrico, diferencia de potencial y resistencia en un alambre

El área de la sección transversal del alambre de cobre calibre 18 del ejemplo 25.1 es de $8.20 \times 10^{-7}\ \text{m}^2$. Transporta una corriente de 1.67 A. Calcule *a*) la magnitud del campo eléctrico en el alambre, *b*) la diferencia de potencial entre dos puntos del alambre separados por una distancia de 50.0 m y *c*) la resistencia de un trozo de 50.0 m de longitud de ese alambre.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Se dan los valores de la superficie de la sección transversal A y la corriente I. Las incógnitas son la magnitud del campo eléctrico E, la diferencia de potencial V y la resistencia R. La densidad de corriente es $J = I/A$. Con la ecuación (25.5) se calcula $E = \rho J$ (la tabla 25.1 proporciona la resistividad ρ del cobre). La diferencia de potencial es entonces el producto de E por la longitud del alambre. Se puede usar la ecuación (25.10) o la (25.11) para calcular R.

EJECUTAR: *a*) De la tabla 25.1, $\rho = 1.72 \times 10^{-8}\ \Omega \cdot \text{m}$. Por lo tanto, con la ecuación (25.5).

$$E = \rho J = \frac{\rho I}{A} = \frac{(1.72 \times 10^{-8}\ \Omega \cdot \text{m})(1.67\ \text{A})}{8.20 \times 10^{-7}\ \text{m}^2}$$
$$= 0.0350\ \text{V/m}$$

b) La diferencia de potencial es

$$V = EL = (0.0350\ \text{V/m})(50.0\ \text{m}) = 1.75\ \text{V}$$

c) De la ecuación (25.10), la resistencia de un trozo de alambre de 50.0 m de longitud es

$$R = \frac{\rho L}{A} = \frac{(1.72 \times 10^{-8}\ \Omega \cdot \text{m})(50.0\ \text{m})}{8.20 \times 10^{-7}\ \text{m}^2} = 1.05\ \Omega$$

Alternativamente, se puede obtener R usando la ecuación (25.11):

$$R = \frac{V}{I} = \frac{1.75\ \text{V}}{1.67\ \text{A}} = 1.05\ \Omega$$

EVALUAR: Hemos enfatizado que la resistencia del alambre está *definida* como la razón entre el voltaje y la corriente. Si el alambre estuviera hecho de material no óhmico, entonces R sería diferente para valores distintos de V, pero siempre está dada por $R = V/I$. La resistencia también está dada por $R = \rho L/A$; si el material es no óhmico, ρ no es constante, pero depende de E (o, en forma equivalente, de $V = EL$).



Ejemplo 25.3 Dependencia de la resistencia con respecto a la temperatura

Suponga que la resistencia de un alambre de cobre es 1.05 Ω a 20°C. Determine la resistencia a 0°C y a 100°C.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Se proporciona la resistencia $R_0 = 1.05\ \Omega$ a una temperatura de referencia $T_0 = 20°C$. Se utiliza la ecuación (25.12) para obtener las resistencias para $T = 0°C$ y $T = 100°C$ (las incógnitas), tomando de la tabla 25.2 el coeficiente de temperatura de la resistividad.

EJECUTAR: Según la tabla 25.2, $\alpha = 0.00393\ (C°)^{-1}$ para el cobre. Luego, de la ecuación (25.12),

$$\begin{aligned} R &= R_0[1 + \alpha(T - T_0)] \\ &= (1.05\ \Omega)\{1 + [0.00393\ (C°)^{-1}][0°C - 20°C]\} \\ &= 0.97\ \Omega \text{ para } T = 0°C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R &= (1.05\ \Omega)\{1 + [0.00393\ (C°)^{-1}][100°C - 20°C]\} \\ &= 1.38\ \Omega \text{ para } T = 100°C \end{aligned}$$

EVALUAR: La resistencia para 100°C es mayor que para 0°C en un factor de $(1.38\ \Omega)/(0.97\ \Omega) = 1.42$: al aumentar la temperatura del alambre de cobre de 0 a 100°C, su resistencia aumenta 42%. De la ecuación (25.11), $V = IR$, esto significa que se requiere 42% más de voltaje para generar la misma corriente a 100°C que a 0°C. Este es un efecto sustancial que hay que tener en cuenta al diseñar circuitos eléctricos que deban operar en un intervalo de temperaturas amplio.

Evalúe su comprensión de la sección 25.3 Suponga que se incrementa el voltaje a través del alambre de cobre de los ejemplos 25.2 y 25.3. El voltaje incrementado hace que fluya más corriente, lo cual provoca que suba la temperatura del conductor. (Esto mismo sucede en las bobinas de un horno eléctrico o un tostador eléctrico cuando se les aplica un voltaje. Esto se estudiará con más profundidad en la sección 25.5). Si se duplica el voltaje a través del alambre, aumenta la corriente en este. ¿En qué factor se incrementa? **i.** 2; **ii.** más de 2; **iii.** menos de 2. ❙

25.4 Fuerza electromotriz y circuitos

25.11 Si se produce un campo eléctrico dentro de un conductor que *no* forme parte de un circuito completo, la corriente fluye solo durante un tiempo muy corto.

a) Un campo eléctrico $\vec{E}_1$ producido dentro de un conductor aislado genera una corriente.



b) La corriente hace que se acumule carga en los extremos.



La carga acumulada genera un campo opuesto $\vec{E}_2$, lo cual reduce la corriente.

c) Luego de un tiempo muy corto, $\vec{E}_2$ tiene la misma magnitud que $\vec{E}_1$; entonces, el campo total es $\vec{E}_{total} = \mathbf{0}$ y la corriente cesa por completo.

$I = 0$ $\vec{E}_1$ $\vec{E}_2$ $\vec{J} = \mathbf{0}$ $\vec{E}_{total} = \mathbf{0}$

Para que un conductor tenga una corriente constante, debe formar parte de una trayectoria que forme un circuito cerrado o **circuito completo**. A continuación se explica por qué. Si se establece un campo eléctrico $\vec{E}_1$ dentro de un conductor aislado con resistividad ρ que *no* sea parte de un circuito completo, comienza a fluir una corriente cuya densidad es $\vec{J} = \vec{E}_1/\rho$ (figura 25.11*a*). Como resultado, en un extremo del conductor se acumula con rapidez una carga neta positiva, y en el otro extremo se acumula una carga neta negativa (figura 25.11*b*). Tales cargas producen un campo eléctrico $\vec{E}_2$ en la dirección opuesta a $\vec{E}_1$, lo cual ocasiona que disminuyan el campo eléctrico total y, por lo tanto, la corriente. En una pequeña fracción de segundo, se acumula suficiente carga en los extremos del conductor, de manera que el campo eléctrico total es $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \mathbf{0}$ dentro del conductor. Entonces, $\vec{J} = \mathbf{0}$ también, y la corriente cesa por completo (figura 25.11*c*). Por consiguiente, no puede haber un movimiento constante de carga en este circuito *incompleto* (*abierto*).

Para saber cómo se mantiene una corriente constante en un circuito *completo*, recordemos un hecho básico sobre la energía potencial eléctrica: si una carga q recorre un circuito completo y regresa a su punto de partida, la energía potencial debe ser la misma al final y al principio del recorrido. Como vimos en la sección 25.3, siempre hay una *disminución* de la energía potencial cuando se desplazan cargas a través de un material conductor ordinario con resistencia. Así que debe haber una parte en el circuito donde se *incremente* la energía potencial.

El problema es parecido a una fuente de agua ornamental que recicla el líquido. El agua cae desde las aberturas en la parte superior, forma cascadas en las terrazas y escurre (se desplaza en la dirección en que disminuye la energía potencial gravitacional) para acumularse en la pileta inferior. Después, una bomba la lleva de nuevo a la parte superior (incrementando la energía potencial) y el ciclo se repite. Sin la bomba, el agua tan solo caería a la base y se quedaría ahí.

Fuerza electromotriz

En un circuito eléctrico debe haber un dispositivo en algún punto del circuito que actúe como la bomba hidráulica de la fuente (figura 25.12). En este dispositivo una carga

viaja "hacia arriba", desde el lugar donde haya menos energía potencial hacia donde hay más, aun cuando la fuerza electrostática trate de llevarla de la mayor energía potencial a la menor. La dirección de la corriente en ese dispositivo es del potencial más bajo al más alto, exactamente lo opuesto de lo que sucede en un conductor ordinario. La influencia que hace que la corriente fluya del potencial menor al mayor se llama **fuerza electromotriz** (se abrevia **fem**). Este es un término inadecuado porque la fem *no* es una fuerza, sino una cantidad de energía por unidad de carga, como el potencial. La unidad del SI de la fem es la misma que la del potencial, el volt (1 V = 1 J/C). Una batería de linterna común tiene una fem de 1.5 V; esto significa que la batería hace un trabajo de 1.5 J por cada coulomb de carga que pasa a través de ella. Para denotar la fem se usará el símbolo $\mathcal{E}$ (la letra manuscrita E).

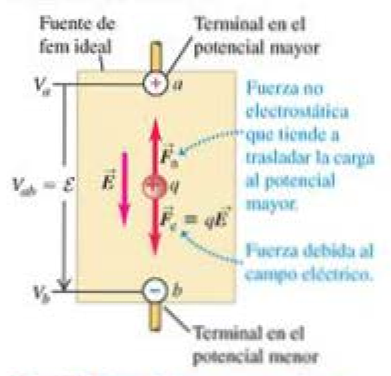
Todo circuito completo con corriente constante debe incluir algún dispositivo que provea una fem. Tal dispositivo recibe el nombre de **fuente de fem**. Algunos ejemplos de fuentes de fem son las baterías, los generadores eléctricos, las celdas solares, los termopares y las celdas de combustible. Todos estos dispositivos convierten energía de algún tipo (mecánica, química, térmica, etcétera) en energía potencial eléctrica y la transfieren al circuito al que está conectado el dispositivo. Una fuente *ideal* de fem mantiene una diferencia de potencial constante entre sus terminales, independientemente de la corriente que pase a través de ella. La fuerza electromotriz se define cuantitativamente como la magnitud de esta diferencia de potencial. Como se verá, las fuentes ideales de este tipo son dispositivos inexistentes, como el plano sin fricción y la cuerda con masa despreciable. Más adelante veremos en qué difiere el comportamiento de las fuentes de fem en la vida real con respecto a este modelo idealizado.

25.12 Así como una fuente de agua requiere de una bomba, un circuito eléctrico necesita una fuente de fuerza electromotriz para mantener una corriente constante.



La figura 25.13 es un diagrama de una fuente de fem ideal que mantiene una diferencia de potencial entre los conductores a y b, llamados *terminales* del dispositivo. La terminal a, marcada con +, se mantiene a un potencial *mayor* que la terminal b, marcada con −. Asociado con esta diferencia de potencial hay un campo eléctrico $\vec{E}$ en la región que rodea a las terminales, tanto dentro como afuera de la fuente. El campo eléctrico en el interior del dispositivo está dirigido de a a b, como se indica. Una carga q dentro de la fuente experimenta una fuerza eléctrica $\vec{F}_e = q\vec{E}$. Pero la fuente suministra además una influencia adicional, la cual se representa como una fuerza no electrostática $\vec{F}_n$. Esta fuerza, que opera dentro del dispositivo, empuja la carga de b a a "cuesta arriba" y contra la fuerza eléctrica $\vec{F}_e$. Así, $\vec{F}_n$ mantiene la diferencia de potencial entre las terminales. Si $\vec{F}_n$ no estuviera presente, la carga fluiría entre las terminales hasta que la diferencia de potencial fuera igual a cero. El origen de la influencia adicional $\vec{F}_n$ depende de la clase de fuente. En un generador proviene de las fuerzas del campo magnético sobre las cargas en movimiento. En una batería o pila de combustible está asociada con procesos de difusión y concentraciones electrolíticas variables que son el resultado de reacciones químicas. En una máquina electrostática como un generador Van de Graaf (véase la figura 22.26), se aplica una fuerza mecánica real utilizando una banda o una rueda.

25.13 Diagrama de una fuente de fem en una modalidad de "circuito abierto". La fuerza del campo eléctrico $\vec{F}_e = q\vec{E}$ y la fuerza no electrostática $\vec{F}_n$ se ilustran para una carga positiva q.



Cuando la fuente de fem no es parte de un circuito cerrado, $F_n = F_e$ y no hay movimiento neto de carga entre las terminales.

Si una carga positiva q se desplaza de b a a en el interior de la fuente, la fuerza no electrostática $\vec{F}_n$ realiza una cantidad positiva de trabajo $W_n = q\mathcal{E}$ sobre la carga. Este desplazamiento es *opuesto* a la fuerza electrostática $\vec{F}_e$, por lo que la energía potencial asociada con la carga se *incrementa* en una cantidad igual a qV_{ab}, donde $V_{ab} = V_a - V_b$ es el potencial (positivo) del punto a con respecto al punto b. Para la fuente ideal de fem que se ha descrito, $\vec{F}_e$ y $\vec{F}_n$ tienen igual magnitud pero dirección opuesta, de modo que el trabajo total realizado sobre la carga q es igual a cero; hay un aumento de la energía potencial pero *ningún* cambio en la energía cinética de la carga. Es como levantar un libro desde el piso hasta un estante elevado con rapidez constante. El incremento en energía potencial es igual al trabajo no electrostático W_n, por lo que $q\mathcal{E} = qV_{ab}$, o bien,

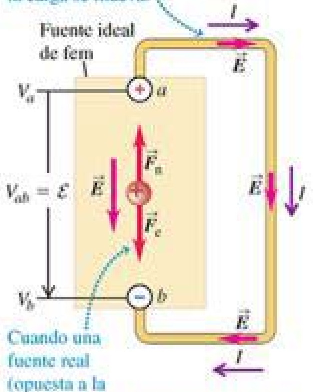
$$V_{ab} = \mathcal{E} \qquad \text{(fuente ideal de fem)} \qquad (25.13)$$

Ahora, consideremos que se forma un circuito completo conectando un alambre con resistencia R a las terminales de una fuente (figura 25.14). La diferencia de potencial entre las terminales a y b genera un campo eléctrico dentro del alambre; esto hace que la corriente fluya alrededor del circuito de a hacia b, del potencial más alto al más bajo. Donde el alambre se dobla, subsisten cantidades iguales de carga positiva y ne-

MasteringPHYSICS

PhET: Battery Voltage
PhET: Signal Circuit
ActivPhysics 12.1: DC Series Circuits (Qualitative)

25.14 Diagrama de una fuente ideal de fem en un circuito completo. La fuerza del campo eléctrico $\vec{F}_e = q\vec{E}$ y la fuerza no electrostática $\vec{F}_n$ se ilustran para una carga q positiva. La dirección de la corriente es de a hacia b en el circuito externo y de b hacia a en el interior de la fuente.



Aplicación ¡Peligro: mantarraya eléctrica!

Las mantarrayas eléctricas dan electrochoques para aturdir a sus presas y ahuyentar a sus predadores. (En la antigua Roma, los médicos practicaban una forma primitiva de terapia electroconvulsiva colocando mantarrayas eléctricas sobre sus pacientes, para curar dolores de cabeza y gota). Las descargas son producidas por células planas especializadas llamadas electroplacas. Estas células desplazan iones a través de sus membranas para producir una fem de alrededor de 0.05 V. Miles de electroplacas se apilan una sobre otra, de modo que sus fems se suman para producir un total de hasta 200 V. Estas pilas forman más de la mitad de la masa corporal de las mantarrayas eléctricas. Una mantarraya puede usar esto para generar una corriente impresionante de hasta 30 A por unos cuantos milisegundos.



gativa en el "interior" y en el "exterior" del punto de doblez. Estas cargas ejercen las fuerzas que hacen que la corriente siga las dobladuras del alambre.

De la ecuación (25.11), la diferencia de potencial entre los extremos del alambre en la figura 25.14 está dada por $V_{ab} = IR$. Al combinarse con la ecuación (25.13),

$$\mathcal{E} = V_{ab} = IR \qquad \text{(fuente ideal de fem)} \tag{25.14}$$

Es decir, cuando una carga positiva q fluye alrededor del circuito, el *aumento* de potencial $\mathcal{E}$ conforme pasa a través de la fuente ideal, es numéricamente igual a la *caída* de potencial $V_{ab} = IR$ conforme pasa por el resto del circuito. Una vez que se conocen $\mathcal{E}$ y R, con esta relación se determina la corriente en el circuito.

CUIDADO **La corriente no "se gasta" en un circuito** Es un error común considerar que en un circuito cerrado la corriente es algo que sale de la terminal positiva de una batería y se consume o "se gasta" en el momento en que llega a la terminal negativa. De hecho, la corriente es la *misma* en cualquier punto de un circuito de circuito simple como en la figura 25.14, aun si el espesor de los alambres fuera diferente en distintos puntos del circuito. Esto sucede porque la carga se conserva (es decir, no se crea ni se destruye) y porque no se puede acumular en los dispositivos del circuito que hemos descrito. Si la carga se acumulara, las diferencias de potencial cambiarían con el tiempo. Es como el flujo de agua en una fuente de ornato; el agua brota de la parte superior de la fuente al mismo ritmo con el que llega a la parte inferior, sin importar las dimensiones de la fuente. ¡El agua no "se gasta" durante el trayecto!

Resistencia interna

Las fuentes reales de fem en un circuito no se comportan exactamente del modo descrito; la diferencia de potencial a través de una fuente real en un circuito *no* es igual a la fem de la ecuación (25.14). La razón es que la carga en movimiento a través del material de cualquier fuente real encuentra una *resistencia*, a la que llamamos **resistencia interna** de la fuente, y se denota con r. Si esta resistencia se comporta de acuerdo con la ley de Ohm, r es constante e independiente de la corriente I. Conforme la corriente avanza a través de r, experimenta una caída de potencial asociada que es igual a Ir. Así, cuando una corriente fluye a través de una fuente de la terminal negativa b a la terminal positiva a, la diferencia de potencial V_{ab} entre las terminales es

$$V_{ab} = \mathcal{E} - Ir \qquad \text{(voltaje terminal, fuente con resistencia interna)} \tag{25.15}$$

El potencial V_{ab}, llamado **voltaje terminal**, es menor que la fem $\mathcal{E}$ ya que el término Ir representa la caída de potencial a través de la resistencia interna r. Dicho de otra manera, el aumento en la energía potencial qV_{ab} que se produce cuando una carga q se traslada desde b hasta a dentro de la fuente es ahora menor que el trabajo $q\mathcal{E}$ realizado por la fuerza no electrostática $\vec{F}_n$, ya que se pierde algo de energía potencial al atravesar la resistencia interna.

Una batería de 1.5 V tiene una fem de 1.5 V, pero el voltaje terminal V_{ab} de la batería es igual a 1.5 V únicamente si no hay corriente que fluya a través de ella, de manera que en la ecuación (25.15) $I = 0$. Si la batería forma parte de un circuito completo a través del cual fluye corriente, el voltaje terminal será menor de 1.5 V. *Para una fuente real de fem, el voltaje terminal es igual a la fem tan solo si no hay corriente que fluya a través de la fuente* (figura 25.15). Así, el comportamiento de una fuente se puede describir en términos de dos propiedades: una fem $\mathcal{E}$, que suministra una diferencia de potencial constante e independiente de la corriente, en serie con una resistencia interna r.

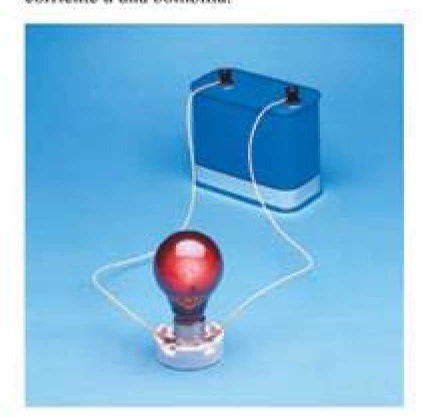
La corriente en el circuito externo conectado a las terminales a y b de la fuente sigue estando determinada por $V_{ab} = IR$. Al combinar esto con la ecuación (25.15) se obtiene

$$\mathcal{E} - Ir = IR \quad \text{o bien,} \quad I = \frac{\mathcal{E}}{R + r} \qquad \text{(corriente, fuente con resistencia interna)} \tag{25.16}$$

Es decir, la corriente es igual a la fuente de fem dividida entre la resistencia *total* del circuito ($R + r$).

CUIDADO **Una batería no es una "fuente de corriente"** Quizás usted piense que una batería u otra fuente de fem siempre produce la misma corriente, sin importar en cuál circuito se utilice. Pero, como indica la ecuación (25.16), ¡esto no es así! Cuanto mayor sea la resistencia R del circuito externo, menos corriente generará la fuente. Esto es similar a empujar un objeto a través de un líquido espeso y viscoso como el aceite o la melaza; si se ejerce cierto empuje sostenido (fem), es posible desplazar un objeto pequeño con gran rapidez (R pequeña, I grande), o bien, un objeto grande con lentitud (R grande, I pequeña).

25.15 La fem de esta batería, es decir, el voltaje terminal cuando no está conectada a nada, es de 12 V. Pero como la batería tiene resistencia interna, el voltaje terminal en ella es menor de 12 V cuando suministra corriente a una bombilla.



Símbolos en los diagramas de circuitos

Una parte importante del análisis de un circuito eléctrico consiste en realizar el *diagrama del circuito*. La tabla 25.4 muestra los símbolos usuales que se emplean en los diagramas de circuito. En este capítulo y en el siguiente se usarán ampliamente tales símbolos. Por lo general, se supone que los alambres que conectan los diversos elementos del circuito tienen una resistencia despreciable; de la ecuación (25.11), $V = IR$, la diferencia de potencial entre los extremos de un alambre de este tipo es igual a cero.

La tabla 25.4 incluye dos *instrumentos* que se utilizan para medir las propiedades de los circuitos. Los medidores ideales no interfieren con el circuito al cual se conectan. Un **voltímetro**, presentado en la sección 23.2, mide la diferencia de potencial entre sus terminales; un voltímetro idealizado tiene una resistencia infinitamente grande y mide la diferencia de potencial sin tener que desviar ninguna corriente a través él. Un amperímetro mide la corriente que pasa a través de él; un **amperímetro** idealizado tiene resistencia igual a cero y no hay diferencia de potencial entre sus terminales. Como los medidores actúan como parte del circuito al que están conectados, es importante recordar dichas propiedades.

Tabla 25.4 Símbolos para diagramas de circuitos

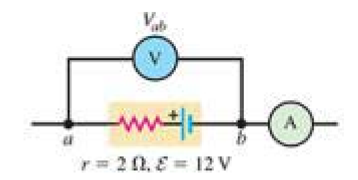
	Conductor con resistencia despreciable
R	Resistor
$+$ $\mathcal{E}$	Fuente de fem (la línea vertical más larga representa la terminal positiva, por lo general aquella con el mayor potencial)
$\mathcal{E}$ $+$ o bien, $+$ $\mathcal{E}$	Fuente de fem con resistencia interna r (la r se puede colocar en cualquier lado)
V	Voltímetro (mide la diferencia de potencial entre sus terminales)
A	Amperímetro (mide la corriente que pasa a través de él)



Ejemplo conceptual 25.4 Fuente en un circuito abierto

La figura 25.16 ilustra una fuente (batería) con fem $\mathcal{E}$ de 12 V y resistencia interna r de 2 Ω. (En comparación, la resistencia interna de una batería comercial de plomo de 12 V es de tan solo algunas milésimas de ohm). Los alambres a la izquierda de a y a la derecha del amperímetro A no están conectados a nada. Determine las respectivas lecturas V_{ab} e I de un voltímetro ideal V y de un amperímetro A, también ideal.

25.16 Fuente de fem en un circuito abierto.



Continúa

SOLUCIÓN

La corriente es *cero* porque no hay un circuito completo. (No existe corriente a través de nuestro voltímetro ideal, ya que tiene resistencia infinitamente grande). Por lo tanto, el amperímetro marca $I = 0$. Como no hay corriente a través de la batería, no hay diferencia de potencial a través de su resistencia interna. De la ecuación (25.15) con $I = 0$, la diferencia de potencial V_{ab} a través de las terminales de la batería es igual a la fem. Por consiguiente, la lectura del voltímetro es $V_{ab} = \mathcal{E} = 12$ V. El voltaje terminal de una fuente real, no ideal, es igual a la fem *solo* si no hay corriente que fluya a través de la fuente, como en este ejemplo.

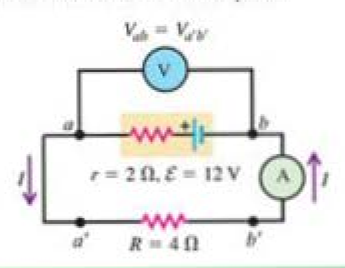
Ejemplo 25.5 Fuente en un circuito completo

En el ejemplo conceptual 25.4, se agrega un resistor de 4 Ω a la batería para formar el circuito completo (figura 25.17). ¿Cuáles son ahora las lecturas de V_{ab} e I en el voltímetro y el amperímetro?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Las incógnitas son la corriente I a través del circuito $aa'b'b$ y la diferencia de potencial V_{ab}. Primero se calcula I con la ecuación (25.16). Para determinar V_{ab} se puede usar la ecuación (25.11) o la ecuación (25.15).

25.17 Fuente de fem en un circuito completo.



EJECUTAR: El amperímetro ideal tiene una resistencia igual a cero, por lo que la resistencia total externa a la fuente es $R = 4\,\Omega$. De la ecuación (25.16), la corriente a través del circuito $aa'b'b$ es

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R + r} = \frac{12\text{ V}}{4\,\Omega + 2\,\Omega} = 2\text{ A}$$

Los alambres conductores ideales y el amperímetro ideal tienen una resistencia igual a cero, de modo que no hay diferencia de potencial entre los puntos a y a' o entre b y b'; es decir, $V_{ab} = V_{a'b'}$. Se calcula V_{ab} considerando a y b como las terminales del resistor: a partir de la ley de Ohm, ecuación (25.11), tenemos

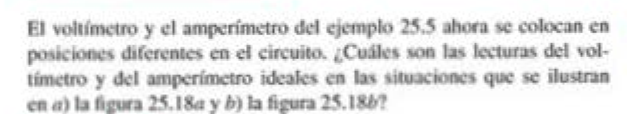
$$V_{a'b'} = IR = (2\text{ A})(4\,\Omega) = 8\text{ V}$$

Alternativamente, se consideran a y b como las terminales de la fuente. Entonces, de la ecuación (25.15),

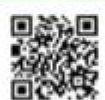
$$V_{ab} = \mathcal{E} - Ir = 12\text{ V} - (2\text{ A})(2\,\Omega) = 8\text{ V}$$

De cualquier modo, vemos que la lectura del voltímetro es de 8 V.

EVALUAR: Con una corriente que fluye a través de la fuente, el voltaje terminal V_{ab} es menor que la fem $\mathcal{E}$. Cuanto menor sea la resistencia interna r, menor será la diferencia entre V_{ab} y $\mathcal{E}$.



Ejemplo conceptual 25.6 Uso de voltímetros y amperímetros



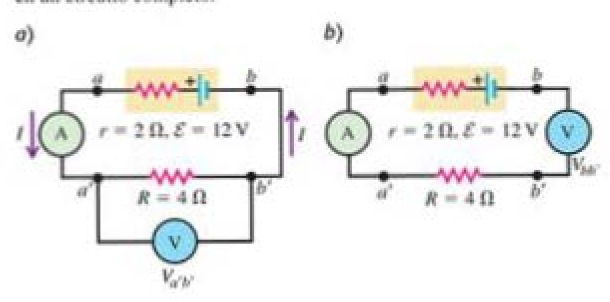
El voltímetro y el amperímetro del ejemplo 25.5 ahora se colocan en posiciones diferentes en el circuito. ¿Cuáles son las lecturas del voltímetro y del amperímetro ideales en las situaciones que se ilustran en *a*) la figura 25.18*a* y *b*) la figura 25.18*b*?

SOLUCIÓN

a) El voltímetro ahora mide la diferencia de potencial entre los puntos a' y b'. Pero, como se expresó en el ejemplo 25.5, $V_{ab} = V_{a'b'}$, por lo que el voltímetro da la misma lectura que en el ejemplo 25.5: $V_{a'b'} = 8$ V.

CUIDADO **Corriente en un circuito simple** Conforme las cargas se desplazan por un resistor, hay una disminución en la energía potencial eléctrica, pero la corriente *no* cambia. *La corriente en un circuito simple es la misma en cualquier punto*; la corriente no "se gasta" a medida que avanza a través del resistor. Por lo tanto, el amperímetro colocado como en la figura 25.17 ("corriente abajo" del resistor de 4 V) y el amperímetro de la figura 25.18*b* ("corriente arriba" del resistor) dan ambos la misma lectura de $I = 2$ A.

25.18 Distintas ubicaciones de un voltímetro y un amperímetro en un circuito completo.



b) A través del voltímetro ideal no hay corriente porque este tiene una resistencia infinitamente grande. Como el voltímetro ahora forma parte del circuito, no hay ninguna corriente en el circuito, por lo que la lectura del amperímetro es $I = 0$.

El voltímetro mide la diferencia de potencial $V_{bb'}$ entre los puntos b y b'. Como $I = 0$, la diferencia de potencial a través del resistor es $V_{a'b'} = IR = 0$, y la que hay entre los extremos a y a' del amperímetro ideal también es igual a cero. Por lo tanto, $V_{bb'}$ es igual a V_{ab}, el voltaje terminal de la fuente. Como en el ejemplo conceptual 25.4, no hay corriente que fluya, por lo que el voltaje terminal es igual a la fem, en tanto que la lectura del voltímetro es $V_{ab} = \mathcal{E} = 12$ V.

Este ejemplo muestra que los amperímetros y voltímetros también son elementos del circuito. Al mover el voltímetro de la posición que tenía en la figura 25.18*a* a la de la figura 25.18*b*, cambian mucho la corriente y las diferencias de potencial en el circuito. Si se desea medir la diferencia de potencial entre dos puntos de un circuito sin alterarlo, hay que usar un voltímetro como se ilustra en la figura 25.17 o 25.18*a*, *no* como en la figura 25.18*b*.



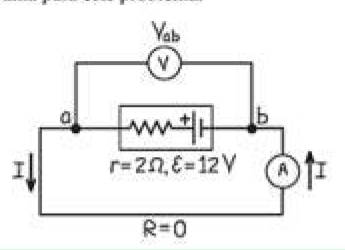
Ejemplo 25.7 Fuente con un cortocircuito

En el circuito del ejemplo 25.5 se sustituye el resistor de 4 Ω con un conductor de resistencia igual a cero. ¿Cuáles son ahora las lecturas?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: La figura 25.19 ilustra el nuevo circuito. Las incógnitas nuevamente son I y V_{ab}. Ahora hay una trayectoria con resistencia igual a cero entre los puntos a y b, a través del circuito inferior, por consiguiente, la diferencia de potencial entre estos puntos debe ser igual a cero.

25.19 Diagrama para este problema.



EJECUTAR: Debemos tener $V_{ab} = IR = I(0) = 0$, sin importar cuál sea la corriente. Por lo tanto, calculamos la corriente I con la ecuación (25.15):

$$V_{ab} = \mathcal{E} - Ir = 0$$

$$I = \frac{\mathcal{E}}{r} = \frac{12\ \text{V}}{2\ \Omega} = 6\ \text{A}$$

EVALUAR: La corriente tiene un valor distinto al del ejemplo 25.5, aun cuando se utiliza la misma batería: la corriente depende tanto de la resistencia interna r como de la resistencia del circuito externo.

La situación de este ejemplo se llama *cortocircuito*. La resistencia externa del circuito es igual a cero porque las terminales de la batería están conectadas directamente entre sí. La corriente del cortocircuito es igual a la fem $\mathcal{E}$ dividida entre la resistencia interna r. *Advertencia:* ¡Un cortocircuito puede ser peligroso! Una batería de automóvil o una línea eléctrica doméstica tienen una resistencia interna muy pequeña (mucho menor que las de estos ejemplos), y la corriente del cortocircuito puede ser lo suficientemente grande como para fundir un alambre delgado o hacer que estalle una batería.

Cambios de potencial alrededor de un circuito

El cambio neto en la energía potencial para una carga q que viaja a través de un circuito completo debe ser cero. Por lo tanto, el cambio neto del *potencial* a través del circuito también debe ser igual a cero; en otras palabras, la suma algebraica de las diferencias de potencial y fems a través del circuito es igual a cero. Esto se observa si se rescribe la ecuación (25.16) en la forma

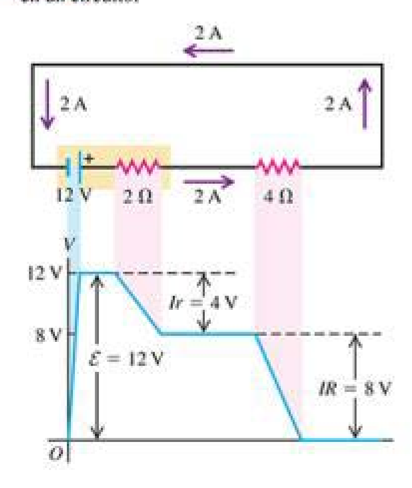
$$\mathcal{E} - Ir - IR = 0$$

Una ganancia de potencial de $\mathcal{E}$ está asociada con la fem, y caídas de potencial de Ir e IR están asociadas con la resistencia interna de la fuente y del circuito externo, respectivamente. La figura 25.20 es una gráfica que muestra la forma en que varía el potencial, conforme nos movemos a través del circuito completo de la figura 25.17. El eje horizontal no necesariamente representa distancias reales, sino varios puntos del circuito. Si se toma el potencial igual a cero en la terminal negativa de la batería, entonces se tiene un aumento de $\mathcal{E}$ y una caída de Ir en la batería, así como una caída adicional IR en el resistor externo; al terminar el recorrido a través del circuito, el potencial es de nuevo como al principio.

En esta sección únicamente hemos considerado situaciones en las cuales las resistencias son óhmicas. Si el circuito incluye un dispositivo no lineal como un diodo (véase la figura 25.10*b*), la ecuación (25.16) sigue siendo válida, pero no se puede resolver algebraicamente porque R no es constante. En una situación así, la corriente I se calcula utilizando métodos numéricos.

Por último, hacemos hincapié en que la ecuación (25.15) no siempre es una representación adecuada del comportamiento de una fuente. La fem tal vez no sea constante, y lo que hemos descrito como resistencia interna quizá sea una relación más compleja entre el voltaje y la corriente, que no cumple la ley de Ohm. Sin embargo, es frecuente que el concepto de resistencia interna brinde una descripción adecuada de las baterías, los generadores y otros convertidores de energía. La diferencia principal entre la batería nueva de una linterna y otra usada no es la fem, la cual disminuye solo un poco con el uso, sino la resistencia interna, que se incrementa desde menos de un ohm, cuando la batería está nueva, hasta 1000 Ω o más, después de haberla usado mucho. De manera similar, la batería de un automóvil puede entregar menos corriente al motor de arranque en una mañana fría que cuando la batería está caliente, no porque la fem sea considerablemente menor, sino porque la resistencia interna aumenta cuando desciende la temperatura.

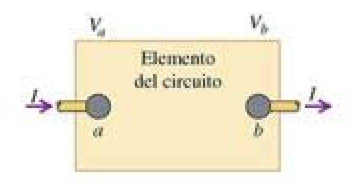
25.20 Aumentos y caídas de potencial en un circuito.



Evalúe su comprensión de la sección 25.4 Clasifique los siguientes circuitos, de la mayor corriente a la menor. **i.** Un resistor de 1.4 Ω conectado a una batería de 1.5 V que tiene resistencia interna de 0.10 Ω; **ii.** un resistor de 1.8 Ω conectado a una batería de 4.0 V que tiene voltaje terminal de 3.6 V y resistencia interna desconocida; **iii.** un resistor desconocido conectado a una batería de 12.0 V con resistencia interna de 0.20 Ω y voltaje terminal de 11.0 V. ❙



25.5 Energía y potencia en circuitos eléctricos



25.21 La potencia de alimentación al elemento del circuito entre a y b es $P = (V_a - V_b)I = V_{ab}I$.



PhET: Battery-Resistor Circuit
PhET: Circuit Construction Kit (AC+DC)
PhET: Circuit Construction Kit (DC Only)
PhET: Ohm's Law

Ahora estudiaremos algunas relaciones entre la energía y la potencia en los circuitos eléctricos. La caja de la figura 25.21 representa un elemento de circuito con diferencia de potencial $V_a - V_b = V_{ab}$ entre sus terminales y la corriente I que pasa a través de él en dirección de a hacia b. Este elemento puede ser un resistor, una batería, o algo más; los detalles no importan. Conforme la carga pasa por el elemento del circuito, el campo eléctrico realiza trabajo sobre la carga. En una fuente de fem la fuerza $\vec{F}_n$ que se mencionó en la sección 25.4, efectúa trabajo adicional.

Conforme una cantidad de carga q pasa a través del elemento del circuito, hay un cambio en la energía potencial igual a qV_{ab}. Por ejemplo, si $q > 0$ y $V_{ab} = V_a - V_b$ es positiva, la energía potencial disminuye a medida que la carga "cae" del potencial V_a al potencial menor V_b. Las cargas en movimiento no ganan energía *cinética* porque la corriente (la razón de flujo de carga) que sale del elemento del circuito debe ser igual a la razón de flujo de carga que entra en este. De modo que, la cantidad qV_{ab} representa energía eléctrica transferida hacia el elemento del circuito. Esta situación ocurre en las bobinas de un tostador o de un horno eléctrico, donde la energía eléctrica se convierte en energía térmica.

Si la energía potencial en a es menor que en b, entonces V_{ab} es negativa, y hay una transferencia neta de energía hacia *afuera* del elemento del circuito. Después, el elemento actúa como fuente proveyendo energía eléctrica al circuito en que se encuentra. Esta es la situación habitual para una batería, la cual convierte energía química en eléctrica y la entrega al circuito externo. Así, qV_{ab} puede representar ya sea una cantidad de energía entregada a un elemento del circuito, o bien, una cantidad de energía que se extrae de ese elemento.

En los circuitos eléctricos es más frecuente que nos interese la *rapidez* con la que la energía se entrega a un elemento del circuito o se extrae de él. Si la corriente a través del elemento es I, entonces en un intervalo de tiempo dt pasa una cantidad de carga $dQ = I\,dt$ a través del elemento. El cambio en la energía potencial para esta cantidad de carga es $V_{ab}\,dQ = V_{ab}I\,dt$. Si esta expresión se divide entre dt, se obtiene la *rapidez* a la que se transfiere la energía hacia fuera o hacia adentro del elemento del circuito. La relación de transferencia de energía por unidad de tiempo es la *potencia*, y se denota mediante P; por lo tanto, escribimos

$$P = V_{ab}I \quad \text{(rapidez con la que se entrega energía a un elemento del circuito o se extrae de este)} \qquad (25.17)$$

La unidad de V_{ab} es un volt, o un joule por coulomb, y la unidad de I es un ampere, o un coulomb por segundo. Entonces, la unidad de $P = V_{ab}I$ es un watt, como debería ser:

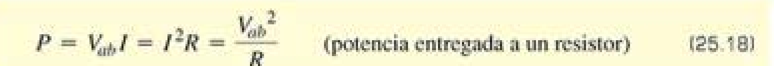
$$(1\ \text{J/C})(1\ \text{C/s}) = 1\ \text{J/s} = 1\ \text{W}$$

Veamos algunos casos especiales.

Potencia de entrada en una resistencia pura

Si el elemento del circuito de la figura 25.21 es un resistor, la diferencia de potencial es $V_{ab} = IR$. De la ecuación (25.17), la potencia eléctrica entregada al resistor por el circuito es





$$P = V_{ab}I = I^2R = \frac{V_{ab}^2}{R} \quad \text{(potencia entregada a un resistor)} \qquad (25.18)$$

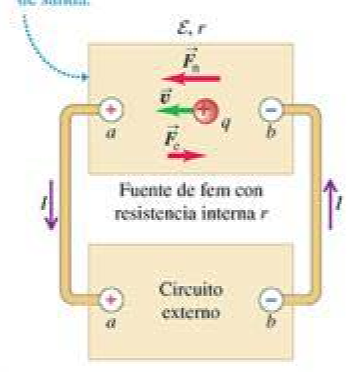
En este caso, el potencial en a (donde entra la corriente al resistor) siempre es mayor que el que hay en b (donde sale la corriente). La corriente entra por la terminal de mayor potencial del dispositivo, y la ecuación (25.18) representa la razón o rapidez de transferencia de energía potencial eléctrica *hacia* el elemento del circuito.

¿Qué le ocurre a esta energía? Las cargas en movimiento colisionan contra los átomos en el resistor y transfieren algo de su energía a esos átomos, lo cual incrementa la energía interna del material. O bien, la temperatura del resistor aumenta o hay un flujo de calor hacia afuera de él, o ambas cuestiones. En cualquiera de estos casos, se dice que la energía se *disipa* en el resistor a una tasa de I^2R. Cada resistor tiene una *potencia nominal*, que es la potencia máxima que el dispositivo es capaz de disipar sin que se sobrecaliente y se dañe. Algunos dispositivos, como los calentadores eléctricos, están diseñados para calentarse y transferir calor al ambiente. Pero si se excede la potencia nominal, incluso esta clase de aparatos pueden fundirse o incluso estallar.

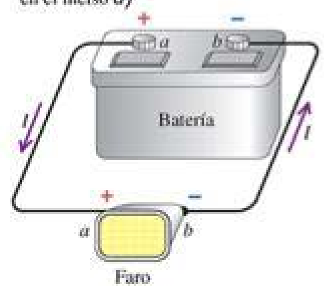
25.22 Conversión de la energía en un circuito sencillo.

***a*)** Diagrama del circuito

- La fuente de fem convierte energía que no es eléctrica en energía eléctrica a una razón de $\mathcal{E}I$.
- Su resistencia interna *disipa* energía a una razón de I^2r.
- La diferencia $\mathcal{E}I - I^2r$ es su potencia de salida.



***b*)** Circuito real del tipo que se muestra en el inciso ***a*)**



Potencia de salida de una fuente

El rectángulo superior de la figura 25.22a representa una fuente con fem $\mathcal{E}$ y resistencia interna r, conectada mediante conductores ideales (sin resistencia) a un circuito externo representado por el rectángulo inferior. Esto podría describir la batería de un automóvil conectada a uno de los faros (figura 25.22b). El punto a está a un potencial mayor que el b, por lo que $V_a > V_b$, y V_{ab} es positiva. Observe que la corriente I *sale* de la fuente por la terminal de mayor potencial (en vez de entrar por ahí). Se provee energía al circuito externo, con una rapidez dada por la ecuación (25.17):

$$P = V_{ab}I$$

Para una fuente que se puede describir con una fem $\mathcal{E}$ y una resistencia interna r, se utiliza la ecuación (25.15):

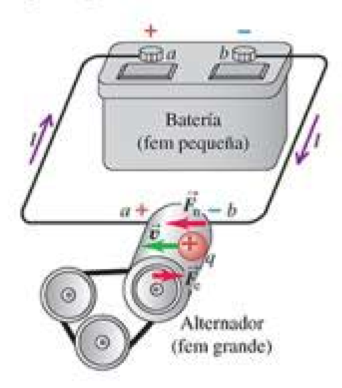
$$V_{ab} = \mathcal{E} - Ir$$

Si se multiplica esta ecuación por I, se obtiene

$$P = V_{ab}I = \mathcal{E}I - I^2r \qquad (25.19)$$

¿Qué significan los términos $\mathcal{E}I$ e I^2r? En la sección 25.4 se definió la fem $\mathcal{E}$ como el trabajo por unidad de carga que la fuerza no electrostática realiza sobre las cargas cuando estas son empujadas "cuesta arriba" desde b hacia a en la fuente. En el tiempo dt, fluye una carga $dQ = I\,dt$ a través de la fuente; el trabajo realizado sobre ella por esta fuerza no electrostática es $\mathcal{E}\,dQ = \mathcal{E}I\,dt$. Así, $\mathcal{E}I$ es la *razón* a la que se realiza trabajo sobre las cargas en circulación por cualquier agente que provoque la fuerza no electrostática en la fuente. Este término representa la rapidez de conversión de la energía no eléctrica en eléctrica dentro de la fuente. El término I^2r es la razón a la cual se *disipa* energía eléctrica en la resistencia interna de la fuente. La diferencia $\mathcal{E}I - I^2r$ es la potencia eléctrica *neta* de salida de la fuente, es decir, la rapidez con que la fuente entrega energía eléctrica al resto del circuito.

25.23 Cuando se conectan dos fuentes en un circuito simple, la fuente con mayor fem entrega energía a la otra fuente.



Potencia de entrada a una fuente

Suponga que el rectángulo inferior de la figura 25.22a es una fuente con una fem *mayor* que la de la fuente superior y opuesta a ella. La figura 25.23 muestra un ejemplo práctico: el proceso de carga de una batería de automóvil (el elemento superior del circuito) mediante el alternador del vehículo (el elemento inferior). La corriente I en el circuito es *opuesta* a la de la figura 25.22; la fuente inferior empuja corriente de regreso hacia la fuente superior. Debido a la inversión de la corriente, en vez de la ecuación (25.15), se tiene que para la fuente superior

$$V_{ab} = \mathcal{E} + Ir$$

y en lugar de la ecuación (25.19), tenemos

$$P = V_{ab}I = \mathcal{E}I + I^2r \qquad (25.20)$$

En vez de que *realice* trabajo el agente que genera la fuerza no electrostática en la fuente superior, se está realizando trabajo *sobre* el agente. En la fuente superior hay energía eléctrica que se convierte en energía no eléctrica a una razón de $\mathcal{E}I$. El término I^2r en la ecuación (25.20) es, de nuevo, la razón de disipación de energía en la resistencia interna de la fuente superior, y la suma $\mathcal{E}I + I^2r$ es la potencia eléctrica total de *alimentación* a la fuente superior. Esto es lo que sucede cuando se conecta una batería recargable (de almacenamiento) a un cargador. Este suministra energía eléctrica a la batería; parte de esta energía se convierte en energía química que se reconvierte después, y el resto se disipa (se desperdicia) en la resistencia interna de la batería, calentando así la batería y provocando un flujo térmico hacia afuera. Si usted tiene alguna herramienta eléctrica o una computadora portátil con batería recargable, tal vez haya notado que se calienta mientras se carga.

Estrategia para resolver problemas 25.1 Potencia y energía en los circuitos



IDENTIFICAR *los conceptos relevantes:* Los conceptos de alimentación y potencia eléctrica de salida son aplicables a cualquier circuito eléctrico. Muchos problemas solicitan de manera explícita que se consideren la potencia o la energía.

PLANTEAR *el problema* con los siguientes pasos:
1. Elabore un dibujo del circuito.
2. Identifique los elementos del circuito, incluyendo las fuentes de fem y los resistores. Posteriormente se agregarán otros elementos del circuito, incluyendo capacitores (capítulo 26) e inductores (capítulo 30).
3. Identifique las incógnitas. Lo común es que sean la potencia de alimentación o de salida para cada elemento del circuito, o la cantidad total de energía que entra o sale de un elemento del circuito en un tiempo dado.

EJECUTAR *la solución* como sigue:
1. Una fuente de fem $\mathcal{E}$ entrega potencia $\mathcal{E}I$ a un circuito cuando la corriente I pasa a través de la fuente de − (menos) a + (más). (Por ejemplo, la conversión de energía se realiza a partir de energía química en una batería, o de energía mecánica en un generador). En este caso, la fuente tiene una potencia de salida *positiva* hacia el circuito, o, de manera equivalente, una potencia de alimentación *negativa* a la fuente.
2. Una fuente de fem toma potencia $\mathcal{E}I$ de un circuito cuando la corriente pasa a través de la fuente en dirección de + a −. (Esto sucede cuando se carga una batería de almacenamiento, es decir, cuando la energía eléctrica se convierte en energía química. En este caso, la fuente tiene una potencia de salida *negativa* hacia el circuito o, de manera equivalente, una potencia de alimentación *positiva* a la fuente.
3. Sin importar la dirección de la corriente a través de un resistor, siempre hay una potencia de alimentación *positiva* al resistor. Este proceso extrae energía del circuito convirtiéndola en calor a una razón $VI = I^2R = V^2/R$, donde V es la diferencia de potencial a través del resistor.
4. Igual que en el paso 3, siempre hay una potencia de alimentación positiva a la resistencia interna r de una fuente a través de la cual fluye la corriente, sin que importe la dirección de la misma. Entonces, este proceso retira energía del circuito y la convierte en calor a una tasa de I^2r.
5. Si la potencia que entra a un elemento de circuito o que sale de él es constante, la energía entregada o extraída es el producto de la potencia por el tiempo transcurrido. (En el capítulo 26 encontraremos situaciones en las cuales la potencia no es constante. En tales casos, se requiere una integral, con respecto al intervalo de tiempo respectivo, para calcular la energía total).

EVALUAR *la respuesta:* Verifique los resultados; en particular compruebe que la energía se conserva. Esta conservación se expresa en cualquiera de dos formas: "potencia de alimentación neta = potencia de salida neta", o bien, "la suma algebraica de las potencia de alimentación a los elementos del circuito es igual a cero".

Ejemplo 25.8 Potencias de alimentación y salida en un circuito completo

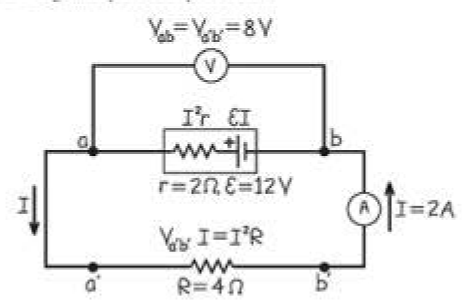


Para el circuito que se analizó en el ejemplo 25.5, calcule la razón de conversión de energía (química a eléctrica) y la razón de disipación de energía en la batería, así como la razón de disipación de energía en el resistor de 4 Ω, y la potencia neta de salida de la batería.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: La figura 25.24 representa el circuito, proporciona los valores de las cantidades conocidas del ejemplo 25.5, y señala cómo determinar las incógnitas. Se utiliza la ecuación (25.19) para obtener la potencia neta de salida de la batería, la razón de conversión de energía química a eléctrica, y la razón de disipación de energía en la resistencia interna de la batería. Se usa la ecuación (25.18) para calcular la potencia entregada al resistor de 4 Ω (y disipada en este).

25.24 Diagrama para este problema.



EJECUTAR: A partir del primer término de la ecuación (25.19), la razón de conversión de energía en la batería es

$$\mathcal{E}I = (12\text{ V})(2\text{ A}) = 24\text{ W}$$

Del segundo término de la ecuación (25.19), la razón de disipación de energía en la batería es

$$I^2r = (2\text{ A})^2(2\ \Omega) = 8\text{ W}$$

La potencia eléctrica *neta* de salida de la batería es la diferencia entre: $\mathcal{E}I - I^2r = 16$ W. De la ecuación (25.18), la potencia eléctrica de entrada al resistor de 4 Ω, y la razón de disipación de energía eléctrica en este último son

$$V_{a'b'}I = (8\text{ V})(2\text{ A}) = 16\text{ W} \quad \text{y}$$
$$I^2R = (2\text{ A})^2(4\ \Omega) = 16\text{ W}$$

EVALUAR: La tasa $V_{a'b'}I$ a la cual se suministra la energía al resistor de 4 Ω es igual a la razón I^2R a la cual se disipa ahí la energía. Esto también es equivalente a la potencia neta de salida de la batería: $P = V_{ab}I = (8\text{ V})(2\text{ A}) = 16$ W. En resumen, la razón a la cual la fuente de fem suministra energía es $\mathcal{E}I = 24$ W, de la cual $I^2r = 8$ W se disipa en el resistor interno de la batería e $I^2R = 16$ W se disipan en el resistor externo.

Ejemplo 25.9 Aumento de la resistencia

Suponga que el resistor externo de 4 Ω de la figura 25.24 se sustituye por otro de 8 Ω. ¿Cómo afecta esto la potencia eléctrica disipada en el resistor?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: La incógnita es la potencia disipada en el resistor al que está conectada la batería. La situación es la misma que la del ejemplo 25.8, pero con un valor mayor de la resistencia externa R.

EJECUTAR: De acuerdo con la ecuación (25.18), la potencia disipada en el resistor está dada por $P = I^2R$. Tal vez se podría concluir que como R ahora tiene el doble del valor que tenía en el ejemplo 25.8, la potencia también se duplica hasta 2(16 W) = 32 W. O quizá se usaría la fórmula $P = V_{ab}{}^2/R$; la cual lo llevaría a concluir que la potencia debería ser la mitad de la del ejemplo anterior, es decir (16 W)/2 = 8 W. ¿Cuál es la respuesta correcta?

En realidad, *ambas* respuestas son *incorrectas*. La primera porque al cambiar la resistencia R, también cambia la corriente en el circuito (recuerde, una fuente de fem *no* genera la misma corriente en todas las situaciones). La segunda también es incorrecta porque la diferencia de potencial V_{ab} a través del resistor cambia cuando la corriente cambia. Para conocer la respuesta correcta, primero se calcula la corriente como se hizo en el ejemplo 25.5:

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R + r} = \frac{12\text{ V}}{8\ \Omega + 2\ \Omega} = 1.2\text{ A}$$

La mayor resistencia hace que la corriente disminuya. La diferencia de potencial a través del resistor es

$$V_{ab} = IR = (1.2\text{ A})(8\ \Omega) = 9.6\text{ V}$$

que es mayor que con el resistor de 4 Ω. Después, se calcula la potencia disipada en el resistor en cualquiera de dos formas:

$$P = I^2R = (1.2\text{ A})^2(8\ \Omega) = 12\text{ W} \quad \text{o bien,}$$
$$P = \frac{V_{ab}{}^2}{R} = \frac{(9.6\text{ V})^2}{8\ \Omega} = 12\text{ W}$$

EVALUAR: El incremento de la resistencia R ocasiona una *reducción* en la potencia de alimentación al resistor. En la expresión $P = I^2R$ es más importante la disminución de la corriente que el aumento de la resistencia; en la expresión $P = V_{ab}{}^2/R$ tiene mayor importancia el aumento en la resistencia, que el aumento de V_{ab}. Este mismo principio se aplica a las bombillas eléctricas comunes; una bombilla de 50 W tiene más resistencia que una de 100 W.

¿Podría demostrar que si se sustituye el resistor de 4 Ω por otro de 8 Ω, disminuyen en la batería tanto la razón de conversión de energía (química a eléctrica) como la razón de disipación de energía?

Ejemplo 25.10 Potencia en un cortocircuito

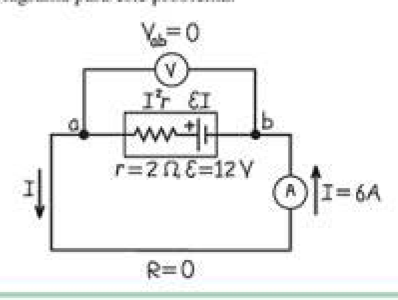


Para el cortocircuito que se analizó en el ejemplo 25.7, calcule la razón de conversión de energía y la razón de disipación de energía en la batería, así como la potencia neta de salida de la batería.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Las incógnitas son otra vez las potencias de entrada y salida asociadas con la batería. La figura 25.25 muestra el circuito. Se trata de la misma situación que la del ejemplo 25.8, pero ahora la resistencia externa R es igual a cero.

25.25 Diagrama para este problema.



EJECUTAR: En el ejemplo 25.7 se calculó que en esta situación la corriente es $I = 6$ A. De la ecuación (25.19), la razón de conversión de energía (química a eléctrica) en la batería es

$$\mathcal{E}I = (12\text{ V})(6\text{ A}) = 72\text{ W}$$

y la razón de disipación de energía en la batería es

$$I^2r = (6\text{ A})^2(2\ \Omega) = 72\text{ W}$$

La potencia neta de salida de la fuente es $\mathcal{E}I - I^2r = 0$. Se obtiene este mismo resultado con la expresión $P = V_{ab}I$, porque el voltaje terminal V_{ab} de la fuente es cero.

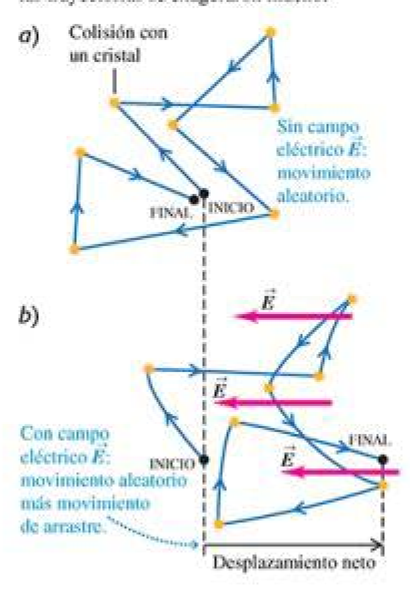
EVALUAR: Con alambres ideales y un amperímetro ideal, de manera que $R = 0$, *toda* la energía convertida por la fuente se disipa dentro de la misma. Por consiguiente, una batería en cortocircuito se estropea con rapidez y podría estallar.

Pruebe su comprensión de la sección 25.5 Ordene los siguientes circuitos según el orden decreciente de sus valores de potencia neta de salida de la batería. **i.** Un resistor de 1.4 Ω conectado a una batería de 1.5 V que tiene una resistencia interna de 0.10 Ω; **ii.** un resistor de 1.8 Ω conectado a una batería de 4.0 V con voltaje terminal de 3.6 V y resistencia interna desconocida; **iii.** un resistor desconocido conectado a una batería de 12.0 V con resistencia interna de 0.20 Ω y voltaje terminal de 11.0 V. ❙



25.6 Teoría de la conducción metálica

25.26 Movimientos aleatorios de un electrón en un cristal metálico *a*) con un campo eléctrico igual a cero, y *b*) con un campo eléctrico que produce arrastre. Las curvaturas de las trayectorias se exageraron mucho.



Podemos entender mejor el fenómeno de la conducción eléctrica analizando, a nivel microscópico, el origen de la conductividad. Consideremos un modelo muy sencillo que trata los electrones como partículas clásicas e ignora su comportamiento mecánico-cuántico en los sólidos. Con este modelo, obtendremos una expresión para la resistividad de un metal. Aun cuando este modelo no sea del todo correcto, sirve para desarrollar una idea intuitiva acerca de los fundamentos microscópicos de la conducción.

En el modelo microscópico más sencillo de la conducción en un metal, cada átomo del cristal metálico cede uno o más de sus electrones externos. Luego, estos electrones quedan en libertad para moverse a través del cristal y colisionan de manera recurrente con los iones estacionarios positivos. El movimiento de los electrones es parecido al de las moléculas de un gas que se mueven a través de un lecho poroso de arena.

Si no hay campo eléctrico, los electrones se mueven en línea recta entre las colisiones, las direcciones de sus velocidades son aleatorias y, en promedio, nunca llegan a ninguna parte (figura 25.26*a*). Sin embargo, cuando hay un campo eléctrico, las trayectorias se curvan ligeramente debido a la aceleración originada por las fuerzas del campo eléctrico. La figura 25.26*b* muestra unas cuantas trayectorias de un electrón, en un campo eléctrico, dirigido de derecha a izquierda. Como se indicó en la sección 25.1, la rapidez media del movimiento aleatorio es del orden de 10^6 m/s, en tanto que la rapidez media de arrastre es *mucho* menor, del orden de 10^{-4} m/s. El tiempo promedio entre las colisiones se denomina **tiempo libre medio**, y se denota con τ. La figura 25.27 muestra una analogía mecánica de este movimiento de electrones.

A partir de este modelo se obtendrá una expresión para la resistividad ρ de un material, definido por la ecuación (25.5):

$$\rho = \frac{E}{J} \qquad (25.21)$$

donde E y J son las magnitudes del campo eléctrico y la densidad de corriente, respectivamente. La densidad de corriente $\vec{J}$ a su vez está dada por la ecuación (25.4):

$$\vec{J} = nq\vec{v}_d \qquad (25.22)$$

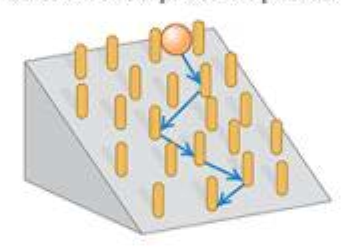


PhET: Conductivity

donde n es el número de electrones libres por unidad de volumen, $q = -e$ es la carga de cada uno y $\vec{v}_d$ es su velocidad media de arrastre.

Es necesario relacionar la velocidad de arrastre $\vec{v}_d$ con el campo eléctrico $\vec{E}$. El valor de $\vec{v}_d$ está determinado por una condición de estado estable en el cual, en promedio, las *ganancias* de velocidad de las cargas debidas a la fuerza del campo $\vec{E}$ se equilibran exactamente con las *pérdidas* de velocidad debidas a las colisiones. Para aclarar este proceso, imaginemos que se ponen en marcha los dos efectos, uno a la vez. Suponga que antes del instante $t = 0$ no existe el campo. Así, el movimiento de los electrones es completamente aleatorio. Un electrón común tiene velocidad $\vec{v}_0$ en el instante $t = 0$, y el valor de $\vec{v}_0$ promediado con respecto a muchos electrones (es decir, la velocidad inicial de un electrón promedio) es igual a cero: $(\vec{v}_0)_{med} = \mathbf{0}$. Así, en el instante $t = 0$, activamos un campo eléctrico constante $\vec{E}$. El campo ejerce una fuerza $\vec{F} = q\vec{E}$ sobre cada carga, ocasionando así una aceleración $\vec{a}$ en dirección de la fuerza que está dada por

25.27 El movimiento de una bola que rueda por un plano inclinado, y rebota en los postes que encuentra en su camino, es similar al movimiento de un electrón en un conductor metálico con un campo eléctrico presente.



$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} = \frac{q\vec{E}}{m}$$

donde m es la masa del electrón. *Todos* los electrones tienen esta aceleración.

Esperamos un tiempo τ, el tiempo medio entre colisiones y, en seguida, "ponemos en marcha" las colisiones. Un electrón que en el instante $t = 0$ tiene velocidad $\vec{v}_0$ en el tiempo t tendrá una velocidad

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}\tau$$

La velocidad $\vec{v}_{\text{med}}$ de un electrón *promedio* en ese momento es la suma de los promedios de los dos términos de la derecha. Como hemos visto, la velocidad inicial $\vec{v}_0$ es igual a cero para un electrón promedio, por lo que

$$\vec{v}_{\text{med}} = \vec{a}\tau = \frac{q\tau}{m}\vec{E} \qquad (25.23)$$

Después del tiempo $t = \tau$, la tendencia de las colisiones a disminuir la velocidad de un electrón promedio (con colisiones aleatorias) equilibra con exactitud la tendencia del campo $\vec{E}$ a incrementar su velocidad. Entonces, la velocidad de un electrón promedio, dada por la ecuación (25.23), se mantiene con el tiempo y es igual a la velocidad de arrastre $\vec{v}_{\text{d}}$:

$$\vec{v}_{\text{d}} = \frac{q\tau}{m}\vec{E}$$

Ahora, se sustituye esta ecuación para la velocidad de arrastre $\vec{v}_{\text{d}}$ en la ecuación (25.22):

$$\vec{J} = nq\vec{v}_{\text{d}} = \frac{nq^2\tau}{m}\vec{E}$$

Al comparar esta ecuación con la ecuación (25.21), que puede rescribirse como $\vec{J} = \vec{E}/\rho$, y al sustituir $q = -e$ para un electrón, se observa que la resistividad ρ está dada por

$$\rho = \frac{m}{ne^2\tau} \qquad (25.24)$$

Si n y τ son independientes de $\vec{E}$, entonces, la resistividad es independiente de $\vec{E}$ y el material conductor cumple la ley de Ohm.

Quizá parezca artificial iniciar las interacciones una a la vez, pero el resultado sería el mismo si cada electrón tuviera su propio reloj y los tiempos $t = 0$ fueran diferentes para electrones distintos. Si τ es el tiempo promedio entre las colisiones, entonces $\vec{v}_{\text{d}}$ aún es la velocidad media de arrastre de los electrones, aun cuando los movimientos de estos no estén correlacionados en realidad de la manera en que se postuló.

¿Qué sucede con la dependencia que tiene la resistividad de la temperatura? En un cristal perfecto sin átomos fuera de su lugar, un análisis mecánico-cuántico correcto supondría que los electrones libres se mueven a través del cristal sin ninguna colisión. No obstante, los átomos vibran en torno a sus posiciones de equilibrio. Conforme la temperatura se incrementa, las amplitudes de esas vibraciones aumentan, las colisiones se hacen más frecuentes y el tiempo libre medio τ disminuye. Por lo tanto, esta teoría predice que la resistividad de un metal aumenta con la temperatura. En general, en un superconductor no hay colisiones inelásticas, τ es infinita y la resistividad ρ es igual a cero.

En un semiconductor puro como el silicio o el germanio, el número de portadores de carga por unidad de volumen, n, no es constante, sino que se incrementa con mucha rapidez conforme aumenta la temperatura. Este incremento de n supera con creces la reducción del tiempo libre medio, mientras que en un semiconductor la resistividad siempre disminuye con rapidez al aumentar la temperatura. A temperaturas bajas, n es muy pequeña, y la resistividad se vuelve tan grande que el material se considera aislante.

Los electrones ganan energía entre las colisiones gracias al trabajo que el campo eléctrico realiza sobre ellos. Durante las colisiones, transfieren algo de esta energía a los átomos del material del conductor. Esto lleva a un aumento de la energía interna y la temperatura del material; esa es la causa por la cual los alambres que conducen corriente se calientan. Si el campo eléctrico en el material es suficientemente grande, un electrón puede ganar energía suficiente entre las colisiones para desprender electrones que normalmente están ligados a los átomos del material. Después, los electrones así lanzados pueden desprender a la vez otros electrones, y así sucesivamente, lo que desata una avalancha de corriente. Esta es la explicación de la rotura del dieléctrico en los aislantes (véase la sección 24.4).

Ejemplo 25.11 Tiempo libre medio del cobre

Calcule el tiempo libre medio entre las colisiones en el cobre a temperatura ambiente.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Es posible obtener una expresión para el tiempo libre medio τ en términos de n, ρ, e y m, si se reacomoda la ecuación (25.24). Del ejemplo 25.1 y la tabla 25.1, se sabe que para el cobre $n = 8.5 \times 10^{28}\ \text{m}^{-3}$ y $\rho = 1.72 \times 10^{-8}\ \Omega \cdot \text{m}$. Asimismo, $e = 1.60 \times 10^{-19}$ C y $m = 9.11 \times 10^{-31}$ kg para los electrones.

EJECUTAR: De la ecuación (25.24),

$$\tau = \frac{m}{ne^2\rho}$$

$$= \frac{9.11 \times 10^{-31}\ \text{kg}}{(8.5 \times 10^{28}\ \text{m}^{-3})(1.60 \times 10^{-19}\ \text{C})^2(1.72 \times 10^{-8}\ \Omega \cdot \text{m})}$$

$$= 2.4 \times 10^{-14}\ \text{s}$$

EVALUAR: El tiempo libre medio es el tiempo promedio entre colisiones para un electrón determinado. Al tomar el recíproco de este tiempo, se encuentra que cada electrón experimenta en promedio ¡$1/\tau = 4.2 \times 10^{13}$ colisiones cada segundo!

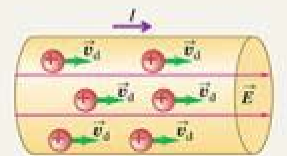
Evalúe su comprensión de la sección 25.6 ¿Cuál de los siguientes factores, al incrementarse, hará que sea más difícil producir cierta cantidad de corriente en un conductor? (Puede haber más de una respuesta correcta). **i.** La masa de las partículas con carga en movimiento en el conductor; **ii.** el número de partículas con carga en movimiento por metro cúbico; **iii.** la cantidad de carga en cada partícula en movimiento; **iv.** el tiempo medio entre las colisiones para una partícula cualquiera con carga y en movimiento.



Corriente y densidad de corriente: Corriente es la cantidad de carga que fluye a través de un área específica, por unidad de tiempo. La unidad del SI para la corriente es el ampere (1 A = 1 C/s). La corriente I a través de un área A depende de la concentración n y la carga q de los portadores de carga, así como de la magnitud de su velocidad de arrastre $\vec{v}_d$. La densidad de corriente es la corriente por unidad de área de la sección transversal. La corriente se describe convencionalmente en términos de un flujo de carga positiva, aun cuando los portadores de carga real sean negativos o de ambos signos. (Véase el ejemplo 25.1).

$$I = \frac{dQ}{dt} = n|q|v_d A \quad (25.2)$$

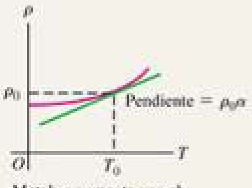
$$\vec{J} = nq\vec{v}_d \quad (25.4)$$



Resistividad: La resistividad ρ de un material es el cociente de las magnitudes del campo eléctrico y la densidad de corriente. Los buenos conductores tienen poca resistividad; los buenos aislantes tienen alta resistividad. La ley de Ohm, que cumplen de forma aproximada muchos materiales, establece que ρ es una constante independiente del valor de E. La resistividad por lo general se incrementa con la temperatura; para cambios pequeños de temperatura, esta variación queda representada aproximadamente por la ecuación (25.6), donde α es el coeficiente de temperatura de la resistividad.

$$\rho = \frac{E}{J} \quad (25.5)$$

$$\rho(T) = \rho_0[1 + \alpha(T - T_0)] \quad (25.6)$$

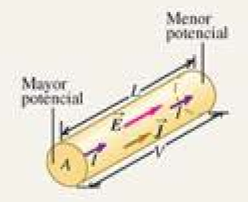


Metal: ρ aumenta con el incremento de T.

Resistores: La diferencia de potencial V a través de una muestra de material que cumple la ley de Ohm es proporcional a la corriente I a través de la muestra. La razón $V/I = R$ es la resistencia de la muestra. La unidad del SI para la resistencia es el ohm (1 Ω = 1 V/A). La resistencia de un conductor cilíndrico se relaciona con su resistividad ρ, longitud L y área de sección transversal A. (Véase los ejemplos 25.2 y 25.3).

$$V = IR \quad (25.11)$$

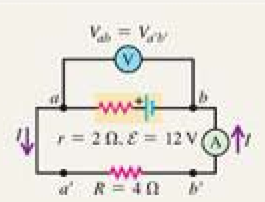
$$R = \frac{\rho L}{A} \quad (25.10)$$



Circuitos y fem: Un circuito completo tiene una trayectoria continua por la que circula corriente. Un circuito completo que lleva una corriente constante debe contener una fuente de fuerza electromotriz (fem) $\mathcal{E}$. La unidad del SI para la fuerza electromotriz es el volt (1 V). Cualquier fuente real de fem tiene, en cierta medida, una resistencia interna r, por consiguiente, la diferencia de potencial terminal V_{ab} depende de la corriente. (Véase los ejemplos 25.4 a 25.7).

$$V_{ab} = \mathcal{E} - Ir \quad (25.15)$$

(fuente con resistencia interna)



Energía y potencia en los circuitos: Un elemento de circuito con diferencia de potencial $V_a - V_b = V_{ab}$ y corriente I introduce energía al circuito, cuando la dirección de la corriente es del menor potencial al mayor en el dispositivo, y extrae energía del circuito si la corriente es la opuesta. La potencia P es igual al producto de la diferencia de potencial por la corriente. Un resistor siempre extrae energía eléctrica de un circuito. (Véase los ejemplos 25.8 a 25.10).

$$P = V_{ab}I \quad (25.17)$$

(elemento general de circuito)

$$P = V_{ab}I = I^2R = \frac{V_{ab}{}^2}{R} \quad (25.18)$$

(potencia que entra en un resistor)



Conducción en los metales: Los fundamentos microscópicos de la conducción en los metales es el movimiento de los electrones que se desplazan con libertad por el cristal metálico, rebotando con los núcleos iónicos del cristal. En un modelo clásico aproximado de este movimiento, la resistividad del material se relaciona con la masa y la carga del electrón, la rapidez del movimiento aleatorio y la densidad de los electrones, y el tiempo libre medio entre las colisiones. (Véase el ejemplo 25.11).





PROBLEMA PRÁCTICO **Resistividad, temperatura y potencia**

Un tostador que usa un elemento calefactor de nicromo opera a 120 V. Cuando funciona a 20°C, el elemento calefactor conduce una corriente inicial de 1.35 A. Algunos segundos después, la corriente alcanza un valor estable de 1.23 A. *a*) ¿Cuál es la temperatura final del elemento? El valor medio del coeficiente de temperatura de la resistividad para el nicromo en el intervalo de temperatura es de 4.5×10^{-4} $(C°)^{-1}$. *b*) ¿Cuál es la potencia que se disipa en el elemento calefactor al inicio y cuando la corriente alcanza un valor de 1.23 A?

GUÍA DE SOLUCIÓN

Véase el área de estudio MasteringPhysics® para consultar una solución con Video Tutor



IDENTIFICAR y PLANTEAR

1. El elemento calefactor actúa como un resistor que convierte energía eléctrica en energía térmica. La resistividad ρ del nicromo depende de la temperatura y, por lo tanto, de la resistencia $R = \rho L/A$ del elemento calefactor y de la corriente $I = V/R$ que transporta.
2. Se proporcionan $V = 120$ V y los valores inicial y final de I. Elija una ecuación que le permita obtener los valores inicial y final de la resistencia, así como una ecuación que relacione la resistencia con la temperatura [la incógnita del inciso *a*)].
3. La potencia disipada P en el elemento calefactor depende de I y V. Elija una ecuación que le permita calcular los valores inicial y final de P.

EJECUTAR

4. Combine las ecuaciones del paso 2 para obtener una relación entre los valores inicial y final de I y las temperaturas inicial y final (20°C y T_{final}).
5. Resuelva la expresión del paso 4 despejando T_{final}.
6. Use la ecuación del paso 3 para determinar las potencias inicial y final.

EVALUAR

7. ¿La temperatura final es mayor o menor que 20°C? ¿Esto es lógico?
8. ¿La resistencia final es mayor o menor que la resistencia inicial? Nuevamente, ¿esto es lógico?
9. ¿La potencia final es mayor o menor que la potencia inicial? ¿Es congruente esto con las observaciones del paso 8?

Problemas

Para tareas asignadas por el profesor, visite www.masteringphysics.com



•, ••, •••: Problemas de dificultad creciente. **PA**: Problemas acumulativos que incorporan material de capítulos anteriores. **CALC**: Problemas que requieren cálculo. **BIO**: Problemas de ciencias biológicas.

PREGUNTAS PARA ANÁLISIS

P25.1 La definición de resistividad ($\rho = E/J$) implica que existe un campo eléctrico dentro de un conductor. Pero en el capítulo 21 vimos que en el interior de un conductor no puede haber ningún campo eléctrico. ¿Hay alguna contradicción aquí? Explique su respuesta.

P25.2 Una varilla cilíndrica tiene una resistencia R. Si su longitud y diámetro se triplican, ¿cuál será su resistencia en términos de R?

P25.3 Una varilla cilíndrica tiene una resistividad ρ. Si su longitud y diámetro se triplican, ¿cuál será su resistividad en términos de ρ?

P25.4 Dos alambres de cobre con diferentes diámetros se unen extremo con extremo. Si una corriente fluye por la combinación de alambres, ¿qué sucede con los electrones cuando se mueven del alambre de mayor diámetro al de menor diámetro? ¿Su rapidez de arrastre aumenta, disminuye o permanece igual? Si la rapidez de arrastre cambia, ¿cuál es la fuerza que provoca el cambio? Explique su razonamiento.

P25.5 ¿Cuándo una batería AAA de 1.5 V *no* es realmente de 1.5 V? Es decir, ¿cuándo sus terminales generan una diferencia de potencial menor de 1.5 V?

P25.6 ¿La diferencia de potencial entre las terminales de una batería puede alguna vez estar en dirección opuesta a la fem? Si es así, dé un ejemplo. Si no, explique por qué.

P25.7 Una regla práctica que se utiliza para determinar la resistencia interna de una fuente es que esta es igual al resultado de dividir el voltaje del circuito abierto entre la corriente de cortocircuito. ¿Esto es cierto? ¿Por qué?

P25.8 Las baterías siempre tienen etiquetada su fem; por ejemplo, una batería de tamaño AA para linterna indica "1.5 volts". ¿Sería adecuado etiquetar también la corriente que generan? ¿Por qué?

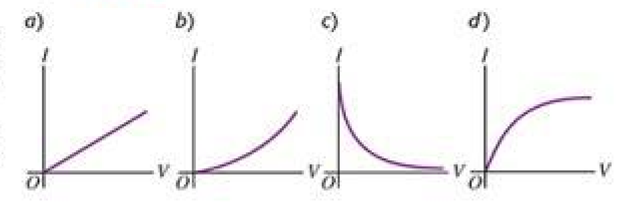
P25.9 Hemos visto que un coulomb es una cantidad de carga enorme; es prácticamente imposible colocar una carga de 1 C en un objeto. Sin embargo, una corriente de 10 A, o 10 C/s, es muy razonable. Explique esta aparente discrepancia.

P25.10 Los electrones en un circuito eléctrico pasan a través de un resistor. El alambre de cada lado del resistor tiene el mismo diámetro. *a*) ¿Cómo es la rapidez de arrastre de los electrones antes de que entren al resistor, en comparación con la rapidez que tienen al salir de este? Explique su razonamiento. *b*) ¿Cómo es la energía potencial de un electrón antes de entrar en el resistor, en comparación con la que tiene después de salir del resistor? Explique su razonamiento.

P25.11 La corriente ocasiona que la temperatura de un resistor real se incremente. ¿Por qué? ¿Qué efecto tiene este calentamiento sobre la resistencia? Explique.

P25.12 ¿Cuál de las gráficas que aparecen en la figura P25.12 ilustra mejor la corriente I en un resistor real en función de la diferencia de potencial V a través de este? Explique. (*Sugerencia:* Vea la pregunta para análisis P25.11).

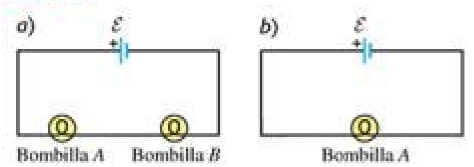
Figura **P25.12**



P25.13 ¿Por qué una bombilla eléctrica casi siempre se funde en el momento de encender la luz, y rara vez mientras ya está encendida?

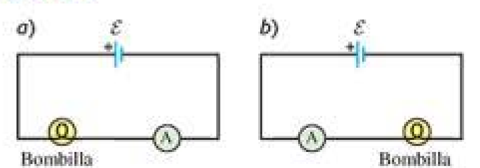
P25.14 Una bombilla brilla porque tiene resistencia; su brillo aumenta con la potencia eléctrica que disipa. *a*) En el circuito que se ilustra en la figura P25.14*a*, las dos bombillas *A* y *B* son idénticas. En comparación con la bombilla *A*, ¿la bombilla *B* brilla más, igual o menos? Explique su razonamiento. *b*) Se retira la bombilla *B* del circuito y este se completa como se ilustra en la figura P25.14*b*. En comparación con el brillo de la bombilla *A* de la figura P25.14*a*, ¿ahora la bombilla *A* brilla más, igual o menos? Explique su razonamiento.

Figura **P25.14**



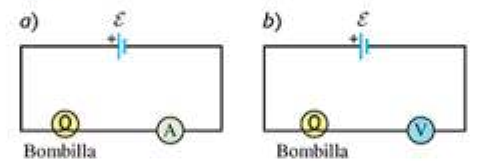
P25.15 (Véase la pregunta para análisis P25.14). En un circuito se colocan un amperímetro ideal *A*, una batería y una bombilla, como se ilustra en la figura P25.15*a*, y se anota la lectura del amperímetro. Después, el circuito se vuelve a conectar como en la figura P25.15*b*, de manera que las posiciones del amperímetro y la bombilla se invierten. *a*) ¿Cómo se compara la lectura del amperímetro en la situación que se ilustra en la figura P25.15*a* con la lectura de la figura P25.15*b*? Explique su razonamiento. *b*) ¿En qué situación brilla más la bombilla? Explique su razonamiento.

Figura **P25.15**



P25.16 (Véase la pregunta para análisis P25.14). ¿Brillará más una bombilla cuando se conecta a una batería como se indica en la figura P25.16*a*, con un amperímetro ideal *A* colocado en el circuito, o cuando se conecta como se ilustra en la figura P25.16*b*, con un voltímetro ideal *V* colocado en el circuito? Explique su razonamiento.

Figura **P25.16**



P25.17 La energía que se puede extraer de una batería de almacenamiento siempre es menor que la que entra cuando se carga. ¿Por qué?

P25.18 Ocho baterías de linterna en serie tienen una fem aproximada de 12 V, como la de la batería de un automóvil. ¿Servirían para poner en marcha un vehículo cuya batería está sin carga? ¿Por qué?

P25.19 Es frecuente que los aviones pequeños tengan sistemas eléctricos de 24 V y no de 12 V como los automóviles, aun cuando los requerimientos de potencia eléctrica sean aproximadamente los mismos para ambos tipos de transporte. La explicación que dan los diseñadores de aeronaves es que un sistema de 24 V pesa menos que otro de 12 V, porque en aquel pueden usarse alambres más delgados. Explique por qué.

P25.20 Las líneas de transmisión de potencia eléctrica de larga distancia siempre operan con un voltaje muy elevado, en ocasiones de hasta 750 kV. ¿Cuáles son las ventajas y desventajas de esos voltajes altos?

P25.21 Es común que las líneas eléctricas domésticas en Norteamérica operen usualmente con 120 V. ¿Por qué es deseable este voltaje en vez de otro considerablemente mayor o menor? Por otro lado, los automóviles generalmente tienen sistemas eléctricos de 12 V. ¿Por qué es conveniente ese voltaje?

P25.22 Un fusible es un dispositivo diseñado para interrumpir un circuito eléctrico, por lo general haciendo que se funda cuando la corriente supera cierto valor. ¿Qué características debería tener el material del fusible?

P25.23 Las fuentes de potencia de alto voltaje en ocasiones se diseñan con la intención de que tengan una resistencia interna elevada, como medida de seguridad. ¿Por qué es más segura una fuente de poder con una gran resistencia interna, que una con el mismo voltaje pero con menor resistencia interna?

P25.24 En el libro se afirma que los buenos conductores térmicos también son buenos conductores eléctricos. Si es así, ¿por qué los cables que se utilizan para conectar tostadores, planchas y otros aparatos que producen calor, no se calientan por conducir el calor que genera el elemento calefactor?

EJERCICIOS

Sección 25.1 Corriente eléctrica

25.1 • **Descargas eléctricas.** Durante las descargas eléctricas de una nube al suelo, se presentan corrientes hasta de 25,000 A, con una duración de 40 μs aproximadamente. ¿Qué cantidad de carga se transfiere de la nube al suelo durante este evento?

25.2 • Un alambre de plata de 2.6 mm de diámetro transfiere una carga de 420 C en 80 min. La plata contiene 5.8×10^{28} electrones libres por metro cúbico. *a*) ¿Cuál es la corriente en el alambre? *b*) ¿Cuál es la magnitud de la velocidad de arrastre de los electrones en el alambre?

25.3 • Una corriente de 5.00 A corre a través de un alambre de cobre de calibre 12 (diámetro de 2.05 mm) y de una bombilla. El cobre tiene 8.5×10^{28} electrones libres por metro cúbico. *a*) ¿Cuántos electrones pasan por la bombilla cada segundo? *b*) ¿Cuál es la densidad de corriente en el alambre? *c*) ¿Con qué rapidez un electrón común pasa por un punto dado del alambre? *d*) Si se usara un alambre con el doble del diámetro, ¿cuáles de las respuestas anteriores cambiarían? ¿Los valores aumentarían o disminuirían?

25.4 • Un alambre de cobre de calibre 18 (diámetro de 1.02 mm) transporta una corriente con densidad de 1.50×10^6 A/m^2. El cobre tiene 8.5×10^{28} electrones libres por metro cúbico. Calcule *a*) la corriente en el alambre y *b*) la velocidad de arrastre de los electrones en el alambre.

25.5 •• El cobre tiene 8.5×10^{28} electrones libres por metro cúbico. Un alambre de cobre calibre 12, con 2.05 mm de diámetro y longitud de 71.0 cm, conduce 4.85 A de corriente. *a*) ¿Cuánto tiempo se requiere para que un electrón recorra la longitud del alambre? *b*) Repita el inciso *a*) para un alambre de cobre de calibre 6 (diámetro de 4.12 mm) de la misma longitud y que conduce la misma corriente. *c*) En general, ¿cómo afecta a la velocidad de arrastre de los electrones del alambre, el cambio del diámetro de un alambre que transporta una cantidad dada de corriente?

25.6 • Considere el alambre de calibre 18 del ejemplo 25.1. ¿Cuántos átomos hay en 1.00 m^3 de cobre? Con la densidad de los electrones libres dada en ese ejemplo, ¿cuántos electrones libres hay por átomo de cobre?

25.7 • **CALC** La corriente en un alambre varía con el tiempo de acuerdo con la relación $I = 55\ \text{A} - (0.65\ \text{A/s}^2)t^2$. *a)* ¿Cuántos coulombs de carga cruzan la sección transversal del alambre en el intervalo de tiempo entre $t = 0$ s y $t = 8.0$ s? *b)* ¿Qué corriente constante transportaría la misma carga en el mismo intervalo de tiempo?

25.8 • Una corriente pasa a través de una solución de cloruro de sodio. En 1.00 s, llegan al electrodo negativo 2.68×10^{16} iones de Na^+; y al electrodo positivo, 3.92×10^{16} iones de Cl^-. *a)* ¿Cuál es la corriente que pasa entre los electrodos? *b)* ¿Cuál es la dirección de la corriente?

25.9 • **BIO** **Transmisión de impulsos nerviosos.** Las células nerviosas transmiten señales eléctricas a través de sus axones tubulares largos. Estas señales se propagan debido a una ráfaga repentina de iones Na^+, cada uno con una carga $+e$, en el axón. Las mediciones han revelado que normalmente entran al axón aproximadamente 5.6×10^{11} iones Na^+ por metro, durante 10 ms. ¿Cuál es la corriente durante este ingreso de carga en un metro de axón?

Sección 25.2 Resistividad y sección 25.3 Resistencia

25.10 • *a)* A temperatura ambiente, ¿cuál es la intensidad del campo eléctrico que se necesita generar en un alambre de cobre calibre 12 (2.05 mm de diámetro) para que fluya una corriente de 2.75 A? *b)* ¿Y qué campo sería necesario si el alambre estuviera hecho de plata?

25.11 •• Una varilla cilíndrica de 1.50 m de largo y 0.500 cm de diámetro se conecta a una fuente de poder que mantiene una diferencia de potencial constante de 15.0 V entre sus extremos, en tanto que un amperímetro mide la corriente que la cruza. Se observa que a temperatura ambiente (20.0°C) el amperímetro da una lectura de 18.5 A, mientras que a 92.0°C arroja una lectura de 17.2 A. Se puede ignorar la expansión térmica de la varilla. Calcule *a)* la resistividad a 20°C y *b)* el coeficiente de temperatura de la resistividad a 20°C para el material de la varilla.

25.12 • Un alambre de cobre tiene una sección transversal cuadrada de 2.3 mm por lado. El alambre mide 4.0 m de longitud y conduce una corriente de 3.6 A. La densidad de los electrones libres es de $8.5 \times 10^{28}/\text{m}^3$. Calcule las magnitudes de *a)* la densidad de la corriente en el alambre y *b)* el campo eléctrico en el alambre. *c)* ¿Cuánto tiempo se requiere para que un electrón recorra la longitud del alambre?

25.13 • Un alambre de cobre calibre 14 que tiene un diámetro de 1.628 mm transporta una corriente de 12.5 mA. *a)* ¿Cuál es la diferencia de potencial a través de la longitud de 2.00 m del alambre? *b)* ¿Cuál sería la diferencia de potencial del inciso *a)*, si el alambre fuera de plata en vez de cobre, y todo lo demás permaneciera igual?

25.14 •• Un alambre de 6.50 m de largo y 2.05 mm de diámetro tiene una resistencia de 0.0290 Ω. ¿De qué material es probable que esté hecho el alambre?

25.15 •• Un filamento cilíndrico de tungsteno de 15.0 cm de largo y 1.00 mm de diámetro va a utilizarse en una máquina cuya temperatura de operación variará entre la temperatura ambiente (20°C) y 120°C. Conducirá una corriente de 12.5 A en todas las temperaturas (consulte las tablas 25.1 y 25.2). *a)* ¿Cuál será el campo eléctrico máximo en este filamento?, y *b)* ¿cuál será su resistencia con ese campo? *c)* ¿Cuál será la máxima caída de potencial a todo lo largo del filamento?

25.16 •• Un alambre de metal dúctil tiene una resistencia R. ¿Cuál será la resistencia de este alambre en términos de R si se estira hasta el triple de su longitud original, suponiendo que la densidad y la resistividad del material no cambian cuando se estira? (*Sugerencia:* La cantidad de metal no cambia, de modo que el estiramiento solo afecta el área de la sección transversal).

25.17 • Es frecuente que en las instalaciones eléctricas domésticas se utilice alambre de cobre de 2.05 mm de diámetro. Determine la resistencia de un alambre de ese tipo con una longitud de 24.0 m.

25.18 •• ¿Qué diámetro debe tener un alambre de cobre, si su resistencia tiene que ser la misma que la de uno de aluminio con la misma longitud y diámetro de 3.26 mm?

25.19 • Se necesita producir un conjunto de alambres de cobre cilíndricos de 3.50 m de largo con una resistencia de 0.125 Ω cada uno. ¿Cuál será la masa de cada alambre?

25.20 • Un resorte muy apretado con 75 vueltas, cada una de 3.50 cm de diámetro, está hecho de alambre metálico aislado de 3.25 mm de diámetro. Un óhmetro conectado en sus extremos da una lectura de 1.74 Ω. ¿Cuál es la resistividad del metal?

25.21 • Un cubo de aluminio tiene lados cuya longitud es de 1.80 m. ¿Cuál es la resistencia entre dos de las caras opuestas del cubo?

25.22 • Se aplica una diferencia de potencial de 4.50 V entre los extremos de un alambre de 2.50 m de longitud y 0.654 mm de radio. La corriente resultante a través del alambre es de 17.6 A. ¿Cuál es la resistividad del alambre?

25.23 • Un alambre de oro con 0.84 mm de diámetro conduce una corriente eléctrica. El campo eléctrico en el alambre es de 0.49 V/m. ¿Cuáles son *a)* la corriente que conduce el alambre, *b)* la diferencia de potencial entre dos puntos del alambre separados por una distancia de 6.4 m y *c)* la resistencia de un trozo de ese alambre con 6.4 m de longitud?

25.24 • Un cilindro hueco de aluminio mide 2.50 m de largo y tiene un radio interior de 3.20 cm y un radio exterior de 4.60 cm. Considere cada superficie (interna, externa y las dos caras de los extremos) como equipotenciales. A temperatura ambiente, ¿cuál será la lectura de un óhmetro, si se conecta entre *a)* las caras opuestas, y *b)* las superficies interior y exterior?

25.25 • *a)* ¿Cuál es la resistencia de un alambre de nicromo a 0.0°C si su resistencia es de 100.00 Ω a 11.5°C? *b)* ¿Cuál es la resistencia de una varilla de carbono a 25.8°C, si su resistencia es de 0.0160 Ω a 0.0°C?

25.26 • Se va a utilizar un resistor de carbono como termómetro. En un día de invierno cuando la temperatura es de 4.0°C, la resistencia del resistor de carbono es de 217.3 Ω. ¿Cuál es la temperatura en un día de primavera cuando la resistencia es de 215.8 Ω? (Como temperatura de referencia, tome T_0 igual a 4.0°C).

25.27 • Un hilo de alambre tiene una resistencia de 5.60 $\mu\Omega$. Calcule la resistencia neta de 120 de estos hilos, *a)* si se colocan lado a lado para formar un cable de la misma longitud como un solo hilo, y *b)* si se unen por sus extremos para formar un alambre 120 veces más largo que uno solo de los hilos.

Sección 25.4 Fuerza electromotriz y circuitos

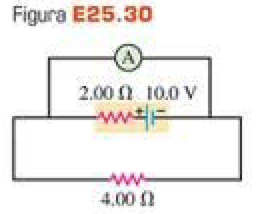
25.28 • Considere el circuito que se ilustra en la figura E25.28. El voltaje terminal de la batería de 24.0 V es de 21.2 V. ¿Cuáles son *a)* la resistencia interna r de la batería y *b)* la resistencia R del resistor en el circuito?

Figura **E25.28**

25.29 • Un cable de transmisión de cobre de 100 km de largo y 10.0 cm de diámetro transporta una corriente de 125 A. *a)* ¿Cuál es la caída de potencial a través del cable? *b)* ¿Cuánta energía eléctrica se disipa por hora en forma de energía térmica?

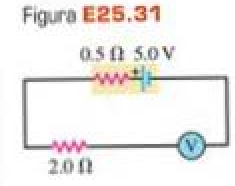
25.30 • Se conecta un amperímetro idealizado a una batería, como se ilustra en la figura E25.30. Determine *a)* la lectura del amperímetro, *b)* la corriente a través del resistor de 4.00 Ω y *c)* el voltaje terminal de la batería.

Figura **E25.30**



25.31 • Se conecta un voltímetro ideal V a un resistor de 2.0 Ω, a una batería con una fem de 5.0 V y a una resistencia interna de 0.5 Ω, como se indica en la figura E25.31. *a*) ¿Cuál es la corriente en el resistor de 2.0 Ω? *b*) ¿Cuál es el voltaje terminal de la batería? *c*) ¿Cuál es la lectura en el voltímetro? Explique sus respuestas.

Figura **E25.31**

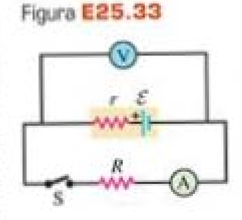


25.32 • El circuito que se ilustra en la figura E25.32 incluye dos baterías, cada una con fem y resistencia interna, y dos resistores. Determine *a*) la corriente en el circuito (magnitud *y* dirección); *b*) el voltaje terminal V_{ab} de la batería de 16.0 V; *c*) la diferencia de potencial V_{ac} del punto *a* con respecto al punto *c*. *d*) Con base en la figura 25.20 como modelo, elabore la gráfica de los aumentos y las caídas del potencial en este circuito.

Figura **E25.32**

25.33 • Cuando se abre el interruptor S de la figura E25.33, el voltímetro V de la batería da una lectura de 3.08 V. Cuando se cierra el interruptor, la lectura del voltímetro cae a 2.97 V, y la del amperímetro A es de 1.65 A. Determine la fem, la resistencia interna de la batería y la resistencia *R* del circuito. Suponga que los dos instrumentos son ideales, por lo que no afectan el circuito.

Figura **E25.33**



25.34 • En el circuito de la figura E25.32, el resistor de 5.0 Ω se sustituye por otro de resistencia *R* desconocida. Cuando se hace esto, se conecta un voltímetro ideal entre los puntos *b* y *c*, cuya lectura es de 1.9 V. Calcule *a*) la corriente en el circuito y *b*) la resistencia *R*. *c*) Grafique los aumentos y las caídas de potencial en este circuito (véase la figura 25.20).

25.35 • En el circuito que se ilustra en la figura E25.32, la batería de 16.0 V se retira y se vuelve a instalar con la polaridad invertida, de manera que ahora su terminal negativa está cerca del punto *a*. Calcule *a*) la corriente en el circuito (magnitud *y* dirección); *b*) el voltaje terminal V_{ab} de la batería de 16.0 V; *c*) la diferencia de potencial V_{ac} del punto *a* con respecto al punto *c*. *d*) Elabore la gráfica de los aumentos y las caídas del potencial en este circuito (véase la figura 25.20).

25.36 • Se realizaron las siguientes mediciones en un resistor de *thyrite* (resistor no lineal hecho a base de carburo de silicio):

I **(A)**	0.50	1.00	2.00	4.00
V_{ab} **(V)**	2.55	3.11	3.77	4.58

a) Grafique V_{ab} como función de *I*. *b*) ¿El *thyrite* cumple la ley de Ohm? ¿Cómo podría saberse? *c*) Elabore la gráfica de la resistencia $R = V_{ab}/I$ como función de *I*.

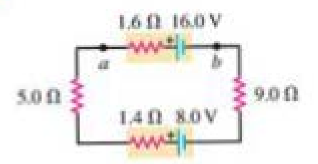
25.37 • Se realizaron las siguientes mediciones de corriente y diferencia de potencial en un resistor hecho con alambre de nicromo:

I **(A)**	0.50	1.00	2.00	4.00
V_{ab} **(V)**	1.94	3.88	7.76	15.52

a) Grafique V_{ab} en función de *I*. *b*) ¿El nicromo cumple la ley de Ohm? ¿Cómo se puede saber? *c*) ¿Cuál es la resistencia del resistor en ohms?

25.38 •• El circuito de la figura E25.38 tiene dos baterías, cada una con una fem y una resistencia interna, y dos resistores. Calcule *a*) la corriente en el circuito (magnitud y dirección) y *b*) el voltaje terminal V_{ab} de la batería de 16.0 V.

Figura **E25.38**



Sección 25.5 Energía y potencia en circuitos eléctricos

25.39 • **Bombillas eléctricas.** La especificación de la potencia de una bombilla eléctrica (como las comunes de 100 W) es la potencia que disipa cuando se conecta a través de una diferencia de potencial de 120 V. ¿Cuál es la resistencia de *a*) una bombilla de 100 W y *b*) una bombilla de 60 W? *c*) ¿Cuánta corriente consume cada tipo de bombilla en su uso normal?

25.40 • Si se conecta una bombilla eléctrica de "75 W" (véase el problema 25.39) a través de una diferencia de potencial de 220 V (como se acostumbra en Europa), ¿cuánta potencia disipa?

25.41 • **Bombilla eléctrica europea.** En Europa el voltaje estándar doméstico es de 220 V y no de 120 V, como en Estados Unidos. Por consiguiente, se entiende que una bombilla europea de "100 W" se usaría con una diferencia de potencial de 220 V (véase el problema 25.40). *a*) Si se lleva una bombilla europea de "100 W" a una vivienda estadounidense, ¿cuál debería ser su especificación de potencia en Estados Unidos? *b*) ¿Cuánta corriente consumiría la bombilla europea de 100 W al usarse normalmente en Estados Unidos?

25.42 • El receptor de un sistema de posicionamiento global (GPS), que funciona con baterías, opera a 9.0 V y toma una corriente de 0.13 A. ¿Cuánta energía eléctrica consume en 1.5 h?

25.43 • Considere un resistor de longitud *L*, sección transversal *A* uniforme, y resistividad ρ uniforme, que conduce una corriente con densidad uniforme *J*. Use la ecuación (25.18) para calcular la potencia eléctrica disipada por unidad de volumen, *p*. Exprese el resultado en términos de *a*) *E* y *J*; *b*) *J* y ρ; *c*) *E* y ρ.

25.44 • BIO **Anguilas eléctricas.** Las anguilas eléctricas generan pulsos eléctricos, a lo largo de su piel, que usan para aturdir un enemigo cuando entran en contacto con él. Las pruebas han demostrado que tales pulsos pueden ser hasta de 500 V y producir corrientes de 80 mA (o incluso mayores). Un pulso normal dura 10 ms. ¿Qué potencia y cuánta energía se transmite al infortunado enemigo en un solo pulso, suponiendo una corriente constante?

25.45 • BIO **Tratamiento de enfermedades del corazón.** Cuando falla el corazón se usa un desfibrilador para intentar que reinicie su funcionamiento. Esto se hace pasando una gran corriente de 12 A y 25 V a través del cuerpo, en un tiempo muy corto, normalmente de 3.0 ms aproximadamente. *a*) ¿Qué potencia transmite el desfibrilador al cuerpo?, y *b*) ¿cuánta energía se transfiere?

25.46 • Considere el circuito de la figura E25.32. *a*) ¿Cuál es la razón total a la que se disipa la energía eléctrica en los resistores de 5.0 Ω y 9.0 Ω? *b*) ¿Cuál es la potencia de salida de la batería de 16.0 V? *c*) ¿A qué razón la energía eléctrica se convierte en otras formas en la batería de 8.0 V? *d*) Demuestre que la potencia de salida de la batería de 16.0 V es igual a la razón total de disipación de energía eléctrica en el resto del circuito.

25.47 •• La capacidad de un acumulador (batería), como los que se utilizan en los sistemas eléctricos automotrices, se especifica en amperes-hora (A·h). Un acumulador de 50 A·h puede suministrar una corriente de 50 A durante 1.0 h, o bien, de 25 A durante 2.0 h, y así sucesivamente. *a*) ¿Cuál es la energía total que puede suministrar un acumulador de 12 V y 60 A·h, si su resistencia interna es insignificante? *b*) ¿Qué volumen de gasolina (en litros) tiene un calor total de

combustión que es igual a la energía obtenida en el inciso *a*)? (Consulte la sección 17.6; la densidad de la gasolina es de 900 kg/m^3). *c*) Si un generador con potencia de salida eléctrica media de 0.45 kW se conecta al acumulador, ¿cuánto tiempo se requerirá para que el acumulador se cargue por completo?

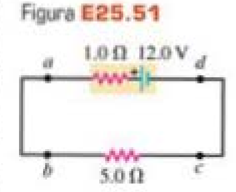
25.48 • En el circuito analizado en el ejemplo 25.8, se sustituye el resistor de 4.0 Ω por otro de 8.0 Ω, como en el ejemplo 25.9. *a*) Calcule la razón de conversión de energía química a energía eléctrica en la batería. ¿Cómo se compara su respuesta con el resultado obtenido en el ejemplo 25.8? *b*) Calcule la razón de disipación de energía eléctrica en la resistencia interna de la batería. ¿Cómo se compara su respuesta con el resultado que obtuvo en el ejemplo 25.8? *c*) Use los resultados de los incisos *a*) y *b*) para calcular la potencia de salida neta de la batería. ¿Cómo se compara el resultado con la energía eléctrica disipada en el resistor de 8.0 Ω, según se calculó para este circuito en el ejemplo 25.9?

25.49 •• Se conecta una bombilla de 25.0 Ω a las terminales de una batería de 12.0 V que tiene una resistencia interna de 3.50 Ω. ¿Qué porcentaje de la potencia de la batería se disipa a través de la resistencia interna y, por lo tanto, no está disponible para la bombilla?

25.50 • Se conecta un voltímetro ideal entre las terminales de una batería de 15.0 V, y también un dispositivo con resistencia de 75.0 Ω. Si el voltímetro da una lectura de 11.3 V: *a*) ¿cuánta potencia disipa el dispositivo y *b*) cuál es la resistencia interna de la batería?

25.51 • En el circuito de la figura E25.51, calcule *a*) la razón de conversión de la energía interna (química) a energía eléctrica dentro de la batería; *b*) la razón de disipación de energía eléctrica en la batería; *c*) la razón de disipación de energía eléctrica en el resistor externo.

Figura **E25.51**



25.52 •• Una pequeña linterna común contiene dos baterías, cada una con fem de 1.5 V, conectadas en serie con una bombilla que tiene resistencia de 17 Ω. *a*) Si la resistencia interna de las baterías es despreciable, ¿cuánta energía se entrega a la bombilla? *b*) Si las baterías duran 5.0 horas, ¿cuál es la energía total que se entrega a la bombilla? *c*) La resistencia de las baterías reales se incrementa a medida que se consumen. Si la resistencia interna inicial es despreciable, ¿cuál es la resistencia interna combinada de ambas baterías, cuando la potencia que va a la bombilla se redujo a la mitad de su valor inicial? (Suponga que la resistencia de la bombilla es constante. En realidad, cambiará algo cuando cambie la corriente que pasa por el filamento, ya que esto altera la temperatura del filamento y, por lo tanto, su resistividad).

25.53 • Un calentador eléctrico de "540 W" está diseñado para operar en líneas de 120 V. *a*) ¿Cuál es su resistencia? *b*) ¿Cuál es la corriente que toma? *c*) Si el voltaje en la línea disminuye a 110 V, ¿cuánta potencia toma el calentador? (Suponga que la resistencia es constante. La realidad es que se modificará debido al cambio de temperatura). *d*) Las bobinas del calentador son metálicas, de modo que la resistencia del calentador se reduce al disminuir la temperatura. Si se toma en cuenta el cambio de la resistencia con la temperatura, ¿la energía eléctrica consumida por el calentador será mayor o menor de lo que se calculó en el inciso *c*)? Explique su respuesta.

Sección 25.6 Teoría de la conducción metálica

25.54 •• El silicio puro contiene aproximadamente 1.0×10^{16} electrones libres por metro cúbico. *a*) Consulte la tabla 25.1 para calcular el tiempo libre medio τ del silicio a temperatura ambiente. *b*) Su respuesta para el inciso *a*) es un valor mucho mayor que el tiempo libre medio del cobre dado en el ejemplo 25.11. Entonces, ¿por qué el silicio puro tiene una resistividad tan grande en comparación con la del cobre?

PROBLEMAS

25.55 • Un conductor eléctrico diseñado para transportar corrientes grandes tiene una sección transversal circular de 2.50 mm de diámetro y 14.0 m de longitud. La resistencia entre sus extremos es de 0.104 Ω. *a*) ¿Cuál es la resistividad del material? *b*) Si la magnitud del campo eléctrico en el conductor es de 1.28 V/m, ¿cuál será la corriente total? *c*) Si el material tiene 8.5×10^{28} electrones libres por metro cúbico, calcule la rapidez de arrastre media en las condiciones descritas en el inciso *b*).

25.56 •• Un tubo de plástico de 25.0 m de longitud y 3.00 cm de diámetro se sumerge en una solución de plata, y se deposita una capa uniforme de plata de 0.100 mm de espesor sobre la superficie exterior del tubo. Si este tubo recubierto se conecta a una batería de 12.0 V, ¿cuál será la corriente?

25.57 •• En su primer día de trabajo como técnico electricista, se le pide que determine la resistencia por metro de un elemento largo de alambre. La empresa que lo contrata tiene poco equipo. Usted encuentra una batería, un voltímetro y un amperímetro, pero no un instrumento que mida la resistencia directamente (un óhmetro). Entonces, conecta los alambres del voltímetro a las terminales de la batería y la lectura es de 12.6 V. Corta 20.0 m del alambre y lo conecta a la batería, con un amperímetro en serie para medir la corriente en el alambre. El amperímetro da una lectura de 7.00 A. Después corta un trozo de alambre de 40.0 m de longitud y lo conecta a la batería, de nuevo con el amperímetro en serie para medir la corriente, y la lectura que se obtiene es de 4.20 A. Aun cuando el equipo de que dispone es muy limitado, su jefe le asegura que es de alta calidad: la resistencia del amperímetro es muy pequeña y la del voltímetro muy grande. ¿Cuál es la resistencia de 1 metro de alambre?

25.58 • Se fabrica un trozo de 2.0 mm de alambre soldando el extremo de un alambre de plata de 120 cm de largo con el extremo de un alambre de cobre de 80 cm. Cada pieza de alambre tiene 0.60 mm de diámetro. El alambre está a temperatura ambiente, por lo que sus resistividades son las que se dan en la tabla 25.1. Entre los extremos del alambre compuesto, de 2.0 m de largo, se mantiene una diferencia de potencial de 5.0 V. *a*) ¿Cuál es la corriente en la sección de cobre? *b*) ¿Cuál es la corriente en la sección de plata? *c*) ¿Cuál es la magnitud $\vec{E}$ en el cobre? *d*) ¿Cuál es la magnitud de $\vec{E}$ en la plata? *e*) ¿Cuál es la diferencia de potencial entre los extremos de la sección de plata del alambre?

25.59 • Un alambre de cobre de 3.00 m de longitud a 20°C está compuesto por dos secciones: una de 1.20 m de largo con diámetro de 1.60 mm, y otra de 1.80 m de longitud con diámetro de 0.80 mm. En la sección de 1.60 mm de diámetro, hay una corriente de 2.5 mA. *a*) ¿Cuál es la corriente en la sección de 0.80 mm de diámetro? *b*) ¿Cuál es la magnitud de $\vec{E}$ en la sección con diámetro de 1.60 mm? *c*) ¿Cuál es la magnitud de $\vec{E}$ en la sección con 0.80 mm de diámetro? *d*) ¿Cuál es la diferencia de potencial entre los extremos del alambre de 3.00 m de longitud?

25.60 • **Densidad de corriente crítica en superconductores.** Un problema en algunos de los más recientes superconductores de alta temperatura es obtener una densidad de corriente lo suficientemente grande para uso práctico sin causar que la resistencia reaparezca. La máxima densidad de corriente para que el material conserve la superconductividad se conoce como densidad de corriente crítica del material. En 1987, los laboratorios de IBM habían producido películas delgadas con densidades críticas de corriente de 1.0×10^5 A/cm^2. *a*) ¿Cuánta corriente podría transportar un alambre calibre 18 de este material y aun así conservar la superconductividad? (véase el ejemplo 25.1 de la sección 25.1). *b*) Los investigadores están tratando de desarrollar superconductores con densidades de corriente crítica de 1.0×10^6 A/cm^2. ¿Qué diámetro de un alambre cilíndrico de este material sería necesario para transportar 1000 A sin perder la superconductividad?

25.61 •• PA Un calentador de nicromo que tiene una resistencia de 28 Ω está conectado a una batería que tiene una fem de 96.0 V y una

resistencia interna de 1.2 Ω. Un vaso de aluminio con masa igual a 0.130 kg contiene 0.200 kg de agua. El calentador está colocado dentro del agua y la energía eléctrica que se disipa en su resistencia se transmite al vaso y al agua. El calentador tiene masa muy pequeña. ¿Cuánto tiempo transcurre para que la temperatura del vaso y el agua se eleven de 21.2 a 34.5°C? (Se puede despreciar el cambio de la resistencia del nicromo debido al cambio de su temperatura).

25.62 •• Un resistor con resistencia igual a R está conectado a una batería que tiene una fem de 12.0 V y una resistencia interna $r = 0.40\ \Omega$. ¿Para qué valores de R la energía disipada en el resistor será de 80.0 W?

25.63 •• PA BIO Alcanzado por un rayo. Un rayo involucra corrientes de hasta 25,000 A que duran 40 μs aproximadamente. Si una persona es alcanzada por un rayo de estas características, la corriente pasará a través de su cuerpo. Supondremos que su masa es de 75 kg, que está mojado (después de todo, está bajo una tormenta) y, por lo tanto, tiene una resistencia de 1.0 kΩ, y todo su cuerpo es de agua (lo cual es una aproximación burda pero factible). *a)* ¿Cuántos grados Celsius incrementará el rayo la temperatura de 75 kg de agua? *b)* Considerando que la temperatura interior del cuerpo es de 37°C aproximadamente, ¿la temperatura de la persona aumentaría mucho en realidad? ¿Por qué? ¿Qué pasaría primero?

25.64 •• En el modelo atómico de Bohr para el hidrógeno, el electrón efectúa 6.0×10^{15} rev/s alrededor del núcleo. ¿Cuál es la corriente media en un punto de la órbita del electrón?

25.65 • CALC Un material con resistividad ρ tiene forma de cono truncado sólido de altura h, y radios r_1 y r_2 en sus extremos (figura P25.65). *a)* Calcule la resistencia del cono entre las dos caras planas. (*Sugerencia:* Imagine que rebana el cono en discos muy delgados y calcula la resistencia de uno). *b)* Demuestre que su resultado concuerda con la ecuación (25.10), cuando $r_1 = r_2$.

Figura P25.65

25.66 • CALC La región entre dos esferas conductoras concéntricas con radios a y b está llena de un material conductor cuya resistividad es ρ. *a)* Demuestre que la resistencia entre las esferas está dada por

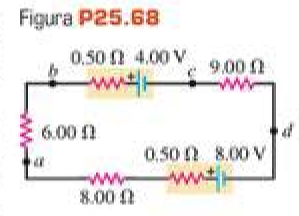
$$R = \frac{\rho}{4\pi}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)$$

b) Obtenga una expresión para la densidad de corriente como función del radio, en términos de la diferencia de potencial V_{ab} entre las esferas. *c)* Demuestre que el resultado del inciso *a)* se reduce a la ecuación (25.10) cuando la separación $L = b - a$ entre las esferas es pequeña.

25.67 ••• El coeficiente de temperatura de la resistencia α en la ecuación (25.12) es igual al coeficiente de temperatura de la resistividad α en la ecuación (25.6), solo si el coeficiente de expansión térmica es pequeño. Una columna cilíndrica de mercurio está en un tubo vertical de vidrio. A 20°C su altura es de 12.0 cm. El diámetro de la columna de mercurio es de 1.6 mm y no cambia con la temperatura porque el vidrio tiene un coeficiente pequeño de expansión térmica. El coeficiente de expansión volumétrica del mercurio se da en la tabla 17.2, su resistividad a 20°C se especifica en la tabla 25.1, y su coeficiente de temperatura de la resistividad se encuentra en la tabla 25.2. *a)* A 20°C, ¿cuál será la resistencia entre los extremos de la columna de mercurio? *b)* La columna de mercurio se calienta a 60°C. ¿Cuál es el cambio en su resistividad? *c)* ¿Cuál es el cambio en su longitud? Explique por qué es el coeficiente de expansión volumétrica, y no el coeficiente de expansión lineal, lo que determina el cambio en la longitud. *d)* ¿Cuál es el cambio en su resistencia? (*Sugerencia:* Como los cambios porcentuales en ρ y L son pequeños, sería de ayuda obtener de la ecuación (25.10) una ecuación para ΔR en términos de $\Delta\rho$ y ΔL). *e)* ¿Cuál es el coeficiente de temperatura de la resistencia α para la columna de mercurio, como se definió en la ecuación (25.12)? ¿Cómo se compara este valor con el coeficiente de temperatura de la resistividad? ¿Es importante el efecto del cambio en la longitud?

25.68 • *a)* ¿Cuál es la diferencia de potencial V_{ad} en el circuito de la figura P25.68? *b)* ¿Cuál es el voltaje terminal de la batería de 4.00 V? *c)* En el punto d del circuito se insertan una batería con fem de 10.30 V y una resistencia interna de 0.50 Ω, con su terminal negativa conectada a la terminal negativa de la batería de 8.00 V. Ahora, ¿cuál es la diferencia de potencial V_{bc} entre las terminales de la batería de 4.00 V?

Figura P25.68



25.69 • La diferencia de potencial a través de las terminales de una batería es de 8.40 V cuando en esta hay una corriente de 1.50 A de la terminal negativa a la positiva. Cuando la corriente es de 3.50 A en la dirección inversa, la diferencia de potencial es de 10.20 V. *a)* ¿Cuál es la resistencia interna de la batería? *b)* ¿Cuál es la fem de la batería?

25.70 •• BIO Un individuo cuya resistencia corporal medida entre sus manos es de 10 kΩ toma por accidente las terminales de una fuente de energía de 14 kV. *a)* Si la resistencia interna de la fuente de energía es 2000 Ω, ¿cuál será la corriente a través del cuerpo del individuo? *b)* ¿Cuál es la potencia disipada en su cuerpo? *c)* Si la fuente de energía debe hacerse segura incrementando su resistencia interna, ¿de cuánto debería ser la resistencia interna para que la corriente máxima en la situación anterior sea de 1.00 mA o menor?

25.71 • BIO La resistividad general media del cuerpo humano (aparte de la resistencia superficial de la piel) es alrededor de 5.0 Ω·m. La trayectoria de conducción entre las manos puede representarse aproximadamente como un cilindro de 1.6 m de largo y 0.10 m de diámetro. La resistencia de la piel se vuelve despreciable, si se sumergen las manos en agua salada. *a)* ¿Cuál es la resistencia entre las manos, si la resistencia de la piel es despreciable? *b)* ¿Cuál es la diferencia de potencial que se necesita entre las manos para que haya una descarga de corriente letal de 100 mA? (Observe que el resultado demuestra que las pequeñas diferencias de potencial originan corrientes peligrosas cuando la piel está húmeda). *c)* Con la corriente que se calculó en el inciso *b)*, ¿cuánta potencia se disipa en el cuerpo?

25.72 • El costo común de la energía eléctrica es de $0.120 (dólares) por kilowatt-hora. *a)* Algunas personas mantienen siempre encendida una lámpara cerca de la puerta de entrada. ¿Cuál es el costo anual de tener encendida una bombilla de 75 W día y noche? *b)* Suponga que su refrigerador utiliza 400 W de potencia cuando está en operación, y que funciona 8 horas al día. ¿Cuál es su costo anual de operación?

25.73 •• La batería de 12.6 V de un automóvil tiene una resistencia interna despreciable y se conecta a una combinación en serie de un resistor de 3.2 Ω que cumple la ley de Ohm y a un termistor que no cumple la ley de Ohm, sino que sigue la relación $V = \alpha I + \beta I^2$ entre la corriente y el voltaje, con $\alpha = 3.8\ \Omega$ y $\beta = 1.3\ \Omega/\text{A}$. ¿Cuál es la corriente a través del resistor de 3.2 Ω?

25.74 •• Un cable cilíndrico de cobre que mide 1.50 km de longitud está conectado a través de una diferencia de potencial de 220.0 V. *a)* ¿Cuál debería ser el diámetro de manera que genere calor a una razón de 75.0 W? *b)* En estas condiciones, ¿cuál será el campo eléctrico en el interior del cable?

25.75 •• Amperímetro no ideal. A diferencia del amperímetro idealizado descrito en la sección 25.4, cualquier amperímetro real tiene una resistencia distinta de cero. *a)* Un amperímetro con resistencia R_A se conecta en serie con un resistor R y una batería con fem $\mathcal{E}$ y resistencia interna r. La corriente medida por el amperímetro es I_A. Calcule la corriente a través del circuito si se retira el amperímetro de manera que la batería y el resistor formen un circuito completo. Exprese su respuesta en términos de I_A, r, R_A y R. Cuanto más "ideal" sea el amperímetro, menor será la diferencia entre esta corriente y la corrien-

te I_A. *b*) Si $R = 3.80\ \Omega$, $\mathcal{E} = 7.50$ V y $r = 0.45\ \Omega$, calcule el valor máximo de la resistencia R_A del amperímetro, de manera que I_A esté dentro del 1.0% de la corriente en el circuito cuando no hay amperímetro. *c*) Explique por qué la respuesta del inciso *b*) representa un valor *máximo*.

25.76 • **CALC** Un cilindro de 1.50 m de largo y 1.10 cm de radio está hecho de una complicada mezcla de materiales. Su resistividad depende de la distancia *x* desde el extremo izquierdo, y cumple con la fórmula $\rho(x) = a + bx^2$, donde *a* y *b* son constantes. En el extremo de la izquierda, la resistividad es de $2.25 \times 10^{-8}\ \Omega \cdot$m, en tanto que en el extremo derecho es de $8.50 \times 10^{-8}\ \Omega \cdot$m. *a*) ¿Cuál es la resistencia de esta varilla? *b*) ¿Cuál es el campo eléctrico en su punto medio, si conduce una corriente de 1.75 A? *c*) Si se corta la varilla en dos mitades de 75.0 cm, ¿cuál será la resistencia de cada una?

25.77 •• De acuerdo con el Código Eléctrico Nacional de Estados Unidos, no está permitido que el alambre de cobre que se utiliza en las instalaciones interiores de viviendas, hoteles, oficinas y plantas industriales conduzca más de cierta cantidad máxima de corriente especificada. La siguiente tabla indica la corriente máxima $I_{máx}$ para varios calibres comunes de alambre con aislante de de lino blanco o algodón barnizado. El "calibre del alambre" es una especificación utilizada para describir el diámetro de los alambres. Observe que cuanto mayor sea el diámetro, *menor* será el calibre.

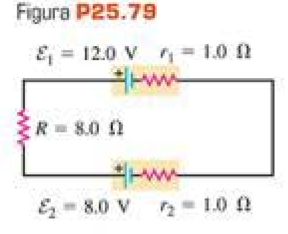
Calibre del alambre	Diámetro (cm)	$I_{máx}$(A)
14	0.163	18
12	0.205	25
10	0.259	30
8	0.326	40
6	0.412	60
5	0.462	65
4	0.519	85

a) ¿Qué consideraciones determinan la capacidad máxima de conducción de corriente en una instalación doméstica? *b*) A través del cableado de una vivienda tiene que suministrarse un total de 4200 W de potencia a los aparatos eléctricos domésticos. Si la diferencia de potencial a través del conjunto de aparatos es de 120 V, determine el calibre del alambre más delgado permisible que puede utilizarse. *c*) Suponga que el alambre usado en esta casa es del calibre que se calculó en el inciso *b*) y tiene longitud total de 42.0 m. ¿A qué razón se disipa la energía en el cableado? *d*) La vivienda está construida en una comunidad en la que el costo de la energía eléctrica es de \$0.11 (dólares) por kilowatt-hora. Si la vivienda se equipa con alambre del calibre más grande siguiente que el calculado en el inciso *b*), ¿cuáles serían los ahorros en el costo de la electricidad durante un año? Suponga que los aparatos se mantienen encendidos un promedio de 12 horas al día.

25.78 •• **Bombillas fluorescentes compactas.** Las bombillas fluorescentes compactas son mucho más eficientes produciendo luz que las bombillas comunes incandescentes. Cuestan mucho más, pero duran mayor tiempo y usan menos electricidad. De acuerdo con un estudio, una bombilla compacta que genera hasta 100 W equivalentes a una bombilla incandescente, usa tan solo 23 W de energía. La bombilla compacta dura 10,000 horas en promedio, y cuesta \$11.00 (dólares), mientras que la bombilla incandescente cuesta únicamente \$0.75 (dólares), pero dura exactamente 750 horas. El estudio supuso que la electricidad cuesta \$0.080 (dólares) por kilowatt-hora y que las bombillas estaban encendidas 4.0 h por día. *a*) ¿Cuál es el costo total (incluyendo el precio de la bombilla), si el funcionamiento de cada bombilla dura 3.0 años? *b*) ¿Cuál es el ahorro durante tres años, si se usa una bombilla compacta fluorescente en vez de una incandescente? *c*) ¿Cuál es la resistencia de una bombilla fluorescente de "100 W"? (Recuerde que esta bombilla realmente usa solo 23 W de energía y opera a 120 V).

25.79 • En el circuito de la figura P25.79, calcule *a*) la corriente a través del resistor de 8.0 Ω y *b*) la razón total de disipación de energía eléctrica en el resistor de 8.0 Ω y en la resistencia interna de las baterías. *c*) En una de las baterías, la energía química se convierte en energía eléctrica. ¿En cuál sucede esto y con qué rapidez? *d*) En una de las baterías la energía eléctrica se convierte en energía química. ¿En cuál ocurre esto y con qué rapidez? *e*) Demuestre que en el circuito la razón total de producción de energía eléctrica es igual a la razón total de consumo de energía eléctrica.

Figura **P25.79**



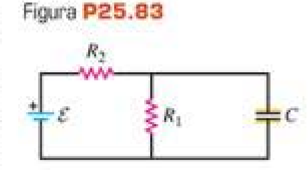
25.80 • Un rayo azota el extremo de un pararrayos de acero y produce una ráfaga de corriente de 15,000 A que dura 65 μs. El pararrayos mide 2.0 m de altura y 1.8 cm de diámetro, y su extremo inferior está conectado a tierra con un alambre de cobre de 35 m de longitud y 8.0 mm de diámetro. *a*) Calcule la diferencia de potencial entre la parte superior del pararrayos de acero y el extremo inferior del alambre de cobre durante la ráfaga de corriente. *b*) Determine la energía total que se deposita en el pararrayos y en el alambre por la ráfaga de corriente.

25.81 • Una batería de 12.0 V tiene una resistencia interna de 0.24 Ω y una capacidad de 50.0 A·h (véase el ejercicio 25.47). La batería se carga haciendo pasar una corriente de 10 A a través de ella durante 5.0 h. *a*) ¿Cuál es el voltaje terminal durante el proceso de carga? *b*) ¿Cuál es el total de energía eléctrica que se suministra a la batería durante la carga? *c*) ¿Cuánta energía eléctrica se disipa en la resistencia interna mientras se carga la batería? *d*) Se descarga por completo la batería a través de un resistor, de nuevo con una corriente constante de 10 A. ¿Cuál es la resistencia externa del circuito? *e*) ¿Cuánta energía eléctrica se suministra en total al resistor externo? *f*) ¿Cuánta energía eléctrica se disipa en total en la resistencia interna? *g*) ¿Por qué no son iguales las respuestas en los incisos *b*) y *e*)?

25.82 • Repita el problema 25.81 con corrientes de carga y descarga de 30 A. Los tiempos de carga y descarga ahora son de 1.7 h en vez de 5.0 h. ¿Cuáles son las diferencias que observa en el rendimiento?

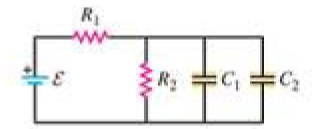
25.83 •• **PA** Considere el circuito mostrado en la figura P25.83. La fuente de fem tiene una resistencia interna despreciable. Los resistores tienen resistencias $R_1 = 6.00\ \Omega$ y $R_2 = 4.00\ \Omega$. El capacitor tiene una capacitancia $C = 9.00\ \mu$F. Cuando el capacitor está completamente cargado, la magnitud de la carga sobre sus placas es de $Q = 36.0\ \mu$C. Calcule la fem $\mathcal{E}$.

Figura **P25.83**



25.84 •• **PA** Considere el circuito de la figura P25.84. La batería tiene una fem de 60.0 V y resistencia interna despreciable. $R_2 = 2.00\ \Omega$, $C_1 = 3.00\ \mu$F y $C_2 = 6.00\ \mu$F. Después de que los capacitores hayan alcanzado sus cargas finales, la carga en C_1 es $Q_1 = 18.0\ \mu$C. *a*) ¿Cuál es la carga final en C_2? *b*) ¿Cuál es la resistencia R_1?

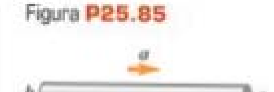
Figura **P25.84**



PROBLEMAS DE DESAFÍO

25.85 ••• En 1916 el *experimento Tolman-Stewart* demostró que las cargas libres en un metal tienen carga negativa y proporcionan una medición cuantitativa de su razón carga-masa, $|q|/m$. El experimento consistió en detener en forma abrupta un carrete de alambre que giraba con rapidez, y medir la diferencia de potencial que esto producía entre los extremos del alambre. En un modelo simplificado de este experimento, considere una varilla metálica de longitud L a la que se imparte una aceleración uniforme $\vec{a}$ hacia la derecha. Al inicio, las cargas libres en el metal se retrasan con respecto al movimiento de la varilla y crean un campo eléctrico $\vec{E}$ en la varilla. En el estado estable, este campo ejerce una fuerza sobre las cargas libres que las acelera junto con la varilla. *a*) Aplique la expresión $\sum\vec{F} = m\vec{a}$ a las cargas libres con la finalidad de obtener una expresión para $|q|/m$ en términos de las magnitudes del campo eléctrico inducido $\vec{E}$ y la aceleración $\vec{a}$. *b*) Si todas las cargas libres en la varilla metálica tienen la misma aceleración, el campo eléctrico $\vec{E}$ es el mismo en todos los puntos de la varilla. Con base en este hecho, rescriba la expresión para $|q|/m$ en términos del potencial V_{bc} entre los extremos de la varilla (figura P25.85). *c*) Si las cargas libres son negativas, ¿cuál extremo de la varilla, b o c, tendrá un potencial mayor? *d*) Si la varilla mide 0.50 m de largo y las cargas libres son electrones (carga $q = -1.60 \times 10^{-19}$ C, masa de 9.11×10^{-31} kg), ¿cuál es la magnitud de la aceleración que se requiere para producir una diferencia de potencial de 1.0 mV entre los extremos de la varilla? *e*) Analice por qué en el experimento real se utilizó un carrete giratorio de alambre delgado, en vez de una varilla móvil como en nuestro análisis simplificado.

Figura **P25.85**



25.86 ••• CALC Una fuente con fem $\mathcal{E}$ y resistencia interna r está conectada a un circuito externo. *a*) Demuestre que la potencia de salida de la fuente es máxima cuando la corriente en el circuito es la mitad de la corriente de cortocircuito de la fuente. *b*) Si el circuito externo consiste en una resistencia R, demuestre que la potencia de salida es máxima cuando $R = r$ y que la potencia máxima es $\mathcal{E}^2/4r$.

25.87 ••• CALC La resistividad de un semiconductor se puede modificar si se agregan cantidades diferentes de impurezas. Una varilla de material semiconductor de longitud L y área de sección transversal A se localiza sobre el eje x, entre $x = 0$ y $x = L$. El material cumple la ley de Ohm, y su resistividad varía a lo largo de la varilla según la expresión $\rho(x) = \rho_0 \exp(-x/L)$. El extremo de la varilla en $x = 0$ está a un potencial V_0 mayor que el extremo en $x = L$. *a*) Calcule la resistencia total de la varilla y la corriente en ella. *b*) Encuentre la magnitud del campo eléctrico $E(x)$ en la varilla en función de x. *c*) Determine el potencial eléctrico $V(x)$ en la varilla en función de x. *d*) Elabore la gráfica de las funciones $\rho(x)$, $E(x)$ y $V(x)$ para valores de x entre $x = 0$ y $x = L$.

Respuestas

Pregunta inicial del capítulo 

La corriente que sale es igual a la corriente que entra. En otras palabras, la carga debe entrar a la bombilla al mismo ritmo con el que sale. Cuando fluye por la bombilla no "se gasta" ni se consume.

Preguntas de las secciones Evalúe su comprensión

25.1 Respuesta: v. Al duplicarse el diámetro, se incrementa el área de la sección transversal A en un factor de 4. Por lo tanto, la magnitud de la densidad de corriente $J = I/A$ se reduce a $\frac{1}{4}$ del valor del ejemplo 25.1, y la magnitud de la velocidad de arrastre $v_d = J/n|q|$ se reduce en el mismo factor. La nueva magnitud es $v_d = (0.15 \text{ mm/s})/4 = 0.038$ mm/s. Este comportamiento es el mismo que el de un fluido incompresible, que desacelera cuando pasa de un tubo estrecho a otro más ancho (véase la sección 14.4).

25.2 Respuesta: ii. La figura 25.6*b* indica que la resistividad ρ de un semiconductor se incrementa conforme disminuye la temperatura. De la ecuación (25.5), la magnitud de la densidad de corriente es $J = E/\rho$, por lo que la densidad de corriente disminuye a medida que la temperatura se reduce y la resistividad aumenta.

25.3 Respuesta: iii. La solución de la ecuación (25.11) para la corriente indica que $I = V/R$. Si la resistencia R del alambre permanece sin cambio, la duplicación del voltaje V haría que la corriente I también se duplicara. Sin embargo, en el ejemplo 25.3 se vio que la resistencia *no* es constante: a medida que aumentan tanto la corriente como la temperatura, R también se incrementa. Así que la duplicación del voltaje genera una corriente *menor* que el doble de la corriente original. Un conductor óhmico es aquel para el cual $R = V/I$ tiene el mismo valor sin importar cuál sea el voltaje, de manera que el alambre es *no óhmico*. (En muchos problemas prácticos, el cambio de temperatura del alambre es tan pequeño que se ignora, por lo que se puede considerar con certeza que el alambre es óhmico. En casi todos los ejemplos del libro se hace así).

25.4 Respuesta: iii, ii, i. Para el circuito **i**, se calcula la corriente con la ecuación (25.16): $I = \mathcal{E}/(R + r) = (1.5 \text{ V})/(1.4\ \Omega + 0.10\ \Omega) = 1.0$ A. Para el circuito **ii**, se observa que el voltaje terminal $v_{ab} = 3.6$ V es igual al voltaje IR a través del resistor de 1.8 Ω: $V_{ab} = IR$, por lo que $I = V_{ab}/R = (3.6 \text{ V})/(1.8\ \Omega) = 2.0$ A. En el caso del circuito **iii**, se utiliza la ecuación (25.15) para determinar el voltaje terminal: $V_{ab} = \mathcal{E} - Ir$, por lo que $I = (\mathcal{E} - V_{ab})/r = (12.0 \text{ V} - 11.0 \text{ V})/(0.20\ \Omega) = 5.0$ A.

25.5 Respuesta: iii, ii, i. Estos son los mismos circuitos que se analizaron en Evalúe su comprensión de la sección 25.4. En cada caso, la potencia neta de salida de la batería es $P = V_{ab}I$, donde V_{ab} es el voltaje terminal de la batería. Para el circuito **i**, se vio que $I = 1.0$ A, por lo que $V_{ab} = \mathcal{E} - Ir = 1.5 \text{ V} - (1.0 \text{ A})(0.10\ \Omega) = 1.4$ V, de manera que $P = (1.4 \text{ V})(1.0 \text{ A}) = 1.4$ W. Para el circuito **ii**, se tiene que $V_{ab} = 3.6$ V y se encontró que $I = 2.0$ A, por lo que $P = (3.6 \text{ V})(2.0 \text{ A}) = 7.2$ W. Para el circuito **iii**, se tiene que $V_{ab} = 11.0$ V y se determinó que $I = 5.0$ A, así que $P = (11.0 \text{ V})(5.0 \text{ A}) = 55$ A.

25.6 Respuesta: i. La dificultad de producir cierta cantidad de corriente se incrementa conforme aumenta la resistividad ρ. De la ecuación (25.24), $\rho = m/ne^2\tau$, por lo que al aumentar la masa m se incrementará la resistividad. Esto es así porque una partícula cargada más masiva responderá con más lentitud ante la aplicación de un campo eléctrico y, por consiguiente, el arrastre será más lento. Para generar la misma corriente se necesitaría un campo eléctrico más intenso. (El aumento de n, e o τ haría que la resistividad disminuyera y sería más fácil producir una corriente dada).

Problema práctico

Respuestas: *a*) 237°C *b*) 162 W inicialmente, 148 W para 1.23 A

26 CIRCUITOS DE CORRIENTE DIRECTA



? En un circuito complejo como el de esta tarjeta, ¿es posible conectar varios resistores con diferentes resistencias de manera que todos tengan la misma diferencia de potencial? De ser así, ¿la corriente será la misma a través de todos los resistores?

OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

Al estudiar este capítulo, usted aprenderá:

- A analizar circuitos con múltiples resistores conectados en serie o en paralelo.
- Las reglas aplicables a cualquier circuito con más de una espira.
- A utilizar amperímetros, voltímetros, óhmetros o potenciómetros en un circuito.
- A analizar circuitos que incluyen tanto un resistor como un capacitor.
- Cómo se distribuye la energía eléctrica en el hogar.

Si observa el interior de su televisor, computadora, o bajo la cubierta del motor de un automóvil, encontrará circuitos mucho más complejos de los que se estudiaron en el capítulo 25. Ya sea que estén conectados con alambres o integrados en un chip, con frecuencia estos circuitos incluyen varias fuentes, resistores y otros elementos, interconectados en una *red*.

En este capítulo estudiaremos métodos generales para analizar esas redes, incluso cómo calcular voltajes y corrientes de los elementos de circuito. Aprenderemos a determinar la resistencia equivalente de varios resistores conectados en serie o en paralelo. Para redes en general, necesitamos dos reglas llamadas *reglas de Kirchhoff*. Una se basa en el principio de conservación de la carga aplicada a un nodo (o unión); y la otra se deriva de la conservación de la energía para una carga que se desplaza por una espira (o malla) cerrada. Se estudiarán instrumentos para medir varias cantidades eléctricas. También se analizará un circuito que contiene resistencia y capacitancia, en el que la corriente varía con el tiempo.

Nuestro objetivo principal en este capítulo se centra en los circuitos de **corriente directa** (cd), en los que el sentido de la corriente no cambia con el tiempo. Los sistemas de cableado de las linternas y de los automóviles son ejemplos de circuitos de corriente directa. La energía eléctrica doméstica se suministra en forma de **corriente alterna** (ca), en la que la corriente oscila hacia adelante y hacia atrás. Los mismos principios para analizar redes se aplican a ambas clases de circuitos. Concluiremos el capítulo con una mirada a los sistemas de cableado doméstico. En el capítulo 31 se estudiarán con detalle los circuitos de corriente alterna.



ActivPhysics 12.1: DC Series Circuits (Qualitative)

26.1 Resistores en serie y en paralelo

Los resistores se encuentran en toda clase de circuitos, desde secadoras para el cabello y calentadores ambientales, hasta circuitos que limitan o dividen la corriente, o que reducen o dividen un voltaje. Es frecuente que tales circuitos contengan varios resistores, por lo que es adecuado considerarlos como *combinaciones* de resistores.

Un ejemplo sencillo es una serie de bombillas eléctricas de las que se usan como decoración en las fiestas; cada bombilla actúa como un resistor y, desde la perspectiva del análisis de circuitos, una serie de bombillas tan solo es una combinación de resistores.

Suponga que se tienen tres resistores con resistencias R_1, R_2 y R_3. La figura 26.1 muestra cuatro formas diferentes en que estos se pueden conectar entre los puntos a y b. Cuando se conectan en secuencia varios elementos de circuito, como resistores, baterías y motores, como en la figura 26.1*a*, con una sola trayectoria de corriente entre los puntos, se dice que están conectados en **serie**. En la sección 24.2 se estudiaron los *capacitores* en serie; vimos que, en virtud del principio de conservación de la carga, todos tenían la misma carga si al principio se hallaban descargados. Es frecuente que al estudiar circuitos estemos más interesados en la *corriente*, que es el flujo de carga por unidad de tiempo.

Se dice que los resistores de la figura 26.1*b* están conectados en **paralelo** entre los puntos a y b. Cada resistor ofrece una trayectoria alternativa entre los puntos. Para los elementos de circuito conectados en paralelo, la *diferencia de potencial* es la misma a través de cada elemento. En la sección 24.2 se estudiaron los capacitores en paralelo.

En la figura 26.1*c*, los resistores R_2 y R_3 se encuentran en paralelo, y esta combinación está en serie con R_1. En la figura 26.1*d*, R_2 y R_3 están en serie, y esta combinación se encuentra en paralelo con R_1.

Para cualquier combinación de resistores, siempre es posible encontrar un resistor *único* que podría reemplazar la combinación y dar como resultado la misma corriente y diferencia de potencial totales. Por ejemplo, una serie de bombillas navideñas podría reemplazarse por una sola bombilla, elegida de manera adecuada, que tome la misma corriente y tenga la misma diferencia de potencial entre sus terminales que la serie original. La resistencia de este resistor único se llama **resistencia equivalente** de la combinación. Si se reemplazara cualquiera de las redes de la figura 26.1 por su resistencia equivalente R_{eq}, se podría escribir

$$V_{ab} = IR_{eq} \quad \text{o bien,} \quad R_{eq} = \frac{V_{ab}}{I}$$

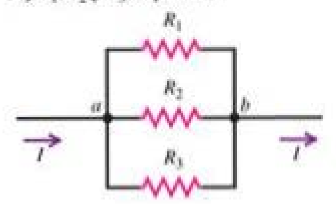
donde V_{ab} es la diferencia de potencial entre las terminales a y b de la red, e I es la corriente en el punto a o b. Para calcular una resistencia equivalente, se supone una diferencia de potencial V_{ab} a través de la red real, se calcula la corriente I correspondiente y se obtiene la razón V_{ab}/I.

26.1 Cuatro formas diferentes de conectar tres resistores.

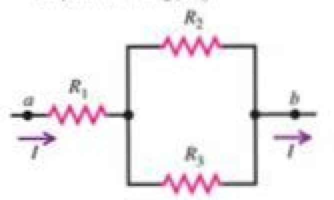
a) R_1, R_2 y R_3 en serie



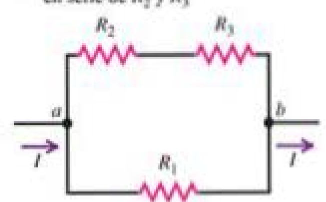
b) R_1, R_2 y R_3 en paralelo



c) R_1 en serie con una combinación en paralelo de R_2 y R_3



d) R_1 en paralelo con una combinación en serie de R_2 y R_3



Resistores en serie

Es posible determinar ecuaciones generales para la resistencia equivalente de una combinación de resistores en serie o en paralelo. Si los resistores están en *serie*, como en la figura 26.1*a*, la corriente I debe ser la misma en todos ellos. (Como se vio en la sección 25.4, la corriente *no* "se gasta" cuando pasa a través de un circuito). Al aplicar $V = IR$ a cada resistor, se obtiene

$$V_{ax} = IR_1 \qquad V_{xy} = IR_2 \qquad V_{yb} = IR_3$$

Las diferencias de potencial a través de cada resistor no necesitan ser las mismas (excepto para el caso especial en que las tres resistencias son iguales). La diferencia de potencial V_{ab} a través de toda la combinación es la suma de estas diferencias de potencial individuales:

$$V_{ab} = V_{ax} + V_{xy} + V_{yb} = I(R_1 + R_2 + R_3)$$

por lo que

$$\frac{V_{ab}}{I} = R_1 + R_2 + R_3$$

La razón V_{ab}/I es, por definición, la resistencia equivalente R_{eq}. Por lo tanto,

$$R_{eq} = R_1 + R_2 + R_3$$

Es fácil generalizar esto a cualquier número de resistores:

$$R_{eq} = R_1 + R_2 + R_3 + \cdots \qquad \text{(resistores en serie)} \qquad (26.1)$$

La resistencia equivalente de *cualquier número* de resistores en serie es igual a la suma de sus resistencias individuales.

La resistencia equivalente es *mayor que* cualquiera de las resistencias individuales.

Comparemos este resultado con la ecuación (24.5) para *capacitores* en serie. Los resistores en serie se suman directamente porque el voltaje a través de cada uno es directamente proporcional a su resistencia y a la corriente común. Los capacitores en serie se suman en forma recíproca porque el voltaje a través de cada uno es directamente proporcional a la carga común, pero *inversamente* proporcional a la capacitancia individual.

Resistores en paralelo

Si los resistores están en *paralelo*, como en la figura 26.1*b*, la corriente a través de cada resistor no necesita ser la misma. Pero la diferencia de potencial entre las terminales de cada resistor debe ser la misma e igual a V_{ab} (figura 26.2). (Recuerde que la diferencia de potencial entre dos puntos cualesquiera no depende de la trayectoria tomada entre los puntos). Denotemos las corrientes en los tres resistores como I_1, I_2 e I_3. Luego, puesto que $I = V/R$,

$$I_1 = \frac{V_{ab}}{R_1} \qquad I_2 = \frac{V_{ab}}{R_2} \qquad I_3 = \frac{V_{ab}}{R_3}$$

En general, la corriente es diferente a través de cada resistor. Como la carga no se acumula o escapa del punto a, la corriente total I debe ser la suma de las tres corrientes en los resistores:

$$I = I_1 + I_2 + I_3 = V_{ab}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right) \quad \text{o bien,}$$

$$\frac{I}{V_{ab}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$$

Pero por definición de la resistencia equivalente, R_{eq}, $I/V_{ab} = 1/R_{eq}$, por lo que

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$$

De nuevo, es fácil generalizar a *cualquier número* de resistores en paralelo:

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \cdots \qquad \text{(resistores en paralelo)} \qquad (26.2)$$

Para *cualquier número* de resistores en paralelo, el *recíproco* de la resistencia equivalente es igual a la *suma de los recíprocos* de sus resistencias individuales.

La resistencia equivalente siempre es *menor que* cualquier resistencia individual.

Se puede comparar este resultado con la ecuación (24.7) para *capacitores* en paralelo. Los resistores en paralelo se suman recíprocamente porque la corriente en cada uno es proporcional al voltaje común a través de ellos, e *inversamente* proporcional a la resistencia de cada uno. Los capacitores en paralelo se suman directamente porque la carga en cada uno es proporcional al voltaje común a través de ellos y *directamente* proporcional a la capacitancia de cada uno.

Para el caso especial de *dos* resistores en paralelo,

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2} \quad \text{y}$$

$$R_{eq} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \qquad \text{(dos resistores en paralelo)} \qquad (26.3)$$

26.2 Los faros y las luces traseras de un automóvil están conectados en paralelo. De ahí que cada luz esté expuesta a toda la diferencia de potencial suministrada por el sistema eléctrico del vehículo, lo que da el máximo brillo. Otra ventaja es que si una luz se funde, las demás siguen funcionando (véase el ejemplo 26.2).



MasteringPHYSICS

ActivPhysics 12.2: DC Parallel Circuits



Video Tutor Demo

Como $V_{ab} = I_1R_1 = I_2R_2$, se deduce que

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{R_2}{R_1} \qquad \text{(dos resistores en paralelo)} \qquad (26.4)$$

Esto demuestra que las corrientes conducidas por dos resistores en paralelo son *inversamente proporcionales* a sus resistencias. Por la trayectoria de menor resistencia circula más corriente.

Estrategia para resolver problemas 26.1 Resistores en serie y en paralelo



IDENTIFICAR *los conceptos relevantes:* Como en la figura 26.1, muchas redes de resistores están formadas por resistores en serie, en paralelo o en una combinación de ambos. Estas redes se pueden sustituir por un solo resistor equivalente. La lógica es similar a la de la Estrategia para resolver problemas 24.1 para redes de capacitores.

PLANTEAR *el problema* de acuerdo con los siguientes pasos:

1. Elabore un dibujo de la red de resistores.
2. Identifique si hay grupos de resistores conectados en serie o en paralelo.
3. Identifique las incógnitas. Estas podrían incluir la resistencia equivalente de la red, la diferencia de potencial a través de cada resistor, o la corriente que cruza cada resistor.

EJECUTAR *la solución* como sigue:

1. Utilice la ecuación (26.1) o la (26.2) para obtener la resistencia equivalente de las combinaciones en serie o en paralelo, respectivamente.
2. Si la red es muy compleja, trate de reducirla a combinaciones en serie y en paralelo. Por ejemplo, en la figura 26.1*c* primero se reemplaza la combinación en paralelo de R_2 y R_3 con su resistencia equivalente; esto forma una combinación en serie con R_1. En la figura 26.1*d*, la combinación de R_2 y R_3 en serie forma una combinación en paralelo con R_1.
3. Tenga en mente que cuando los resistores están conectados en serie, la diferencia de potencial total a través de la combinación es igual a la suma de las diferencias de potencial individuales. Cuando los resistores están conectados en paralelo, la diferencia de potencial es la misma para cada resistor, e igual a la diferencia de potencial a través de la combinación.
4. Cuando los resistores se conectan en serie, la corriente es la misma a través de cada resistor e igual a la que pasa a través de la combinación. La corriente total a través de los resistores en paralelo es igual a la suma de corrientes a través de los resistores individuales.

EVALUAR *la respuesta:* Compruebe si los resultados son lógicos. La resistencia equivalente de los resistores conectados en serie debe ser mayor que la de cualquier resistor individual; si están en paralelo, debe ser menor que la de cualquier resistor individual.

Ejemplo 26.1 Resistencia equivalente



Calcule la resistencia equivalente de la red que se ilustra en la figura 26.3*a*, y la corriente en cada resistor. La fuente de fem tiene resistencia interna insignificante.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Esta red de tres resistores es una *combinación* de resistencias en serie y en paralelo, como la de la figura 26.1*c*.

26.3 Etapas para reducir una combinación de resistores a un solo resistor equivalente y calcular la corriente en cada resistor.

a) $\mathcal{E} = 18$ V, $r = 0$; 4 Ω, 6 Ω, 3 Ω; a, c, b

b) 18 V; a 4 Ω c 2 Ω b

c) 18 V; a 6 Ω b

d) 18 V; a 6 Ω b; 3 A; 18 V

e) 18 V; a 4 Ω c 2 Ω b; 3 A, 3 A; 12 V, 6 V

f) $\mathcal{E} = 18$ V, $r = 0$; a 4 Ω c; 6 Ω, 1 A; 3 Ω, 2 A; b; 3 A; 12 V, 6 V

Continúa

Primero se determina la resistencia equivalente de los resistores en paralelo de 6 y 3 Ω, y luego la de su combinación en serie con el resistor de 4 Ω: esta es la resistencia equivalente R_{eq} de esta red en su conjunto. Luego, se calcula la corriente en la fem, que es la misma que la corriente en el resistor de 4 Ω. La diferencia de potencial es la misma a través de cada uno de los resistores en paralelo de 6 y 3 Ω; se utiliza este principio para determinar cuánta corriente va hacia cada resistor

EJECUTAR: Las figuras 26.3*b* y 26.3*c* muestran los pasos sucesivos para reducir la red a una sola resistencia equivalente R_{eq}. De acuerdo con la ecuación (26.2), los resistores de 6 y 3 Ω en paralelo de la figura 26.3*a* equivalen al resistor único de 2 Ω de la figura 26.3*b*:

$$\frac{1}{R_{6\,\Omega+3\,\Omega}} = \frac{1}{6\ \Omega} + \frac{1}{3\ \Omega} = \frac{1}{2\ \Omega}$$

[El mismo resultado se obtiene con la ecuación (26.3)]. De acuerdo con la ecuación (26.1), la combinación en serie de este resistor de 2 Ω con el de 4 Ω es equivalente al resistor único de 6 Ω de la figura 26.3*c*.

Para encontrar la corriente en cada resistor de la red original, se invierten los pasos. En el circuito que se ilustra en la figura 26.3*d* (idéntico al de la figura 26.3*c*), la corriente es $I = V_{ab}/R = (18\ \text{V})/(6\ \Omega) = 3\ \text{A}$. Así que la corriente en los resistores de 4 y 2 Ω de la figura 26.3*e* (idéntica a la figura 26.3*b*) también es de 3 A. Por lo tanto, la diferencia de potencial V_{cb} a través del resistor de 2 Ω es $V_{cb} = IR = (3\ \text{A})(2\ \Omega) = 6\ \text{V}$. Esta diferencia de potencial también debe ser de 6 V en la figura 26.3*f* (idéntica a la figura 26.3*a*). Con $I = V_{cb}/R$, las corrientes en los resistores de 6 y 3 Ω de la figura 26.3*f* son $(6\ \text{V})/(6\ \Omega) = 1\ \text{A}$ y $(6\ \text{V})/(3\ \Omega) = 2\ \text{A}$, respectivamente.

EVALUAR: Observe que para los dos resistores en paralelo entre los puntos *c* y *b* de la figura 26.3*f*, hay el doble de corriente a través del resistor de 3 Ω que a través del resistor de 6 Ω; es decir, pasa más corriente por la trayectoria de menos resistencia, de acuerdo con la ecuación (26.4). Observe también que la corriente total a través de estos dos resistores es de 3 A, la misma que pasa a través del resistor de 4 Ω entre los puntos *a* y *c*.

Ejemplo 26.2 Combinaciones en serie contra combinaciones en paralelo



Dos bombillas idénticas, cada una con resistencia igual a $R = 2\ \Omega$, se conectan a una fuente con $\mathcal{E} = 8\ \text{V}$ y resistencia interna despreciable. Calcule la corriente y la diferencia de potencial a través de cada bombilla, y la potencia entregada a cada una y a toda la red si las bombillas están conectadas *a*) en serie y *b*) en paralelo. *c*) Suponga que una de las bombillas se funde, es decir, su filamento se rompe y la corriente ya no puede fluir a través de él. ¿Qué pasa con la otra bombilla para el caso de conexión en serie? ¿Y para el caso de conexión en paralelo?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Las bombillas son resistores conectados en serie y en paralelo (figuras 26.4*a* y 26.4*b*). Una vez que se ha calculado la corriente *I* a través de cada bombilla, se obtiene la potencia entregada a cada una por medio de la ecuación (25.18), $P = I^2R = V^2/R$.

EJECUTAR: *a*) Por la ecuación (26.1), la resistencia equivalente de las dos bombillas entre los puntos *a* y *c* en la figura 26.4*a* es $R_{eq} = 2R = 2(2\ \Omega) = 4\ \Omega$. La corriente es la misma a través de cada bombilla en serie:

$$I = \frac{V_{ac}}{R_{eq}} = \frac{8\ \text{V}}{4\ \Omega} = 2\ \text{A}$$

Como las bombillas tienen la misma resistencia, la diferencia de potencial es la misma a través de cada una:

$$V_{ab} = V_{bc} = IR = (2\ \text{A})(2\ \Omega) = 4\ \text{V}$$

De acuerdo con la ecuación (25.18), la potencia entregada a cada bombilla es

$$P = I^2R = (2\ \text{A})^2(2\ \Omega) = 8\ \text{W} \qquad \text{o bien,}$$

$$P = \frac{V_{ab}^2}{R} = \frac{V_{bc}^2}{R} = \frac{(4\ \text{V})^2}{2\ \Omega} = 8\ \text{W}$$

La potencia total entregada a las dos bombillas es $P_{total} = 2P = 16\ \text{W}$.

b) Si las bombillas están en paralelo, como en la figura 26.4*b*, la diferencia de potencial V_{de} a través de cada bombilla es la misma e igual a 8 V, el voltaje terminal de la fuente, por lo que la corriente a través de cada bombilla es

$$I = \frac{V_{de}}{R} = \frac{8\ \text{V}}{2\ \Omega} = 4\ \text{A}$$

y la potencia entregada a cada bombilla es

$$P = I^2R = (4\ \text{A})^2(2\ \Omega) = 32\ \text{W} \qquad \text{o bien,}$$

$$P = \frac{V_{de}^2}{R} = \frac{(8\ \text{V})^2}{2\ \Omega} = 32\ \text{W}$$

Tanto la diferencia de potencial como la corriente a través de cada bombilla son el doble de grandes que en el caso de la conexión en serie. Por lo tanto, la potencia entregada a cada bombilla es *cuatro* veces mayor, y cada bombilla brilla más que en el caso en serie.

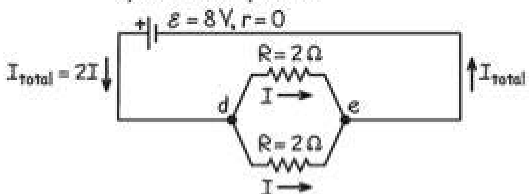
La potencia total entregada a la red en paralelo es $P_{total} = 2P = 64\ \text{W}$, cuatro veces mayor que para el caso en serie. El incremento

26.4 Diagramas para este problema.

a) Bombillas en serie



b) Bombillas en paralelo



26.5 Cuando se conectan a la misma fuente, dos bombillas en serie (imagen superior) consumen menos potencia y brillan menos que si se conectan en paralelo (imagen inferior).



en la potencia en comparación con la conexión en serie no se obtiene "gratis", ya que la energía se extrae cuatro veces más rápido de la fuente en la conexión en paralelo que en la conexión en serie. Si la fuente es una batería, se agotará cuatro veces más rápido.

c) En el caso en serie, fluye la misma corriente a través de las dos bombillas. Si una de estas se fundiera, no habría corriente en todo el circuito y ninguna bombilla brillaría.

En el caso en paralelo, la diferencia de potencial a través de cualquier bombilla permanecería igual, aun si una de las bombillas se fundiera. Así que la corriente a través de la bombilla en funcionamiento y la potencia entregada a esa bombilla seguiría igual.

EVALUAR: Nuestro cálculo no es completamente exacto porque la resistencia $R = V/I$ de las bombillas reales depende de la diferencia de potencial V a través de la bombilla. Por esa razón, la resistencia del filamento aumenta con el aumento de la temperatura de operación y, por lo tanto, con el incremento de V. Pero las bombillas conectadas en serie a través de una fuente, de hecho, brillan menos que cuando se conectan en paralelo con la misma fuente (figura 26.5).

Evalúe su comprensión de la sección 26.1 Suponga que los tres resistores que se ilustran en la figura 26.1 tienen la misma resistencia, por lo que $R_1 = R_2 = R_3 = R$. Clasifique los cuatro arreglos que se muestran en los incisos *a*) a *d*) de la figura 26.1, en orden decreciente de su resistencia equivalente.



26.2 Reglas de Kirchhoff

Muchas redes prácticas de resistores no se pueden reducir a combinaciones sencillas en serie y en paralelo. La figura 26.6*a* ilustra una fuente de poder de cd con fem $\mathcal{E}_1$ que carga una batería con fem menor $\mathcal{E}_2$ y que alimenta corriente a una bombilla con resistencia R. La figura 26.6*b* es un circuito "puente", que se utiliza en muchos tipos diferentes de medición y sistemas de control. (Una aplicación importante de un circuito "puente" se describe en el problema 26.81). Para calcular las corrientes en esa clase de redes usaremos las técnicas desarrolladas por el físico alemán Gustav Robert Kirchhoff (1824-1887).

En primer lugar, presentamos dos términos que usaremos con frecuencia. Un **nodo** (o **unión**) en un circuito es el punto en que se unen tres o más conductores. Una **espira** (o **malla**) es cualquier trayectoria cerrada de conducción. En la figura 26.6*a* los puntos *a* y *b* son nodos, pero los puntos *c* y *d* no lo son; en la figura 26.6*b*, los puntos *a*, *b*, *c* y *d* son nodos, pero los puntos *e* y *f* no lo son. Las líneas en color azul de las figuras 26.6*a* y 26.6*b* ilustran algunas espiras posibles en estos circuitos.

Las reglas de Kirchhoff consisten en los dos siguientes enunciados:

Regla de Kirchhoff de los nodos: *La suma algebraica de las corrientes en cualquier nodo es igual a cero*. Es decir,

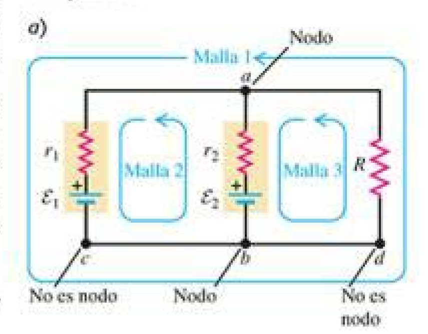
$$\sum I = 0 \qquad \text{(regla de los nodos, válida en cualquier nodo)} \qquad (26.5)$$

Regla de Kirchhoff de las mallas: *La suma algebraica de las diferencias de potencial en cualquier malla*, incluso las asociadas con las fem y las de elementos con resistencia, *debe ser igual a cero*. Es decir,

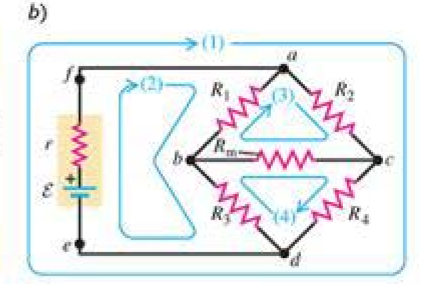
$$\sum V = 0 \qquad \text{(regla de las mallas, válida para cualquier malla cerrada)} \qquad (26.6)$$

26.6 Dos redes que no pueden reducirse a combinaciones simples de resistores en serie o en paralelo.

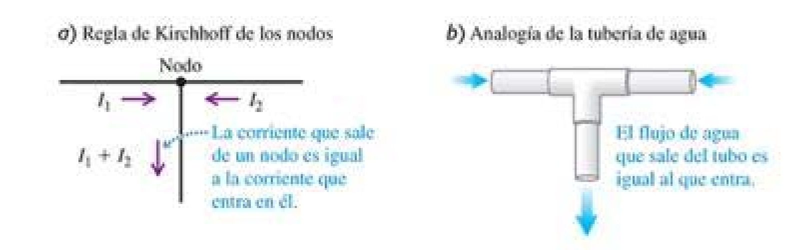
a)



b)



26.7 La regla de Kirchhoff de los nodos dice que la cantidad de corriente que llega a un nodo es igual a la que sale.



La regla de los nodos se basa en la *conservación de la carga eléctrica*. En un nodo no se puede acumular carga eléctrica, por lo que la carga total que entra a este por unidad de tiempo debe ser igual a la carga total que sale por unidad de tiempo (figura 26.7*a*). La carga por unidad de tiempo es la corriente, por lo que si consideramos como positivas las corrientes que entran a un nodo y negativas las que salen, la suma algebraica de las corrientes en el nodo debe ser igual a cero. Es como una unión T en una tubería de agua (figura 26.7*b*); si entra 1 litro por minuto proveniente de dos tubos, no pueden salir 3 litros por minuto del tercer tubo. Debemos decir que ya se usó la regla de los nodos (sin mencionarla) en la sección 26.1 cuando se dedujo la ecuación (26.2) para los resistores en paralelo.

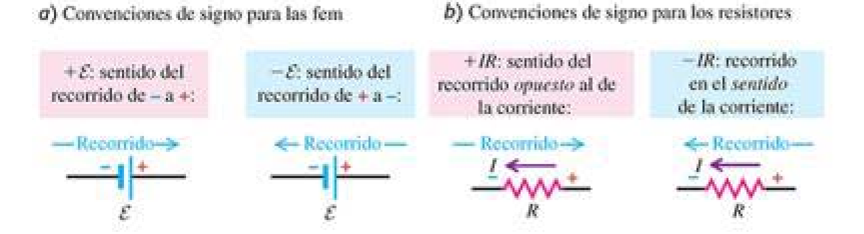
La regla de las mallas establece que la fuerza electrostática es *conservativa*. Suponga que recorre una malla y mide las diferencias de potencial entre los extremos de los elementos sucesivos del circuito. Al regresar al punto de partida, debe encontrar que la *suma algebraica* de esas diferencias es igual a cero; de lo contrario, no se podría afirmar que el potencial en ese punto tiene un valor determinado.

Convenciones de signo para la regla de la mallas

Para aplicar la regla de las mallas, se necesitan algunas convenciones de signos. La Estrategia para resolver problemas 26.2 describe en detalle cómo utilizarlas, pero a continuación se da una descripción rápida. Primero suponga un sentido de la corriente en cada ramal del circuito e indíquelo en el diagrama correspondiente. En seguida, a partir de cualquier punto del circuito, realice un recorrido imaginario alrededor de la espira sumando las fem y los IR conforme los encuentre. Cuando se pasa a través de una fuente en la dirección de $-$ a $+$, la fem se considera *positiva*; cuando se va de $+$ a $-$, la fem se considera *negativa* (figura 26.8*a*). Cuando se va a través de un resistor en el *mismo* sentido que el que se supuso para la corriente, el término IR es *negativo* porque la corriente avanza en el sentido del potencial decreciente. Cuando se pasa a través de un resistor en el sentido que se supuso *opuesto* a la corriente, el término IR es *positivo* porque representa un aumento de potencial (figura 26.8*b*).

Las dos reglas de Kirchhoff son todo lo que se necesita para resolver una amplia variedad de problemas de redes. Por lo general, se conocen algunas de las fem, corrientes y resistencias, y otras no. Siempre se debe obtener de las reglas de Kirchhoff cierto número de ecuaciones independientes igual al número de incógnitas, de manera que sea posible resolverlas simultáneamente. A menudo, la parte más difícil de la solución suele ser, no la comprensión de los principios básicos, ¡sino seguir la pista de los signos algebraicos!

26.8 Uso de las convenciones de signos cuando se aplica la regla de Kirchhoff de las mallas. En cada parte de la figura, "recorrido" es el sentido en que imaginamos ir alrededor de la malla, que no necesariamente es el sentido de la corriente.



Estrategia para resolver problemas 26.2 Reglas de Kirchhoff



IDENTIFICAR *los conceptos relevantes:* Las reglas de Kirchhoff son útiles para analizar cualquier circuito eléctrico.

PLANTEAR *el problema* de acuerdo con los siguientes pasos:

1. Elabore un diagrama del circuito, dejando espacio para etiquetar todas las cantidades, conocidas y desconocidas, incluidos el sentido supuesto para cada corriente y fem desconocidas. (Las reglas de Kirchhoff indicarán los *sentidos* y las magnitudes de las corrientes y fem desconocidas. Si el sentido real de una cantidad particular es opuesto al que se supuso, el resultado tendrá signo negativo).
2. Al identificar las corrientes, es mejor usar la regla de Kirchhoff de los nodos, como en la figura 26.9, para expresar las corrientes en términos del menor número posible de cantidades.
3. Identifique las incógnitas.

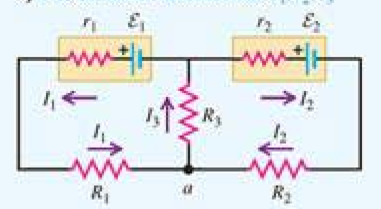
EJECUTAR *la solución* como sigue:

1. Elija cualquier espira en el circuito y designe un sentido (horario o antihorario) para recorrer la espira conforme se aplica la regla de las mallas. El sentido no tiene que ser el mismo que el que se supuso para la corriente.
2. Recorra la espira en el sentido elegido, sumando las diferencias de potencial algebraicamente a medida que las cruce. Use las convenciones de signos de la figura 26.8.
3. Iguale a cero la suma del paso 2, de acuerdo con la regla de las mallas.
4. Si se necesitan más ecuaciones independientes, elija otra espira y repita los pasos 1 a 3; continúe hasta que tenga tantas ecuaciones independientes como incógnitas, o hasta que cada elemento de circuito haya quedado incluido por lo menos en una espira.
5. Resuelva las ecuaciones simultáneas para determinar las incógnitas.
6. Este mismo sistema de registro se usa para encontrar el potencial V_{ab} de cualquier punto a con respecto a cualquier otro punto b. Comience en b y sume los cambios de potencial que encuentre al ir de b a a, usando las mismas reglas de los signos del paso 2. La suma algebraica de estos cambios es $V_{ab} = V_a - V_b$.

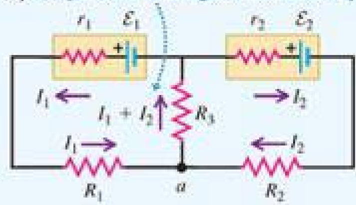
EVALUAR *la respuesta:* Compruebe todos los pasos algebraicos. Aplique los pasos 1 y 2 a una espira que no haya considerado todavía; si la suma de las caídas de potencial no es cero, se cometió un error en alguna parte.

26.9 Al aplicar la regla de los nodos al punto a, se reduce el número de corrientes desconocidas, de tres a dos.

a) Tres corrientes desconocidas: I_1, I_2, I_3



b) La aplicación de la regla de los nodos al punto a elimina I_3.



Ejemplo 26.3 Circuito de una sola espira



El circuito mostrado en la figura 26.10*a* tiene dos baterías, cada una con una fem y una resistencia interna, y dos resistores. Calcule *a*) la corriente en el circuito, *b*) la diferencia de potencial V_{ab} y *c*) la potencia de salida de la fem de cada batería.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Este circuito de una sola espira no tiene nodos, por lo que no se necesita la regla de Kirchhoff de los nodos. Para aplicar la regla de Kirchhoff de las mallas, primero se supone el sentido de la corriente; supongamos un sentido antihorario, como se ilustra en la figura 26.10*a*.

EJECUTAR: *a*) Se inicia en a y se viaja en sentido antihorario con la corriente, se suman los incrementos y las disminuciones de potencial, y la suma se iguala a cero, como en la ecuación (26.6):

$$-I(4\ \Omega) - 4\ \text{V} - I(7\ \Omega) + 12\ \text{V} - I(2\ \Omega) - I(3\ \Omega) = 0$$

Sumando los términos semejantes y despejando I, se obtiene:

$$8\ \text{V} = I(16\ \Omega) \quad \text{e} \quad I = 0.5\ \text{A}$$

El resultado positivo de I demuestra que el sentido elegido para la corriente es correcto.

b) Para obtener V_{ab}, el potencial de a con respecto a b, se comienza en b y se suman los cambios de potencial a medida que se avanza hacia a. Hay dos trayectorias posibles de b a a; primero se toma la inferior y se obtiene:

$$V_{ab} = (0.5\ \text{A})(7\ \Omega) + 4\ \text{V} + (0.5\ \text{A})(4\ \Omega) = 9.5\ \text{V}$$

El punto a tiene un potencial 9.5 V más alto que el b. Todos los términos de esta suma, incluidos los IR, son positivos porque cada uno representa un *incremento* de potencial conforme se pasa de b a a. Si en lugar de la trayectoria inferior, se considera la superior, obtenemos

$$V_{ab} = 12\ \text{V} - (0.5\ \text{A})(2\ \Omega) - (0.5\ \text{A})(3\ \Omega) = 9.5\ \text{V}$$

Aquí, los términos IR son negativos porque nuestra trayectoria va en el sentido de la corriente, con disminuciones de potencial a través de los resistores. El resultado de V_{ab} es el mismo para ambas trayectorias, como debe ser para que el cambio total de potencial alrededor de la espira sea igual a cero.

Continúa

c) Las potencias de salida de la fem de las baterías de 12 y 4 V son

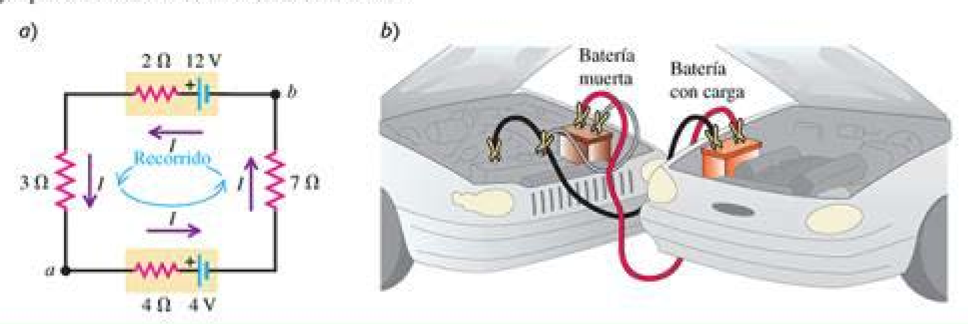
$$P_{12V} = \mathcal{E}I = (12\ \text{V})(0.5\ \text{A}) = 6\ \text{W}$$
$$P_{4V} = \mathcal{E}I = (-4\ \text{V})(0.5\ \text{A}) = -2\ \text{W}$$

El signo negativo de $\mathcal{E}$ para la batería de 4 V se debe a que la corriente en realidad fluye del lado de mayor potencial de la batería al de menor potencial. El valor negativo de P significa que en la batería se está *almacenando* energía; y que se está *recargando* mediante la batería de 12 V (si es recargable, si no, se está descargando).

EVALUAR: Al aplicar la expresión $P = I^2R$ a cada uno de los cuatro resistores de la figura 26.10*a*, usted debe ser capaz de demostrar que la potencia total disipada en los cuatro resistores es igual a 4 W. De los 6 W que provee la fem de la batería de 12 V, 2 W van al almacenamiento de energía en la batería de 4 V, y 4 W se disipan en las resistencias.

El circuito de la figura 26.10*a* es muy parecido al que se utiliza cuando una batería de almacenamiento de 12 V totalmente cargada (en un vehículo con el motor en marcha) se usa para poner en marcha un automóvil con la batería descargada (figura 26.10*b*). La batería descargada se carga ligeramente en el proceso. Los resistores de 3 y 7 Ω de la figura 26.10*a* representan las resistencias de los cables para pasar corriente y de la trayectoria de conducción a través del automóvil con la batería descargada. (Los valores de las resistencias reales de los automóviles y cables para pasar corriente son considerablemente menores).

26.10 *a*) En este ejemplo la malla se recorre en el mismo sentido que el que se supuso para la corriente, por lo que todos los términos *IR* son negativos. El potencial disminuye a medida que se pasa de + a − a través de la fem inferior, pero se incrementa al ir de − a + a través de la fem superior. *b*) Ejemplo de la vida real de un circuito de esta clase.





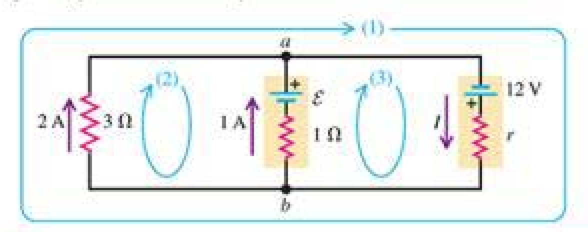
Ejemplo 26.4 Carga de una batería

En el circuito que se ilustra en la figura 26.11, una fuente de poder de 12 V con resistencia interna r desconocida está conectada a una batería recargable descargada con fem $\mathcal{E}$ desconocida y resistencia interna de 1 Ω, y a una bombilla indicadora con resistencia de 3 Ω que transporta una corriente de 2 A. La corriente a través de la batería descargada es igual a 1 A en el sentido que se indica. Calcule la corriente I a través de la fuente de poder, la resistencia r y la fem $\mathcal{E}$.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Este circuito tiene más de una espira, por lo que se debe aplicar tanto la regla de los nodos como la regla de las mallas. El sentido de la corriente a través de la fuente de poder de 12 V y la polaridad de la batería descargada se suponen como se ilustra en la figura 26.11. Hay tres incógnitas, por lo que se necesitan tres ecuaciones.

26.11 En este circuito, una fuente de energía eléctrica carga una batería que se quedó sin carga y enciende una bombilla. Se hizo una suposición acerca de la polaridad de la fem $\mathcal{E}$ de la batería agotada. ¿Es correcta esta suposición?



EJECUTAR: Se aplica la regla de los nodos, ecuación (26.5), al punto *a*:

$$-I + 1\ \text{A} + 2\ \text{A} = 0 \quad \text{por lo que} \quad I = 3\ \text{A}$$

Para determinar r, se aplica la regla de las mallas, ecuación (26.6), a la espira exterior grande (1):

$$12\ \text{V} - (3\ \text{A})r - (2\ \text{A})(3\ \Omega) = 0 \quad \text{de manera que} \quad r = 2\ \Omega$$

Para determinar $\mathcal{E}$, se aplica la regla de las mallas a la espira izquierda (2):

$$-\mathcal{E} + (1\ \text{A})(1\ \Omega) - (2\ \text{A})(3\ \Omega) = 0 \quad \text{así que} \quad \mathcal{E} = -5\ \text{V}$$

El valor negativo de $\mathcal{E}$ demuestra que la polaridad real de esta fem es opuesta a la que se supuso en la figura 26.11. Igual que en el ejemplo 26.3, la batería se está recargando.

EVALUAR: Intente aplicar la regla de los nodos al punto *b* en vez de al punto *a*, y trate de aplicar la regla de las mallas desplazándose en sentido antihorario en lugar del sentido horario alrededor de la espira (1). Obtendrá los mismos resultados de I y R. Se puede verificar el resultado de $\mathcal{E}$ usando la espira de la derecha (3):

$$12\ \text{V} - (3\ \text{A})(2\ \Omega) - (1\ \text{A})(1\ \Omega) + \mathcal{E} = 0$$

lo cual nuevamente nos da $\mathcal{E} = -5$ V.

Como comprobación adicional, observe que $V_{ba} = V_b - V_a$ es igual al voltaje a través de la resistencia de 3 Ω, que es (2 A)(3 Ω) = 6 V. Al ir de *a* a *b* por el ramal superior, se encuentran diferencias de potencial de +12 V − (3 A)(2 Ω) = +6 V, y al ir por el ramal intermedio, se obtiene −(−5 V) + (1 A) (1 Ω) = +6 V. Las tres formas de obtener V_{ba} dan los mismos resultados.



Ejemplo 26.5 Potencia en un circuito de carga de una batería

En el circuito del ejemplo 26.4 (mostrado en la figura 26.11), calcule la potencia entregada por la fuente de 12 V y por la batería que se recarga, y determine la potencia disipada en cada resistor.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Se usan los resultados de la sección 25.5, donde se determinó que la potencia entregada *desde* una fem a un circuito es $\mathcal{E}I$ y la entregada *a* un resistor desde un circuito es $V_{ab}I = I^2R$. Los valores relevantes se conocen a partir del ejemplo 26.4.

EJECUTAR: La potencia de salida P_ε de la fem de la fuente de poder es

$$P_{\text{fuente}} = \mathcal{E}_{\text{fuente}}I_{\text{fuente}} = (12 \text{ V})(3 \text{ A}) = 36 \text{ W}$$

La potencia disipada en la resistencia interna r de la fuente es

$$P_{r\text{-fuente}} = I^2{}_{\text{fuente}}r_{\text{fuente}} = (3 \text{ A})^2(2 \ \Omega) = 18 \text{ W}$$

por lo que la potencia de salida *neta* de la fuente de poder es $P_{\text{neta}} = 36 \text{ W} - 18 \text{ W} = 18 \text{ W}$. De manera alternativa, del ejemplo 26.4, el voltaje terminal de la batería es $V_{ba} = 6$ V, por lo que la potencia de salida neta es

$$P_{\text{neta}} = V_{ba}I_{\text{fuente}} = (6 \text{ V})(3 \text{ A}) = 18 \text{ W}$$

La potencia de salida de la fem $\mathcal{E}$ de la batería que se carga es

$$P_{\text{fem}} = \mathcal{E}I_{\text{batería}} = (-5 \text{ V})(1 \text{ A}) = -5 \text{ W}$$

Esta es negativa porque la corriente de 1 A corre a través de la batería, del lado de mayor potencial al de menor potencial. (Como se mencionó en el ejemplo 26.4, la polaridad que se supuso para esta batería en la figura 26.11 era incorrecta). En la batería se almacena energía a medida que se carga. Se disipa más potencia en la resistencia interna de la batería; esta potencia es

$$P_{r\text{-batería}} = I^2{}_{\text{batería}}r_{\text{batería}} = (1 \text{ A})^2(1 \ \Omega) = 1 \text{ W}$$

Por lo tanto, la potencia total de alimentación a la batería es 1 W + |−5 W| = 6 W. De estos, 5 W representan energía útil almacenada en la batería; el resto se desperdicia en su resistencia interna.

La potencia disipada en la bombilla es

$$P_{\text{bombilla}} = I^2{}_{\text{bombilla}}R_{\text{bombilla}} = (2 \text{ A})^2(3 \ \Omega) = 12 \text{ W}$$

EVALUAR: Como comprobación, observe que se toma en cuenta toda la potencia de la fuente. De los 18 W de potencia neta de la fuente de energía eléctrica, 5 W se destinan a la recarga de la batería, 1 W se disipa en la resistencia interna de la batería, y 12 W se disipan en la bombilla.



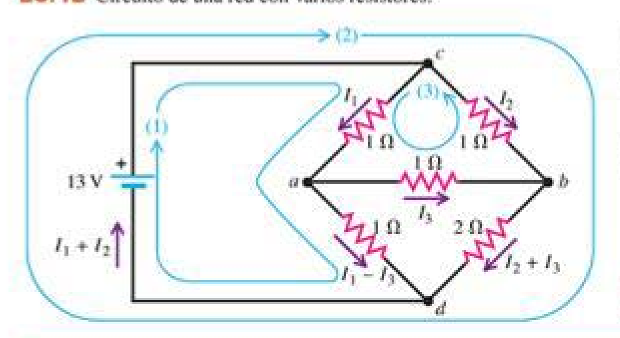
Ejemplo 26.6 Una red compleja

La figura 26.12 muestra un circuito "puente" del tipo descrito al principio de esta sección (véase la figura 26.6*b*). Calcule la corriente en cada resistor y la resistencia equivalente de la red de cinco resistores.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Esta red no es una combinación en serie ni una combinación en paralelo. De ahí que se deben utilizar las reglas de Kirchhoff para encontrar los valores de las incógnitas. Hay cinco corrientes desconocidas, pero aplicando la regla de los nodos en *a* y *b*, es posible representarlas en términos de tres corrientes desconocidas, I_1, I_2 e I_3, como se muestra en la figura 26.12.

26.12 Circuito de una red con varios resistores.



EJECUTAR: Se aplica la regla de las mallas a las tres espiras mostradas:

$$13 \text{ V} - I_1(1 \ \Omega) - (I_1 - I_3)(1 \ \Omega) = 0 \qquad (1)$$
$$-I_2(1 \ \Omega) - (I_2 + I_3)(2 \ \Omega) + 13 \text{ V} = 0 \qquad (2)$$
$$-I_1(1 \ \Omega) - I_3(1 \ \Omega) + I_2(1 \ \Omega) = 0 \qquad (3)$$

Una manera de resolver estas ecuaciones simultáneas es despejar I_2 de la ecuación (3), con lo que se obtiene $I_2 = I_1 + I_3$, y luego se sustituye esta expresión en la ecuación (2) para eliminar I_2. Entonces, tenemos

$$13 \text{ V} = I_1(2 \ \Omega) - I_3(1 \ \Omega) \qquad (1')$$
$$13 \text{ V} = I_1(3 \ \Omega) + I_3(5 \ \Omega) \qquad (2')$$

Ahora se elimina I_3 multiplicando la ecuación (1′) por 5 y sumando las dos ecuaciones, para obtener

$$78 \text{ V} = I_1(13 \ \Omega) \qquad I_1 = 6 \text{ A}$$

Este resultado se sustituye en la ecuación (1′) para obtener $I_3 = -1$ A; y de la ecuación (3) se obtiene $I_2 = 5$ A. El valor negativo de I_3 indica que su sentido es opuesto a nuestra suposición inicial.

La corriente total a través de la red es $I_1 + I_2 = 11$ A, y la caída de potencial a través de ella es igual a la fem de la batería, es decir, 13 V. Por lo tanto, la resistencia equivalente de la red es

$$R_{\text{eq}} = \frac{13 \text{ V}}{11 \text{ A}} = 1.2 \ \Omega$$

EVALUAR: Los resultados de I_1, I_2 e I_3 se comprueban sustituyendo sus valores en las tres ecuaciones (1), (2) y (3). ¿Qué es lo que observa?



Ejemplo 26.7 Diferencia de potencial en una red compleja

En el circuito del ejemplo 26.6 (figura 26.12), calcule la diferencia de potencial V_{ab}.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: La incógnita $V_{ab} = V_a - V_b$ es el potencial en el punto a con respecto al punto b. Para determinarlo, se comienza en el punto b y se sigue una trayectoria hacia a, sumando las subidas y caídas de potencial a medida que se avanza. Podemos seguir cualquiera de varias trayectorias posibles de b a a; el resultado debe ser el mismo para todas las trayectorias, lo que constituye una forma de comprobar nuestro resultado.

EJECUTAR: La trayectoria más sencilla de seguir es a través del resistor central de 1 Ω. En el ejemplo 26.6 encontramos que $I_3 = -1$ A, lo que demuestra que el sentido real de la corriente en este resistor es de derecha a izquierda. Así, al ir de b a a, hay una *caída* de potencial con magnitud $|I_3|R = (1\ \text{A})(1\ \Omega) = 1$ V. Por lo tanto, $V_{ab} = -1$ V, y el potencial en a tiene 1 V menos que el punto b.

EVALUAR: Para comprobar el resultado, se prueba una trayectoria de b a a que pase por los dos resistores inferiores. Las corrientes a través de ellos son:

$$I_2 + I_3 = 5\ \text{A} + (-1\ \text{A}) = 4\ \text{A} \quad \text{e}$$
$$I_1 - I_3 = 6\ \text{A} - (-1\ \text{A}) = 7\ \text{A}$$

por lo que

$$V_{ab} = -(4\ \text{A})(2\ \Omega) + (7\ \text{A})(1\ \Omega) = -1\ \text{V}$$

Usted podrá comprobar este resultado usando otra trayectoria de b a a.

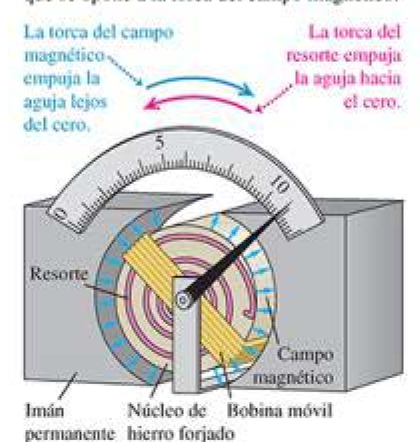


Evalúe su comprensión de la sección 26.2 En el ejemplo 26.6, reste la ecuación (1) de la (2). ¿A qué espira de la figura 26.12 corresponde esta ecuación? ¿Habría simplificado esta ecuación la solución del ejemplo 26.6?

26.13 Este amperímetro (arriba) y el voltímetro (abajo) son galvanómetros de d'Arsonval. La diferencia tiene que ver con sus conexiones internas (véase la figura 26.15).



26.14 Galvanómetro de d'Arsonval que muestra una bobina móvil a la que está sujeta una aguja; un imán permanente suministra un campo magnético de magnitud uniforme, y el resorte proporciona una torca restauradora que se opone a la torca del campo magnético.



26.3 Instrumentos de medición eléctrica

En dos capítulos hemos hablado de diferencia de potencial, corriente y resistencia; ahora es tiempo de decir algo acerca de cómo *medir* estas cantidades. Existen muchos dispositivos conocidos, como los tableros de automóviles, cargadores de baterías e instrumentos eléctricos de bajo costo, que miden la diferencia de potencial (el voltaje), la corriente o la resistencia usando un **galvanómetro de d'Arsonval** (figura 26.13). En la siguiente exposición será frecuente que lo llamemos simplemente *medidor*. En el campo magnético de un imán permanente se coloca una bobina móvil de alambre delgado (figura 26.14). Unido a la bobina hay un resorte, similar a la espiral del volante de equilibrio de un reloj. En la posición de equilibrio, sin corriente en la bobina, la aguja está en el cero. Cuando hay una corriente en la bobina, el campo magnético ejerce una torca sobre la bobina que es proporcional a la corriente. (En el capítulo 27 se verá con detalle esta interacción magnética). A medida que la bobina gira, el resorte ejerce una torca restauradora que es proporcional al desplazamiento angular.

Así, la desviación angular de la bobina y la aguja es directamente proporcional a la corriente en la bobina, y el dispositivo se puede calibrar para que mida corriente. La desviación máxima, normalmente de 90°, se denomina *desviación de escala completa*. Las características eléctricas esenciales del medidor son la corriente I_{fs} (por las siglas de *full scale* o escala completa) que se requiere para la desviación de escala completa (por lo común, es del orden de 10 μA a 10 mA) y la resistencia R_c (por la inicial de *coil*, bobina) de la bobina (por lo regular, del orden de 10 a 1000 Ω).

La desviación del medidor es proporcional a la *corriente* en la bobina. Si esta cumple la ley de Ohm, la corriente es proporcional a la *diferencia de potencial* entre las terminales de la bobina, y la desviación también es proporcional a esta diferencia de potencial. Por ejemplo, considere un medidor cuya bobina tenga una resistencia $R_c = 20.0\ \Omega$ y que se desvía la escala completa cuando la corriente en la bobina es $I_{fs} = 1.00$ mA. La diferencia de potencial correspondiente para la desviación de escala completa es

$$V = I_{fs}R_c = (1.00 \times 10^{-3}\ \text{A})(20.0\ \Omega) = 0.0200\ \text{V}$$

Amperímetros

El instrumento medidor de corriente se conoce como **amperímetro** (o miliamperímetro, o microamperímetro, etcétera, según su escala). *Un amperímetro siempre mide la corriente que pasa a través de él*. Un amperímetro *ideal*, como el que se estudió en la sección 25.4, tiene una resistencia igual a *cero*, por lo que si se incluyera en un

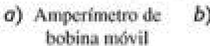
ramal de un circuito no se vería afectada la corriente que circula por el ramal. Los amperímetros reales siempre tienen una resistencia finita, pero es deseable que sea tan pequeña como sea posible.

Un medidor puede adaptarse para medir corrientes mayores que su lectura de escala completa si se conecta a él un resistor en paralelo (figura 26.15*a*) que desvíe parte de la corriente de la bobina del medidor. El resistor en paralelo se llama **resistor de derivación** o simplemente *derivación*, y se denota como R_{sh} (por las iniciales de *shunt*, que en inglés significa derivación).

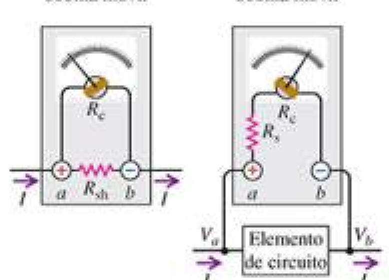
Suponga que se desea convertir un medidor con corriente de escala completa I_{fs} y resistencia de bobina R_c en un amperímetro con lectura de escala completa I_a. Para determinar la resistencia de derivación R_{sh} que se necesita, observe que, con la desviación de escala completa, la corriente total a través de la combinación en paralelo es I_a, la corriente a través de la bobina del medidor es I_{fs}, y la corriente que pasa a través de la derivación es la diferencia $I_a - I_{fs}$. La diferencia de potencial V_{ab} es la misma para ambas trayectorias; por lo tanto,

$$I_{fs}R_c = (I_a - I_{fs})R_{sh} \qquad \text{(para un amperímetro)} \qquad (26.7)$$

26.15 Uso del mismo medidor para medir *a*) corriente y *b*) voltaje.







Ejemplo 26.8 Diseño de un amperímetro



¿Qué resistencia de derivación se requiere para hacer que el medidor de 1.00 mA y 20.0 Ω descrito anteriormente sea un amperímetro con una escala de 0 a 50.0 mA?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Puesto que el medidor se emplea como amperímetro, sus conexiones internas corresponden a las de la figura 26.15*a*. La incógnita es la resistencia de derivación R_{sh}, la cual calcularemos usando la ecuación (26.7). El amperímetro debe manejar una corriente máxima $I_a = 50.0 \times 10^{-3}$ A. La resistencia de la bobina es $R_c = 20.0\ \Omega$, y el medidor presenta una desviación de escala completa cuando la corriente a través de la bobina es $I_{fs} = 1.00\ \Omega\ 10^{-3}$ A.

EJECUTAR: Se despeja R_{sh} de la ecuación (26.7) para obtener

$$R_{sh} = \frac{I_{fs}R_c}{I_a - I_{fs}} = \frac{(1.00 \times 10^{-3}\ \text{A})(20.0\ \Omega)}{50.0 \times 10^{-3}\ \text{A} - 1.00 \times 10^{-3}\ \text{A}}$$
$$= 0.408\ \Omega$$

EVALUAR: Es útil considerar como un todo la resistencia equivalente R_{eq} del amperímetro. De acuerdo con la ecuación (26.2),

$$R_{eq} = \left(\frac{1}{R_c} + \frac{1}{R_{sh}}\right)^{-1} = \left(\frac{1}{20.0\ \Omega} + \frac{1}{0.408\ \Omega}\right)^{-1}$$
$$= 0.400\ \Omega$$

La resistencia de derivación es tan pequeña en comparación con la resistencia de la bobina, que la resistencia equivalente es casi igual a la de derivación. El resultado es un amperímetro de baja resistencia equivalente con la escala deseada de 0 a 50.0 mA. Con desviación de escala completa, $I = I_a = 50.0$ mA, la corriente a través del galvanómetro es de 1.00 mA, la corriente a través del resistor de derivación es de 49.0 mA, y $V_{ab} = 0.0200$ V. Si la corriente I fuera *menor* que 50.0 mA, la corriente en la bobina y la desviación serían proporcionalmente menores.

Voltímetros

Este mismo medidor básico también se puede utilizar para medir la diferencia de potencial o *voltaje*. El dispositivo que mide el voltaje se llama **voltímetro**. Un voltímetro siempre mide la diferencia de potencial entre dos puntos a los que deben conectarse sus terminales. (El ejemplo 25.6 de la sección 25.4 describió lo que puede pasar si un voltímetro se conecta de manera incorrecta). Como se vio en la sección 25.4, un voltímetro ideal tiene resistencia *infinita*, por lo que si se le conecta entre dos puntos de un circuito no se alteraría ninguna de las corrientes. Los voltímetros reales siempre tienen una resistencia finita, pero un voltímetro debe tener una resistencia lo suficientemente grande para que al conectarlo a un circuito, las otras corrientes no cambien de manera apreciable.

Para el medidor descrito en el ejemplo 26.8, el voltaje a través de la bobina del medidor con desviación de escala completa es de solo $I_{fs}R_c = (1.00 \times 10^{-3}\ \text{A})(20.0\ \Omega) = 0.0200$ V. Esta escala se puede ampliar si se conecta un resistor R_s en *serie* con la bobina (figura 26.15*b*). Entonces, solo una fracción de la diferencia de potencial total parece cruzar la bobina, y el resto parece atravesar R_s. Para un voltímetro con lectura de escala completa V_V se necesita un resistor en serie R_s en la figura 26.15*b*, de manera que

$$V_V = I_{fs}(R_c + R_s) \qquad \text{(para un voltímetro)} \qquad (26.8)$$

Aplicación Electromiografía
En un músculo de la mano de este paciente se inserta una aguja fina que tiene dos electrodos. Usando un voltímetro sensible para medir la diferencia de potencial entre los electrodos, el médico puede conocer la actividad eléctrica de los músculos. Esta es una técnica importante para el diagnóstico de enfermedades neurológicas y neuromusculares.





Ejemplo 26.9 Diseño de un voltímetro

¿Qué resistencia en serie se requiere para convertir el medidor de 1.00 mA y 20.0 Ω, descrito anteriormente, en un voltímetro con una escala de 0 a 10.0 V?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Puesto que este medidor se va a usar como voltímetro, sus conexiones internas corresponden a las de la figura 26.15*b*. La incógnita es la resistencia en serie R_s. El voltaje máximo permisible a través del voltímetro es $V_V = 10.0$ V. Queremos que esto suceda cuando la corriente a través de la bobina sea $I_{fs} = 1.00 \times 10^{-3}$ A. Nuestra incógnita es la resistencia en serie R_s, la cual se obtiene con la ecuación (26.8).

EJECUTAR: De acuerdo con la ecuación (26.8),

$$R_s = \frac{V_V}{I_{fs}} - R_c = \frac{10.0\ \text{V}}{0.00100\ \text{A}} - 20.0\ \Omega = 9980\ \Omega$$

EVALUAR: Con desviación de escala completa, $V_{ab} = 10.0$ V, el voltaje a través del medidor es de 0.0200 V, el voltaje que cruza R_s es de 9.98 V, y la corriente que pasa por el voltímetro es de 0.00100 A. La mayor parte del voltaje aparece entre los extremos del resistor en serie. La resistencia equivalente preferentemente alta del medidor es $R_{eq} = 20.0\ \Omega + 9980\ \Omega = 10{,}000\ \Omega$. Un medidor de este tipo se describe como un medidor de "1000 ohms por volt", en referencia a la razón entre la resistencia y la desviación de escala completa. En operación normal, la corriente que cruza el elemento de circuito que se mide (I en la figura 26.15*b*) es mucho mayor que 0.00100 A, y la resistencia entre los puntos *a* y *b* en el circuito es mucho menor que 10,000 Ω. Así, el voltímetro solo retira una pequeña fracción de la corriente y casi no interfiere con el circuito sujeto a medición.

MasteringPHYSICS

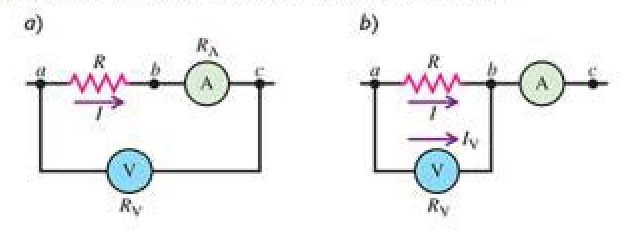
ActivPhysics 12.4: Using Ammeters and Voltmeters

Amperímetros y voltímetros en combinación

Es posible utilizar un voltímetro y un amperímetro juntos para medir la *resistencia* y la *potencia*. La resistencia R de un resistor es igual a la diferencia de potencial V_{ab} entre sus terminales, dividida entre la corriente I; es decir, $R = V_{ab}/I$. La potencia de alimentación P a cualquier elemento de circuito es el producto de la diferencia de potencial que lo cruza por la corriente que pasa por él: $P = V_{ab}I$. En principio, la forma más directa de medir R o P es con la medición simultánea de V_{ab} e I.

Con amperímetros y voltímetros prácticos, esto no es tan sencillo como parece. En la figura 26.16*a*, el amperímetro A lee la corriente I en el resistor R. El voltímetro V, sin embargo, lee la *suma* de la diferencia de potencial V_{ab} a través del resistor y la diferencia de potencial V_{bc} a través del amperímetro. Si se transfiere la terminal del voltímetro de *c* a *b*, como en la figura 26.16*b*, entonces el voltímetro lee correctamente la diferencia de potencial V_{ab}, pero ahora el amperímetro lee la *suma* de la corriente I en el resistor y la corriente I_V del voltímetro. De cualquier forma, se tiene que corregir la lectura de uno u otro instrumento, a menos que las correcciones sean tan insignificantes que se puedan ignorar.

26.16 Método del amperímetro-voltímetro para medir la resistencia.



Ejemplo 26.10 Medición de la resistencia I

El voltímetro en el circuito de la figura 26.16*a* da una lectura de 12.0 V y el amperímetro una de 0.100 A. Las resistencias del medidor son $R_V = 10{,}000\ \Omega$ (para el voltímetro) y $R_A = 2.00\ \Omega$ (para el amperímetro). ¿Cuáles son la resistencia R y la potencia disipada en el resistor?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: El amperímetro da una lectura de corriente $I = 0.100$ A a través del resistor, y el voltímetro da la lectura de la diferencia de potencial entre los puntos *a* y *c*. Si el amperímetro fuera *ideal* (es decir, si $R_A = 0$), habría una diferencia de potencial igual a cero entre *b* y *c*, y la lectura del voltímetro $V = 12.0$ V sería igual a la diferencia de potencial V_{ab} a través del resistor; la resistencia simplemente sería igual a $R = V/I = (12.0\ \text{V})/(0.100\ \text{A}) = 120\ \Omega$. Sin embargo, el amperímetro *no* es ideal (su resistencia es $R_A = 2.00\ \Omega$), por lo que la lectura que el voltímetro hace de V en realidad es la suma de las diferencias de potencial V_{bc} (a través del amperímetro) más V_{ab} (a través del resistor). Se usa la ley de Ohm para obtener el voltaje V_{bc}

a partir de la corriente y la resistencia conocidas. Después se despejan V_{ab} y la resistencia R. Así, se podrá calcular la potencia P en el resistor.

EJECUTAR: De acuerdo con la ley de Ohm, $V_{bc} = IR_A = (0.100 \text{ A})(2.00 \ \Omega) = 0.200 \text{ V}$ y $V_{ab} = IR$. La suma de estas es $V = 12.0$ V, por lo que la diferencia de potencial a través del resistor es $V_{ab} = V - V_{bc} = (12.0 \text{ V}) - (0.200 \text{ V}) = 11.8$ V. Por lo tanto, la resistencia es

$$R = \frac{V_{ab}}{I} = \frac{11.8 \text{ V}}{0.100 \text{ A}} = 118 \ \Omega$$

La potencia disipada en este resistor es

$$P = V_{ab}I = (11.8 \text{ V})(0.100 \text{ A}) = 1.18 \text{ W}$$

EVALUAR: Se puede confirmar este resultado de la potencia si se utiliza la fórmula alternativa $P = I^2R$. ¿Obtiene usted la misma respuesta?

Ejemplo 26.11 Medición de la resistencia II



Suponga que los medidores del ejemplo 26.10 están conectados a un resistor diferente como se ilustra en la figura 26.16*b*, y que las lecturas obtenidas en ellos son las mismas que las del ejemplo 26.10. ¿Cuál es el valor de esta nueva resistencia R y de la potencia disipada en el resistor?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: En el ejemplo 26.10 el amperímetro leía la corriente real a través del resistor, pero la lectura del voltímetro no era la misma que la diferencia de potencial a través del resistor. Ahora la situación es la contraria: la lectura del voltímetro $V = 12.0$ V indica la diferencia de potencial real V_{ab} a través del resistor, pero la lectura del amperímetro $I_A = 0.100$ A *no* es igual a la corriente I a través del resistor. La aplicación de la regla de los nodos en b en la figura 26.16*b* indica que $I_A = I + I_V$, donde I_V es la corriente a través del voltímetro. I_V se calcula a partir de los valores dados de V y la resistencia R_V del voltímetro, y ese valor se utiliza para determinar la corriente I en el resistor. Después, se determina la resistencia R a partir de I y la lectura del voltímetro, y se calcula la potencia como en el ejemplo 26.10.

EJECUTAR: Se tiene $I_V = V/R_V = (12.0 \text{ V})/(10{,}000 \ \Omega) = 1.20$ mA. La corriente real I en el resistor es $I = I_A - I_V = 0.100 \text{ A} - 0.0012 \text{ A} = 0.0988$ A, y la resistencia es

$$R = \frac{V_{ab}}{I} = \frac{12.0 \text{ V}}{0.0988 \text{ A}} = 121 \ \Omega$$

La potencia disipada en el resistor es

$$P = V_{ab}I = (12.0 \text{ V})(0.0988 \text{ A}) = 1.19 \text{ W}$$

EVALUAR: Con medidores ideales, nuestros resultados habrían sido $R = 12.0 \text{ V}/0.100 \text{ A} = 120 \ \Omega$ y $P = VI = (12.0 \text{ V}) \times (0.100 \text{ A}) = 1.2$ W tanto aquí como en el ejemplo 26.10. Los resultados reales (correctos) no son muy diferentes en este caso. Eso es porque el amperímetro y el voltímetro son casi ideales: en comparación con la resistencia R en estudio, la resistencia R_A del amperímetro es muy pequeña, y la resistencia R_V del voltímetro es muy grande. En estas condiciones, al considerar los medidores como ideales se obtienen resultados bastante buenos; un trabajo de precisión requiere cálculos como los realizados en estos dos ejemplos.

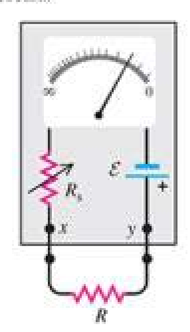
Óhmetros

Un método alternativo para medir la resistencia es utilizar un medidor de d'Arsonval en la configuración conocida como **óhmetro**, que consiste en un medidor, un resistor y una fuente (con frecuencia, una batería de linterna), conectados en serie (figura 26.17). La resistencia R que se va a medir se conecta entre las terminales x y y.

La resistencia en serie R_s es variable; se ajusta de manera que cuando las terminales x y y están en cortocircuito (es decir, cuando $R = 0$), el medidor muestra una desviación de escala completa. Cuando no hay nada conectado a las terminales x y y, de manera que el circuito entre tales puntos está *abierto* (es decir, cuando $R \rightarrow \infty$), no hay corriente y, por consiguiente, tampoco hay desviación. Para cualquier valor intermedio de R, la desviación del medidor depende del valor de R, y su escala se puede calibrar para leer en forma directa la resistencia R. Corrientes mayores corresponden a resistencias más pequeñas, por lo que esta escala lee hacia atrás en comparación con la escala que muestra la corriente.

En situaciones en las que se requiere mucha precisión, los instrumentos con medidores de d'Arsonval se han sustituido por instrumentos electrónicos que dan lecturas digitales directas. Los voltímetros digitales se fabrican con resistencia interna muy elevada, del orden de 100 MΩ. La figura 26.18 muestra un *multímetro* digital, un instrumento capaz de medir voltaje, corriente o resistencia en un intervalo muy amplio.

26.17 Circuito del óhmetro. El resistor R_s tiene una resistencia variable, como indica la flecha a través del símbolo del resistor. Para emplear el óhmetro, primero se conecta x directamente con y y se ajusta R_s hasta que la lectura del instrumento sea cero. Después se conectan x y y a través del resistor R y se lee la escala.



Potenciómetro

El *potenciómetro* es un instrumento que se utiliza para medir la fem de una fuente sin extraer corriente de esta; también tiene varias aplicaciones útiles. En esencia, un potenciómetro compensa una diferencia de potencial desconocida con una diferencia de potencial ajustable y medible.



26.18 Este multímetro digital puede usarse como voltímetro (escala en color rojo), amperímetro (escala amarilla) u óhmetro (escala verde).

El principio del potenciómetro se ilustra en forma de esquema en la figura 26.19*a*. Un alambre de resistencia *ab* con resistencia total R_{ab} está conectado permanentemente a las terminales de una fuente de fem conocida $\mathcal{E}_1$. Se conecta un contacto deslizante *c* a través del galvanómetro G a una segunda fuente cuya fem $\mathcal{E}_2$ habrá de medirse. Conforme el contacto *c* se desliza a lo largo del alambre con resistencia, varía la resistencia R_{cb} entre los puntos *c* y *b*; si el alambre de resistencia es uniforme, R_{cb} es proporcional a la longitud del alambre entre los puntos *c* y *b*. Para determinar el valor de $\mathcal{E}_2$, se desliza el contacto *c* hasta que se encuentra una posición en la que el galvanómetro no muestra desviación; esto corresponde a una corriente cero a través de $\mathcal{E}_2$. Con $I_2 = 0$, la regla de Kirchhoff de las mallas da

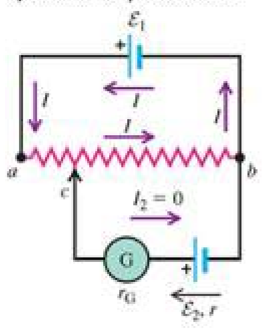
$$\mathcal{E}_2 = IR_{cb}$$

Con $I_2 = 0$, la corriente I producida por la fem $\mathcal{E}_1$ tiene el mismo valor sin importar cuál sea el valor de la fem $\mathcal{E}_2$. El dispositivo se calibra sustituyendo $\mathcal{E}_2$ por una fuente de fem conocida; después, es posible encontrar cualquier fem $\mathcal{E}_2$ desconocida midiendo la longitud del alambre *cb* con la cual $I_2 = 0$. Observe que para que esto funcione, V_{ab} debe ser mayor que $\mathcal{E}_2$.

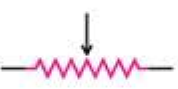
El término *potenciómetro* también se utiliza para cualquier resistor variable que tenga, por lo general, un elemento de resistencia circular y un contacto deslizable controlado por un eje giratorio y una perilla. En la figura 26.19*b* se muestra el símbolo para un potenciómetro.

26.19 Potenciómetro.

a) Circuito del potenciómetro



b) Símbolo para un potenciómetro en un circuito (resistor variable)



Evalúe su comprensión de la sección 26.3 Se desea medir la corriente y la diferencia de potencial a través del resistor de 2 Ω que se ilustra en la figura 26.12 (ejemplo 26.6 en la sección 26.2). *a*) Para ello, ¿cómo se deben conectar un amperímetro y un voltímetro? **i.** El amperímetro y el voltímetro se conectan en serie con el resistor de 2 Ω; **ii.** el amperímetro se conecta en serie con el resistor de 2 Ω, y el voltímetro se conecta entre los puntos *b* y *d*; **iii.** el amperímetro se conecta entre los puntos *b* y *d*, y el voltímetro en serie con el resistor de 2 Ω; **iv.** el amperímetro y el voltímetro se conectan entre los puntos *b* y *d*. *b*) ¿Qué resistencia deben tener estos instrumentos? **i.** Las resistencias del amperímetro y el voltímetro deben ser mucho mayores que 2 Ω; **ii.** la resistencia del amperímetro debe ser mucho mayor que 2 Ω y la del voltímetro mucho menor que 2 Ω; **iii.** la resistencia del amperímetro debe ser mucho menor que 2 Ω y la del voltímetro mucho mayor que 2 Ω; **iv.** las resistencias de ambos instrumentos deben ser mucho menores que 2 Ω. ❙

MP

26.4 Circuitos *R-C*

En los circuitos que hemos analizado hasta ahora hemos supuesto que todas las fem y las resistencias son *constantes* (independientes del tiempo), por lo que los potenciales, las corrientes y las potencias también son independientes del tiempo. Pero en el simple acto de cargar o descargar un capacitor se encuentra una situación en la que las corrientes, los voltajes y las potencias *sí* cambian con el tiempo.

Muchos dispositivos incorporan circuitos en los que un capacitor se carga y descarga consecutivamente. Entre estos se encuentran los semáforos intermitentes, las luces de emergencia de los automóviles y las unidades de flash electrónico. Comprender lo que pasa en esta clase de circuitos tiene gran importancia práctica.

Carga de un capacitor

La figura 26.20 muestra un circuito sencillo para cargar un capacitor. Un circuito como este, que tiene un resistor y un capacitor conectados en serie, se llama **circuito *R-C***. Se ha idealizado la batería (o fuente de poder) para que tenga una fem $\mathcal{E}$ constante y una resistencia interna igual a cero ($r = 0$), y se desprecia la resistencia de todos los conductores de conexión.

Se comienza con el capacitor descargado (figura 26.20*a*); después, en cierto instante inicial, $t = 0$, se cierra el interruptor, lo que completa el circuito y permite que la corriente alrededor de la espira comience a cargar el capacitor (figura 26.20*b*). Para todos los efectos prácticos, la corriente aparece en el mismo instante en todas las partes conductoras del circuito, y en todo momento la corriente es la misma en todas ellas.

CUIDADO **Las letras minúsculas significan que hay variación con el tiempo** Hasta ahora hemos trabajado con diferencias de potencial (voltajes), corrientes y cargas constantes, y hemos utilizado las letras *mayúsculas* V, I y Q, respectivamente, para denotar esas cantidades. Para diferenciar entre cantidades que varían con el tiempo y aquellas que son constantes, usaremos las letras *minúsculas* v, i y q para voltajes, corrientes y cargas, respectivamente, que varían con el tiempo. Se sugiere al lector que en sus trabajos siga esta convención.

Como el capacitor de la figura 26.20 al principio está descargado, la diferencia de potencial v_{bc} a través suyo es igual a cero en $t = 0$. En ese momento, según la regla de Kirchhoff de las mallas, el voltaje v_{ab} a través del resistor R es igual a la fem de la batería $\mathcal{E}$. La corriente inicial ($t = 0$) a través del resistor, que llamaremos I_0, está dada por la ley de Ohm: $I_0 = v_{ab}/R = \mathcal{E}/R$.

A medida que el capacitor se carga, su voltaje v_{bc} aumenta y la diferencia de potencial v_{ab} a través del resistor disminuye, lo que corresponde a una baja de la corriente. La suma de estos dos voltajes es constante e igual a $\mathcal{E}$. Después de un periodo largo, el capacitor está cargado por completo, la corriente baja a cero y la diferencia de potencial v_{ab} a través del resistor se vuelve cero. Luego aparece la totalidad de la fem $\mathcal{E}$ de la batería a través del capacitor y $v_{bc} = \mathcal{E}$.

Sea q la carga en el capacitor e i la corriente en el circuito al cabo de cierto tiempo t después de haber cerrado el interruptor. Asignamos el sentido positivo a la corriente en correspondencia al flujo de carga positiva hacia la placa izquierda del capacitor, como se aprecia en la figura 26.20*b*. Las diferencias de potencial instantáneas v_{ab} y v_{bc} son

$$v_{ab} = iR \qquad v_{bc} = \frac{q}{C}$$

Con la regla de Kirchhoff de las mallas, se obtiene

$$\mathcal{E} - iR - \frac{q}{C} = 0 \tag{26.9}$$

El potencial cae una cantidad iR conforme pasa de a a b, y una cantidad q/C al pasar de b a c. Al despejar i en la ecuación (26.9), se obtiene:

$$i = \frac{\mathcal{E}}{R} - \frac{q}{RC} \tag{26.10}$$

En el instante $t = 0$, cuando el interruptor se encuentra cerrado, el capacitor está descargado y $q = 0$. Al sustituir $q = 0$ en la ecuación (26.10), se encuentra que la corriente *inicial* I_0 está dada por $I_0 = \mathcal{E}/R$, como ya se había dicho. Si el capacitor no estuviera en el circuito, el último término de la ecuación (26.10) no estaría presente, por lo que la corriente sería *constante* e igual a $\mathcal{E}/R$.

Conforme la carga q se incrementa, el término q/RC se vuelve más grande y la carga del capacitor tiende a su valor final, al que llamaremos Q_f. La corriente disminuye y finalmente se vuelve cero. Cuando $i = 0$, la ecuación (26.10) da

$$\frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{Q_f}{RC} \qquad Q_f = C\mathcal{E} \tag{26.11}$$

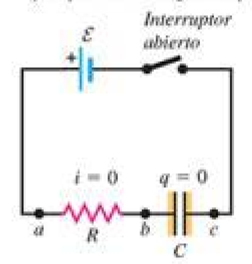
Observe que la carga final Q_f no depende de R.

En la figura 26.21, la corriente y la carga del capacitor se muestran como funciones del tiempo. En el instante en que el interruptor se cierra ($t = 0$), la corriente pasa de cero a su valor inicial $I_0 = \mathcal{E}/R$; después de eso, tiende gradualmente a cero. La carga del capacitor comienza en cero y poco a poco se acerca al valor final dado por la ecuación (26.11), $Q_f = C\mathcal{E}$.

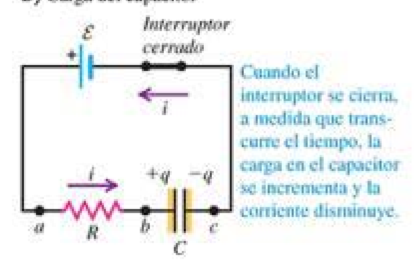
Es posible obtener expresiones generales para la carga q y la corriente i como funciones del tiempo. Con la elección del sentido positivo para la corriente (figura 26.20*b*), i es igual a la tasa a la que la carga positiva llega a la placa izquierda (po-

26.20 Carga de un capacitor. *a*) Antes de que se cierre el circuito, la carga q es igual a cero. *b*) Cuando el interruptor se cierra (en $t = 0$), la corriente pasa de cero a $\mathcal{E}/R$. A medida que transcurre el tiempo, q se acerca a Q_f, y la corriente i se acerca a cero.

a) Capacitor descargado al principio

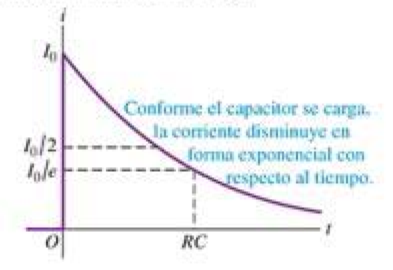


b) Carga del capacitor

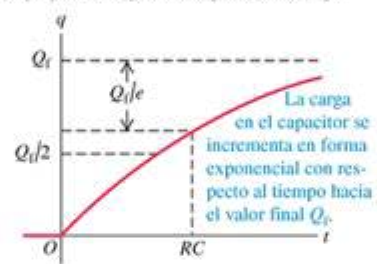


26.21 Corriente i y carga q del capacitor como funciones del tiempo para el circuito de la figura 26.20. La corriente inicial es I_0 y la carga inicial del capacitor vale cero. La corriente tiende a cero en forma asintótica, y la carga del capacitor se aproxima en forma asintótica a su valor final Q_f.

a) Gráfica de la corriente contra el tiempo para un capacitor en proceso de carga



b) Gráfica de la carga de un capacitor contra el tiempo para un capacitor en proceso de carga



sitiva) del capacitor, por lo que $i = dq/dt$. Al sustituir esta expresión en la ecuación (26.10), se tiene

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\mathcal{E}}{R} - \frac{q}{RC} = -\frac{1}{RC}(q - C\mathcal{E})$$

Al reordenar, se obtiene

$$\frac{dq}{q - C\mathcal{E}} = -\frac{dt}{RC}$$

y luego se integran ambos lados. Podemos cambiar las variables de integración a q' y t' con la finalidad de utilizar q y t para los límites superiores. Los límites inferiores son $q' = 0$ y $t' = 0$:

$$\int_0^q \frac{dq'}{q' - C\mathcal{E}} = -\int_0^t \frac{dt'}{RC}$$

Se efectúa la integración y se obtiene:

$$\ln\left(\frac{q - C\mathcal{E}}{-C\mathcal{E}}\right) = -\frac{t}{RC}$$

Se aplica la función exponencial (es decir, se toma el logaritmo inverso) y se despeja q, para obtener:

$$\frac{q - C\mathcal{E}}{-C\mathcal{E}} = e^{-t/RC}$$

$$q = C\mathcal{E}(1 - e^{-t/RC}) = Q_f(1 - e^{-t/RC}) \quad \text{(circuito } R\text{-}C\text{, capacitor cargándose)} \qquad (26.12)$$

La corriente instantánea i es justamente la derivada con respecto al tiempo de la ecuación (26.12):

$$i = \frac{dq}{dt} = \frac{\mathcal{E}}{R}e^{-t/RC} = I_0 e^{-t/RC} \quad \text{(circuito } R\text{-}C\text{, capacitor cargándose)} \qquad (26.13)$$

La carga y la corriente son ambas funciones *exponenciales* del tiempo. La figura 26.21*a* es la gráfica de la ecuación (26.13), y la figura 26.21*b* es la gráfica de la ecuación (26.12).

Constante de tiempo

Después de un tiempo igual a RC, la corriente en el circuito R-C ha disminuido a $1/e$ (alrededor de 0.368) de su valor inicial. En ese momento, la carga del capacitor ha alcanzado $(1 - 1/e) = 0.632$ de su valor final $Q_f = C\mathcal{E}$. Por lo tanto, el producto RC es una medida de la rapidez con que se carga el capacitor. El término RC recibe el nombre de **constante de tiempo**, o **tiempo de relajación**, del circuito, y se denota con τ:

$$\tau = RC \qquad \text{(constante de tiempo para un circuito } R\text{-}C\text{)} \qquad (26.14)$$

Cuando τ es pequeña, el capacitor se carga con rapidez; cuando es grande, el proceso de carga toma más tiempo. Si la resistencia es pequeña, es fácil que fluya la corriente y el capacitor se carga rápido. Si R está en ohms y C en farads, τ está en segundos.

En la figura 26.21*a*, el eje horizontal es una *asíntota* de la curva. Estrictamente hablando, i nunca llegará a ser exactamente cero. Pero cuanto más tiempo transcurra, más se acercará a ese valor. Después de un tiempo igual a $10RC$, la corriente ha bajado a 0.000045 de su valor inicial. De manera similar, la curva de la figura 26.21*b* se acerca a la asíntota, la recta horizontal punteada Q_f. La carga q nunca toma ese valor exactamente, pero después de un tiempo igual a $10RC$, la diferencia entre q y Q_f solo es de 0.000045 de Q_f. Se invita al lector a comprobar que el producto RC tiene unidades de tiempo.



PhET: Circuit Construction Kit (AC+DC)
PhET: Circuit Construction Kit (DC Only)
ActivPhysics 12.6: Capacitance
ActivPhysics 12.7: Series and Parallel Capacitors
ActivPhysics 12.8: Circuit Time Constants

Aplicación Marcapasos y capacitores
Esta radiografía muestra un marcapasos implantado en un paciente con problemas de funcionamiento en el nódulo sinoatrial, la parte del corazón que genera la señal eléctrica que provoca los latidos del corazón. El circuito del marcapasos contiene una batería, un capacitor y un interruptor controlado por computadora. Para mantener los latidos regulares, el interruptor descarga el capacitor una vez por segundo y envía un pulso eléctrico al corazón. Luego, el interruptor se abre para permitir la recarga del capacitor para el siguiente pulso.



Descarga de un capacitor

Ahora suponga que después de que el capacitor de la figura 26.21*b* ha adquirido una carga Q_0, se retira la batería del circuito *R-C* y se conectan los puntos *a* y *c* a un interruptor abierto (figura 26.22*a*). Después se cierra el interruptor y en el mismo instante se reajusta el cronómetro a $t = 0$; en ese momento, $q = Q_0$. Luego, el capacitor se *descarga* a través del resistor y su carga disminuye finalmente a cero.

Otra vez, i y q representan la corriente y la carga que varían con el tiempo en algún instante después de que se hizo la conexión. En la figura 26.22*b* se hace la misma elección del sentido positivo para la corriente que en la figura 26.20*b*. Entonces, la regla de Kirchhoff de las mallas da la ecuación (26.10), pero con $\mathcal{E} = 0$; es decir,

$$i = \frac{dq}{dt} = -\frac{q}{RC} \qquad (26.15)$$

La corriente i ahora es negativa; esto se debe a que la carga positiva q está saliendo de la placa izquierda del capacitor de la figura 26.22*b*, por lo que la corriente va en sentido opuesto al que se ilustra en la figura. En el instante $t = 0$, cuando $q = Q_0$, la corriente inicial es $I_0 = -Q_0/RC$.

Para obtener q como función del tiempo se reordena la ecuación (26.15), de nuevo se cambian los nombres de las variables a q' y t', y se procede a integrar. Esta vez los límites para q' son de Q_0 a q. Se obtiene

$$\int_{Q_0}^{q} \frac{dq'}{q'} = -\frac{1}{RC}\int_0^t dt'$$

$$\ln\frac{q}{Q_0} = -\frac{t}{RC}$$

$$q = Q_0 e^{-t/RC} \qquad \text{(circuito } R\text{-}C\text{, capacitor en descarga)} \qquad (26.16)$$

La corriente instantánea i es la derivada de esta con respecto al tiempo:

$$i = \frac{dq}{dt} = -\frac{Q_0}{RC}e^{-t/RC} = I_0 e^{-t/RC} \qquad \text{(circuito } R\text{-}C\text{, capacitor en descarga)} \qquad (26.17)$$

En la figura 26.23 están graficadas la corriente y la carga; ambas cantidades tienden a cero en forma exponencial con respecto al tiempo. Al comparar los resultados con las ecuaciones (26.12) y (26.13), se observa que las expresiones para la corriente son idénticas, aparte del signo de I_0. En la ecuación (26.16), la carga del capacitor tiende a cero de manera asintótica, en tanto que en la ecuación (26.12) es la *diferencia* entre q y Q la que tiende a cero en forma asintótica.

Hay consideraciones sobre la energía que amplían nuestra comprensión del comportamiento de un circuito *R-C*. Mientras el capacitor se carga, la tasa instantánea a la que la batería entrega energía al circuito es $P = \mathcal{E}i$. La tasa instantánea a la que la energía eléctrica se disipa en el resistor es i^2R, y la tasa a la que la energía se almacena en el capacitor es $iv_{bc} = iq/C$. Al multiplicar la ecuación (26.9) por i se obtiene:

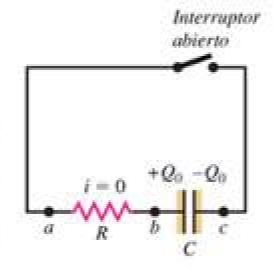
$$\mathcal{E}i = i^2R + \frac{iq}{C} \qquad (26.18)$$

Esto significa que de la potencia $\mathcal{E}i$ suministrada por la batería, una parte (i^2R) se disipa en el resistor y otra parte (iq/C) se almacena en el capacitor.

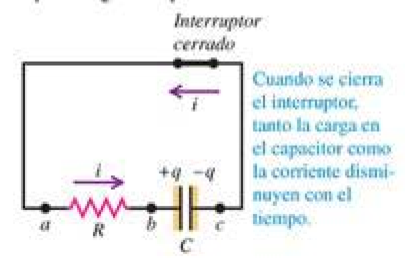
La energía *total* suministrada por la batería durante la carga del capacitor es igual a la fem $\mathcal{E}$ de la batería multiplicada por el total de la carga Q_f, o $\mathcal{E}Q_f$. La energía total almacenada en el capacitor, según la ecuación (24.9), es $Q_f\mathcal{E}/2$. Así, *exactamente la mitad* de la energía suministrada por la batería se almacena en el capacitor, y la otra mitad se disipa en el resistor. Esta división a la mitad de la energía no depende de C, R o $\mathcal{E}$. Tal resultado se puede verificar en detalle tomando la integral con respecto al tiempo de cada una de las cantidades de potencia en la ecuación (26.18) (véase el problema 26.88).

26.22 Descarga de un capacitor. *a*) Antes de que el interruptor esté cerrado en el instante $t = 0$, la carga del capacitor es Q_0 y la corriente es igual a cero. *b*) En el instante t, una vez que el interruptor se ha cerrado, la carga del capacitor es q y la corriente es i. El sentido real de la corriente es opuesto al sentido que se ilustra; i es negativa. Después de un tiempo prolongado, tanto q como i tienden a cero.

a) Capacitor inicialmente cargado

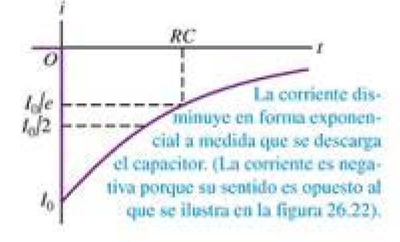


b) Descarga del capacitor



26.23 La corriente i y la carga q del capacitor como funciones del tiempo para el circuito de la figura 26.22. La corriente inicial es I_0 y la carga inicial del capacitor es Q_0. Tanto i como q tienden a cero de manera asintótica.

a) Gráfica de la corriente contra el tiempo para un capacitor en descarga



b) Gráfica de la carga del capacitor contra el tiempo para un capacitor en descarga



Ejemplo 26.12 Carga de un capacitor



Un resistor de 10 MΩ está conectado en serie con un capacitor de 1.0 μF y una batería con fem de 12.0 V. Antes de cerrar el interruptor en el instante $t = 0$, el capacitor está descargado. *a*) ¿Cuál es la constante de tiempo? *b*) ¿Qué fracción de la carga final Q_f hay en el capacitor en $t = 46$ s? *c*) ¿Qué fracción de la corriente inicial I_0 permanece en $t = 46$ s?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Esta es la misma situación que se ilustra en la figura 26.20, con $R = 10$ MΩ, $C = 1.0$ μF y $\mathcal{E} = 12.0$ V. La carga q y la corriente i varían con el tiempo, según se ilustra en la figura 26.21. Las incógnitas son *a*) la constante de tiempo τ, *b*) la razón q/Q_f en $t = 46$ s y *c*) la razón i/i_0 en $t = 46$ s. La ecuación (26.14) da τ. Para un capacitor que se está cargando, la ecuación (26.12) da q, y la ecuación (26.13) da i.

EJECUTAR: *a*) De acuerdo con la ecuación (26.14),

$$\tau = RC = (10 \times 10^6\ \Omega)(1.0 \times 10^{-6}\ \text{F}) = 10\ \text{s}$$

b) A partir de la ecuación (26.12),

$$\frac{q}{Q_f} = 1 - e^{-t/RC} = 1 - e^{-(46\ \text{s})/(10\ \text{s})} = 0.99$$

c) De acuerdo con la ecuación (26.13),

$$\frac{i}{I_0} = e^{-t/RC} = e^{-(46\ \text{s})/(10\ \text{s})} = 0.010$$

EVALUAR: Después de 4.6 constantes de tiempo, el capacitor tiene 99% de carga y la corriente ha disminuido al 1.0% de su valor inicial. El circuito se cargaría más rápidamente si se redujera la constante de tiempo usando una menor resistencia.

Ejemplo 26.13 Descarga de un capacitor



El resistor y el capacitor del ejemplo 26.12 se reconectan como se ilustra en la figura 26.22. Inicialmente, el capacitor tiene una carga de 5.0 μC y luego se descarga al cerrar el interruptor en $t = 0$. *a*) ¿En qué momento la carga será igual a 0.50 μC? *b*) ¿Cuál es la corriente en ese instante?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Ahora el capacitor se descarga, de modo que q e i varían con el tiempo como se ilustra en la figura 26.23, con $Q_0 = 5.0 \times 10^{-6}$ C. Nuevamente tenemos que $RC = \tau = 10$ s. Las incógnitas son *a*) el valor de t en el que $q = 0.50$ μC y *b*) el valor de i en ese instante. Primero despejamos t de la ecuación (26.16), y luego despejamos i de la ecuación (26.17).

EJECUTAR: *a*) Al despejar el momento t en la ecuación (26.16), se obtiene:

$$t = -RC \ln\frac{q}{Q_0} = -(10\ \text{s})\ln\frac{0.50\ \mu\text{C}}{5.0\ \mu\text{C}} = 23\ \text{s} = 2.3\tau$$

b) De la ecuación (26.17), con $Q_0 = 5.0\ \mu\text{C} = 5.0 \times 10^{-6}$ C,

$$i = -\frac{Q_0}{RC}e^{-t/RC} = -\frac{5.0 \times 10^{-6}\ \text{C}}{10\ \text{s}}e^{-2.3} = -5.0 \times 10^{-8}\ \text{A}$$

EVALUAR: La corriente en el inciso *b*) es negativa porque i tiene el signo opuesto cuando el capacitor se descarga que cuando se carga. Observe que hubiéramos evitado el cálculo de $e^{-t/RC}$ advirtiendo que, en el tiempo en cuestión, $q = 0.10Q_0$; según la ecuación (26.16), esto significa que $e^{-t/RC} = 0.10$.

Evalúe su comprensión de la sección 26.4 La energía almacenada en un capacitor es igual a $q^2/2C$. Cuando se descarga un capacitor, ¿qué fracción de la energía inicial permanece después de transcurrido un tiempo igual a una constante de tiempo? **i.** $1/e$; **ii.** $1/e^2$; **iii.** $1 - 1/e$, **iv.** $(1 - 1/e)^2$; **v.** la respuesta depende de cuánta energía había almacenada inicialmente.

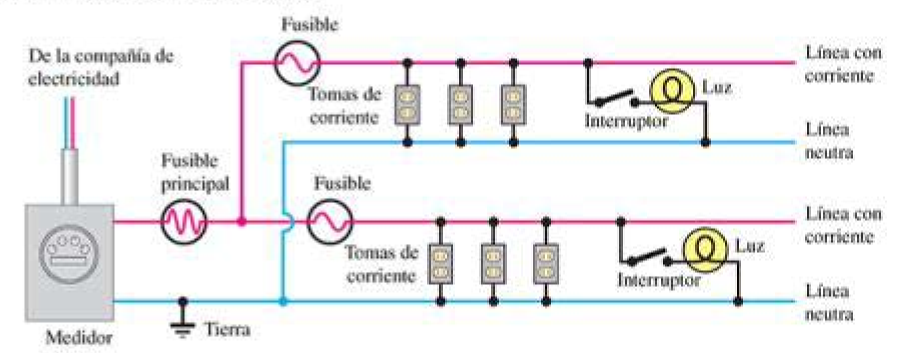


26.5 Sistemas de distribución de energía

Este capítulo termina con un análisis breve de los sistemas prácticos de distribución de energía eléctrica en hogares y automóviles. Los automóviles emplean corriente directa (cd), mientras que casi todos los sistemas domésticos, comerciales e industriales usan corriente alterna (ca) por la facilidad para elevar y reducir el voltaje mediante transformadores. La mayoría de los conceptos básicos de cableado se aplican a ambos tipos de sistemas. En el capítulo 31 hablaremos con más detalle de los circuitos de corriente alterna.

Las lámparas, los motores y otros aparatos que se deben operar siempre están conectados en *paralelo* a la fuente de poder (los cables provenientes de la compañía que suministra la electricidad a los hogares, o los cables de la batería y el alternador en un automóvil). Si los aparatos estuvieran conectados en serie, al apagarse uno se apagarían todos los demás (véase el ejemplo 26.2 de la sección 26.1). La figura 26.24 ilustra la idea básica del cableado de una casa. Un lado de la "línea", como se le llama al par de conductores, se designa como el lado *neutro*, y siempre está conectado a "tierra" en el tablero de servicio. Para las viviendas, la *tierra* es un electrodo real

26.24 Diagrama de una parte del sistema de cableado de una casa. Solo se ilustran dos circuitos del ramal; un sistema real podría tener de cuatro a 30 circuitos de ramal. Las bombillas y los aparatos se conectan en las tomas de corriente. No aparecen los alambres de conexión a tierra, los cuales normalmente no conducen corriente.



insertado en el suelo (que por lo general es un buen conductor) o, en ocasiones, está conectado a la tubería hidráulica de la casa. Los electricistas hablan de los lados "con corriente" y "neutro" de la línea. La mayoría de los sistemas de cableado modernos domésticos tienen *dos* líneas con corriente de polaridad opuesta con respecto a la neutra. Más adelante regresaremos a este detalle.

En Estados Unidos y Canadá, el voltaje doméstico es nominalmente de 120 V, y en Europa con frecuencia es de 240 V. (En el caso de la corriente alterna, que varía en forma sinusoidal con respecto al tiempo, estos números representan el voltaje *medio cuadrático*, que es $1/\sqrt{2}$ del voltaje máximo. Esto se estudiará con más detalle en la sección 31.1). La cantidad de corriente I consumida por un aparato dado está determinada por su potencia de alimentación P, dada por la ecuación (25.17): $P = VI$. De ahí que $I = P/V$. Por ejemplo, la corriente en una bombilla de 100 W es

$$I = \frac{P}{V} = \frac{100\ \text{W}}{120\ \text{V}} = 0.83\ \text{A}$$

La potencia de alimentación a esta bombilla en realidad está determinada por su resistencia R. Con base en la ecuación (25.18), que establece que $P = VI = I^2R = V^2/R$ para un resistor, la resistencia de la bombilla a su temperatura de operación es

$$R = \frac{V}{I} = \frac{120\ \text{V}}{0.83\ \text{A}} = 144\ \Omega \qquad \text{o bien,} \qquad R = \frac{V^2}{P} = \frac{(120\ \text{V})^2}{100\ \text{W}} = 144\ \Omega$$

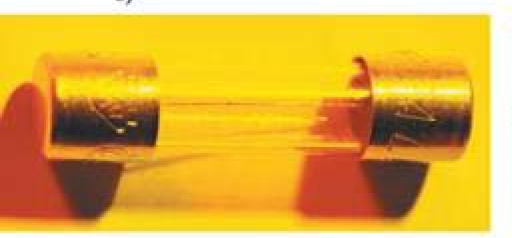
De manera similar, una *waflera* de 1500 W toma una corriente de (1500 W)/(120 V) = 12.5 A, y tiene una resistencia, a su temperatura de operación, de 9.6 Ω. Puesto que la temperatura depende de la resistividad, las resistencias de estos aparatos son considerablemente menores cuando se encuentran fríos. Si se mide con un óhmetro la resistencia de una bombilla de 100 W (cuya corriente pequeña ocasiona muy poco aumento de la temperatura), es probable que se obtenga un valor cercano a 10 Ω. Cuando se enciende una bombilla, esa baja resistencia ocasiona una intensa cantidad inicial de corriente hasta que el filamento se calienta. Por eso, una bombilla que está cerca de fundirse casi siempre lo hace en el momento de encenderse.

Sobrecargas en el circuito y cortocircuitos

La corriente máxima disponible de un circuito individual está limitada por la resistencia de los alambres. Como se mencionó en la sección 25.5, la pérdida de potencia I^2R en los alambres eleva la temperatura de estos, y en casos extremos esto puede provocar un incendio o fundir los alambres. Es común que los cables para las bombillas y tomas de corriente domésticas empleen alambres de calibre 12, que tienen un diámetro de 2.05 mm y pueden conducir en forma segura una corriente máxima de 20 A (sin sobrecalentarse). Los alambres de calibres mayores para la misma longitud tienen menor resistencia [véase la ecuación (25.10)]. Por ello, calibres como el 8 (3.26 mm) o 6 (4.11 mm) se usan para aparatos que toman mucha corriente, como secadoras de ropa, y el calibre 2 (6.54 mm) o más grueso se utiliza para los cables principales de entrada a la vivienda.

26.25 *a*) Un exceso de corriente fundiría el alambre delgado elaborado con una aleación de plomo y estaño que corre a lo largo de un fusible, en el interior de la carcasa transparente. *b*) El interruptor de este disyuntor se disparará si se excede la corriente máxima permisible.

a)



b)



Los fusibles y los interruptores de circuito brindan protección contra sobrecargas y calentamiento excesivo en los circuitos. Un *fusible* es un eslabón de una aleación de plomo y estaño que se funde a temperatura muy baja; el eslabón se funde y corta el circuito cuando se rebasa su corriente nominal (figura 26.25*a*). Un *interruptor de circuito* (o disyuntor) es un dispositivo electromecánico que realiza la misma función por medio de una tira electromagnética o bimetálica para "disparar" el interruptor y cortar el circuito cuando la corriente excede un valor específico (figura 26.25*b*). Los interruptores de circuito tienen la ventaja de que se pueden reconectar después de haberse disparado, mientras que un fusible fundido debe sustituirse.

Si el sistema tiene fusibles y a una misma toma se conectan demasiados aparatos que consumen mucha corriente, el fusible se quemará. *Nunca* sustituya un fusible por otro de mayor capacidad, pues se arriesga a que los cables se calienten en exceso y provoquen un incendio. La única solución segura es distribuir los equipos en varios circuitos. Es frecuente que las cocinas modernas tengan tres o cuatro circuitos separados de 20 A.

El contacto entre los alambres con corriente y neutro de la línea provoca un *cortocircuito*. Esa situación, que puede originarse por un aislamiento defectuoso o por algún tipo de desperfecto mecánico, ofrece una trayectoria de muy baja resistencia a la corriente y permite que fluya una corriente muy intensa que rápidamente fundiría los alambres y quemaría su aislamiento si un fusible o un interruptor de circuito no interrumpiera la corriente (véase el ejemplo 25.10 en la sección 25.5). Una situación igualmente peligrosa es un cable roto que interrumpa la trayectoria de la corriente, lo que crearía un *circuito abierto*. Esto es peligroso ya que en el punto de contacto intermitente se producen chispas.

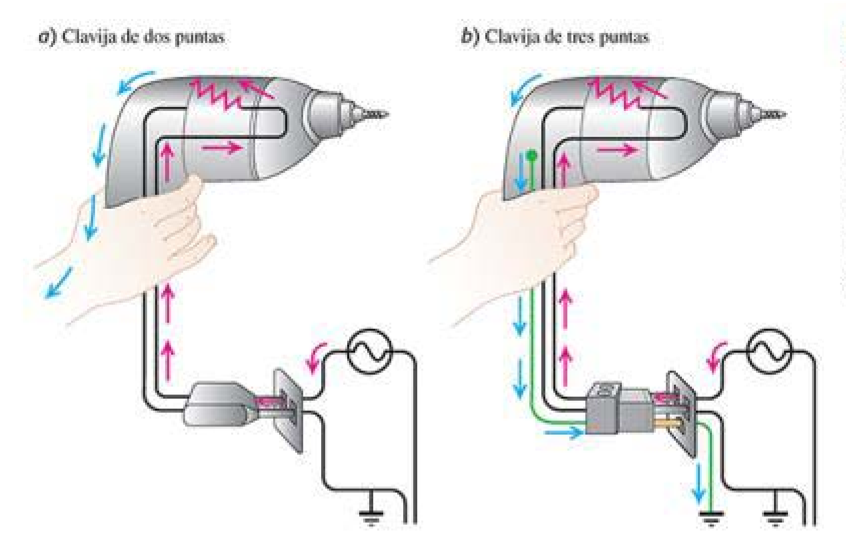
En las prácticas aceptadas de cableado, un fusible o interruptor *solo* se coloca en el lado con corriente de la línea, nunca en el lado neutro; de otro modo, si ocurriera un cortocircuito debido a un mal aislamiento u otro desperfecto, el fusible del lado de tierra podría quemarse. El lado con corriente seguiría en operación y representaría un peligro de descarga eléctrica si se toca el conductor vivo y un objeto conectado a tierra, como un tubo de agua. Por razones similares, el interruptor de pared de un elemento de iluminación siempre está en el lado cargado de la línea, nunca en el neutro.

Se tiene protección adicional contra los accidentes provocados por descargas, si se emplea un tercer conductor llamado *alambre de conexión a tierra (física)*, que se incluye en todos los sistemas de cableado actuales. Este conductor corresponde a la punta larga y redonda o con forma de U de la clavija de tres puntas de un aparato o de una herramienta eléctrica. Se conecta al lado neutro de la línea en el tablero de servicio. Normalmente, el alambre de conexión a tierra física no conduce corriente, sino que conecta a tierra la carcasa o el bastidor metálico del dispositivo. Si un conductor del lado con corriente de la línea hace contacto de manera accidental con el bastidor o la carcasa, el conductor de conexión a tierra provee una trayectoria para la corriente y el fusible se quema. Sin el alambre de conexión a tierra física, el bastidor estaría "vivo", es decir, estaría a un potencial de 120 V más alto con respecto a la tierra. En esas condiciones, si una persona toca el bastidor y un tubo de agua (o incluso el piso húmedo de un sótano) al mismo tiempo, podría recibir una descarga peligrosa (figura 26.26). En ciertas situaciones, en especial cuando las tomas se localizan en el exterior o cerca de un grifo o de tuberías de agua, se utiliza un tipo especial de interruptor de circuito llamado *interruptor de falla de tierra* (FGI o GFCI, por las siglas de *ground-fault interrupter*). Este dispositivo detecta la diferencia en la corriente entre los conductores con corriente y neutro (que normalmente es igual a cero), y se dispara cuando esta diferencia supera un valor muy pequeño, comúnmente de 5 mA.

Cableado de viviendas y automóviles

La mayoría de sistemas modernos de cableado doméstico en realidad utilizan una versión un tanto distinta de la que se acaba de describir. La compañía que suministra la electricidad proporciona *tres* conductores. Uno es neutro y los otros dos están a 120 V con respecto al neutro pero con polaridad opuesta, lo que da un voltaje de 240 V entre ellos. La compañía llama a esto una *línea de tres hilos*, en contraste con la línea de 120 V de dos hilos (más uno de conexión a tierra física) ya descrita. Con una línea de tres hilos es posible conectar lámparas y aparatos de 120 V entre el conductor neutro y cualquiera de los conductores con carga, y los dispositivos de alta potencia que requieran 240 V, como estufas eléctricas y secadoras de ropa, se conectan entre los dos alambres con carga.

Todo el análisis anterior se aplica directamente al cableado de los automóviles. El voltaje es de aproximadamente 13 V (corriente directa); la potencia la suministran la



26.26 *a*) Si un taladro que funciona mal se conecta a un enchufe de pared con una clavija de dos puntas, el operador podría recibir una descarga. *b*) Cuando el taladro defectuoso se conecta con una clavija de tres puntas, el operador no recibiría descarga porque la carga eléctrica fluiría a través del alambre de conexión a tierra física (en color verde) hacia la tercera punta, para luego pasar al suelo y no al cuerpo de la persona. Si la corriente a tierra es apreciable, el fusible se quema.

batería y el alternador, que carga la batería cuando el motor está en marcha. El lado neutro de cada circuito se conecta a la carrocería y al bastidor del vehículo. Para este voltaje tan bajo no se requiere un conductor adicional de conexión a tierra física como medida de seguridad. La disposición de los fusibles o interruptores de circuito es la misma, en principio, que en el cableado doméstico. A causa del bajo voltaje (menos energía por carga), se requiere más corriente (mayor número de cargas por segundo) para obtener la misma potencia; un faro de 100 W requiere una corriente de alrededor de (100 W)/(13 V) = 8 A.

Aunque en el análisis anterior hablamos de *potencia*, lo que compramos a la compañía de electricidad en realidad es *energía*. La potencia es energía transferida por unidad de tiempo; esto significa que la energía es la potencia media multiplicada por tiempo. La unidad habitual de la energía que vende la empresa es el kilowatt-hora (1 kW·h):

$$1\ \text{kW}\cdot\text{h} = (10^3\ \text{W})(3600\ \text{s}) = 3.6 \times 10^6\ \text{W}\cdot\text{s} = 3.6 \times 10^6\ \text{J}$$

En Estados Unidos, un kilowatt-hora normalmente cuesta de 8 a 27 centavos de dólar, dependiendo de la localidad y de la cantidad de energía consumida. Para operar continuamente una *waflera* de 1500 W (1.5 kW) durante 1 hora, se requieren 1.5 kW·h de energía; a 10 centavos por kilowatt-hora, el costo de la energía es de 15 centavos de dólar. El costo de operar una lámpara o un aparato durante un tiempo específico se calcula del mismo modo si se conoce la tarifa eléctrica. Sin embargo, muchos utensilios de cocina (incluidas las *wafleras*) se encienden y se apagan para mantener una temperatura constante, por lo que el consumo medio de potencia suele ser menor que la potencia nominal indicada en el aparato.



Ejemplo 26.14 Circuito en la cocina

En el mismo circuito de 20 A y 120 V se conectan un tostador de 1800 W, una sartén eléctrica de 1.3 kW y una lámpara de 100 W. *a*) ¿Cuánta corriente toma cada aparato y cuál es su resistencia correspondiente? *b*) ¿Esta combinación disparará el interruptor de circuito?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Cuando se conectan en el mismo circuito, los tres aparatos están en paralelo, de modo que el voltaje a través de cada uno es $V = 120$ V. Se calcula la corriente I en cada equipo por medio de la relación $P = VI$, donde P es la potencia de alimentación del dispositivo. Para obtener la resistencia R de cada uno, se usa la expresión $P = V^2/R$.

EJECUTAR: *a*) Para simplificar los cálculos de la corriente y resistencia, se observa que $I = P/V$ y $R = V^2/P$. Entonces,

$$I_{\text{tostador}} = \frac{1800\ \text{W}}{120\ \text{V}} = 15\ \text{A} \qquad R_{\text{tostador}} = \frac{(120\ \text{V})^2}{1800\ \text{W}} = 8\ \Omega$$

$$I_{\text{sartén}} = \frac{1300\ \text{W}}{120\ \text{V}} = 11\ \text{A} \qquad R_{\text{sartén}} = \frac{(120\ \text{V})^2}{1300\ \text{W}} = 11\ \Omega$$

$$I_{\text{lámpara}} = \frac{100\ \text{W}}{120\ \text{V}} = 0.83\ \text{A} \qquad R_{\text{lámpara}} = \frac{(120\ \text{V})^2}{100\ \text{W}} = 144\ \Omega$$

Para un voltaje constante, el dispositivo con la *menor* resistencia (el tostador en este caso) toma la mayor cantidad de corriente y recibe la mayor potencia.

Continúa

b) La corriente total a través de la línea es la suma de las corrientes tomadas por los tres aparatos:

$$I = I_{\text{tostador}} + I_{\text{sartén}} + I_{\text{lámpara}}$$
$$= 15\ \text{A} + 11\ \text{A} + 0.83\ \text{A} = 27\ \text{A}$$

Esto rebasa la capacidad nominal de 20 A en la línea, por lo que el interruptor se disparará.

EVALUAR: También se podría calcular la corriente total usando $I = P/V$ y dividiendo la potencia P entregada a los tres aparatos entre el voltaje:

$$I = \frac{P_{\text{tostador}} + P_{\text{sartén}} + P_{\text{lámpara}}}{V}$$
$$= \frac{1800\ \text{W} + 1300\ \text{W} + 100\ \text{W}}{120\ \text{V}} = 27\ \text{A}$$

Un tercer modo de calcular I es usar $I = V/R_{eq}$, donde R_{eq} es la resistencia equivalente de los tres aparatos en paralelo:

$$I = \frac{V}{R_{eq}} = (120\ \text{V})\left(\frac{1}{8\ \Omega} + \frac{1}{11\ \Omega} + \frac{1}{144\ \Omega}\right) = 27\ \text{A}$$

Dispositivos con estas demandas de corriente son comunes; por esa razón, las cocinas modernas tienen más de un circuito de 20 A. Para mantener corrientes seguras por debajo de 20 A, el tostador y la sartén eléctrica se deben conectar en circuitos distintos.

Evalúe su comprensión de la sección 26.5 Para impedir que se dispare el interruptor de circuito del ejemplo 26.14, un técnico electricista lo sustituye por otro de 40 A. ¿Es razonable hacer esto?



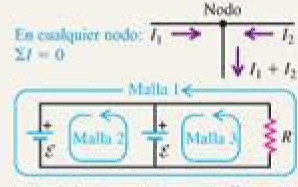
Resistores en serie y en paralelo: Cuando se conectan en serie varios resistores $R_1, R_2, R_3, \ldots$, la resistencia equivalente R_{eq} es la suma de las resistencias individuales. En una conexión en serie fluye la misma *corriente* a través de todos los resistores. Cuando se conectan en paralelo varios resistores, el recíproco de la resistencia equivalente R_{eq} es la suma del recíproco de las resistencias individuales. Todos los resistores en una conexión en paralelo tienen la misma *diferencia de potencial* entre sus terminales. (Véase los ejemplos 26.1 y 26.2).

$$R_{eq} = R_1 + R_2 + R_3 + \cdots \quad (26.1)$$
(resistores en serie)

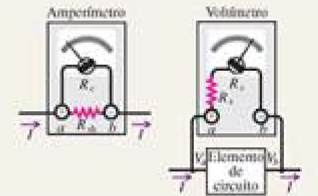
$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \cdots \quad (26.2)$$
(resistores en paralelo)

Reglas de Kirchhoff: La regla de Kirchhoff de los nodos se basa en la conservación de la carga. Establece que la suma algebraica de las corrientes en un nodo debe ser igual a cero. La regla de Kirchhoff de las mallas se basa en la conservación de la energía y la naturaleza conservativa de los campos electrostáticos. Establece que la suma algebraica de las diferencias de potencial alrededor de una espira debe ser igual a cero. Al aplicar las reglas de Kirchhoff, es esencial tener cuidado con los signos. (Véase los ejemplos 26.3 a 26.7).

$$\sum I = 0 \quad \text{(regla de los nodos)} \quad (26.5)$$
$$\sum V = 0 \quad \text{(regla de las mallas)} \quad (26.6)$$



Instrumentos de medición eléctrica: En un galvanómetro de d'Arsonval, la desviación es proporcional a la corriente en la bobina. Para tener una escala de corriente más amplia, se agrega un resistor de derivación, de manera que parte de la corriente se desvíe de la bobina del medidor. Un instrumento de este tipo se llama amperímetro. Si la bobina y cualquier resistencia adicional en serie cumplen la ley de Ohm, el instrumento también se puede calibrar para que lea diferencias de potencial o voltaje; en tal caso, recibe el nombre de voltímetro. Un buen amperímetro tiene resistencia muy baja; un buen voltímetro tiene resistencia muy alta. (Véase los ejemplos 26.8 a 26.11).



Circuitos *R-C*: Cuando un capacitor se carga mediante una batería en serie con un resistor, la corriente y la carga en el capacitor no son constantes. La carga tiende a su valor final de manera asintótica, y la corriente tiende a cero del mismo modo. La carga y la corriente en el circuito están dadas por las ecuaciones (26.12) y (26.13). Después de un tiempo $\tau = RC$, la carga se ha acercado a menos de $1/e$ de su valor final. Este tiempo se llama constante de tiempo o tiempo de relajación del circuito. Cuando se descarga el capacitor, la carga y la corriente están dadas como función del tiempo por las ecuaciones (26.16) y (26.17). La constante de tiempo es la misma en la carga y en la descarga. (Véase los ejemplos 26.12 y 26.13).

Capacitor en carga:

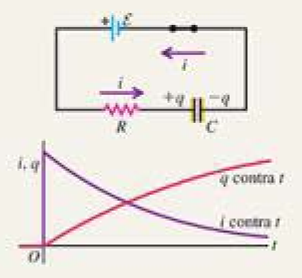
$$q = C\mathcal{E}\left(1 - e^{-t/RC}\right) = Q_f\left(1 - e^{-t/RC}\right) \quad (26.12)$$

$$i = \frac{dq}{dt} = \frac{\mathcal{E}}{R}e^{-t/RC} = I_0 e^{-t/RC} \quad (26.13)$$

Capacitor en descarga:

$$q = Q_0 e^{-t/RC} \quad (26.16)$$

$$i = \frac{dq}{dt} = -\frac{Q_0}{RC}e^{-t/RC} = I_0 e^{-t/RC} \quad (26.17)$$



Cableado de una casa: En los sistemas de cableado doméstico, los diversos aparatos eléctricos están conectados en paralelo a través de la línea de energía, que consiste en un par de conductores, uno "con corriente" y otro "neutro". Además, por seguridad se incluye un alambre "a tierra física". La corriente máxima permisible en un circuito está determinada por el tamaño de los alambres y la temperatura máxima que pueden tolerar. Los fusibles e interruptores de circuito dan seguridad contra un exceso de corriente y el incendio que podría resultar. (Véase el ejemplo 26.14).





PROBLEMA PRÁCTICO Dos capacitores y dos resistores

Un capacitor de 2.40 μF y otro de 3.60 μF están conectados en serie. *a*) Se coloca una carga de 5.20 mC a cada capacitor. ¿Cuál es la energía almacenada en ambos capacitores? *b*) Se conecta un resistor de 655 Ω a las terminales de la combinación de capacitores y un voltímetro con una resistencia de $4.58 \times 10^4\ \Omega$ a través del resistor. ¿Cuál es la razón de cambio de la energía almacenada en los capacitores justo después de realizar la conexión? *c*) ¿Cuánto tiempo después de efectuada la conexión ha disminuido la energía almacenada en el capacitor a $1/e$ de su valor inicial? *d*) En el instante calculado en el inciso *c*), ¿cuál es la razón de cambio en la energía almacenada en los capacitores?

GUÍA DE SOLUCIÓN

Véase el área de estudio MasteringPhysics® para consultar una solución con Video Tutor.



IDENTIFICAR y PLANTEAR

1. Los dos capacitores actúan como uno equivalente (véase la sección 24.2), y el resistor y el voltímetro actúan como un solo resistor equivalente. Elija las ecuaciones que le permitan calcular los valores de estos elementos de circuito equivalentes.
2. La ecuación (24.9) permite conocer la energía almacenada en el capacitor. Las ecuaciones (26.16) y (26.17) dan la carga y corriente del capacitor en función del tiempo. Se usan estas ecuaciones para obtener las soluciones de los diferentes incisos de este problema. (*Sugerencia:* Considere que la tasa a la cual la energía se pierde por los capacitores es igual a la tasa a la cual la energía se disipa en las resistencias).

EJECUTAR

3. Calcule la energía almacenada en $t = 0$.
4. Calcule la razón de cambio de la energía almacenada en $t = 0$.
5. Calcule el valor de t en el cual la energía almacenada tiene $1/e$ del valor determinado en el paso 3.
6. Calcule la razón de cambio de la energía almacenada en el instante obtenido en el paso 5.

EVALUAR

7. Compruebe los resultados de los pasos 4 y 6 calculando la razón de cambio de diferente manera. (*Sugerencia:* Considere que la razón de cambio de la energía almacenada U es dU/dt).

Problemas

Para tareas asignadas por el profesor, visite www.masteringphysics.com



•, ••, •••: Problemas de dificultad creciente. **PA**: Problemas acumulativos que incorporan material de capítulos anteriores. **CALC**: Problemas que requieren cálculo. **BIO**: Problemas de ciencias biológicas.

PREGUNTAS PARA ANÁLISIS

P26.1 ¿En cuál bombilla de 120 V el filamento tiene mayor resistencia: en una de 60 W o en una de 120 W? Si las dos bombillas se conectan en serie a una línea de 120 V, ¿a través de cuál bombilla habrá una mayor caída de voltaje? ¿Y si se conectan en paralelo? Explique su razonamiento.

P26.2 Dos bombillas de 120 V, una de 25 W y otra de 200 W, se conectaron en serie a través de una línea de 240 V. En ese momento parecía una buena idea, pero una bombilla se fundió casi de inmediato. ¿Cuál fue y por qué?

P26.3 Se conectan varias bombillas idénticas a una batería de linterna. *a*) ¿Qué pasa con el brillo de cada bombilla a medida que se agregan más y más de ellas al circuito, si se conectan **i.** en serie, y **ii.** en paralelo? *b*) ¿La batería durará más si las bombillas están en serie o en paralelo? Explique su razonamiento.

P26.4 En el circuito que se ilustra en la figura P26.4 se conectan tres bombillas idénticas a una batería de linterna. ¿Cómo se compara la luminosidad de las bombillas? ¿A través de cuál bombilla pasa la mayor corriente? ¿Cuál bombilla tiene la mayor diferencia de potencial entre sus terminales? ¿Qué pasa si la bombilla A se desenrosca de su entrada? ¿Y si lo mismo se hace con la bombilla B? ¿Y con la C? Explique su razonamiento.

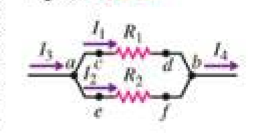
Figura **P26.4**

P26.5 Si dos resistores R_1 y R_2 ($R_2 > R_1$) están conectados en serie como se ilustra en la figura P26.5, ¿cuál de los siguientes enunciados es verdadero? En cada caso, dé una justificación para su respuesta. *a*) $I_1 = I_2 = I_3$. *b*) La corriente es mayor en R_1 que en R_2. *c*) El consumo de potencia eléctrica es el mismo para ambos resistores. *d*) El consumo de potencia eléctrica es mayor en R_2 que en R_1. *e*) La caída de potencial es la misma a través de ambos resistores. *f*) El potencial en el punto a es el mismo que en el punto c. *g*) El potencial en el punto b es menor que en el punto c. *h*) El potencial en el punto c es menor que en el punto b.

Figura **P26.5**

P26.6 Si dos resistores R_1 y R_2 ($R_2 > R_1$) se conectan en paralelo como se ilustra en la figura P26.6, ¿cuál de los siguientes enunciados debe ser verdad? En cada caso, justifique su respuesta. *a*) $I_1 = I_2$. *b*) $I_3 = I_4$. *c*) La corriente es mayor en R_1 que en R_2. *d*) La tasa de consumo de energía eléctrica es la misma para ambos resistores. *e*) La tasa de consumo de energía eléctrica es mayor en R_2 que en R_1. *f*) $V_{cd} = V_{ef} = V_{ab}$. *g*) El punto c está a un potencial mayor que el punto d. *h*) El punto f está a un potencial mayor que el punto e. *i*) El punto c está a un potencial mayor que el punto e.

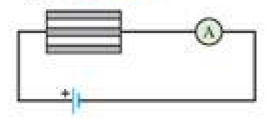
Figura **P26.6**



P26.7 ¿Por qué baja la intensidad de la luz de los faros de un automóvil cuando este se enciende?

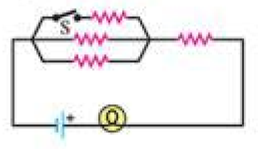
P26.8 Un resistor consiste en tres tiras de metal idénticas conectadas como se ilustra en la figura P26.8. Si se corta una de ellas, ¿la lectura del amperímetro registra un incremento, una disminución o permanece sin cambio? ¿Por qué?





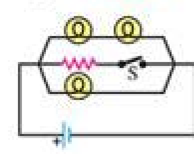
P26.9 Se conecta una bombilla en el circuito que se ilustra en la figura P26.9. Si se cierra el interruptor S, ¿la luminosidad de la bombilla aumenta, disminuye o permanece igual? Explique por qué.

Figura **P26.9**



P26.10 Una batería real con resistencia interna que no es despreciable se conecta a través de una bombilla, como se indica en la figura P26.10. Cuando se cierra el interruptor S, ¿qué pasa con la luminosidad de la bombilla? ¿Por qué?

Figura **P26.10**



P26.11 Si la batería de la pregunta para análisis P26.10 es ideal, sin resistencia interna, ¿qué ocurrirá con la luminosidad de la bombilla cuando se cierre S? ¿Por qué?

P26.12 Para el circuito que se ilustra en la figura P26.12, ¿qué le sucede a la brillantez de las bombillas cuando se cierra el interruptor S si la batería *a*) no tiene resistencia interna, y *b*) tiene resistencia interna que no es despreciable? Explique por qué.

Figura **P26.12**

P26.13 ¿Es posible conectar resistores juntos de forma que no se puedan reducir a alguna combinación de conexiones en serie y en paralelo? Si es así, dé ejemplos, y si no, diga por qué.

P26.14 El sentido de la corriente en una batería se invierte si se conecta a una segunda batería de mayor fem con las terminales positivas de las dos baterías juntas. Cuando el sentido de la corriente de una batería se invierte, ¿su fem también lo hace? ¿Por qué?

P26.15 En un flash de dos celdas, las baterías por lo general están conectadas en serie. ¿Por qué no se conectan en paralelo? ¿Qué posible ventaja habría si se conectaran varias baterías idénticas en paralelo?

P26.16 Cuanto más grande es el diámetro del alambre utilizado en los sistemas de cableado domésticos, mayor es la corriente máxima que puede transportar con seguridad. ¿Por qué? ¿La corriente máxima permisible depende de la longitud del alambre? ¿Depende del material del que esté hecho el alambre? Explique su razonamiento.

P26.17 La fem de una batería de linterna se mantiene aproximadamente constante con el tiempo, pero su resistencia interna se incrementa con el tiempo y el uso. ¿Qué clase de medidor se emplearía para probar qué tan nueva es una batería?

P26.18 ¿Es posible tener un circuito en el que la diferencia de potencial a través de las terminales de una batería en el circuito sea igual a cero? Si así fuera, dé un ejemplo. Si no, explique por qué.

P26.19 Verifique que la constante de tiempo *RC* tiene unidades de tiempo.

P26.20 Para resistencias muy grandes, es fácil construir circuitos *R-C* que tengan constantes de tiempo de varios segundos o minutos. ¿Cómo se utilizaría este hecho para medir resistencias muy grandes, tan grandes como para medirlas con métodos más convencionales?

P26.21 Cuando un capacitor, una batería y un resistor se conectan en serie, ¿el resistor afecta la carga máxima que se almacena en el capacitor? ¿Por qué? ¿Qué finalidad tiene el resistor?

EJERCICIOS

Sección 26.1 Resistores en serie y en paralelo

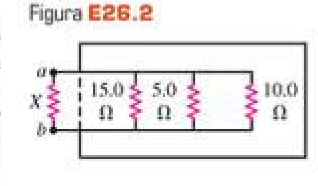
26.1 •• Un alambre uniforme de resistencia R se corta en tres piezas de igual longitud. Una de ellas se dobla en círculo y se conecta entre las otras dos (figura E26.1). ¿Cuál es la resistencia entre los extremos opuestos a y b?

Figura **E26.1**



26.2 •• La refacción de una máquina tiene un resistor X que sobresale a través de una abertura lateral. Este resistor está conectado a otros tres resistores, como se ilustra en la figura E26.2. Un óhmetro conectado a través de a y b arroja una lectura de 2.00 Ω. ¿Cuál es la resistencia de X?

Figura **E26.2**

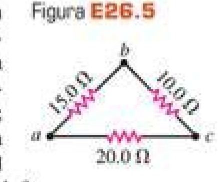


26.3 • Un resistor con $R_1 = 25.0\ \Omega$ está conectado a una batería que tiene una resistencia interna despreciable, y la energía eléctrica se disipa en R_1 a una tasa de 36.0 W. Si un segundo resistor con $R_2 = 15.0\ \Omega$ se conecta en serie con R_1, ¿cuál es la tasa total a la cual se disipa la energía eléctrica en los dos resistores?

26.4 • Un resistor de 32 Ω y otro de 20 Ω están conectados en paralelo, y la combinación se conecta a través de una línea de 240 V de cd. *a*) ¿Cuál es la resistencia de la combinación en paralelo? *b*) ¿Cuál es la corriente total a través de la combinación en paralelo? *c*) ¿Cuál es la corriente que pasa a través de cada resistor?

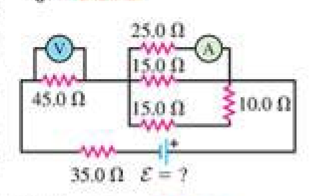
26.5 • En la figura E26.5 se muestra un arreglo triangular de resistores. ¿Qué corriente tomaría este arreglo de una batería de 35.0 V con resistencia interna despreciable, si se conecta a través de *a*) *ab*; *b*) *bc*; *c*) *ac*? *d*) Si la batería tiene una resistencia interna de 3.00 Ω, ¿qué corriente tomaría el arreglo si la batería se conectara a través de *bc*?

Figura **E26.5**



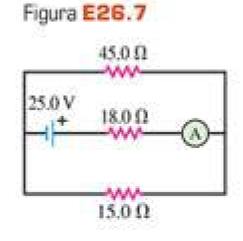
26.6 •• Para el circuito que se presenta en la figura E26.6, los dos medidores son ideales, la batería no tiene resistencia interna apreciable y el amperímetro da una lectura de 1.25 A. *a*) ¿Cuál es la lectura del voltímetro? *b*) ¿Cuál es la fem $\mathcal{E}$ de la batería?

Figura **E26.6**



26.7 •• Para el circuito que se ilustra en la figura E26.7, determine la lectura del amperímetro ideal si la batería tiene una resistencia interna de 3.26 Ω.

Figura **E26.7**



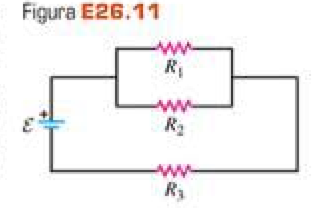
26.8 • Tres resistores con resistencias de 1.60, 2.40 y 4.80 Ω están conectados en paralelo a una batería de 28.0 V que tiene resistencia interna despreciable. Calcule *a*) la resistencia equivalente de la combinación; *b*) la corriente en cada resistor; *c*) la corriente total a través de la batería; *d*) el voltaje a través de cada resistor; *e*) la potencia disipada en cada resistor. *f*) ¿Cuál resistor disipa la mayor cantidad de potencia: el de mayor resistencia o el de menor resistencia? Explique por qué debe ser así.

26.9 • Ahora, los tres resistores del ejercicio 26.8 están conectados en serie a la misma batería. Responda las mismas preguntas para esta situación.

26.10 •• **Potencia nominal de un resistor.** La *potencia nominal* de un resistor es la potencia máxima que este puede disipar de forma segura sin que se eleve demasiado la temperatura y dañe al resistor. *a*) Si la potencia nominal de un resistor de 15 kΩ es de 5.0 W, ¿cuál es la diferencia de potencial máxima permisible a través de las terminales del resistor? *b*) Un resistor de 9.0 kΩ va a conectarse a través de una diferencia de potencial de 120 V. ¿Qué potencia nominal se requiere? *c*) A través de una diferencia de potencial variable se conectan en serie dos resistores, uno de 100.0 Ω y otro de 150.0 Ω, ambos con potencia nominal de 2.00 W. ¿Cuál es la máxima diferencia de potencial que se puede establecer sin que se caliente en exceso ninguno de los resistores, y cuál es la tasa de calentamiento generado en cada uno en tales condiciones?

26.11 • En la figura E26.11, $R_1 = 3.00\ \Omega$, $R_2 = 6.00\ \Omega$ y $R_3 = 5.00\ \Omega$. La batería tiene resistencia interna despreciable. La corriente I_2 a través de R_2 es de 4.00 A. *a*) Determine las corrientes I_2 e I_3. ¿Cuál es la fem de la batería?

Figura **E26.11**



26.12 •• En la figura E26.11 la batería tiene una fem de 25.0 V y resistencia interna despreciable. $R_1 = 5.00\ \Omega$. La corriente a través de R_1 es de 1.50 A y la corriente a través de $R_3 = 4.50$ A. ¿Cuáles son las resistencias R_2 y R_3?

26.13 • Calcule la resistencia equivalente de la red de la figura E26.13, y obtenga la corriente en cada resistor. La batería tiene una resistencia interna despreciable.

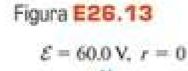
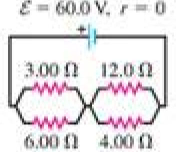



Figura **E26.13**

26.14 • Calcule la resistencia equivalente de la red de la figura E26.14, y determine la corriente en cada resistor. La batería tiene una resistencia interna despreciable.

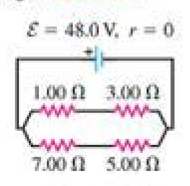


Figura **E26.14**

26.15 • En el circuito de la figura E26.15, cada resistor representa una bombilla. Sea $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = 4.50\ \Omega$ y $\mathcal{E} = 9.00$ V. *a*) Calcule la corriente en cada bombilla. *b*) Encuentre la potencia disipada por cada bombilla. ¿Cuál, o cuáles, de estas es (son) la(s) más brillante(s)? *c*) Ahora se retira la bombilla R_4 del circuito, dejando un hueco en el alambre en la posición en que estaba. Ahora, ¿cuál es la corriente en cada una de las bombillas restantes R_1, R_2 y R_3? *d*) Sin la bombilla R_4, ¿cuál es la potencia disipada en cada una de las bombillas restantes? *e*) Como resultado de la remoción de R_4, ¿cuál(es) bombilla(s) brilla(n) más? ¿Cuál(es) brilla(n) menos? Analice por qué hay diferentes efectos en las distintas bombillas.

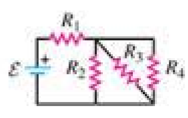


Figura **E26.15**

26.16 • Considere el circuito de la figura E26.16. La corriente a través del resistor de 6.00 Ω es de 4.00 A, en el sentido que se indica. ¿Cuáles son las corrientes a través de los resistores de 25.0 y 20.0 Ω?

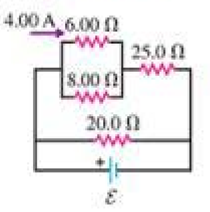


Figura **E26.16**

26.17 • En el circuito que se ilustra en la figura E26.17, el voltaje a través del resistor de 2.00 Ω es de 12.0 V. ¿Cuáles son los valores de la fem de la batería y de la corriente a través del resistor de 6.00 Ω?

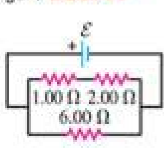


Figura **E26.17**

26.18 • **Bombilla de tres intensidades.** Una bombilla de tres intensidades tiene tres niveles de luminosidad (baja, media y alta), pero solo dos filamentos. *a*) Una bombilla de tres intensidades particular conectada a través de una línea de 120 V puede disipar 60 W, 120 W o 180 W. Describa cómo están arreglados los dos filamentos de la bombilla y calcule la resistencia de cada uno. *b*) Suponga que se funde el filamento con la resistencia mayor. ¿Cuánta potencia se disipará en cada una de las tres modalidades de luminosidad (baja, media y alta)? *c*) Repita el inciso *b*) para la situación en que se funde el filamento con la menor resistencia.

26.19 •• **Trabajando tarde.** Usted está trabajando tarde en su tienda de electrónica y determina que necesita varios resistores para un proyecto. Pero desgraciadamente, todo lo que tiene es una caja grande con resistores de 10.0 Ω. Muestre cómo puede hacer cada una de las siguientes resistencias equivalentes con una combinación de los resistores de 10.0 Ω: *a*) 35 Ω, *b*) 1.0 Ω, *c*) 3.33 Ω, *d*) 7.5 Ω.

26.20 • En el circuito que se muestra en la figura E26.20, la tasa a la que R_1 disipa energía eléctrica es 20.0 W. *a*) Obtenga R_1 y R_2. *b*) ¿Cuál es la fem de la batería? *c*) Encuentre la corriente a través tanto de R_2 como del resistor de 10.0 Ω. *d*) Calcule el consumo total de potencia eléctrica en todos los resistores y la que entrega la batería. Demuestre que sus resultados son congruentes con la conservación de la energía.

Figura **E26.20**

26.21 • **Bombillas en serie y en paralelo.** Dos bombillas tienen resistencias de 400 y 800 Ω. Si están conectadas en serie a través de una línea de 120 V, calcule *a*) la corriente que pasa por cada bombilla; *b*) la potencia disipada por cada una; *c*) la potencia total disipada en ambas bombillas. Ahora, las bombillas se conectan en paralelo a través de la línea de 120 V. Obtenga *d*) la corriente a través de cada bombilla; *e*) la potencia disipada en cada bombilla; *f*) la potencia total que se disipa en las dos bombillas. *g*) En cada situación, ¿cuál es la bombilla más luminosa? *h*) ¿En cuál situación hay una salida total mayor de luz de ambas bombillas combinadas?

26.22 • **Bombillas en serie.** Una bombilla de 60 W y 120 V está conectada en serie con otra de 200 W y 120 V, a través de una línea de 240 V. Suponga que la resistencia de cada bombilla no varía con la corriente (*Nota:* Esta descripción de una bombilla da la potencia que disipa cuando se conecta a una diferencia de potencial dada; es decir, una bombilla de 25 W y 120 V disipa 25 W cuando está conectada a una línea de 120 V). *a*) Obtenga la corriente a través de las bombillas. *b*) Encuentre la potencia disipada en cada bombilla. *c*) Una de las bombillas se funde rápido. ¿Cuál es y por qué?

26.23 •• PA En el circuito de la figura E26.23, un resistor de 20.0 Ω está dentro de 100 g de agua pura rodeada por espuma de poliestireno aislante. Si el agua inicialmente está a 10.0°C, ¿cuánto tiempo tardará para que su temperatura suba a 58.0°C?

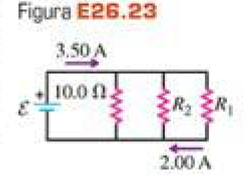


Figura **E26.23**

Sección 26.2 Reglas de Kirchhoff

26.24 •• Las baterías mostradas en el circuito de la figura E26.24 tienen pequeñas resistencias internas despreciables. Calcule la corriente a través de *a*) el resistor de 30.0 Ω; *b*) el resistor de 20.0 Ω, *c*) la batería de 10.0 V.

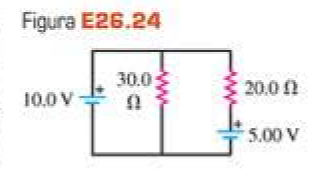


Figura **E26.24**

26.25 • En el circuito que se aprecia en la figura E26.25, obtenga *a*) la corriente en el resistor *R*; *b*) la resistencia *R*; *c*) la fem desconocida $\mathcal{E}$. *d*) Si el circuito se interrumpe en el punto *x*, ¿cuál es la corriente en el resistor *R*?

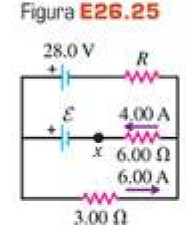


Figura **E26.25**

26.26 • Encuentre las fem $\mathcal{E}_1$ y $\mathcal{E}_2$ en el circuito de la figura E26.26, y obtenga la diferencia de potencial del punto *b* en relación con el punto *a*.

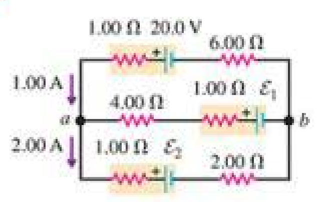
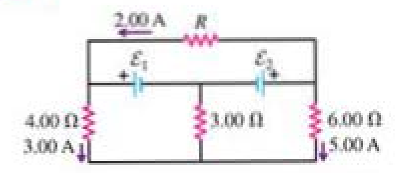


Figura **E26.26**

26.27 • En el circuito que se ilustra en la figura E26.27, encuentre *a*) la corriente en el resistor de 3.00 Ω; *b*) las fem desconocidas $\mathcal{E}_1$ y $\mathcal{E}_2$; *c*) la resistencia *R*. Observe que se dan tres corrientes.

Figura **E26.27**



26.28 •• En el circuito que se ilustra en la figura E26.28, obtenga *a*) la corriente en cada ramal y *b*) la diferencia de potencial V_{ab} del punto *a* en relación con el punto *b*.

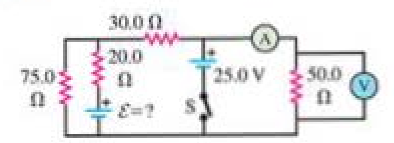
Figura **E26.28**

26.29 • La batería de 10.00 V de la figura E26.28 se retira del circuito y se vuelve a colocar con la polaridad opuesta, de manera que ahora su terminal positiva está junto al punto *a*. El resto del circuito queda como en la figura. Encuentre *a*) la corriente en cada ramal y *b*) la diferencia de potencial V_{ab} del punto *a* con respecto al punto *b*.

26.30 • La batería de 5.00 V de la figura E26.28 se retira del circuito y se sustituye por otra de 20.00 V, con su terminal negativa próxima al punto *b*. El resto del circuito queda como en la figura. Calcule *a*) la corriente en cada ramal y *b*) la diferencia de potencial V_{ab} del punto *a* en relación con el punto *b*.

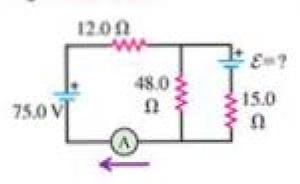
26.31 •• En el circuito que se presenta en la figura E26.31, las baterías tienen resistencias internas despreciables y los medidores son ideales. Con el interruptor S abierto, el voltímetro da una lectura de 15.0 V. *a*) Calcule la fem $\mathcal{E}$ de la batería. *b*) ¿Cuál será la lectura del amperímetro cuando se cierre el interruptor?

Figura **E26.31**



26.32 •• En el circuito que se muestra en la figura E26.32, ambas baterías tienen resistencia interna insignificante y el amperímetro ideal lee 1.50 A en el sentido que se ilustra. Encuentre la fem $\mathcal{E}$ de la batería. ¿Es correcta la polaridad que se indica?

Figura **E26.32**

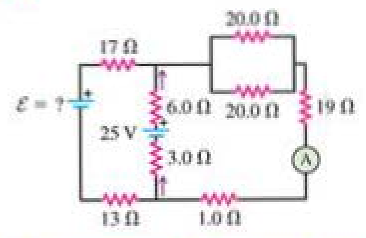


26.33 • En la figura E26.33 se ilustra un circuito en el que todos los medidores son ideales y las baterías no tienen resistencia interna apreciable. *a*) Diga cuál será la lectura del voltímetro con el interruptor S abierto. ¿Cuál punto está a un potencial mayor: *a* o *b*? *b*) Con el interruptor cerrado, obtenga la lectura del voltímetro y del amperímetro. ¿Cuál trayectoria (superior o inferior) sigue la corriente a través del interruptor?

Figura **E26.33**

26.34 •• En el circuito mostrado en la figura E26.34, el resistor de 6.0 Ω consume energía a una razón de 24 J/s cuando la corriente a través de él fluye como se muestra. *a*) Calcule la corriente a través del amperímetro A. *b*) ¿Cuáles son la polaridad y la fem $\mathcal{E}$ de la batería, suponiendo que tiene una resistencia interna despreciable?

Figura **E26.34**



Sección 26.3 Instrumentos de medición eléctrica

26.35 • La resistencia de la bobina de un galvanómetro es de 25.0 Ω, y la corriente requerida para la desviación de escala completa es de 500 μA. *a*) Muestre en un diagrama la manera de convertir el galvanómetro en un amperímetro que lea 20.0 mA a escala completa, y calcule la resistencia de derivación. *b*) Demuestre el modo de convertir el galvanómetro en un voltímetro con lectura de 500 mV a escala completa, y calcule la resistencia en serie.

26.36 • La resistencia de la bobina de un galvanómetro con bobina móvil es de 9.36 Ω, y una corriente de 0.0224 A ocasiona una desviación de escala completa. Queremos convertir este galvanómetro en un amperímetro con una lectura de escala completa de 20.0 A. La única derivación disponible tiene una resistencia de 0.0250 Ω. ¿Cuál es la resistencia R que debe conectarse en serie con la bobina (figura E26.36)?

Figura **E26.36**



26.37 • Un circuito consiste en una combinación en serie de resistores de 6.00 y 5.00 kΩ conectados a través de una batería de 50.0 V con resistencia interna despreciable. Se desea medir la diferencia de potencial verdadera (es decir, la diferencia de potencial sin el medidor presente) a través del resistor de 5.00 kΩ con un voltímetro cuya resistencia interna es de 10.0 kΩ. *a*) ¿Cuál es la diferencia de potencial que mide el voltímetro a través del resistor de 5.00 kΩ? *b*) ¿Cuál es la diferencia de potencial *verdadera* a través de este resistor cuando el medidor no está presente? *c*) ¿Qué porcentaje de error tiene la lectura del voltímetro con respecto a la diferencia de potencial verdadera?

26.38 • Un galvanómetro con resistencia de 25.0 Ω tiene una resistencia de derivación de 1.00 Ω instalada para convertirlo en un amperímetro. Después se utiliza para medir la corriente en un circuito que consiste en un resistor de 15.0 Ω conectado a través de las terminales de una batería de 25.0 V que no tiene resistencia interna apreciable. *a*) ¿Cuál es la corriente que mide el amperímetro? *b*) ¿Cuál debe ser la corriente *verdadera* en el circuito (es decir, la corriente sin el amperímetro presente)? *c*) ¿Qué porcentaje de error tiene la lectura del amperímetro con respecto a la corriente *verdadera*?

26.39 • En el óhmetro de la figura E26.39, M es un medidor de 2.50 mA con una resistencia de 65.0 Ω. (Un medidor de 2.50 mA experimenta una desviación de escala completa cuando la corriente a través de él es de 2.50 mA). La batería B tiene una fem de 1.52 V y resistencia interna despreciable. Se elige R de manera que cuando las terminales *a* y *b* estén en cortocircuito ($R_x = 0$), la lectura del medidor sea la escala completa. Cuando *a* y *b* están abiertos ($R_x = \infty$), la lectura del medidor es cero. *a*) ¿Cuál es la resistencia del resistor R? *b*) ¿Qué corriente indica una resistencia R_x de 200 Ω? *c*) ¿Qué valores de R_x corresponden a desviaciones del medidor de $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$ y $\frac{3}{4}$ de la escala completa si la desviación es proporcional a la corriente que pasa por el galvanómetro?

Figura **E26.39**



Sección 26.4 Circuitos *R-C*

26.40 • Un capacitor de 4.60 μF, que al inicio está descargado, se conecta en serie con un resistor de 7.50 kΩ y una fuente de fem con $\mathcal{E}$ = 245 V cuya resistencia interna es insignificante. Justo después de que el circuito se completa, ¿cuáles son *a*) la caída de voltaje a través

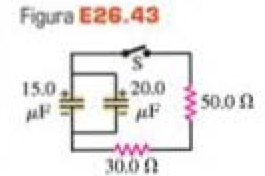
del capacitor; *b*) la caída de voltaje a través del resistor; *c*) la carga en el capacitor; *d*) la corriente que pasa por el resistor? *e*) Mucho tiempo después de completar el circuito (después de muchas constantes de tiempo), ¿cuáles son los valores de los incisos *a*) a *d*)?

26.41 • Un capacitor se carga a un potencial de 12.0 V y luego se conecta a un voltímetro que tiene una resistencia interna de 3.40 MΩ. Después de un tiempo de 4.00 s, el voltímetro da una lectura de 3.0 V. ¿Cuáles son *a*) la capacitancia y *b*) la constante de tiempo del circuito?

26.42 • Un capacitor de 12.4 μF se conecta a través de un resistor de 0.895 MΩ a una diferencia de potencial constante de 60.0 V. *a*) Calcule la carga en el capacitor en los siguientes tiempos después de haber realizado la conexión: 0, 5.0, 10.0, 20.0 y 100.0 s. *b*) Determine las corrientes de carga en los mismos instantes citados. *c*) Elabore una gráfica de los resultados de los incisos *a*) y *b*) para *t* entre 0 y 20 s.

26.43 •• **PA** En el circuito de la figura E26.43, los dos capacitores están cargados al principio a 45.0 V. *a*) ¿Cuánto tiempo después de cerrar el interruptor S el potencial a través de cada capacitor se reducirá a 10.0 V? *b*) En ese momento, ¿cuál será la corriente?

Figura **E26.43**



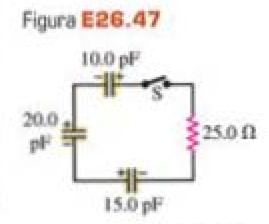
26.44 • Un resistor y un capacitor se conectan en serie con una fuente de fem. La constante de tiempo para el circuito es de 0.870 s. *a*) Se agrega en serie un segundo capacitor, idéntico al primero. ¿Cuál es la constante de tiempo para este nuevo circuito? *b*) En el circuito original, un segundo capacitor, idéntico al primero, se conecta en paralelo con el primer capacitor. ¿Cuál es la constante de tiempo para este nuevo circuito?

26.45 • Están conectados en serie una fuente de fem con $\mathcal{E}$ = 120 V, un resistor con R = 80.0 Ω y un capacitor con C = 4.00 μF. A medida que el capacitor se carga, cuando la corriente en el resistor es de 0.900 A, ¿cuál es la magnitud de la carga en cada placa del capacitor?

26.46 • Un capacitor de 1.50 μF se carga a través de un resistor de 12.0 Ω por medio de una batería de 10.0 V. ¿Cuál será la corriente cuando el capacitor haya adquirido $\frac{1}{4}$ de su carga máxima? ¿Será $\frac{1}{4}$ de la corriente máxima?

26.47 •• **PA** En el circuito que se ilustra en la figura E26.47, cada capacitor tiene inicialmente una carga de magnitud 3.50 nC en sus placas. Después de que el interruptor S se cierra, ¿cuál será la corriente en el circuito en el instante en que los capacitores hayan perdido el 80% de su energía almacenada inicialmente?

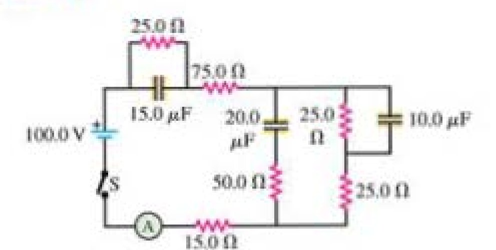
Figura **E26.47**



26.48 • Se carga un capacitor de 12.0 μF a un potencial de 50.0 V, y luego se descarga a través de un resistor de 175 Ω. ¿Cuánto tiempo se requiere para que el capacitor pierda *a*) la mitad de su carga y *b*) la mitad de su energía almacenada?

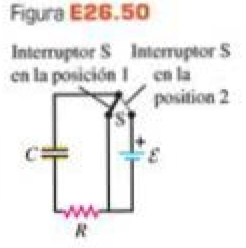
26.49 • En el circuito de la figura E26.49, todos los capacitores están descargados al principio, la batería no tiene resistencia interna, y el amperímetro es ideal. Calcule la lectura del amperímetro *a*) inmediatamente después de haber cerrado el interruptor S y *b*) mucho tiempo después de que se cerró el interruptor.

Figura **E26.49**



26.50 • En el circuito que se ilustra en la figura E26.50, C = 5.90 μF, $\mathcal{E}$ = 28.0 V, y la fem tiene una resistencia despreciable. Inicialmente, el capacitor está descargado y el interruptor S se encuentra en la posición 1. Luego, el interruptor se mueve a la posición 2, por lo que el capacitor comienza a cargarse. *a*) ¿Cuál será la carga en el capacitor mucho tiempo después de que el interruptor se movió a la posición 2? *b*) Después de haber movido el interruptor a la posición 2 durante 3.00 ms, se mide la carga en el capacitor y resulta ser de 110 μC. ¿Cuál es el valor de la resistencia R? *c*) ¿Cuánto tiempo después de haber movido el interruptor a la posición 2, la carga en el capacitor será igual al 99.0% del valor final calculado en el inciso *a*)?

Figura **E26.50**



26.51 • Un capacitor con $C = 1.50 \times 10^{-5}$ F se conecta como se aprecia en la figura E26.50, con un resistor de R = 980 Ω y una fuente de fem con $\mathcal{E}$ = 18.0 V y resistencia interna despreciable. Inicialmente, el capacitor está descargado y el interruptor S se encuentra en la posición 1. Luego, el interruptor se mueve a la posición 2, por lo que el capacitor comienza a cargarse. Después de que el interruptor ha estado en la posición 2 durante 10.0 ms, el interruptor se lleva de regreso a la posición 1, de manera que el capacitor comienza a descargarse. *a*) Calcule la carga en el capacitor justo *antes* de que el interruptor se lleve de la posición 2 a la 1. *b*) Calcule la caída del voltaje a través del resistor y del capacitor en el instante descrito en el inciso *a*). *c*) Calcule las caídas de voltaje a través del resistor y el capacitor justo *después* de que el interruptor se lleve de la posición 2 a la 1. *d*) Calcule la carga en el capacitor 10.0 ms después de haber llevado el interruptor de la posición 2 de regreso a la 1.

Sección 26.5 Sistemas de distribución de energía

26.52 • El elemento calentador de una secadora eléctrica tiene una potencia nominal de 4.1 kW cuando se conecta a una línea de 240 V. *a*) ¿Cuál es la corriente en el elemento calentador? ¿El alambre de calibre 12 es suficiente para suministrar esa corriente? *b*) ¿Cuál es la resistencia del elemento calentador de la secadora a su temperatura de operación? *c*) ¿Cuánto cuesta operar la secadora durante una hora, si la tarifa vigente es de 11 centavos por kWh?

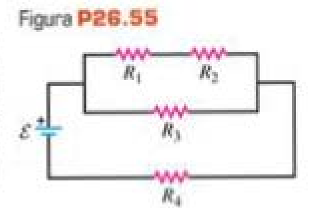
26.53 • Se enchufa un calentador eléctrico de 1500 W a la toma de un circuito de 120 V que tiene un interruptor de circuito de 20 A. En la misma toma se conecta una secadora eléctrica, la cual tiene ajustes de potencia de 600, 900, 1200 y 1500 W. Se enciende la secadora para el cabello en el ajuste de 600 W y se incrementa hasta que se dispara el interruptor de circuito. ¿Cuál fue el ajuste de potencia que hizo que se disparara?

26.54 • **PA** El elemento calentador de una estufa eléctrica consiste en un conductor incrustado dentro de un material aislante, el cual, a la vez, está dentro de una cubierta metálica. El alambre del calentador tiene una resistencia de 20 Ω a temperatura ambiente (23.0°C) y un coeficiente de temperatura de la resistividad $\alpha = 2.8 \times 10^{-3}\ (\mathrm{C}°)^{-1}$. El elemento calentador opera desde una línea de 120 V. *a*) Cuando se enciende el elemento calentador por primera vez, ¿cuánta corriente toma y cuánta energía eléctrica disipa? *b*) Cuando el elemento calentador ha alcanzado su temperatura de operación de 280°C (536°F), ¿cuánta corriente toma y cuánta potencia eléctrica disipa?

PROBLEMAS

26.55 •• En la figura P26.55, la batería tiene resistencia interna despreciable y $\mathcal{E}$ = 48.0 V. $R_1 = R_2$ = 4.00 Ω y R_4 = 3.00 Ω. ¿Cuál debe ser la resistencia R_3 para que el resistor de la red disipe energía eléctrica a una tasa de 295 W?

Figura **P26.55**



26.56 • Se necesita un resistor de 400 Ω y 2.4 W, pero solo se dispone de varios resistores de 400 Ω y 1.2 W (véase el ejercicio 26.10). *a*) ¿Cuáles dos diferentes combinaciones de las unidades disponibles dan la resistencia y potencia nominal requeridas? *b*) Para cada una de las redes de resistores del inciso *a*), ¿qué potencia se disipa en cada resistor cuando la combinación disipa 2.4 W?

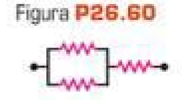
26.57 • **PA** Un cable de 20.0 m de largo consiste en un núcleo interior sólido de níquel, cilíndrico, de 10.0 cm de diámetro, y rodeado por un cascarón exterior sólido y cilíndrico de cobre con diámetro interno de 10.0 cm y diámetro externo de 20.0 cm. La resistividad del níquel es de $7.8 \times 10^{-8}\ \Omega \cdot \text{m}$. *a*) ¿Cuál es la resistencia de este cable? *b*) Si se piensa en este cable como en un solo material, ¿cuál es su resistividad equivalente?

26.58 • Dos cables idénticos de 3.00 Ω se colocan lado a lado y se sueldan de manera que cada uno toca la mitad del otro. ¿Cuál es la resistencia equivalente de esta combinación?

26.59 • Las dos bombillas idénticas del ejemplo 26.2 (sección 26.1) están conectadas en paralelo a una fuente diferente, una con $\mathcal{E} = 8.0$ V y resistencia interna de 0.8 Ω. Cada bombilla tiene una resistencia $R = 2.0\ \Omega$ (se supone independiente de la corriente que pasa por la bombilla). *a*) Encuentre la corriente que fluye por cada bombilla, la diferencia de potencial en cada bombilla y la potencia que se suministra a cada una. *b*) Suponga que una de las bombillas se funde, por lo que su filamento se rompe y deja de fluir corriente por ella. Calcule la potencia entregada a la bombilla restante. La bombilla que queda, ¿ilumina más o menos después de que la otra bombilla se funde?

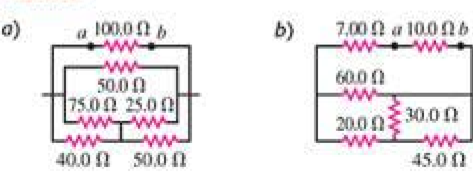
26.60 •• Cada uno de los tres resistores de la figura P26.60 tiene una resistencia de 2.4 Ω y disipa un máximo de 48 W sin calentarse en exceso. ¿Cuál es la potencia máxima que el circuito puede disipar?

Figura **P26.60**



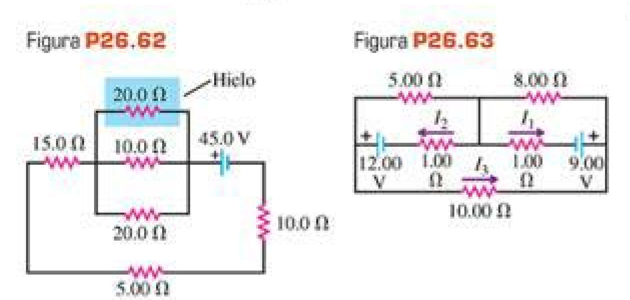
26.61 • Si se conecta un óhmetro entre los puntos *a* y *b* en cada uno de los circuitos que se ilustran en la figura P26.61, ¿cuál será la lectura que dé?

Figura **P26.61**



26.62 •• **PA** En el circuito que se ilustra en la figura P26.62, hay un resistor de 20.0 Ω incrustado en un bloque grande de hielo a 0.00°C, y la batería tiene una resistencia interna insignificante. ¿A qué tasa (en g/s) el circuito derrite el hielo? (El calor latente de fusión para el hielo es de 3.34×10^5 J/kg).

Figura **P26.62** Figura **P26.63**



26.63 • Calcule las tres corrientes I_1, I_2 e I_3 que se indican en el diagrama del circuito en la figura P26.63.

26.64 ••• ¿Cuál debe ser la fem $\mathcal{E}$ en la figura P26.64 para que la corriente a través del resistor de 7.00 Ω sea 1.80 A? Cada fuente de fem tiene resistencia interna despreciable.

Figura **P26.64** Figura **P26.65**

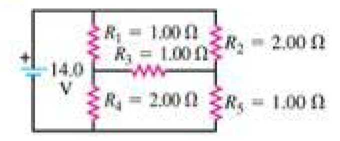
24.0 V, $\mathcal{E}$, 7.00 Ω, 3.00 Ω, 2.00 Ω

20.0 V, 5.00 Ω, 2.00 Ω, 4.00 Ω, 36.0 V, 14.0 V

26.65 • Determine la corriente que pasa por cada uno de los tres resistores del circuito que se ilustran en la figura P26.65. Las fuentes de fem tienen resistencia interna insignificante.

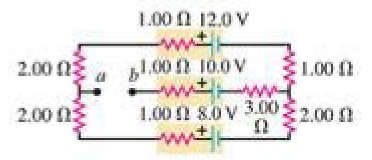
26.66 • *a*) Encuentre la corriente a través de la batería y de cada uno de los resistores en el circuito ilustrado en la figura P26.66. *b*) ¿Cuál es la resistencia equivalente de la red de resistores?

Figura **P26.66**



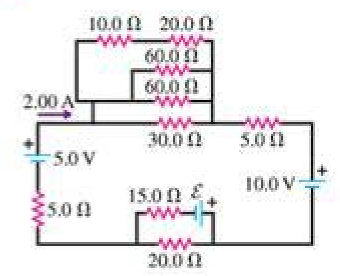
26.67 •• *a*) Calcule el potencial del punto *a* con respecto al punto *b*, en la figura P26.67. *b*) Si los puntos *a* y *b* se conectan mediante un alambre con resistencia insignificante, determine la corriente en la batería de 12.0 V.

Figura **P26.67**



26.68 •• Considere el circuito que se ilustra en la figura P26.68. *a*) ¿Cuál debe ser la fem $\mathcal{E}$ de la batería para que una corriente de 2.00 A fluya a través de la batería de 5.00 V, como se muestra? La polaridad de la batería, ¿es correcta como se indica? *b*) ¿Cuánto tiempo se requiere para que se produzcan 60.0 J de energía térmica en el resistor de 10.0 Ω?

Figura **P26.68**



26.69 •• **PA** Se va a construir un cable de 1.00 km de longitud y una sección transversal de área igual a 0.500 cm² con longitudes de

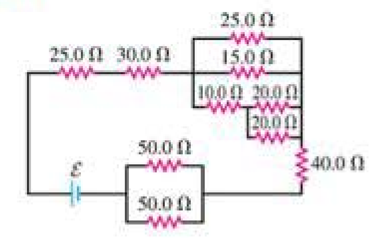
cobre y aluminio iguales. Esto se puede llevar a cabo haciendo un cable de cada material de 0.50 km y soldándolos extremo con extremo, o soldando lado a lado dos cables paralelos de 1.00 km, uno de cada material (figura P26.69). Calcule la resistencia del cable de 1.00 km de ambos diseños para ver cuál proporciona la resistencia mínima.

Figura **P26.69**

1.00 km Cu Al 0.500 cm² o bien, 1.00 km 0.500 cm² Cu Al

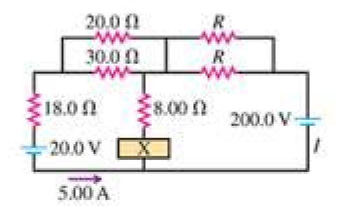
26.70 ••• En el circuito que se ilustra en la figura P26.70, todos los resistores tienen potencia nominal máxima de 2.00 W. ¿Cuál es la fem $\mathcal{E}$ máxima que la batería puede tener sin que se queme ninguno de los resistores?

Figura **P26.70**



26.71 • En el circuito de la figura P26.71, la corriente en la batería de 20.0 V es de 5.00 A en el sentido que se indica, y el voltaje a través del resistor de 8.00 Ω es de 16.0 V, con el extremo inferior del resistor a un potencial mayor. Calcule *a*) la fem (incluida su polaridad) de la batería X; *b*) la corriente I a través de la batería de 200.0 V (incluido su sentido); *c*) la resistencia R.

Figura **P26.71**

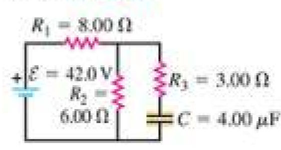


26.72 •• Se conectan en serie tres resistores idénticos. Cuando se aplica cierta diferencia de potencial a través de la combinación, la potencia total disipada es de 36 W. ¿Qué potencia se disiparía si los tres resistores se conectaran en paralelo a través de la misma diferencia de potencial?

26.73 • Un resistor R_1 consume una potencia eléctrica P_1 cuando se conecta a una fem $\mathcal{E}$. Cuando el resistor R_2 se conecta a la misma fem, consume una potencia eléctrica P_2. En términos de P_1 y P_2, ¿cuál es la potencia eléctrica total consumida cuando los dos están conectados a esta fuente de fem *a*) en paralelo y *b*) en serie?

26.74 • El capacitor de la figura P26.74 está inicialmente descargado. El interruptor se cierra en $t = 0$. *a*) Inmediatamente después de cerrar el interruptor, ¿cuál es la corriente a través de cada resistor? *b*) ¿Cuál es la carga final en el capacitor?

Figura **P26.74**

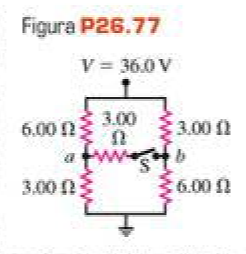


26.75 •• Un capacitor de 2.00 μF inicialmente descargado se conecta en serie con un resistor de 6.00 kΩ y una fuente de fem con $\mathcal{E} = 90.0$ V y resistencia interna despreciable. El circuito se cierra en $t = 0$. *a*) Inmediatamente después de cerrarlo, ¿cuál es la tasa a la que se disipa la energía eléctrica en el resistor? *b*) ¿En qué instante t la tasa a la que la energía eléctrica se disipa en el resistor es igual a la tasa a la cual la energía eléctrica se almacena en el capacitor? *c*) En el instante calculado en el inciso *b*), ¿cuál es la tasa a la que se disipa la energía eléctrica en el resistor?

26.76 •• Un capacitor de 6.00 μF inicialmente descargado se conecta en serie con un resistor de 5.00 Ω y una fuente de fem con $\mathcal{E} = 50.0$ V cuya resistencia interna es despreciable. En el instante en que el resistor está disipando energía eléctrica a una tasa de 250 W, ¿cuánta energía se ha almacenado en el capacitor?

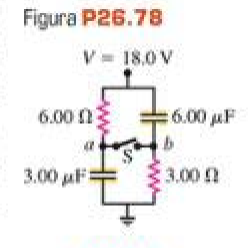
26.77 • La figura P26.77 emplea una convención que se utiliza con frecuencia en los diagramas de circuito. La batería (u otra fuente de poder) no se muestra de manera explícita. Se entiende que el punto en la parte superior, con la leyenda "36.0 V", está conectado a la terminal positiva de una batería de 36.0 V que tiene resistencia interna despreciable, y que el símbolo de "tierra" en la parte inferior está conectado a la terminal negativa de la batería. El circuito se completa a través de la batería, aun cuando esta no aparezca en el diagrama. *a*) ¿Cuál es la diferencia de potencial V_{ab} del punto a con respecto al punto b, cuando se abre el interruptor S? *b*) ¿Cuál es la corriente que pasa a través del interruptor S cuando está cerrado? *c*) ¿Cuál es la resistencia equivalente cuando el interruptor S está cerrado?

Figura **P26.77**



26.78 • (Véase el problema 26.77). *a*) En la figura P26.78, ¿cuál es el potencial del punto a con respecto al punto b cuando el interruptor S está abierto? *b*) ¿Cuál punto, a o b, está a un mayor potencial? *c*) ¿Cuál es el potencial final del punto b con respecto a tierra cuando el interruptor S está cerrado? *d*) ¿Cuánto cambia la carga en cada capacitor cuando S está cerrado?

Figura **P26.78**



26.79 • En la figura P26.79, el punto a se mantiene a potencial constante de 400 V más alto con respecto a la tierra. (Véase el problema 26.77). *a*) ¿Cuál es la lectura del voltímetro con la escala apropiada y con una resistencia de 5.00×10^4 Ω, cuando se conecta entre el punto b y la tierra? *b*) ¿Cuál es la lectura de un voltímetro con resistencia de 5.00×10^6 Ω? *c*) ¿Cuál es la lectura de un voltímetro con resistencia infinita?

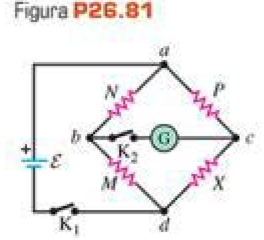
Figura **P26.79**

100 kΩ 200 kΩ a b

26.80 •• Un voltímetro de 150 V tiene una resistencia de 30,000 Ω. Cuando se conecta en serie con una resistencia R grande a través de una línea de 110 V, el medidor da una lectura de 74 V. Calcule la resistencia R.

26.81 •• **El puente de Wheatstone.** El circuito que se aprecia en la figura P26.81, conocido como *puente de Wheatstone*, se utiliza para determinar el valor de un resistor desconocido X por comparación con tres resistores M, N y P cuyas resistencias se pueden modificar. Para cada arreglo, la resistencia de cada resistor se conoce con precisión. Con los interruptores K_1 y K_2 cerrados, estos resistores se modifican hasta que la

Figura **P26.81**



corriente en el galvanómetro G sea igual a cero; entonces, se dice que el puente está *equilibrado*. *a*) Demuestre que en esta condición, la resistencia desconocida está dada por $X = MP/N$. (Este método permite una precisión muy elevada al comparar resistores). *b*) Si el galvanómetro G muestra una desviación cero cuando $M = 850.0\ \Omega$, $N = 15.00\ \Omega$ y $P = 33.48\ \Omega$, ¿cuál es la resistencia desconocida X?

26.82 • Un capacitor de 2.36 μF inicialmente descargado se conecta en serie con un resistor de 5.86 Ω y una fuente de fem con $\mathcal{E} = 120$ V y resistencia interna despreciable. *a*) Inmediatamente después de hacer la conexión, ¿cuáles son **i.** la tasa a la que se disipa la energía eléctrica en el resistor; **ii.** la tasa a la que la energía eléctrica almacenada en el capacitor se incrementa; **iii.** la potencia de salida eléctrica de la fuente? ¿Cómo se comparan las respuestas **i**, **ii** y **iii**? *b*) Responda las mismas preguntas del inciso *a*) para un tiempo más largo después de realizar la conexión. *c*) Conteste las mismas preguntas del inciso *a*) para el momento en que la carga en el capacitor es la mitad de su valor final.

26.83 • Un resistor de 224 Ω y otro de 589 Ω están conectados en serie a través de una línea de 90.0 V. *a*) ¿Cuál es el voltaje a través de cada resistor? *b*) Un voltímetro conectado a través del resistor de 224 Ω da una lectura de 23.8 V. Calcule la resistencia del voltímetro. *c*) Determine la lectura del mismo voltímetro si se conecta a través del resistor de 589 Ω. *d*) Las lecturas de este voltímetro son menores que los voltajes "verdaderos" (es decir, sin el voltímetro presente). ¿Sería posible diseñar un voltímetro que diera lecturas *mayores* que los voltajes "verdaderos"? Explique su respuesta.

26.84 • Un resistor con $R = 850\ \Omega$ está conectado a las placas de un capacitor cargado con capacitancia $C = 4.62\ \mu$F. Justo antes de hacer la conexión, la carga en el capacitor es de 6.90 mC. *a*) ¿Cuál es la energía almacenada inicialmente en el capacitor? *b*) ¿Cuál es la potencia eléctrica disipada en el resistor justo después de hacer la conexión? *c*) ¿Cuánta potencia eléctrica se disipa en el resistor en el instante en que la energía almacenada en el capacitor ha disminuido a la mitad del valor calculado en el inciso *a*)?

26.85 • Un capacitor que inicialmente está descargado se conecta en serie con un resistor y una fuente de fem con $\mathcal{E} = 110$ V y resistencia interna insignificante. Apenas conectado el circuito, la corriente que pasa por el resistor es de 6.5×10^{-5} A. La constante de tiempo para el circuito es de 5.2 s. ¿Cuáles son los valores de la resistencia del resistor y de la capacitancia del capacitor?

26.86 ••• Un circuito *R-C* tiene una constante de tiempo *RC*. *a*) Si el circuito está descargándose, ¿cuánto tiempo tomará que la energía almacenada se reduzca a $1/e$ de su valor inicial? *b*) Si se está cargando, ¿cuánto tiempo se necesita para que la energía almacenada alcance $1/e$ de su valor máximo?

26.87 • En sentido estricto, la ecuación (26.16) implica que se requiere una cantidad *infinita* de tiempo para descargar por completo un capacitor. Pero para fines prácticos, puede considerarse que está descargado completamente después de un lapso finito de tiempo. Para ser más específicos, considere que un capacitor con capacitancia C conectado a un resistor R está descargado totalmente si su carga q difiere de cero en no más de la carga de un electrón. *a*) Calcule el tiempo que se requiere para alcanzar ese estado si $C = 0.920\ \mu$F, $R = 670$ kΩ y $Q_0 = 7.00\ \mu$C. ¿A cuántas constantes de tiempo equivale el resultado? *b*) Para una Q_0 dada, ¿el tiempo requerido para alcanzar ese estado siempre es el mismo número de constantes de tiempo, independientemente de los valores de C y R? ¿Por qué?

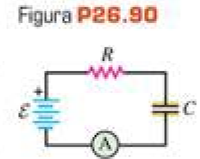
26.88 • CALC En un capacitor en proceso de carga, la corriente está dada por la ecuación (26.13). *a*) La potencia instantánea suministrada por la batería es $\mathcal{E}i$. Intégrela para calcular la energía total suministrada por la batería. *b*) La potencia instantánea disipada en el resistor es i^2R. Intégrela para obtener la energía total disipada en el resistor. *c*) Encuentre la energía final almacenada en el capacitor y demuestre que es igual a la energía total suministrada por la batería menos la energía disipada en el resistor, como se obtuvo en los incisos *a*) y *b*). *d*) ¿Qué fracción de la energía suministrada por la batería se almacena en el capacitor? ¿Cómo depende de R esta fracción?

26.89 ••• CALC *a*) Empleando la ecuación (26.17) para la corriente en un capacitor en proceso de descarga, obtenga una expresión para la potencia instantánea $P = i^2R$ disipada en el resistor. *b*) Integre la expresión para P con la finalidad de encontrar la energía total que se disipa en el resistor, y demuestre que es igual a la energía total almacenada inicialmente en el capacitor.

PROBLEMAS DE DESAFÍO

26.90 ••• **Alarma de capacitores contra robo.** La capacitancia de un capacitor puede verse afectada por el material dieléctrico que, aunque no esté dentro del capacitor, se encuentre suficientemente cerca de este como para ser polarizado por la curvatura del campo eléctrico que existe cerca de un capacitor con carga. Este efecto por lo general es del orden de picofarads (pF), pero, con la ayuda de circuitos electrónicos adecuados, permite detectar un cambio en el material dieléctrico que rodea al capacitor. Ese material dieléctrico puede ser el cuerpo humano, y el efecto descrito es de utilidad para diseñar una alarma contra robo. Considere el circuito simplificado que se ilustra en la figura P26.90. La fuente de voltaje tiene una fem $\mathcal{E} = 1000$ V, y el capacitor tiene una capacitancia $C = 10.0$ pF. Los circuitos electrónicos para detectar la corriente, representados como un amperímetro en el diagrama, tienen una resistencia despreciable y son capaces de detectar una corriente que persista en un nivel de al menos 1.00 μA durante al menos 200 μs después de que la capacitancia haya cambiado abruptamente de C a C'. La alarma contra robo está diseñada para activarse si la capacitancia cambia en un 10%. *a*) Determine la carga en el capacitor de 10.0 pF cuando está cargado por completo. *b*) Si el capacitor está completamente cargado antes de detectar al intruso, y suponiendo que el tiempo que tarda la capacitancia en cambiar en un 10% es suficientemente corto como para ser ignorado, obtenga una ecuación que exprese la corriente a través del resistor R como función del tiempo t, a partir de que la capacitancia cambia. *c*) Determine el intervalo de valores de la resistencia R que cumplirá las especificaciones de diseño de la alarma contra robo. ¿Qué pasa si R es demasiado pequeña? ¿O demasiado grande? (*Sugerencia:* No podrá resolver este inciso en forma analítica, por lo que tendrá que usar métodos numéricos. Exprese R como una función logarítmica de R más las cantidades conocidas. Utilice un valor tentativo para R y calcule un nuevo valor a partir de la expresión. Siga haciendo esto hasta que los valores de entrada y salida de R coincidan con tres cifras significativas).

Figura **P26.90**



26.91 ••• **Red infinita.** Como se muestra en la figura P26.91, una red de resistores de resistencias R_1 y R_2 se extiende infinitamente hacia la derecha. Demuestre que la resistencia total R_T de la red infinita es igual a

$$R_T = R_1 + \sqrt{R_1^2 + 2R_1R_2}$$

(*Sugerencia:* Como la red es infinita, su resistencia a la derecha de los puntos c y d también es igual a R_T).

Figura **P26.91**

26.92 ••• Suponga que un resistor R está a lo largo de cada arista de un cubo (12 resistores en total) con conexiones en las esquinas. Encuentre la resistencia equivalente entre dos esquinas del cubo opuestas diagonalmente (puntos a y b, en la figura P26.92).

Figura **P26.92**



26.93 ••• BIO **Cadenas atenuantes y axones.** La red infinita de resistores en la figura P26.91 se conoce como *cadena*

atenuante, porque dicha cadena de resistores reduce, o atenúa, la diferencia de potencial entre los alambres superior e inferior a todo lo largo de la cadena. *a*) Demuestre que si la diferencia de potencial entre los puntos *a* y *b* de la figura P26.91 es V_{ab}, entonces la diferencia de potencial entre los puntos *c* y *d* es $V_{cd} = V_{ab}/(1 + \beta)$, donde $\beta = 2R_1(R_T + R_2)/R_TR_2$ y R_T, la resistencia total de la red, está dada en el problema de desafío 26.91. (Véase la sugerencia en ese problema). *b*) Si la diferencia de potencial entre las terminales *a* y *b* en el extremo izquierdo de la red infinita es V_0, demuestre que la diferencia de potencial entre los alambres superior e inferior a *n* segmentos del extremo izquierdo es $V_n = V_0/(1 + \beta)^n$. Si $R_1 = R_2$, ¿cuántos segmentos se necesitan para que la diferencia de potencial V_n disminuya a menos del 1.0% de V_0? *c*) Una cadena atenuante infinita ofrece un modelo de propagación de un pulso de voltaje a lo largo de una fibra nerviosa o axón. Cada segmento de la red en la figura P26.91 representa un segmento corto del axón con longitud Δx. Los resistores R_1 representan la resistencia del fluido adentro y afuera de la membrana de la pared del axón. La resistencia de la membrana al flujo de corriente a través de la pared se representa con R_2. Para un segmento de axón de longitud $\Delta x = 1.0\ \mu$m, $R_1 = 6.4 \times 10^3\ \Omega$ y $R_2 = 8.0 \times 10^8\ \Omega$ (la membrana de la pared es un buen aislante). Calcule la resistencia total R_T y β para un axón infinitamente largo. (Esta es una buena aproximación, ya que la longitud de un axón es mucho mayor que su ancho; los axones más largos en el sistema nervioso humano miden más de 1 m, pero solo tienen 10^{-7} m de radio). *d*) ¿En qué fracción disminuye la diferencia de potencial entre el interior y el exterior del axón a lo largo de una distancia de 2.0 mm? *e*) La atenuación de la diferencia de potencial calculada en el inciso *d*) muestra que el axón no es un cable pasivo portador de corriente eléctrica; la diferencia de potencial debe reforzarse periódicamente a lo largo del axón. Este mecanismo de refuerzo es lento, por lo que una señal se propaga a lo largo del axón a solo 30 m/s. En situaciones en que se requiere una respuesta más rápida, los axones están cubiertos con un revestimiento grasoso de mielina. Los segmentos miden alrededor de 2 mm de largo y están separados por espacios llamados *nodos de Ranvier*. La mielina incrementa la resistencia de un segmento de la membrana de 1.0 μm de largo a $R_2 = 3.3 \times 10^{12}\ \Omega$. En el caso de un axón de este tipo cubierto de mielina, ¿en qué fracción disminuye la diferencia de potencial entre el interior y el exterior del axón a lo largo de la distancia de un nodo de Ranvier al siguiente? Esta menor atenuación significa que la velocidad de propagación aumenta.

Respuestas

Pregunta inicial del capítulo 

La diferencia de potencial V es la misma a través de resistores conectados en paralelo. Sin embargo, si las resistencias R son diferentes, hay una corriente I distinta a través de cada resistor: $I = V/R$.

Preguntas de las secciones Evalúe su comprensión

26.1 Respuesta: *a*), *c*), *d*), *b*) He aquí por qué: los tres resistores en la figura 26.1*a* están conectados en serie, por lo que $R_{eq} = R + R + R = 3R$. En la figura 26.1*b*, los tres resistores están en paralelo, de manera que $1/R_{eq} = 1/R + 1/R + 1/R = 3/R$ y $R_{eq} = R/3$. En la figura 26.1*c* los resistores segundo y tercero están en paralelo, por lo que su resistencia equivalente R_{23} está dada por $1/R_{23} = 1/R + 1/R = 2/R$; por lo tanto, $R_{23} = R/2$. Esta combinación está en serie con el primer resistor, por lo que los tres resistores juntos tienen resistencia equivalente $R_{eq} = R + R/2 = 3R/2$. En la figura 26.1*d*, los resistores segundo y tercero están en serie, de manera que su resistencia equivalente es $R_{23} = R + R = 2R$. Esta combinación se encuentra en paralelo con el primer resistor, por lo que la resistencia equivalente de la combinación de los tres resistores está dada por $1/R_{eq} = 1/R + 1/2R = 3/2R$. De ahí que $R_{eq} = 2R/3$.

26.2 Respuesta: espira *cbdac* La ecuación (2) menos la (1) da $-I_2(1\ \Omega) - (I_2 + I_3)(2\ \Omega) + (I_1 - I_3)(1\ \Omega) + I_1(1\ \Omega) = 0$. Esta ecuación se puede obtener si se aplica la regla de las mallas alrededor de la trayectoria de *c* a *b* a *d* a *a* y a *c* en la figura 26.12. Esta no es una ecuación nueva, por lo que no habría ayudado en la solución del ejemplo 26.6.

26.3 Respuestas: *a*) ii, *b*) iii. Un amperímetro siempre debe colocarse en serie con el elemento de interés en el circuito, y un voltímetro siempre debe estar en paralelo. De manera ideal, el amperímetro tendría una resistencia de cero y el voltímetro tendría una resistencia infinita con la finalidad de que su presencia no tuviera efecto en la corriente ni en el voltaje a través del resistor. Ninguna de estas idealizaciones es posible, pero la resistencia del amperímetro debe ser mucho menor que 2 Ω y la resistencia del voltímetro debe ser mucho mayor que 2 Ω.

26.4 Respuesta: ii. Después de una constante de tiempo, $t = RC$, y la carga inicial Q_0 ha disminuido a $Q_0e^{-t/RC} = Q_0e^{-RC/RC} = Q_0e^{-1} = Q_0/e$. De ahí que la energía almacenada haya decrecido de $Q_0^2/2C$ a $(Q_0/e)^2/2C = Q_0^2/2Ce^2$, una fracción $1/e^2 = 0.135$ de su valor inicial. Este resultado no depende del valor inicial de la energía.

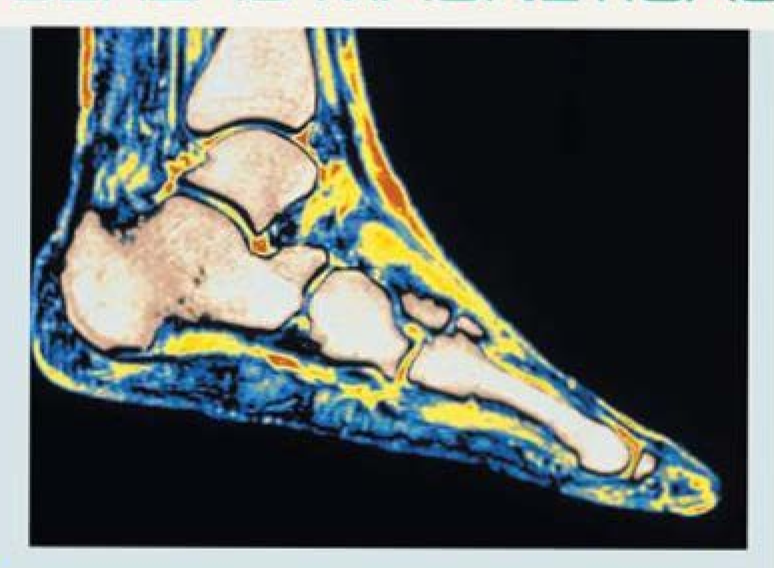
26.5 Respuesta: no Esto es algo muy peligroso de hacer. El interruptor de circuito permitiría que hubiera corrientes de hasta 40 A, lo doble del valor nominal del cableado. La cantidad de potencia $P = I^2R$ disipada en una sección de cable podría ser en ese caso de hasta cuatro veces el valor nominal, por lo que los alambres se calentarían mucho y provocarían un incendio.

Problema práctico

Respuestas: ***a*)** 9.39 J ***b*)** 2.02×10^4 W ***c*)** 4.65×10^{-4} s ***d*)** 7.43×10^3 W

CAMPO MAGNÉTICO Y FUERZAS MAGNÉTICAS

27



? Las imágenes de resonancia magnética (IRM) hacen posible ver detalles de los tejidos blandos (como los del pie que aquí se observan), que no son visibles en las imágenes de rayos x. No obstante, el tejido blando no es un material magnético (no lo atrae un imán). ¿Cómo funcionan las IRM?

OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

Al estudiar este capítulo, usted aprenderá:

- Las propiedades de los imanes y cómo interactúan entre sí.
- La naturaleza de la fuerza que una partícula cargada en movimiento experimenta en un campo magnético.
- En qué se diferencian las líneas de campo magnético de las del campo eléctrico.
- Cómo analizar el movimiento de una partícula cargada en un campo magnético.
- Algunas aplicaciones prácticas de los campos magnéticos en química y física.
- Cómo analizar las fuerzas magnéticas en conductores que llevan corriente.
- Cómo se comportan las espiras de corriente cuando están en un campo magnético.

Todos utilizamos fuerzas magnéticas. Son la esencia de motores eléctricos, hornos de microondas, altavoces (bocinas), impresoras y unidades lectoras de discos. Los ejemplos más conocidos del magnetismo son los imanes permanentes, los cuales atraen objetos de hierro que no son magnéticos y que atraen o repelen otros imanes. Un ejemplo de esta interacción es la aguja de una brújula que se alinea con el magnetismo terrestre. Pero la naturaleza *fundamental* del magnetismo es la interacción entre las cargas eléctricas en movimiento. A diferencia de las fuerzas eléctricas, que actúan sobre las cargas eléctricas, estén en movimiento o no, las fuerzas magnéticas solo actúan sobre cargas que se *mueven*.

En el capítulo 21 vimos que las fuerzas eléctricas ocurren en dos etapas: **1.** una carga produce un campo eléctrico en el espacio que la rodea, y **2.** una segunda carga responde a este campo. Las fuerzas magnéticas también ocurren en dos etapas. En primer lugar, una carga o un conjunto de cargas en *movimiento* (es decir, una corriente eléctrica) produce un campo *magnético*. A continuación, una segunda corriente o carga en movimiento responde a ese campo magnético, experimentando así una fuerza magnética.

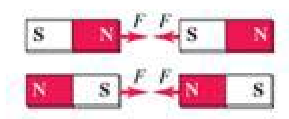
En este capítulo estudiaremos la segunda etapa de la interacción magnética, es decir, el modo en que las cargas y corrientes en movimiento *responden* a los campos magnéticos. En particular, veremos la forma de calcular fuerzas y torcas magnéticas, y descubriremos por qué los imanes son capaces de levantar objetos de hierro, como los clips para sujetar papeles. En el capítulo 28 terminaremos el tema de la interacción magnética con el estudio de cómo las cargas y corrientes en movimiento *producen* campos magnéticos.

27.1 Magnetismo

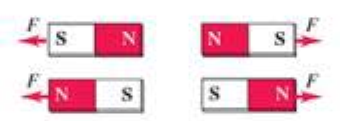
Los fenómenos magnéticos fueron observados por primera vez al menos hace 2500 años, en fragmentos de hierro magnetizado, cerca de la antigua ciudad de Magnesia (hoy Manisa, en Turquía occidental). Esos fragmentos son un ejemplo de lo que ahora llamamos **imanes permanentes**; es probable que en la puerta del refrigerador de su

27.1 *a*) Dos imanes de barra se atraen cuando sus polos opuestos (N y S, o S y N) están cerca uno del otro. *b*) Los imanes de barra se repelen cuando sus polos iguales (N y N, o S y S) se aproximan entre sí.

a) Los polos opuestos se atraen.

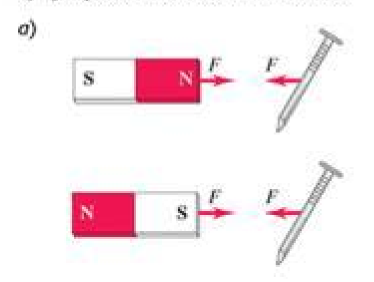


b) Los polos iguales se repelen.



27.2 *a*) Cualquiera de los polos de un imán de barra atrae a un objeto no magnetizado que contenga hierro, como un clavo. *b*) Ejemplo de este efecto en la vida real.

a)



b)



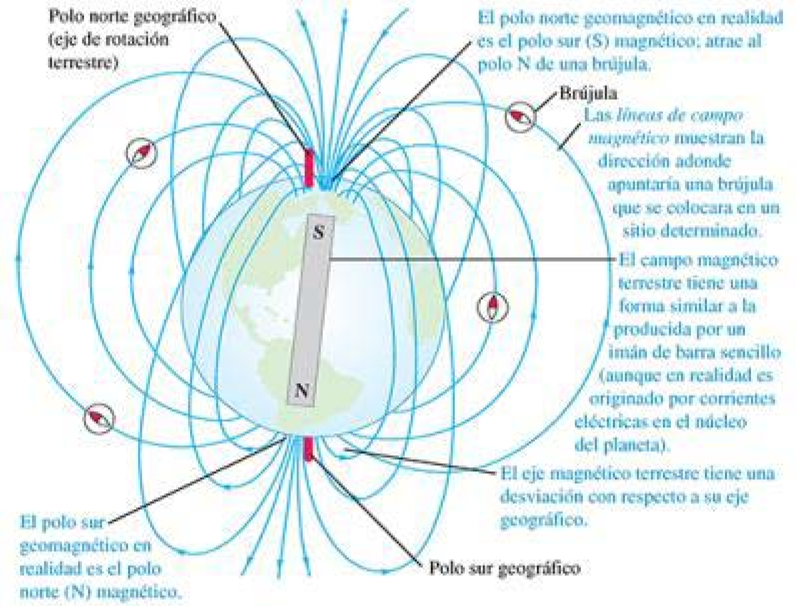
hogar haya varios imanes permanentes. Se observó que los imanes permanentes ejercían fuerza uno sobre otro y también sobre trozos de hierro que no estaban magnetizados. Se descubrió que cuando una varilla de hierro entraba en contacto con un imán natural, aquella también se magnetizaba, y si la varilla flotaba en agua o se suspendía de un hilo por su parte central, tendía a alinearse con la dirección norte-sur. La aguja de una brújula ordinaria no es más que un trozo de hierro magnetizado.

Antes de que se entendiera la relación entre las interacciones magnéticas y las cargas en movimiento, las interacciones de los imanes permanentes y las agujas de las brújulas se describían en términos de *polos magnéticos*. Si un imán permanente en forma de barra, o *imán de barra*, tiene libertad para girar, uno de sus extremos señalará al norte. Este extremo se llama *polo norte* o *polo N*; el otro extremo es el *polo sur* o *polo S*. Los polos opuestos se atraen y los polos iguales se rechazan (figura 27.1). Un objeto que contenga hierro pero que no esté magnetizado (es decir, que no tiende a señalar al norte o al sur) será atraído por *cualquiera* de los polos de un imán permanente (figura 27.2). Esta es la atracción que actúa entre un imán y la puerta de acero no magnetizada de un refrigerador. Por analogía con las interacciones eléctricas, describimos las interacciones en las figuras 27.1 y 27.2 como un imán de barra que genera un *campo magnético* en el espacio que lo rodea y un segundo cuerpo responde a dicho campo. La aguja de una brújula tiende a alinearse con el campo magnético en la ubicación de la aguja.

La Tierra misma es un imán. Su polo norte geográfico está cerca del polo *sur* magnético, lo cual es la razón por la que el polo norte de la aguja de una brújula señala al norte de la Tierra. El eje magnético de nuestro planeta no es del todo paralelo a su eje geográfico (el eje de rotación), así que la lectura de una brújula se desvía un poco del norte geográfico. Tal desviación, que varía con la ubicación, se llama *declinación magnética* o *variación magnética*. Asimismo, el campo magnético no es horizontal en la mayoría de los puntos de la superficie terrestre; su ángulo hacia arriba o hacia abajo se denomina *inclinación magnética*. En los polos magnéticos, el campo magnético es vertical.

La figura 27.3 es un diagrama del campo magnético terrestre. Las líneas, llamadas *líneas de campo magnético*, muestran la dirección que señalaría una brújula que estuviera ubicada en cada sitio; en la sección 27.3 se analizan con detalle. La dirección del campo en cualquier punto se define como la dirección de la fuerza que el campo

27.3 Diagrama del campo magnético terrestre. El campo, que es generado por corrientes en el núcleo fundido del planeta, cambia con el tiempo; hay evidencia geológica que demuestra que invierte por completo su dirección en intervalos irregulares de 10^4 a 10^6 años.



ejercería sobre un polo norte magnético. En la sección 27.2 daremos una definición más fundamental de la dirección y la magnitud de un campo magnético.

Polos magnéticos contra carga eléctrica

Tal vez el concepto de polos magnéticos parezca similar al de la carga eléctrica, y los polos norte y sur parezcan análogos a la carga positiva y a la carga negativa. No obstante, tal analogía es errónea. Si bien las cargas positiva y negativa existen aisladas, *no* hay evidencia experimental de que exista un polo magnético aislado; los polos siempre se presentan por pares. Si un imán de barra se parte en dos, cada extremo se convierte en un imán de barra (figura 27.4) y no en dos polos aislados. La existencia de un polo magnético aislado, o **monopolo magnético**, tendría implicaciones significativas en la física teórica. Se han efectuado búsquedas intensas de monopolos magnéticos, pero sin éxito hasta ahora.

La primera evidencia de la relación que hay entre el magnetismo y las cargas en movimiento, la descubrió, en 1820, el científico danés Hans Christian Oersted, quien encontró que un alambre conductor de corriente desviaba la aguja de una brújula, como se ilustra en la figura 27.5. Por su parte, André Ampère llevó a cabo investigaciones similares en Francia. Unos años más tarde, Michael Faraday en Inglaterra y Joseph Henry en Estados Unidos descubrieron que un imán que se mueve cerca de una espira conductora genera una corriente en la espira. Ahora sabemos que las fuerzas magnéticas entre dos cuerpos como los que se muestran en las figuras 27.1 y 27.2 se deben fundamentalmente a interacciones entre los electrones en movimiento en los átomos de los cuerpos. (También hay interacciones *eléctricas* entre los dos cuerpos, pero estas son más débiles que las interacciones magnéticas debido a que los dos cuerpos son eléctricamente neutros). En el interior de un cuerpo magnetizado, como un imán permanente, hay un movimiento *coordinado* de algunos electrones atómicos; en un cuerpo no magnetizado los movimientos no están coordinados. (En la sección 27.7 describiremos con más detalle dichos movimientos, y veremos cómo se producen las interacciones que se muestran en las figuras 27.1 y 27.2).

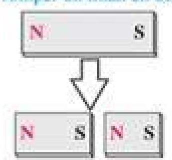
Las interacciones eléctricas y magnéticas están íntimamente relacionadas. En los siguientes capítulos se desarrollarán los principios unificadores del electromagnetismo, culminando con la expresión de tales principios en las *ecuaciones de Maxwell*, las cuales representan la síntesis del electromagnetismo, del mismo modo que las leyes de Newton son la síntesis de la mecánica, y al igual que estas, representan un logro cumbre del intelecto humano.

Evalúe su comprensión de la sección 27.1 Suponga que en la figura 27.5*a* se corta la parte de la aguja de la brújula que está pintada de color gris. Se deshace de esta parte y conserva la roja, en la cual perfora un agujero para colocarla sobre el pivote del centro de la brújula. La parte roja, ¿se seguirá balanceando hacia el este y el oeste cuando se aplique una corriente como en la figura 27.5*b*?

27.4 Ruptura de un imán de barra. Cada trozo tiene un polo norte y un polo sur, aun cuando los trozos sean de distinto tamaño. (Cuanto más pequeños sean, más débil será su magnetismo).

Al contrario de las cargas eléctricas, los polos magnéticos siempre se presentan en pares y no es posible aislarlos.

Al romper un imán en dos...



... se producen dos imanes, no dos polos aislados.

27.5 En el experimento de Oersted, se coloca una brújula directamente sobre un alambre horizontal (visto aquí desde arriba). Cuando la brújula se coloca directamente bajo el alambre, la desviación de la brújula se invierte.

a)



b)

Si el alambre lleva corriente, la aguja de la brújula tiene una desviación, cuya dirección depende de la dirección de la corriente.



27.2 Campo magnético

Para introducir el concepto de campo magnético de manera adecuada, repasaremos nuestra formulación de las interacciones *eléctricas* del capítulo 21, donde introdujimos el concepto de campo *eléctrico* y donde se describieron las interacciones eléctricas en dos pasos:

1. Una distribución de carga eléctrica en reposo crea un campo eléctrico $\vec{E}$ en el espacio circundante.
2. El campo eléctrico ejerce una fuerza $\vec{F} = q\vec{E}$ sobre cualquier otra carga q presente en el campo.

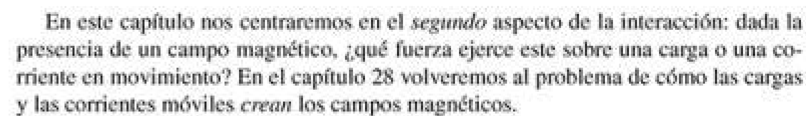
Las interacciones magnéticas se describieron de manera similar:

1. Una carga o corriente móvil crea un **campo magnético** en el espacio circundante (además de su campo *eléctrico*).
2. El campo magnético ejerce una fuerza $\vec{F}$ sobre cualquier otra carga o corriente en movimiento presente en el campo.

Aplicación Langostas espinosas y brújulas magnéticas

Aun cuando la langosta del Caribe (*Panulirus argus*) tiene un sistema nervioso relativamente sencillo, es sorprendentemente sensible a los campos magnéticos. Tiene una "brújula" magnética interna que le permite distinguir el norte, el este, el sur y el oeste. Esta langosta también percibe las pequeñas diferencias en el campo magnético terrestre de una ubicación a otra, y aprovecha estas diferencias para moverse.





En este capítulo nos centraremos en el *segundo* aspecto de la interacción: dada la presencia de un campo magnético, ¿qué fuerza ejerce este sobre una carga o una corriente en movimiento? En el capítulo 28 volveremos al problema de cómo las cargas y las corrientes móviles *crean* los campos magnéticos.

Al igual que el campo eléctrico, el magnético es un *campo vectorial*, es decir, una cantidad vectorial asociada con cada punto del espacio. Usaremos el símbolo $\vec{B}$ para representar el campo magnético. En cualquier posición, la dirección de $\vec{B}$ se define como aquella en la que el polo norte de la aguja de una brújula tiende a apuntar. En la figura 27.3, las flechas sugieren la dirección del campo magnético terrestre; en cualquier imán, $\vec{B}$ apunta hacia afuera de su polo norte y hacia adentro de su polo sur.

Fuerzas magnéticas sobre cargas móviles

La fuerza magnética ejercida sobre una carga en movimiento tiene cuatro características esenciales. La primera es que su magnitud es proporcional a la magnitud de la carga. Los experimentos demuestran que, si una carga de 1 μC y otra de 2 μC se mueven a través de un campo magnético con la misma velocidad, la fuerza sobre la carga de 2 μC es del doble de magnitud que la que se ejerce sobre la carga de 1 μC. La segunda característica es que la magnitud de la fuerza también es proporcional a la magnitud o "intensidad" del campo; si duplicamos la magnitud del campo (por ejemplo, usando dos imanes de barra en lugar de uno solo) sin cambiar la carga o su velocidad, la fuerza se duplica.

Una tercera característica es que la fuerza magnética depende de la velocidad de la partícula. Esto es muy diferente de lo que sucede con la fuerza del campo eléctrico, que es la misma sin importar si la carga se mueve o no. Una partícula cargada en reposo *no* experimenta fuerza magnética. Y la cuarta característica es que los experimentos indican que la fuerza magnética $\vec{F}$ *no* tiene la misma dirección que el campo magnético $\vec{B}$ sino que siempre es *perpendicular* tanto a $\vec{B}$ como a la velocidad $\vec{v}$. La magnitud F de la fuerza es proporcional a la componente de $\vec{v}$ perpendicular al campo; cuando esa componente es igual a cero (es decir, cuando $\vec{v}$ y $\vec{B}$ son paralelas o antiparalelas), la fuerza es igual a cero.

La figura 27.6 ilustra estas relaciones. La dirección de $\vec{F}$ siempre es perpendicular al plano que contiene $\vec{v}$ y $\vec{B}$. Su magnitud está dada por

$$F = |q|v_{\perp}B = |q|vB\,\mathrm{sen}\,\phi \qquad (27.1)$$

donde $|q|$ es la magnitud de la carga y ϕ es el ángulo medido desde la dirección de $\vec{v}$ hacia la dirección de $\vec{B}$, como se muestra en la figura.

Esta descripción no especifica por completo la dirección de $\vec{F}$, siempre hay dos direcciones, opuestas entre sí, que son perpendiculares al plano de $\vec{v}$ y $\vec{B}$. Para completar la descripción se utiliza la misma regla de la mano derecha que se empleó para definir el producto vectorial en la sección 1.10. (Sería una buena idea repasar esa sección antes de proseguir). Dibuje los vectores $\vec{v}$ y $\vec{B}$ con sus colas juntas, como en la figura 27.7*a*. Imagine que gira $\vec{v}$ hasta que apunta en dirección de $\vec{B}$ (use el más pequeño de los dos ángulos posibles). Doble los dedos de su mano derecha en torno a la línea perpendicular al plano de $\vec{v}$ y $\vec{B}$ de modo que se enrosquen en el sentido de rotación de $\vec{v}$ a $\vec{B}$. Entonces, su pulgar apunta en dirección de la fuerza $\vec{F}$ sobre una carga *positiva*. (En forma alternativa, la dirección de la fuerza $\vec{F}$ sobre una carga positiva es aquella en que un tornillo de rosca derecha avanzaría si se girara del mismo modo).

Este análisis indica que la fuerza sobre una carga q que se mueve con velocidad $\vec{v}$ en un campo magnético $\vec{B}$ está dada, tanto en magnitud como en dirección, por

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B} \qquad \text{(fuerza magnética sobre una partícula con carga en movimiento)} \qquad (27.2)$$

Este es el primero de varios productos vectoriales que encontraremos al estudiar las relaciones del campo magnético. Es importante observar que la ecuación (27.2) *no* se deduce teóricamente, sino que es una observación basada en *experimentos*.

27.6 La fuerza magnética $\vec{F}$ que actúa sobre una carga positiva q que se mueve con velocidad $\vec{v}$ es perpendicular tanto a $\vec{v}$ como al campo magnético $\vec{B}$. Para valores dados de la velocidad v y la intensidad del campo magnético B, la fuerza es mayor cuando $\vec{v}$ y $\vec{B}$ son perpendiculares.

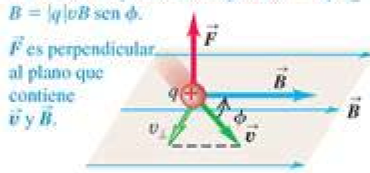
a)

Una carga que se mueve en forma **paralela** al campo magnético experimenta una **fuerza magnética igual a cero.**



b)

Una carga que se mueve con un ángulo ϕ con respecto a un campo magnético experimenta una fuerza magnética de magnitud $F = |q|v_{\perp}B = |q|vB$ sen ϕ.



c)

Una carga que se mueve de manera **perpendicular** a un campo magnético experimenta una fuerza magnética máxima de magnitud $F_{máx} = qvB$.

27.7 Obtención de la dirección de la fuerza magnética sobre una partícula cargada en movimiento.

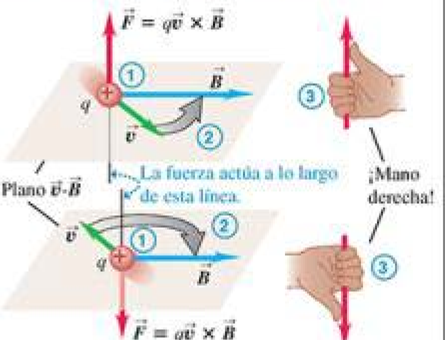
a)

Regla de la mano derecha para la dirección de la fuerza magnética sobre una carga **positiva** que se mueve en un campo magnético:

① Coloque los vectores $\vec{v}$ y $\vec{B}$ cola con cola.

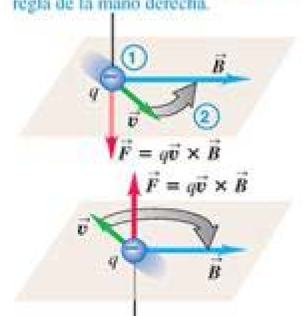
② Imagine que gira $\vec{v}$ hacia $\vec{B}$ en el plano $\vec{v}$-$\vec{B}$ (en el menor ángulo).

③ La fuerza actúa a lo largo de una línea perpendicular al plano $\vec{v}$-$\vec{B}$. Enrolle los dedos de su mano derecha en torno a esta línea en la misma dirección que giró a $\vec{v}$. Ahora, su pulgar apunta en la dirección que actúa la fuerza.



b)

Si la carga es negativa, la dirección de la fuerza es **opuesta** a la que da la regla de la mano derecha.



La ecuación (27.2) es válida para cargas tanto positivas como negativas. Cuando q es negativa, la dirección de la fuerza $\vec{F}$ es opuesta a la de $\vec{v} \times \vec{B}$ (figura 27.7*b*). Si dos cargas de igual magnitud y signos contrarios se mueven en el mismo campo $\vec{B}$ con igual velocidad (figura 27.8), las fuerzas tienen igual magnitud y dirección opuesta. Las figuras 27.6, 27.7 y 27.8 presentan varios ejemplos de las relaciones entre las direcciones de $\vec{F}$, $\vec{v}$ y $\vec{B}$ para cargas tanto positivas como negativas; asegúrese de que las entiende.

La ecuación (27.1) da la magnitud de la fuerza magnética $\vec{F}$ de la ecuación (27.2). Tal magnitud se puede expresar en una forma distinta pero equivalente: puesto que ϕ es el ángulo entre la dirección de los vectores $\vec{v}$ y $\vec{B}$, se puede interpretar a B sen ϕ como la componente de $\vec{B}$ perpendicular a $\vec{v}$ es decir, $B_\perp$. Con esta notación, la magnitud de la fuerza es

$$F = |q|vB_\perp \tag{27.3}$$

Hay ocasiones en que esta forma es más conveniente, en especial en problemas que incluyen *corrientes* en lugar de partículas individuales. Más adelante, en este capítulo estudiaremos fuerzas sobre corrientes.

De la ecuación (27.1) se desprende que las *unidades* de B deben ser las mismas que las unidades de F/qv. Por lo tanto, la unidad del SI para B es equivalente a 1 N·s/C·m, o bien, ya que un ampere es un coulomb por segundo (1 A = 1 C/s), 1 N/A·m. Esta unidad recibe el nombre de **tesla** (se abrevia T), en honor de Nikola Tesla (1856-1943), un prominente científico e inventor croata-estadounidense:

$$1 \text{ tesla} = 1 \text{ T} = 1 \text{ N/A} \cdot \text{m}$$

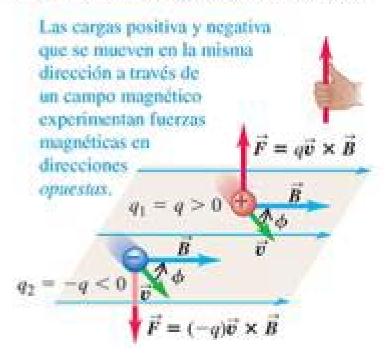
Otra unidad de B que también es de uso común es el **gauss** (1 G = 10^{-4} T).

El campo magnético de la Tierra es del orden de 10^{-4} T, o bien, 1 G. En el interior de los átomos ocurren campos magnéticos del orden de 10 T, los cuales son importantes en el análisis de los espectros atómicos. El campo magnético más estable que se haya producido hasta el presente en un laboratorio es de aproximadamente 45 T. Algunos electroimanes de pulsos de corriente generan campos de 120 T, durante intervalos de tiempo de 1 milisegundo.

Medición de campos magnéticos con cargas de prueba

Para analizar un campo magnético desconocido, se mide la magnitud y la dirección de la fuerza sobre una carga de prueba en *movimiento*, y luego se emplea la ecuación (27.2) para determinar $\vec{B}$. El haz de electrones de un tubo de rayos catódicos, como el de los antiguos televisores (no una pantalla plana), es un dispositivo adecuado para realizar estas mediciones. El cañón de electrones dispara un haz de electrones estrecho a una velocidad conocida. Si no hay una fuerza que desvíe el haz, este golpea el centro de la pantalla.

27.8 Dos cargas de la misma magnitud pero signos contrarios que se mueven con igual velocidad en el mismo campo magnético. Las fuerzas magnéticas sobre las cargas son iguales en magnitud pero opuestas en dirección.



Aplicación Campos magnéticos del cuerpo

Todas las células vivas son eléctricamente activas, y las corrientes eléctricas tenues en el interior del cuerpo producen campos magnéticos débiles pero medibles. Los campos generados por los músculos esqueléticos tienen magnitudes menores de 10^{-10} T, aproximadamente una millonésima parte del campo magnético terrestre. El cerebro produce campos magnéticos más débiles, de solo 10^{-12} T.



En general, si hay un campo magnético presente, el haz de electrones sufre una desviación. Pero si el haz es paralelo o antiparalelo al campo, entonces $\phi = 0$ o π en la ecuación (27.1), y $F = 0$; no hay fuerza y, por lo tanto, no hay desviación. Si se observa que el haz de electrones no tiene desviación cuando su dirección es paralela a cierto eje, como en la figura 27.9*a*, el vector $\vec{B}$ debe apuntar hacia arriba o hacia abajo de ese eje.

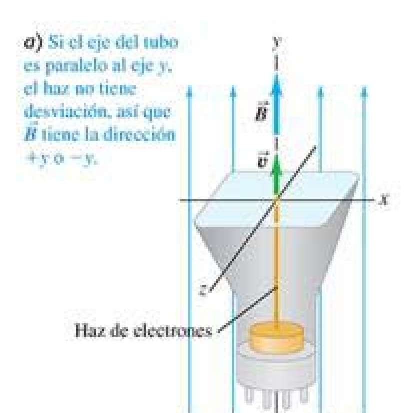
Entonces, si el tubo se gira 90° (figura 27.9*b*), $\phi = \pi/2$ en la ecuación (27.1), y la fuerza magnética es máxima; el haz tiene una desviación que es perpendicular al plano de $\vec{B}$ y $\vec{v}$. La dirección y la magnitud de la desviación determinan la dirección y la magnitud de $\vec{B}$. Para confirmar la ecuación (27.1), podemos realizar experimentos adicionales en los cuales el ángulo entre $\vec{B}$ y $\vec{v}$ esté entre cero y 90°. Como el electrón tiene carga negativa, en la figura 27.9*b* se observa que la fuerza tiene dirección opuesta a la fuerza de una carga positiva.

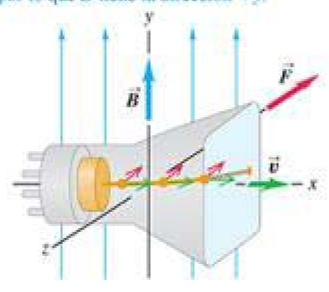
MasteringPHYSICS

ActivPhysics 13.4: Magnetic Force on a Particle

Cuando una partícula cargada se mueve en una región del espacio en que están presentes los campos eléctrico *y* magnético, ambos ejercerán fuerzas sobre la partícula. La fuerza total $\vec{F}$ es la suma vectorial de las fuerzas eléctrica y magnética:

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \tag{27.4}$$





27.9 Determinación de la dirección de un campo magnético usando un tubo de rayos catódicos. Como los electrones tienen carga negativa, la magnitud de la fuerza magnética $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$ en el inciso *b*) apunta en dirección opuesta a la dirección dada por la regla de la mano derecha (véase la figura 27.7*b*).

Estrategia para resolver problemas 27.1 Fuerzas magnéticas



IDENTIFICAR *los conceptos relevantes:* La ecuación $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$ permite determinar la fuerza magnética sobre una partícula cargada en movimiento.

PLANTEAR *el problema* de acuerdo con los siguientes pasos:

1. Dibuje el vector velocidad $\vec{v}$ y el campo magnético $\vec{B}$ con sus colas juntas, para visualizar el plano donde se encuentran.
2. Determine el ángulo ϕ entre $\vec{v}$ y $\vec{B}$.
3. Identifique las incógnitas.

EJECUTAR *la solución* como sigue:

1. Exprese la fuerza magnética usando la ecuación (27.2), $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$. La magnitud de la fuerza está dada por la ecuación (27.1), $F = qvB \operatorname{sen} \phi$.
2. Recuerde que $\vec{F}$ es perpendicular al plano de los vectores $\vec{v}$ y $\vec{B}$. La regla de la mano derecha (véase la figura 27.7) indica la dirección de $\vec{v} \times \vec{B}$. Si q es negativa, $\vec{F}$ es *opuesta* a $\vec{v} \times \vec{B}$.

EVALUAR *la respuesta:* Siempre que sea posible, resuelva el problema de dos formas para confirmar que los resultados son correctos. Hágalo directamente con la definición geométrica del producto vectorial. Después, calcule las componentes de los vectores en algún sistema de coordenadas conveniente y calcule el producto vectorial de las componentes. Compruebe que los resultados concuerden.

Ejemplo 27.1 Fuerza magnética sobre un protón



Un haz de protones ($q = 1.6 \times 10^{-19}$ C) se mueve a 3.0×10^5 m/s a través de un campo magnético uniforme de 2.0 T dirigido a lo largo del eje *z* positivo, como se indica en la figura 27.10. La velocidad de cada protón se encuentra en el plano *xz* a un ángulo de 30° con respecto al eje +*z*. Calcule la fuerza sobre un protón.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Este problema usa la expresión $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$ para la fuerza magnética $\vec{F}$ sobre una partícula cargada en movimiento. La incógnita es $\vec{F}$.

EJECUTAR: La carga es positiva, por lo que la fuerza está en la misma dirección que el producto vectorial $\vec{v} \times \vec{B}$. Según la regla de la mano derecha, la dirección está a lo largo del eje y negativo. De acuerdo con la ecuación (27.1), la magnitud de la fuerza es:

$$F = qvB \text{ sen } \phi$$
$$= (1.6 \times 10^{-19}\text{ C})(3.0 \times 10^5\text{ m/s})(2.0\text{ T})(\text{sen } 30°)$$
$$= 4.8 \times 10^{-14}\text{ N}$$

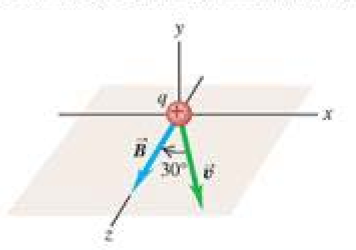
EVALUAR: El resultado se comprueba evaluando la fuerza con el lenguaje de vectores y la ecuación (27.2). Tenemos

$$\vec{v} = (3.0 \times 10^5\text{ m/s})(\text{sen } 30°)\hat{\imath} + (3.0 \times 10^5\text{ m/s})(\cos 30°)\hat{k}$$
$$\vec{B} = (2.0\text{ T})\hat{k}$$
$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$$
$$= (1.6 \times 10^{-19}\text{ C})(3.0 \times 10^5\text{ m/s})(2.0\text{ T}) \times (\text{sen } 30°\hat{\imath} + \cos 30°\hat{k}) \times \hat{k}$$
$$= (-4.8 \times 10^{-14}\text{ N})\hat{\jmath}$$

(Recuerde que $\hat{\imath} \times \hat{k} = -\hat{\jmath}$ y $\hat{k} \times \hat{k} = \mathbf{0}$). De nuevo resulta que la fuerza está en la dirección negativa del eje y, con magnitud de 4.8×10^{-14} N.

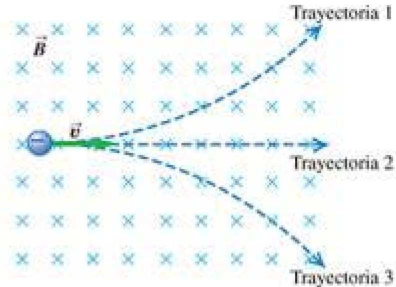
Si el haz fuera de *electrones* en lugar de protones, la carga sería negativa ($q = -1.6 \times 10^{-19}$ C), y la dirección de la fuerza se invertiría. Ahora, la fuerza estaría dirigida a lo largo del eje *y positivo*, pero su magnitud sería la misma que antes, $F = 4.8 \times 10^{-14}$ N.

27.10 Direcciones de $\vec{v}$ y $\vec{B}$ para un protón en un campo magnético.



Evalúe su comprensión de la sección 27.2 La figura de la derecha ilustra un campo magnético uniforme $\vec{B}$ dirigido hacia el plano del papel (que se muestra con símbolos "×" azules); en este plano se mueve una partícula con carga negativa. ¿Cuál de las tres trayectorias sigue la partícula: 1, 2 o 3?





27.3 Líneas de campo magnético y flujo magnético

Cualquier campo magnético se representa usando **líneas de campo magnético**, del mismo modo que hicimos para el campo magnético terrestre en la figura 27.3. La idea es la misma de las líneas de campo eléctrico estudiadas en la sección 21.6. Se dibujan las líneas de modo que la línea en cualquier punto sea tangente al vector del campo magnético $\vec{B}$ en ese punto (figura 27.11). Igual que con las líneas de campo eléctrico, solo se dibujan unas cuantas líneas que sean representativas, pues de otra manera, ocuparían todo el espacio. Donde las líneas de campo adyacentes están más juntas, la magnitud del campo es grande; donde las líneas están más separadas, la magnitud del campo es pequeña. Asimismo, debido a que la dirección de $\vec{B}$ en cada punto es única, las líneas de campo nunca se cruzan.

CUIDADO **Las líneas de campo magnético no son "líneas de fuerza"** En ocasiones, a las líneas de campo magnético se les llama "líneas magnéticas de fuerza", pero este no es un nombre adecuado; a diferencia de las líneas de campo eléctrico, *no* apuntan en dirección de la fuerza que se ejerce sobre la carga (figura 27.12). La ecuación (27.2) muestra que la fuerza sobre una partícula con carga en movimiento siempre es perpendicular al campo magnético y, por lo tanto, a la línea de campo magnético que pasa por la posición donde se halla la partícula. La dirección de la fuerza depende de la velocidad de la partícula y del signo de la carga, de modo que una simple mirada a las líneas de campo magnético no basta para indicar la dirección de la fuerza sobre una partícula cargada que se mueva arbitrariamente. Las líneas de campo magnético *sí* tienen la dirección en que apuntaría la aguja de una brújula colocada en cada sitio; tal vez esto lo ayude a visualizar las líneas.

Las figuras 27.11 y 27.13 muestran líneas de campo magnético producidas por varias fuentes comunes de campo magnético. En el espacio entre los polos del imán de la figura 27.13*a*, las líneas de campo son aproximadamente rectas y paralelas, y están igualmente espaciadas, lo cual demuestra que el campo magnético en esta región es aproximadamente *uniforme* (es decir, tiene magnitud y dirección constantes).

27.11 Líneas de campo magnético de un imán permanente. Observe que las líneas de campo pasan por el interior del imán.



27.12 Las líneas de campo magnético *no* son "líneas de fuerza".



Las líneas de campo magnético *no* son "líneas de fuerza". La fuerza sobre una partícula cargada no se ejerce a lo largo de la dirección de una línea de campo.



La dirección de la fuerza magnética depende de la velocidad $\vec{v}$, según se expresa en la ley de la fuerza magnética $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$.

Como los patrones de campo magnético son tridimensionales, con frecuencia es necesario dibujar líneas de campo magnético que apunten hacia adentro o hacia afuera del plano de un dibujo. Para hacer esto se usa un punto (•) que representa un vector que sale del plano, y una cruz (×) que denota que el vector entra al plano (figura 27.13*b*). Para recordar estas convenciones, visualice el punto como la punta de una flecha que se dirige hacia usted; en tanto que la cruz representa las plumas de una flecha que se aleja de usted.

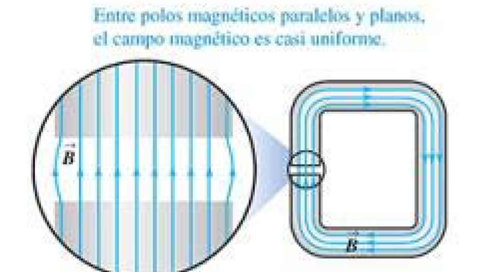
Las limaduras de hierro, al igual que las agujas de las brújulas, tienden a alinearse con las líneas de campo magnético, por lo que proporcionan una forma sencilla de visualizar las líneas de campo magnético (figura 27.14).

Flujo magnético y ley de Gauss del magnetismo

Definimos el **flujo magnético** Φ_B a través de una superficie al igual que definimos el flujo eléctrico en relación con la ley de Gauss, en la sección 22.2. Se divide cualquier superficie en elementos de área dA (figura 27.15), y para cada elemento se determina $B_\perp$, la componente de $\vec{B}$ normal a la superficie en la posición de ese elemento, como se ilustra. A partir de la figura, $\beta_\perp = \beta \cos \phi$, donde ϕ es el ángulo entre la dirección de $\vec{B}$ y una línea perpendicular a la superficie. (Hay que tener cuidado de

27.13 Líneas de campo magnético producidas por algunas fuentes comunes generadoras de un campo magnético.

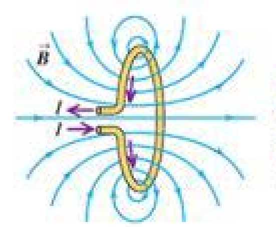
a) Campo magnético de un imán en forma de C



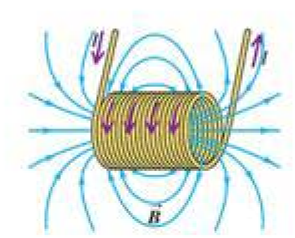
b) Campo magnético de un alambre recto que conduce corriente



c) Campos magnéticos de una espira y una bobina (solenoide) que conducen corriente

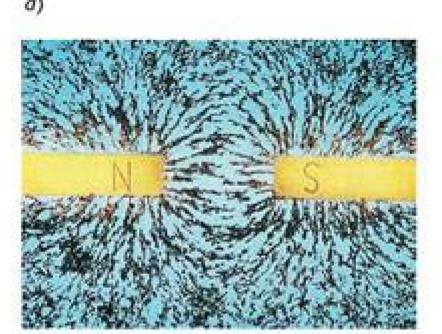


Observe que el campo de la espira y, especialmente, de la bobina se parecen al campo de un imán de barra (véase la figura 27.11).

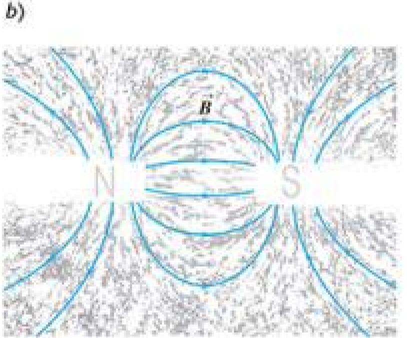


27.14 *a*) Al igual que las agujas de las brújulas pequeñas, las limaduras de hierro se alinean tangencialmente a las líneas de campo magnético. *b*) Dibujo de las líneas de campo para la situación que se ilustra en el inciso *a*).

a)



b)



no confundir ϕ con Φ_B). En general, esta componente varía de un punto a otro de la superficie. Definimos el flujo magnético $d\Phi_B$ a través de esta área como

$$d\Phi_B = B_\perp dA = B\cos\phi \, dA = \vec{B} \cdot d\vec{A} \quad (27.5)$$

El flujo magnético *total* a través de la superficie es la suma de las contribuciones de los elementos de área individuales:

$$\Phi_B = \int B_\perp dA = \int B\cos\phi \, dA = \int \vec{B} \cdot d\vec{A} \quad \text{(flujo magnético a través de una superficie)} \quad (27.6)$$

(Esta ecuación utiliza los conceptos de área vectorial e integral de superficie, que se presentaron en la sección 22.2; el lector quizá desee repasar aquel análisis).

El flujo magnético es una cantidad *escalar*. Si $\vec{B}$ es uniforme en una superficie plana con área total A, entonces $B_\perp$ y ϕ son los mismos en todos los puntos de la superficie, y

$$\Phi_B = B_\perp A = BA\cos\phi \quad (27.7)$$

Si $\vec{B}$ es perpendicular a la superficie, entonces $\cos\phi = 1$ y la ecuación (27.7) se reduce a $\Phi_B = BA$. Al estudiar la inducción electromagnética en el capítulo 29, usaremos mucho el concepto de flujo magnético.

La unidad del SI para el flujo magnético es igual a la unidad de campo magnético (1 T) multiplicada por la unidad de área (1 m^2). Esta unidad se llama **weber** (1 Wb), en honor del físico alemán Wilhelm Weber (1804-1891):

$$1 \text{ Wb} = 1 \text{ T} \cdot \text{m}^2$$

Asimismo, 1 T = 1 N/A·m, por lo que

$$1 \text{ Wb} = 1 \text{ T} \cdot \text{m}^2 = 1 \text{ N} \cdot \text{m/A}$$

En la ley de Gauss, el flujo *eléctrico* total a través de una superficie cerrada es proporcional a la carga eléctrica total encerrada por la superficie. Por ejemplo, si la superficie cerrada contiene un dipolo eléctrico, el flujo eléctrico total es igual a cero porque la carga total es cero. (Quizás usted desee repasar la sección 22.3 acerca de la ley de Gauss). Por analogía, si existiera algo como una sola carga magnética (monopolo magnético), el flujo *magnético* total a través de la superficie cerrada sería proporcional a la carga magnética total encerrada. Pero ya dijimos que nunca se ha observado un monopolo magnético, a pesar de la intensa búsqueda que se hace de él. Se concluye lo siguiente:

El flujo magnético total a través de una superficie cerrada siempre es igual a cero.

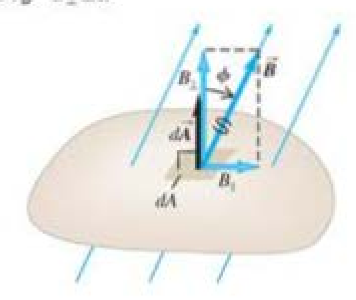
Con símbolos,

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0 \quad \text{(flujo magnético a través de cualquier superficie cerrada)} \quad (27.8)$$

En ocasiones, esta ecuación recibe el nombre de *ley de Gauss del magnetismo*. Se puede comprobar analizando las figuras 27.11 y 27.13; si se dibuja una superficie cerrada en cualquier lugar de uno de los mapas de campo que se ilustran en las figuras, se verá que toda línea de campo que penetra a la superficie también sale de ella; el flujo neto a través de la superficie es igual a cero. De la ecuación (27.8) también se deduce que las líneas de campo magnético siempre forman espiras cerradas.

CUIDADO **Las líneas de campo magnético no tienen extremos** A diferencia de las líneas de campo eléctrico, que comienzan y terminan en cargas eléctricas, las líneas de campo magnético *nunca* tienen puntos extremos; tales puntos indicarían la presencia de un monopolo. Quizás usted se sienta tentado a dibujar líneas de campo magnético que comiencen en el polo norte de un imán y terminen en el polo sur. No obstante, como se observa en la figura 27.11, las líneas de campo de un imán en realidad pasan por el interior de este. Al igual que todas las demás líneas de campo magnético, forman espiras cerradas.

27.15 El flujo magnético a través de un elemento de área dA se define como $d\Phi_B = B_\perp dA$.



MasteringPHYSICS

PhET: Magnet and Compass
PhET: Magnets and Electromagnets

En la ley de Gauss, que siempre trata con superficies *cerradas*, el elemento de área vectorial $d\vec{A}$ en la ecuación (27.6) siempre apunta *hacia afuera* de la superficie. Sin embargo, ciertas aplicaciones del flujo *magnético* implican una superficie *abierta* con una línea como frontera, lo cual produce una ambigüedad en el signo de la ecuación (27.6) porque hay dos posibilidades en la elección de la dirección para $d\vec{A}$. En estos casos se elige uno de los dos lados de la superficie como "positivo" y se emplea esta convención de forma consistente.

Si en la ecuación (27.5) el elemento de área dA forma ángulos rectos con las líneas de campo, entonces $B_{\perp} = B$; si se denota el área como $dA_{\perp}$, tenemos

$$B = \frac{d\Phi_B}{dA_{\perp}} \qquad (27.9)$$

Es decir, la magnitud del campo magnético es igual al *flujo por unidad de área* a través de un área que forma ángulos rectos con el campo magnético. Por esta razón, el campo magnético $\vec{B}$ en ocasiones se denomina **densidad de flujo magnético.**

Ejemplo 27.2 Cálculos en un flujo magnético

La figura 27.16*a* muestra una vista en perspectiva de una superficie plana con área de 3.0 cm^2 en un campo magnético uniforme $\vec{B}$. El flujo magnético a través de esta superficie es de +0.90 mWb. Calcule la magnitud del campo magnético y obtenga la dirección del vector área $\vec{A}$.

27.16 *a*) Superficie plana A en un campo magnético uniforme $\vec{B}$. *b*) El vector área $\vec{A}$ forma un ángulo de 60° con $\vec{B}$. (Si hubiéramos elegido que $\vec{A}$ tapuntara en la dirección opuesta, ϕ tendría que ser de 120° y el flujo magnético Φ_B tendría que ser negativo).

a) Vista en perspectiva



b) Diagrama del problema (vista de perfil)



SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Las incógnitas son la magnitud B del campo y la dirección del vector área. Como $\vec{B}$ es uniforme, B y ϕ son los mismos en todos los puntos de la superficie, por lo que se usa la ecuación (27.7): $\Phi_B = BA\cos\phi$.

EJECUTAR: El área A es 3.0×10^{-4} m^2; la dirección de $\vec{A}$ es perpendicular a la superficie, por lo que ϕ podría ser de 60° o 120°. Pero Φ_B, B y A son positivos, de modo que $\cos\phi$ también debe ser positivo. Esto elimina los 120°, por lo que $\phi = 60°$ (figura 27.16*b*), y se obtiene:

$$B = \frac{\Phi_B}{A\cos\phi} = \frac{0.90 \times 10^{-3}\ \text{Wb}}{(3.0 \times 10^{-4}\ \text{m}^2)(\cos 60°)} = 6.0\ \text{T}$$

EVALUAR: En muchos problemas se pide calcular el flujo de un campo magnético determinado a través de un área dada. Este ejemplo es algo diferente: somete a prueba su comprensión de la definición de flujo magnético.

Evalúe su comprensión de la sección 27.3 Imagine que se mueve a lo largo del eje de la espira conductora de corriente de la figura 27.13*c*; comienza en un punto muy a la izquierda de la espira y termina en otro punto muy a la derecha. *a*) ¿Cómo variará la intensidad del campo magnético a medida que usted se mueve a lo largo de dicha trayectoria? **i.** Es la misma en todos los puntos de la trayectoria; **ii.** aumenta y luego disminuye; **iii.** disminuye y luego aumenta. *b*) ¿La dirección del campo magnético varía conforme usted se mueve por la trayectoria?

27.4 Movimiento de partículas cargadas en un campo magnético

Cuando una partícula cargada se mueve en un campo magnético, sobre ella actúa la fuerza magnética dada por la ecuación (27.2), y su movimiento está determinado por las leyes de Newton. La figura 27.17*a* muestra un ejemplo sencillo. Una partícula con carga positiva q se encuentra en el punto O, moviéndose con velocidad $\vec{v}$ en un campo magnético uniforme $\vec{B}$ dirigido hacia el plano de la figura. Los vectores $\vec{v}$ y $\vec{B}$ son perpendiculares, por lo que la fuerza magnética $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$ tiene una magnitud $F = qvB$ y la dirección que se indica en la figura. La fuerza *siempre* es perpendicular a $\vec{v}$, por lo que no puede cambiar la *magnitud* de la velocidad, solo su dirección. En otras palabras, la fuerza magnética nunca tiene una componente paralela al movi-

miento de la partícula, de modo que la fuerza magnética nunca realiza *trabajo* sobre la partícula. Esto se cumple aun si el campo magnético no es uniforme.

El movimiento de una partícula cargada bajo la influencia de un solo campo magnético siempre ocurre con rapidez constante.

Con este principio, se observa que para la situación ilustrada en la figura 27.17*a*, las magnitudes de $\vec{F}$ y $\vec{v}$ son constantes. En puntos como P y S, las direcciones de la fuerza y la velocidad han cambiado como se ilustra, pero sus magnitudes son las mismas. Por lo tanto, la partícula se mueve bajo la influencia de una fuerza de magnitud constante que siempre forma ángulos rectos con la velocidad de la partícula. Si se comparan estas condiciones con el análisis del movimiento circular estudiado en las secciones 3.4 y 5.4, se observa que la trayectoria de la partícula es un *círculo*, con rapidez v constante. La aceleración centrípeta es v^2/R, y la única fuerza que actúa es la fuerza magnética, por lo que de acuerdo con la segunda ley de Newton,

$$F = |q|vB = m\frac{v^2}{R} \tag{27.10}$$

donde m es la masa de la partícula. Al despejar el radio R de la ecuación (27.10) para la trayectoria circular, se obtiene

$$R = \frac{mv}{|q|B} \quad \text{(radio de una órbita circular en un campo magnético)} \tag{27.11}$$

Esto también se puede escribir como $R = p/|q|B$, donde $p = mv$ es la magnitud del momento lineal de la partícula. Si la carga q es negativa, en la figura 27.17*a* la partícula se mueve en sentido *horario* alrededor de la órbita.

La rapidez angular ω de la partícula se calcula con la ecuación (9.13), $v = R\omega$. Al combinar esta con la ecuación (27.11), se obtiene

$$\omega = \frac{v}{R} = v\frac{|q|B}{mv} = \frac{|q|B}{m} \tag{27.12}$$

El número de revoluciones por unidad de tiempo es $f = \omega/2\pi$. Esta frecuencia f es independiente del radio R de la trayectoria. Se denomina **frecuencia de ciclotrón**; en un acelerador de partículas llamado *ciclotrón*, las partículas que se mueven en trayectorias casi circulares reciben un impulso que se duplica en cada revolución, lo cual incrementa su energía y sus radios orbitales, pero no su rapidez angular ni su frecuencia. De manera similar, un tipo de *magnetrón*, fuente común de radiación de microondas en los hornos y en los sistemas de radar, emite radiación con una frecuencia igual a la frecuencia del movimiento circular de los electrones en una cámara de vacío entre los polos de un imán.

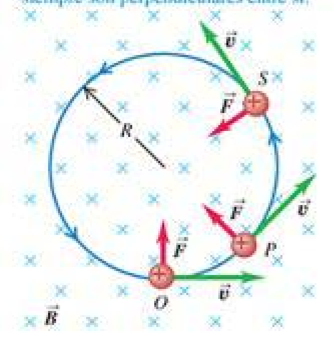
Si la dirección de la velocidad inicial *no* es perpendicular al campo, la *componente* de la velocidad paralela al campo es constante porque no hay fuerza paralela al campo. Así que la partícula se mueve con un patrón helicoidal (figura 27.18). El radio de la hélice está dado por la ecuación (27.11), donde v ahora es la componente de la velocidad perpendicular al campo $\vec{B}$.

El movimiento de una partícula cargada en un campo magnético no uniforme es más complejo. La figura 27.19 ilustra un campo producido por dos bobinas circulares separadas por cierta distancia. Las partículas cerca de cualquier bobina experimentan una fuerza magnética hacia el centro de la región; las partículas con rapideces adecuadas describen repetidamente una espiral de uno a otro extremo de la región. Como las partículas cargadas pueden quedar atrapadas en ese campo magnético, este recibe el nombre de *botella magnética*. Esta técnica se usa para confinar plasmas muy calientes con temperaturas del orden de 10^6 K. En forma similar, el campo magnético no uniforme de la Tierra atrapa partículas cargadas provenientes del Sol, en regiones con forma de rosquilla que rodean nuestro planeta, como se ilustra en la figura 27.20. Estas regiones se llaman *cinturones de radiación Van Allen* y fueron descubiertas en 1958 con datos obtenidos por instrumentos a bordo del satélite Explorer I.

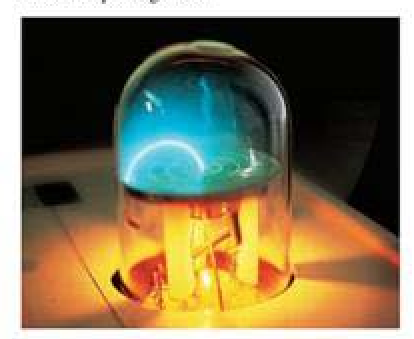
27.17 Una partícula cargada se mueve en un plano perpendicular a un campo magnético uniforme $\vec{B}$.

a) Órbita de una partícula cargada en un campo magnético uniforme

Una carga que se mueve en ángulos rectos con respecto a un campo $\vec{B}$ uniforme se mueve en círculo a rapidez constante, porque $\vec{F}$ y $\vec{v}$ siempre son perpendiculares entre sí.



b) Haz de electrones (arco blanco) que se curva en un campo magnético

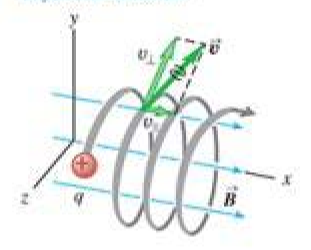




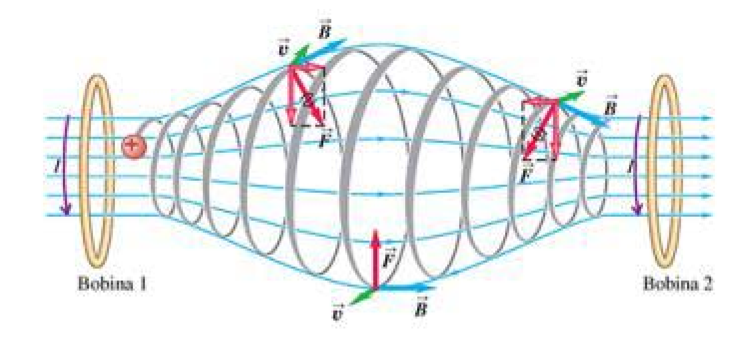
Video Tutor Demo

27.18 Caso general de una partícula cargada que se mueve en un campo magnético uniforme $\vec{B}$. El campo magnético no realiza trabajo sobre la partícula, por lo que su rapidez y la energía cinética permanecen constantes.

El movimiento de esta partícula tiene componentes tanto paralela ($v_\parallel$) como perpendicular ($v_\perp$) al campo magnético, por lo que se mueve en una trayectoria helicoidal.



27.19 Botella magnética. Las partículas cerca de cualquier extremo de la región experimentan una fuerza magnética hacia el centro de la región. Esta es una forma de contener un gas ionizado con temperatura del orden de 10^6 K, que vaporizaría cualquier material de un contenedor.



27.20 *a*) Cinturones de radiación Van Allen alrededor de la Tierra. Cerca de los polos, las partículas cargadas de estos cinturones ingresan a la atmósfera y producen auroras boreales ("luces del norte") y auroras australes ("luces del sur"). *b*) Fotografía de la aurora boreal.

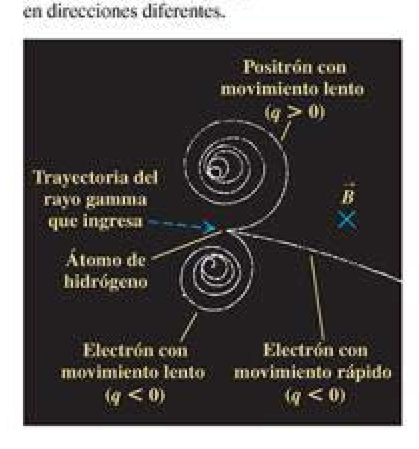
a)



b)



27.21 Esta imagen de una cámara de burbujas muestra el resultado de la colisión de un rayo gamma de alta energía (que no deja rastro) contra un electrón en un átomo de hidrógeno. El electrón sale despedido hacia la derecha con alta rapidez. Algo de la energía de la colisión se transforma en un segundo electrón y un positrón (electrón con carga positiva). Un campo magnético entra al plano de la imagen, que hace que las partículas positivas y negativas se curven en direcciones diferentes.



Las fuerzas magnéticas sobre partículas cargadas desempeñan un papel importante en el estudio de las partículas elementales. La figura 27.21 muestra una cámara llena de hidrógeno líquido y con un campo magnético que entra al plano de la fotografía. Un rayo gamma de alta energía desprende el electrón de un átomo de hidrógeno y lo lanza con gran rapidez creando un rastro visible en el hidrógeno líquido. El rastro muestra al electrón que se curva hacia abajo debido a la fuerza magnética. La energía de la colisión también produce otro electrón y un *positrón* (electrón con carga positiva). Debido a sus cargas opuestas, las trayectorias del electrón y del positrón se curvan en direcciones opuestas. A medida que estas partículas se abren paso a través del hidrógeno líquido, chocan contra otras partículas cargadas, perdiendo energía y rapidez. Como resultado, disminuye el radio de curvatura, como lo sugiere la ecuación (27.11). [La rapidez del electrón es comparable con la rapidez de la luz, por lo que la ecuación (27.11) no se aplica directamente aquí]. Experimentos similares permiten a los físicos determinar la masa y la carga de partículas recién descubiertas.

Estrategia para resolver problemas 27.2 Movimiento en campos magnéticos



IDENTIFICAR *los conceptos relevantes:* Al analizar el movimiento de una partícula cargada en campos eléctricos y magnéticos, se aplica la segunda ley de Newton del movimiento, $\sum\vec{F} = m\vec{a}$, con la fuerza neta dada por $\sum\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$. Es frecuente que se ignoren otras fuerzas, como la gravedad. Muchos de los problemas son similares a los problemas de trayectoria y movimiento circular de las secciones 3.3, 3.4 y 5.4; sería recomendable repasar esas secciones.

PLANTEAR *el problema* siguiendo estos pasos:
1. Determine la(s) incógnita(s).
2. Con frecuencia, el uso de componentes es el enfoque más eficiente. Elija un sistema de coordenadas y después exprese todas las cantidades vectoriales en términos de sus componentes en este sistema.

EJECUTAR *la solución* como sigue:
1. Si la partícula se mueve de manera perpendicular a un campo magnético uniforme, la trayectoria es un círculo con radio y rapidez angular dados por las ecuaciones (27.11) y (27.12), respectivamente.
2. Si su cálculo implica una trayectoria más compleja, use la ecuación $\sum\vec{F} = m\vec{a}$ en forma de componentes: $\sum F_x = ma_x$, etcétera. Este enfoque es particularmente útil cuando están presentes campos tanto eléctricos como magnéticos.

EVALUAR *la respuesta:* Compruebe si sus resultados son razonables.



Ejemplo 27.3 Movimiento de electrones en un magnetrón

El magnetrón de un horno de microondas emite ondas electromagnéticas con una frecuencia $f = 2450$ MHz. ¿Qué intensidad de campo magnético se requiere para que los electrones se muevan en trayectorias circulares con esta frecuencia?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: El problema se refiere al movimiento circular según se ilustra en la figura 27.17*a*. Se usa la ecuación (27.12) para despejar la magnitud B del campo.

EJECUTAR: La rapidez angular que corresponde a la frecuencia f es $\omega = 2\pi f = (2\pi)(2450 \times 10^6\ \text{s}^{-1}) = 1.54 \times 10^{10}\ \text{s}^{-1}$. Luego, a partir de la ecuación (27.12),

$$B = \frac{m\omega}{|q|} = \frac{(9.11 \times 10^{-31}\ \text{kg})(1.54 \times 10^{10}\ \text{s}^{-1})}{1.60 \times 10^{-19}\ \text{C}} = 0.0877\ \text{T}$$

EVALUAR: Esta es una intensidad de campo moderada, que un imán permanente genera con facilidad. Por cierto, las ondas electromagnéticas de 2450 MHz son útiles para calentar y cocinar alimentos porque son absorbidas totalmente por las moléculas de agua.



Ejemplo 27.4 Movimiento helicoidal de partículas en un campo magnético

En una situación como la mostrada en la figura 27.18, la partícula cargada es un protón ($q = 1.60 \times 10^{-19}$ C, $m = 1.67 \times 10^{-27}$ kg) y el campo magnético uniforme de 0.500 T está dirigido a lo largo del eje x. En $t = 0$, el protón tiene componentes de velocidad $v_x = 1.50 \times 10^5$ m/s, $v_y = 0$ y $v_z = 2.00 \times 10^5$ m/s. Solo la fuerza magnética actúa sobre el protón. *a*) En $t = 0$, calcule la fuerza sobre el protón y su aceleración. *b*) Calcule el radio de la trayectoria helicoidal resultante, la rapidez angular del protón y el *avance* de la hélice (distancia recorrida a lo largo del eje de la hélice en cada revolución).

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: La fuerza magnética es $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$, y la aceleración se conoce mediante la segunda ley de Newton. La fuerza $\vec{F}$ es perpendicular a la velocidad $\vec{v}$, por lo que la rapidez del protón no cambia. Entonces, el radio de la trayectoria helicoidal se obtiene de la ecuación (27.11), si se sustituye v por la componente de la velocidad perpendicular a $\vec{B}$. La velocidad angular ω está dada por la ecuación (27.12); esto permite determinar el tiempo T de una revolución (el *periodo*). Dada la componente de velocidad paralela al campo magnético, se determina la distancia recorrida a lo largo del eje de la hélice en ese tiempo.

EJECUTAR: *a*) Con $\vec{B} = B\hat{\imath}$ y $\vec{v} = v_x\hat{\imath} + v_z\hat{k}$, la ecuación (27.2) produce

$$\begin{aligned}\vec{F} &= q\vec{v} \times \vec{B} = q(v_x\hat{\imath} + v_z\hat{k}) \times B\hat{\imath} = qv_zB\hat{\jmath} \\ &= (1.60 \times 10^{-19}\ \text{C})(2.00 \times 10^5\ \text{m/s})(0.500\ \text{T})\hat{\jmath} \\ &= (1.60 \times 10^{-14}\ \text{N})\hat{\jmath}\end{aligned}$$

(Recuerde que $\hat{\imath} \times \hat{\imath} = \mathbf{0}$ y $\hat{k} \times \hat{\imath} = \hat{\jmath}$). La aceleración resultante es

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} = \frac{1.60 \times 10^{-14}\ \text{N}}{1.67 \times 10^{-27}\ \text{kg}}\hat{\jmath} = (9.58 \times 10^{12}\ \text{m/s}^2)\hat{\jmath}$$

b) Como $v_y = 0$, la componente de la velocidad perpendicular a $\vec{B}$ es v_z; así, a partir de la ecuación (27.11),

$$\begin{aligned}R &= \frac{mv_z}{|q|B} = \frac{(1.67 \times 10^{-27}\ \text{kg})(2.00 \times 10^5\ \text{m/s})}{(1.60 \times 10^{-19}\ \text{C})(0.500\ \text{T})} \\ &= 4.18 \times 10^{-3}\ \text{m} = 4.18\ \text{mm}\end{aligned}$$

De la ecuación (27.12), la rapidez angular es

$$\omega = \frac{|q|B}{m} = \frac{(1.60 \times 10^{-19}\ \text{C})(0.500\ \text{T})}{1.67 \times 10^{-27}\ \text{kg}} = 4.79 \times 10^7\ \text{rad/s}$$

El periodo es $T = 2\pi/\omega = 2\pi/4.79 \times 10^7\ \text{s}^{-1}) = 1.31 \times 10^{-7}$ s. El avance es la distancia recorrida a lo largo del eje x durante este tiempo, es decir,

$$\begin{aligned}v_xT &= (1.50 \times 10^5\ \text{m/s})(1.31 \times 10^{-7}\ \text{s}) \\ &= 0.0197\ \text{m} = 19.7\ \text{mm}\end{aligned}$$

EVALUAR: Aun cuando la fuerza magnética tiene una magnitud reducida, produce una aceleración muy grande porque la masa del protón es muy pequeña. Observe que el avance de la hélice es casi cinco veces mayor que el radio R, de modo que esta hélice está mucho más "estirada" que la que se ilustra en la figura 27.18.

Evalúe su comprensión de la sección 27.4 *a*) Si se duplicara la rapidez de la partícula cargada de la figura 27.17*a* mientras el campo magnético (así como la carga y la masa) se mantienen iguales, ¿cómo se vería afectado el radio de la trayectoria? **i.** El radio permanecería sin cambio; **ii.** el radio se duplicaría; **iii.** el radio se cuadruplicaría; **iv.** el radio disminuiría a la mitad; **v.** el radio se reduciría a la cuarta parte. *b*) ¿Cómo afectaría esto el tiempo requerido para que se completara una órbita circular? **i.** El tiempo no cambiaría; **ii.** el tiempo se duplicaría; **iii.** el tiempo se cuadruplicaría; **iv.** el tiempo se reduciría a la mitad; **v.** el tiempo disminuiría a la cuarta parte. ❙

27.5 Aplicaciones del movimiento de partículas cargadas

En la presente sección se describen varias aplicaciones de los principios presentados en este capítulo. Estúdielas con cuidado, y preste atención a la aplicación de la Estrategia para resolver problemas 27.2 (sección 27.4).

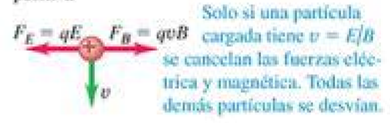
Selector de velocidad

27.22 *a*) Un selector de velocidades para partículas cargadas utiliza campos $\vec{E}$ y $\vec{B}$ perpendiculares. Solo las partículas cargadas con $v = E/B$ lo cruzan sin sufrir desviación. *b*) Fuerzas eléctrica y magnética sobre una carga positiva. Las fuerzas se invierten si la carga es negativa.

a) Diagrama del selector de velocidad



b) Diagrama de cuerpo libre para una partícula positiva



En un haz de partículas cargadas producido por un cátodo caliente o un material radiactivo, no todas las partículas se mueven con la misma rapidez. Sin embargo, muchas aplicaciones requieren un haz en el cual la velocidad de todas las partículas sea la misma. Es posible seleccionar partículas en un haz que tengan una velocidad específica usando un arreglo de campos eléctricos y magnéticos llamado *selector de velocidad*. En la figura 27.22*a*, una partícula cargada, con masa m, carga q y rapidez v, ingresa a una región del espacio donde los campos eléctrico y magnético son perpendiculares entre sí y a la velocidad de la partícula. El campo eléctrico $\vec{E}$ es hacia la izquierda, y el campo magnético $\vec{B}$ entra al plano de la figura. Si q es positiva, la fuerza eléctrica va hacia la izquierda con una magnitud qE, en tanto que la fuerza magnética va hacia la derecha con una magnitud qvB. Para magnitudes de campo dadas, E y B, y un valor particular de v, las fuerzas eléctricas y magnéticas serán iguales en magnitud; entonces, la fuerza total es igual a cero y la partícula viaja en línea recta con velocidad constante. Para una fuerza total de cero, $\sum F_y = 0$, se necesita que $-qE + qvB = 0$; al despejar la velocidad v, para la que no haya desviación, se tiene que

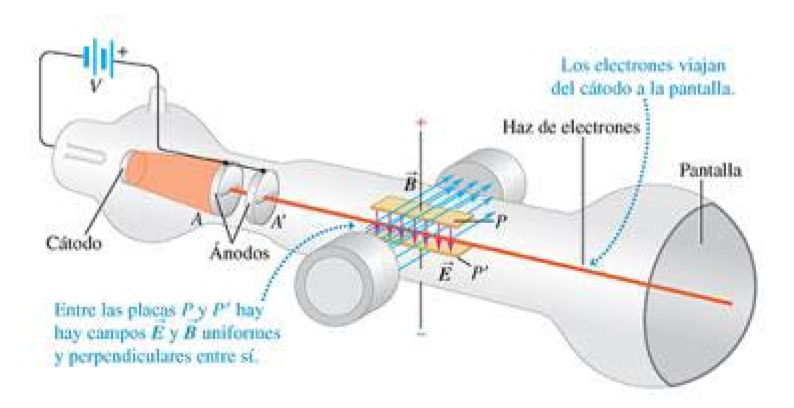
$$v = \frac{E}{B} \qquad (27.13)$$

Solo las partículas con rapidez igual a E/B pasan sin ser desviadas por los campos (figura 27.22*b*). Al ajustar E y B de manera adecuada, es posible seleccionar partículas que tengan una rapidez específica para usarlas en otros experimentos. Como la ecuación (27.13) no depende de q, un selector de velocidad para partículas con carga positiva también funciona para electrones u otras partículas cargadas negativamente.

Experimento de e/m de Thomson

Al finalizar el siglo XIX se realizó uno de los experimentos cruciales de la física: J. J. Thomson (1856-1940) se basó en la idea que se acaba de describir para medir la razón que hay entre la carga y la masa del electrón. Para este experimento, efectuado en 1897 en el laboratorio Cavendish, en Cambridge, Inglaterra, Thomson utilizó el aparato que se ilustra en la figura 27.23. En un contenedor de vidrio al alto vacío se aceleraron electrones provenientes de un cátodo caliente, para formar un haz mediante una diferencia de potencial V entre los dos ánodos A y A'. La rapidez v de los electrones estaba determinada por el potencial acelerador V. La energía cinética ga-

27.23 Aparato de Thomson para medir la razón e/m del electrón.



nada $\frac{1}{2}mv^2$ es igual a la pérdida de energía potencial eléctrica eV, donde e es la magnitud de la carga del electrón:

$$\frac{1}{2}mv^2 = eV \qquad \text{o bien,} \qquad v = \sqrt{\frac{2eV}{m}} \tag{27.14}$$

Los electrones pasan entre las placas P y P' y chocan contra la pantalla al final del tubo, que está recubierto de un material que emite fluorescencia (brilla) en el lugar del impacto. Cuando se satisface la ecuación (27.13), los electrones viajan en línea recta entre las placas; al combinar esto con la ecuación (27.14), se obtiene

$$\frac{E}{B} = \sqrt{\frac{2eV}{m}} \qquad \text{por lo que} \qquad \frac{e}{m} = \frac{E^2}{2VB^2} \tag{27.15}$$

Todas las cantidades del lado derecho se pueden medir, así que se determina la razón e/m entre la carga y la masa. Con este método *no* es posible medir e o m por separado, solo su razón.

El aspecto más significativo de las mediciones de e/m de Thomson fue que descubrió un *valor único* para tal cantidad, el cual no dependía del material del cátodo, ni del gas residual en el tubo ni de algo más en el experimento. Esta independencia demostró que las partículas en el haz, que ahora llamamos electrones, son un componente común de toda la materia. Así, a Thomson se le da el crédito por descubrir la primera partícula subatómica: el electrón.

El valor más preciso de e/m hasta el momento de escribir este libro es



ActivPhysics 13.8: Velocity Selector

$$e/m = 1.758820150(44) \times 10^{11}\ \text{C/kg}$$

En esta expresión, el (44) indica la incertidumbre probable en los dos últimos dígitos, 50.

Quince años después de los experimentos de Thomson, el físico estadounidense Robert Millikan tuvo éxito en medir con precisión la carga del electrón (véase el problema de desafío 23.91). Este valor, junto con el valor de e/m, nos permite determinar la *masa* del electrón. El valor más preciso en la actualidad es

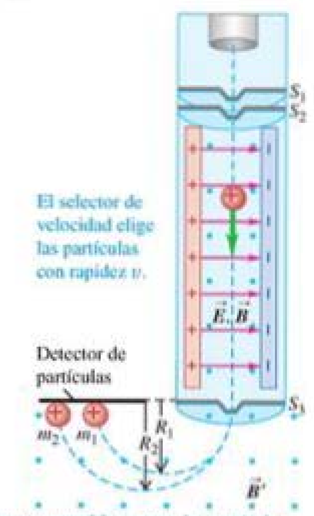
$$m = 9.10938215(45) \times 10^{-31}\ \text{kg}$$

Espectrómetros de masas

Técnicas similares a las utilizadas por Thomson en su experimento para determinar e/m sirven para medir las masas de iones y así conocer masas atómicas y moleculares. En 1919 Francis Aston (1877-1945), un discípulo de Thomson, construyó la primera de una familia de instrumentos llamada **espectrómetros de masas**. En la figura 27.24 se ilustra una variante construida por Bainbridge. Los iones positivos de una fuente pasan a través de las ranuras S_1 y S_2 para formar un haz estrecho. Después, los iones pasan a través de un selector de velocidad con campos $\vec{E}$ y $\vec{B}$ cruzados, como ya se describió, para bloquear todos los iones, excepto aquellos con rapidez v igual a E/B. Por último, los iones pasan hacia una región con un campo magnético $\vec{B}'$ perpendicular a la figura, donde se mueven en arcos circulares con radio R determinado por la ecuación (27.11): $R = mv/qB'$. Los iones con masas diferentes golpean al detector (que en el diseño de Bainbridge es una placa fotográfica) en diferentes puntos, y se miden los valores de R. Se supone que cada ion perdió un electrón, por lo que la carga neta de cada ion es simplemente $+e$. Con todos los parámetros conocidos en esta ecuación, excepto m, se calcula la masa m del ion.

Uno de los primeros resultados de este trabajo fue el descubrimiento de que el neón tiene dos clases de átomos, con masas atómicas de 20 y 22 g/mol. Ahora llamamos a estas especies **isótopos** del elemento. Experimentos posteriores han demostrado que muchos elementos tienen varios isótopos, es decir, átomos que son idénticos en cuanto a su comportamiento químico, pero diferentes en su masa debido a que tienen distinto número de neutrones en su núcleo. Esta es tan solo una de las múltiples aplicaciones de los espectrómetros de masa en química y física.

27.24 El espectrómetro de masas de Bainbridge utiliza un selector de velocidad para obtener partículas con rapidez uniforme v. En la región del campo magnético B', las partículas con mayor masa ($m_2 > m_1$) viajan en trayectorias con radio más grande ($R_2 > R_1$).



Ejemplo 27.5 Demostración experimental de e/m



Imagine que usted intenta reproducir el experimento de Thomson para obtener e/m con un potencial de aceleración de 150 V y un campo eléctrico deflector de 6.0×10^6 N/C de magnitud. *a*) ¿A qué fracción de la rapidez de la luz se moverán los electrones? *b*) ¿Qué magnitud de campo magnético producirá una desviación del haz igual a cero? *c*) Con este campo magnético, ¿cómo se comportaría el haz de electrones si se incrementara el potencial de aceleración más allá de 150 V?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Esta es la misma situación que se ilustró en la figura 27.23. Se utiliza la ecuación (27.14) para determinar la rapidez de los electrones, y la ecuación (27.13) para determinar el campo magnético B que se requiere.

EJECUTAR: *a*) De acuerdo con la ecuación (27.14), la rapidez v de los electrones es:

$$v = \sqrt{2(e/m)V} = \sqrt{2(1.76 \times 10^{11}\ \text{C/kg})(150\ \text{V})}$$
$$= 7.27 \times 10^6\ \text{m/s} = 0.024c$$

b) A partir de la ecuación (27.13), la intensidad de campo requerida es

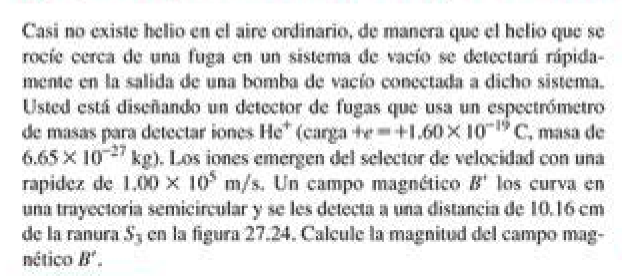
$$B = \frac{E}{v} = \frac{6.00 \times 10^6\ \text{N/C}}{7.27 \times 10^6\ \text{m/s}} = 0.83\ \text{T}$$

c) El incremento del potencial de aceleración V aumenta la rapidez v de los electrones. En la figura 27.23 esto no cambia la fuerza eléctrica dirigida hacia arriba eE, pero incrementa la fuerza magnética hacia abajo, evB. Por lo tanto, el haz de electrones se doblará *hacia abajo* y golpeará el extremo del tubo por debajo de la posición sin desviación.

EVALUAR: El campo magnético requerido es relativamente grande porque los electrones se están moviendo bastante rápido (2.4% de la rapidez de la luz). Si el campo magnético máximo disponible es menor que 0.83 T, la intensidad del campo eléctrico E tendría que reducirse para mantener la razón deseada E/B en la ecuación (27.15).

Ejemplo 27.6 Localización de las fugas en un sistema de vacío





Casi no existe helio en el aire ordinario, de manera que el helio que se rocíe cerca de una fuga en un sistema de vacío se detectará rápidamente en la salida de una bomba de vacío conectada a dicho sistema. Usted está diseñando un detector de fugas que usa un espectrómetro de masas para detectar iones He^+ (carga $+e = +1.60 \times 10^{-19}$ C, masa de 6.65×10^{-27} kg). Los iones emergen del selector de velocidad con una rapidez de 1.00×10^5 m/s. Un campo magnético B' los curva en una trayectoria semicircular y se les detecta a una distancia de 10.16 cm de la ranura S_3 en la figura 27.24. Calcule la magnitud del campo magnético B'.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Después de pasar por la ranura, el ion sigue una trayectoria circular como se describió en la sección 27.4 (véase la figura 27.17). Despejamos B' de la ecuación (27.11).

EJECUTAR: La distancia dada es el *diámetro* de la trayectoria semicircular que se ilustra en la figura 27.24, por lo que el radio es $R = \frac{1}{2}(10.16 \times 10^{-2}\ \text{m})$. De la ecuación (27.11), $R = mv/qB'$, se obtiene

$$B' = \frac{mv}{qR} = \frac{(6.65 \times 10^{-27}\ \text{kg})(1.00 \times 10^5\ \text{m/s})}{(1.60 \times 10^{-19}\ \text{C})(5.08 \times 10^{-2}\ \text{m})}$$
$$= 0.0818\ \text{T}$$

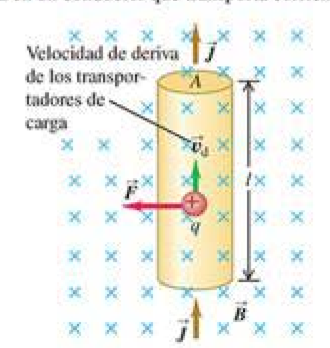
EVALUAR: Los detectores de fugas basados en helio se utilizan ampliamente en sistemas de alto vacío. Nuestro resultado indica que tan solo se requiere un pequeño campo magnético, de modo que los detectores de fuga pueden ser relativamente compactos.

MasteringPHYSICS

ActivPhysics 13.7: Mass Spectrometer

Evalúe su comprensión de la sección 27.5 En el ejemplo 27.6, los iones He^+ con carga $+e$ se mueven en línea recta a 1.00×10^5 m/s a través de un selector de velocidad. Suponga que los iones He^+ se reemplazan con iones He^{2+}, en los que ambos electrones se han eliminado del átomo de helio y la carga del ion es $+2e$. ¿A qué rapidez deben viajar los iones He^{2+} a través del mismo selector de velocidad para que se muevan en línea recta? **i.** Aproximadamente a 4.00×10^5 m/s; **ii.** a 2.00×10^5 m/s; **iii.** a 1.00×10^5 m/s; **iv.** a 0.50×10^5 m/s; **v.** a 0.25×10^5 m/s. |

27.25 Fuerzas sobre una carga móvil positiva en un conductor que transporta corriente.



27.6 Fuerza magnética sobre un conductor que transporta corriente

¿Qué es lo que hace funcionar un motor eléctrico? Dentro del motor hay conductores que transportan corrientes (es decir, las cargas se mueven), así como imanes que ejercen fuerzas sobre las cargas en movimiento. Por lo tanto, existe una fuerza magnética a lo largo de la longitud de cada conductor que transporta corriente, y estas fuerzas hacen que el motor funcione. El galvanómetro de bobina móvil que se describió en la sección 26.3 también emplea fuerzas magnéticas aplicadas a conductores.

Se puede calcular la fuerza sobre un conductor que transporta corriente partiendo de la fuerza magnética $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$ sobre una sola carga en movimiento. La figura 27.25 muestra un segmento rectilíneo de un alambre conductor, con una longitud l y

área de sección transversal A; la corriente va de abajo hacia arriba. El alambre está en un campo magnético uniforme $\vec{B}$, perpendicular al plano del diagrama y dirigido *hacia* el plano. En primer lugar, supondremos que las cargas móviles son positivas. Después, veremos lo que sucede cuando son negativas.

La velocidad de deriva $\vec{v}_d$ es hacia arriba, perpendicular a $\vec{B}$. La fuerza media sobre cada carga es $\vec{F} = q\vec{v}_d \times \vec{B}$, dirigida a la izquierda, como se indica en la figura; como $\vec{v}_d$ y $\vec{B}$ son perpendiculares, la magnitud de la fuerza es $F = qv_dB$.

Es posible deducir una expresión para la fuerza *total* en todas las cargas móviles en una longitud l del conductor con área de la sección transversal igual a A, con el mismo lenguaje empleado en las ecuaciones (25.2) y (25.3) de la sección 25.1. El número de cargas por unidad de volumen es n; un segmento de conductor con longitud l tiene un volumen Al y contiene un número de cargas igual a nAl. La fuerza total $\vec{F}$ sobre *todas* las cargas en movimiento en este segmento tiene una magnitud

$$F = (nAl)(qv_dB) = (nqv_dA)(lB) \tag{27.16}$$

De acuerdo con la ecuación (25.3), la densidad de corriente es $J = nqv_d$. El producto JA es la corriente total I, por lo que rescribimos la ecuación (27.16) como:

$$F = IlB \tag{27.17}$$

Si el campo $\vec{B}$ no es perpendicular al alambre sino que forma un ángulo ϕ con él, la situación se maneja como se hizo en la sección 27.2 para una sola carga. Solo la componente de $\vec{B}$ perpendicular al alambre (y a las velocidades de deriva de las cargas) ejerce una fuerza; tal componente es $B_\perp = B$ sen ϕ. Entonces, la fuerza magnética sobre el segmento de alambre es

$$F = IlB_\perp = IlB \text{ sen } \phi \tag{27.18}$$

La fuerza siempre es perpendicular tanto al conductor como al campo, con la dirección determinada por la misma regla de la mano derecha que se usó para una carga móvil positiva (figura 27.26). Por lo tanto, esta fuerza se expresa como producto vectorial, al igual que la fuerza sobre una sola carga en movimiento. El segmento de alambre se representa con un vector $\vec{l}$ a lo largo del alambre y en dirección de la corriente; entonces, la fuerza $\vec{F}$ sobre este segmento es

$$\vec{F} = I\vec{l} \times \vec{B} \quad \text{(fuerza magnética sobre un segmento recto de alambre)} \tag{27.19}$$

La figura 27.27 ilustra las direcciones de $\vec{B}$, $\vec{l}$ y $\vec{F}$ para varios casos.

Si el conductor no es recto, se divide en segmentos infinitesimales $d\vec{l}$. La fuerza $d\vec{F}$ en cada segmento es

$$d\vec{F} = I\,d\vec{l} \times \vec{B} \quad \text{(fuerza magnética sobre una sección infinitesimal de alambre)} \tag{27.20}$$

Esta expresión se integra a lo largo del alambre para obtener la fuerza total sobre un conductor de cualquier forma. La integral es una *integral de línea*, la misma operación matemática que se empleó para definir el trabajo (sección 6.3) y el potencial eléctrico (sección 23.2)

CUIDADO **La corriente no es un vector** De la sección 25.1 recuerde que la corriente I no es un vector. La dirección del flujo de la corriente está descrita por $d\vec{l}$, no por I. Si el conductor es curvo, la corriente I es la misma en todos los puntos de su longitud, y $d\vec{l}$ cambia de dirección de manera que siempre es tangente al conductor.

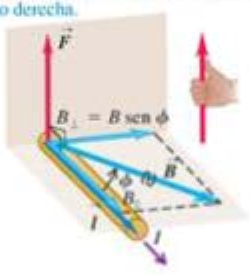
Por último, ¿qué sucede cuando las cargas móviles son negativas, como los electrones en un metal? Entonces, en la figura 27.25, una corriente ascendente corresponde a una velocidad de deriva descendente. Pero como q ahora es negativa, la dirección de la fuerza $\vec{F}$ es la misma que antes. Así, las ecuaciones (27.17) a (27.20) son válidas para cargas *tanto* positivas *como* negativas, e incluso cuando los *dos* signos de carga están presentes a la vez. Esto es lo que ocurre en ciertos materiales semiconductores y en soluciones iónicas.

Una aplicación común de las fuerzas magnéticas sobre un alambre que conduce corriente son los altavoces (bocinas) (figura 27.28). El campo magnético radial creado



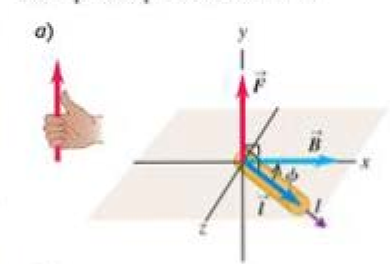
27.26 Segmento recto de alambre con longitud $\vec{l}$ que conduce una corriente I en la dirección de $\vec{l}$. La fuerza magnética en este segmento es perpendicular tanto a $\vec{l}$ como al campo magnético $\vec{B}$.

Fuerza $\vec{F}$ sobre un alambre recto que conduce corriente positiva y está orientado a un ángulo ϕ con respecto al campo magnético $\vec{B}$:
- La magnitud es $F = IlB_\perp = IlB$ sen ϕ.
- La dirección de $\vec{F}$ está dada por la regla de la mano derecha.



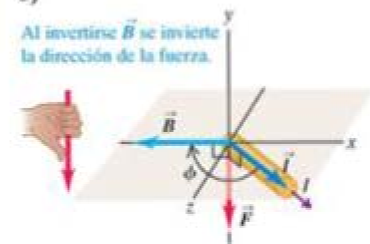
27.27 Vectores campo magnético $\vec{B}$, longitud $\vec{l}$ y fuerza $\vec{F}$ para un alambre recto que transporta una corriente I.

a)



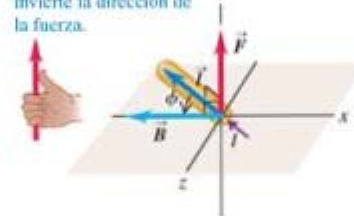
b)

Al invertirse $\vec{B}$ se invierte la dirección de la fuerza.

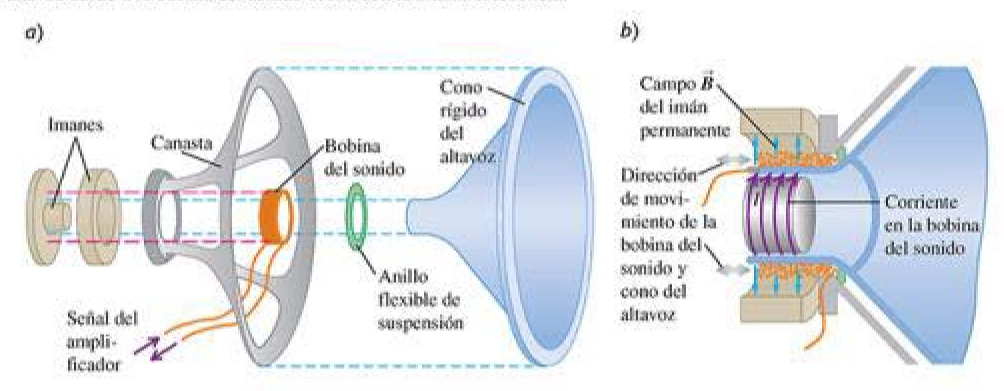


c)

Si se invierte la corriente [en relación con el inciso *b*)], se invierte la dirección de la fuerza.



27.28 *a*) Componentes de un altavoz. *b*) El imán permanente crea un campo magnético que ejerce fuerzas sobre la corriente en la bobina del sonido; para una corriente I en la dirección que se indica, la fuerza es hacia la derecha. Si la corriente eléctrica en la bobina del sonido oscila, el cono del altavoz unido a la bobina del sonido oscila con la misma frecuencia.



por el imán permanente ejerce una fuerza sobre la bobina del sonido, que es proporcional a la corriente en la bobina; la dirección de la fuerza es a la izquierda o a la derecha, dependiendo de la dirección de la corriente. La señal del amplificador ocasiona que la corriente fluctúe en dirección y magnitud. La bobina y el cono del altavoz al que está sujeta responden con una fluctuación, cuya amplitud es proporcional a la amplitud de la corriente en la bobina. Al girar la perilla del volumen del amplificador, aumenta la amplitud de la corriente y, con ello, las amplitudes de la fluctuación del cono y de la onda sonora producida por el cono móvil.

Ejemplo 27.7 Fuerza magnética sobre un conductor recto



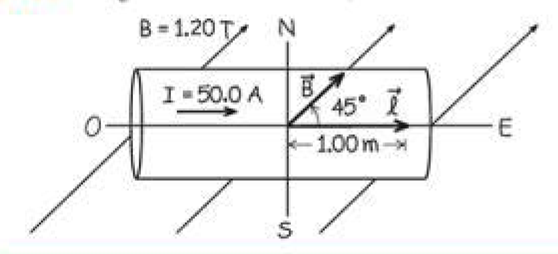
Una varilla de cobre, recta y horizontal, transporta una corriente de 50.0 A de oeste a este, en una región entre los polos de un electroimán grande. En esta región hay un campo magnético horizontal dirigido hacia el noreste (es decir, a 45° al norte del este), con magnitud de 1.20 T. *a*) Calcule la magnitud y la dirección de la fuerza sobre una sección de 1.00 m de longitud de la varilla. *b*) Si la varilla permanece horizontal, ¿cómo debería orientarse para maximizar la magnitud de la fuerza? En este caso, ¿cuál es la magnitud de la fuerza?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: La figura 27.29 muestra la situación. Este es un segmento rectilíneo de alambre en un campo magnético uniforme, como en la figura 27.26. Las incógnitas son la fuerza $\vec{F}$ sobre el segmento de varilla y el ángulo ϕ para el que es máxima la magnitud F de la fuerza. Con la ecuación (27.18) se calcula la magnitud de la fuerza magnética, y la dirección de esta se determina con la regla de la mano derecha.

EJECUTAR: *a*) El ángulo ϕ entre las direcciones de la corriente y el campo es de 45°. De la ecuación (27.18) se obtiene

27.29 El diagrama de la varilla de cobre, vista desde arriba.



$$F = IlB \operatorname{sen} \phi = (50.0\text{ A})(1.00\text{ m})(1.20\text{ T})(\operatorname{sen} 45°) = 42.4\text{ N}$$

La dirección de la fuerza es perpendicular al plano de la corriente y al campo, los cuales están en el plano horizontal. Así, la fuerza debe ser vertical; la regla de la mano derecha indica que está dirigida verticalmente *hacia arriba* (sale del plano de la figura).

b) Según $F = IlB \operatorname{sen} \phi$, F es máxima si $\phi = 90°$, de modo que $\vec{l}$ y $\vec{B}$ son perpendiculares. Para que $\vec{F} = I\vec{l} \times \vec{B}$ siga dirigida hacia arriba, la varilla se gira en el *sentido horario*, a 45° de la orientación que tiene en la figura 27.29, así que la corriente viaja en dirección sureste. Entonces, $F = IlB = (50.0\text{ A})(1.00\text{ m})(1.20\text{ T}) = 60.0\text{ N}$.

EVALUAR: El resultado del inciso *a*) se puede comprobar usando la ecuación (27.19) para calcular el vector fuerza. Si se usa un sistema de coordenadas con x apuntando al este, y apuntando al norte, y el eje z hacia arriba, tenemos $\vec{l} = (1.00\text{ m})\hat{\imath}$, $\vec{B} = (1.20\text{ T})[(\cos 45°)\hat{\imath} + (\operatorname{sen} 45°)\hat{\jmath}]$, y

$$\begin{aligned}\vec{F} &= I\vec{l} \times \vec{B} \\ &= (50\text{ A})(1.00\text{ m})\hat{\imath} \times (1.20\text{ T})[(\cos 45°)\hat{\imath} + (\operatorname{sen} 45°)\hat{\jmath}] \\ &= (42.4\text{ N})\hat{k}\end{aligned}$$

Observe que la fuerza máxima de 60.0 N hacia arriba puede sostener al conductor en el aire contrarrestando la fuerza de gravedad, es decir, el conductor *levita magnéticamente*, si su peso es de 60.0 N y su masa es $m = w/g = (60.0\text{ N})/(9.8\text{ m/s}^2) = 6.12\text{ kg}$. La levitación magnética se utiliza en trenes de alta rapidez para sostener el tren arriba de las vías. De este modo, la eliminación de la fricción por rodamiento permite que el tren alcance rapideces superiores a 400 km/h.



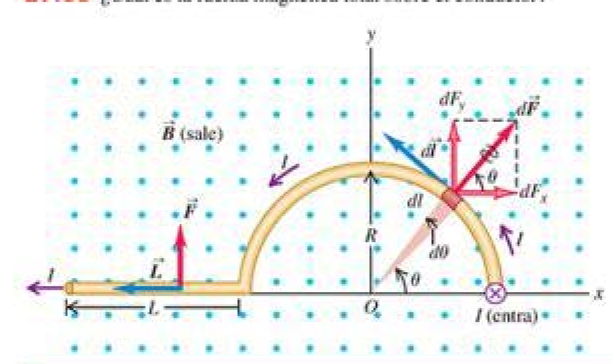
Ejemplo 27.8 Fuerza magnética en un conductor curvo

En la figura 27.30, el campo magnético $\vec{B}$ es uniforme y perpendicular al plano de la figura, apuntando hacia afuera. El conductor, que transporta la corriente I hacia la izquierda, tiene tres segmentos: **1.** un segmento rectilíneo con longitud L perpendicular al plano de la figura, **2.** un semicírculo con radio R y **3.** otro segmento rectilíneo con longitud L paralelo al eje x. Calcule la fuerza magnética total sobre este conductor.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: El campo magnético $\vec{B} = B\hat{k}$ es uniforme, por lo que calculamos las fuerzas $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_3$ de los segmentos 1 y 3 usando la ecuación (27.19). El segmento curvilíneo 2 se divide en segmentos rectilíneos infinitesimales y calculamos la fuerza correspondiente $d\vec{F}_2$ sobre cada segmento recto usando la ecuación (27.20). Luego integramos para obtener $\vec{F}_2$. La fuerza magnética total sobre el conductor es entonces $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3$.

27.30 ¿Cuál es la fuerza magnética total sobre el conductor?



EJECUTAR: Para el segmento 1, $\vec{L} = -L\hat{k}$. De modo que por la ecuación (27.19), $\vec{F}_1 = I\vec{L} \times \vec{B} = \mathbf{0}$. Para el segmento 3, $\vec{L} = -L\hat{\imath}$, de modo que $\vec{F}_3 = I\vec{L} \times \vec{B} = I(-L\hat{\imath}) \times (B\hat{k}) = ILB\hat{\jmath}$.

Para el segmento curvo 2, la figura 27.20 muestra un segmento $d\vec{l}$ con longitud $dl = R\,d\theta$, y ángulo θ. La regla de la mano derecha indica que la dirección de $d\vec{l} \times \vec{B}$ es radialmente hacia afuera a partir del centro; asegúrese de verificar esta dirección. Como $d\vec{l}$ y $\vec{B}$ son perpendiculares, la magnitud dF_2 de la fuerza sobre el segmento $d\vec{l}$ es $dF_2 = I\,dl\,B = I(R\,dq)B$. Las componentes de la fuerza sobre este segmento son

$$dF_{2x} = IR\,d\theta\,B\cos\theta \qquad dF_{2y} = IR\,d\theta\,B\,\mathrm{sen}\,\theta$$

Estas expresiones se integran para determinar las componentes de la fuerza total, haciendo que θ varíe de 0 a π para incluir todo el semicírculo. Se obtiene lo siguiente:

$$F_{2x} = IRB\int_0^{\pi}\cos\theta\,d\theta = 0$$

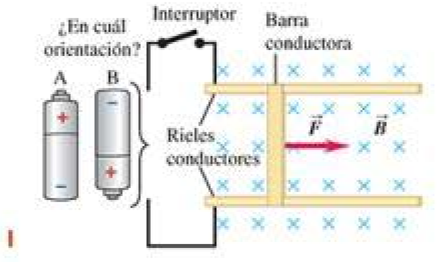
$$F_{2y} = IRB\int_0^{\pi}\mathrm{sen}\,\theta\,d\theta = 2IRB$$

De modo que $\vec{F}_2 = 2IRB\hat{\jmath}$. Finalmente, sumando las fuerzas de los tres segmentos, encontramos que la fuerza total está en la dirección y positiva:

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = 0 + 2IRB\hat{\jmath} + ILB\hat{\jmath} = IB(2R + L)\hat{\jmath}$$

EVALUAR: Por simetría, pudimos haber pronosticado que la componente x de $\vec{F}_2$ sería cero: en la mitad derecha del semicírculo, la componente x de la fuerza es positiva (hacia la derecha), mientras que en la mitad izquierda es negativa (a la izquierda); se cancelan las contribuciones positiva y negativa. El resultado es que $\vec{F}_2$ es la fuerza que se ejercería si sustituyéramos el semicírculo por un segmento *recto* de $2R$ de longitud a lo largo del eje x. ¿Sabe por qué?

Evalúe su comprensión de la sección 27.6 La figura de la derecha muestra la vista superior de dos rieles conductores sobre los cuales se desliza una barra conductora. Un campo magnético uniforme está dirigido en forma perpendicular al plano de la figura, como se ilustra. Va a conectarse una batería a los dos rieles, de modo que cuando se cierre el interruptor, fluirá corriente a través de la barra y ocasionará que una fuerza magnética empuje la barra hacia la derecha. ¿En cuál orientación, A o B, debería colocarse la batería en el circuito?



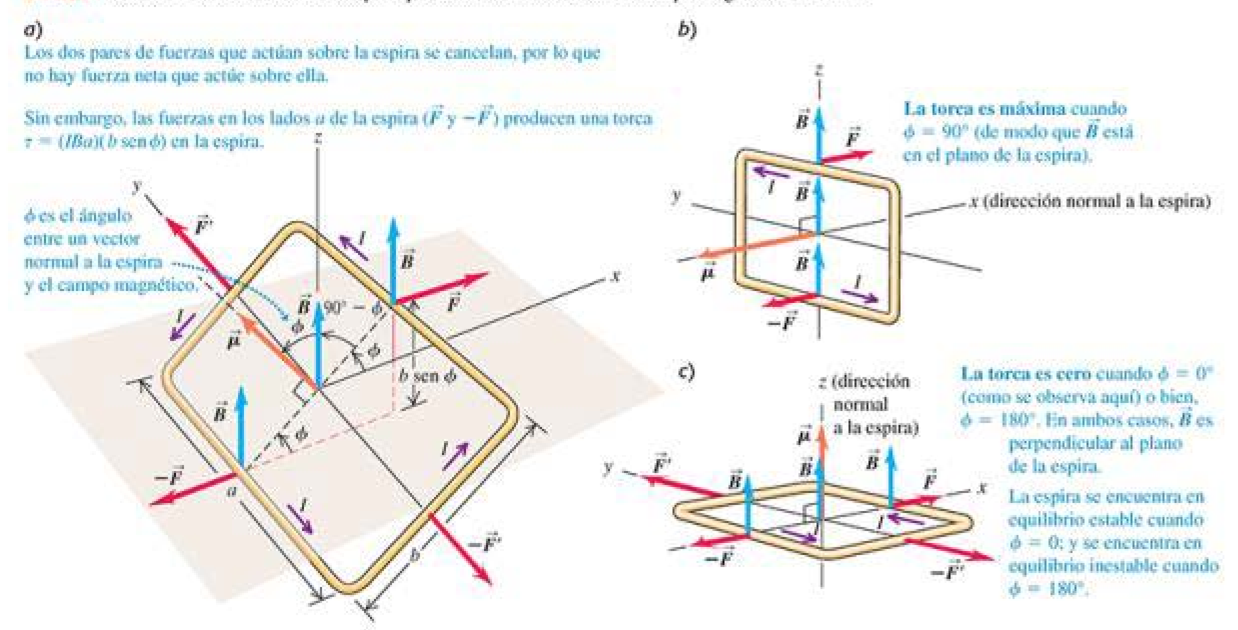
27.7 Fuerza y torca en una espira de corriente

MasteringPHYSICS
ActivPhysics 13.6: Magnetic Torque on a Loop

Los conductores que transportan corriente por lo general forman espiras cerradas, así que vale la pena usar los resultados de la sección 27.6 para encontrar la fuerza y la torca magnéticas *totales* sobre un conductor en forma de espira. Son muchos los equipos prácticos que usan la fuerza o la torca magnética sobre una espira conductora, incluyendo altavoces (véase la figura 27.28) y galvanómetros (sección 26.3). Así que los resultados de esta sección tienen mucha importancia práctica y también ayudan a entender el comportamiento de los imanes de barra descritos en la sección 27.1.

Por ejemplo, analicemos una espira rectangular de corriente en un campo magnético uniforme. La espira se puede representar como una serie de segmentos rectilíneos.

27.31 Cálculo de la torca sobre una espira que conduce corriente en un campo magnético uniforme.



Veremos que la *fuerza* total sobre la espira es igual a cero, pero puede haber una *torca* neta, con algunas propiedades interesantes, que actúe sobre la espira.

La figura 27.31*a* muestra una espira rectangular de alambre cuyos lados tienen longitudes *a* y *b*. Una línea perpendicular al plano de la espira (esto es, una *normal* al plano) forma un ángulo ϕ con la dirección del campo magnético $\vec{B}$, y la espira transporta una corriente *I*. Los alambres que llevan corriente hacia la espira y hacia afuera de esta, así como la fuente de fem, se omiten en el diagrama para mantener la sencillez del esquema.

La fuerza $\vec{F}$ sobre el lado derecho de la espira (longitud *a*) va hacia la derecha, en la dirección $+x$, como se ilustra. En este lado, $\vec{B}$ es perpendicular a la dirección de la corriente, y la fuerza sobre este lado tiene magnitud

$$F = IaB \tag{27.21}$$

Sobre el lado opuesto de la espira actúa una fuerza $-\vec{F}$ con la misma magnitud pero dirección contraria, como se observa en la figura.

Los lados de longitud igual a *b* forman un ángulo $(90° - \phi)$ con la dirección de $\vec{B}$. Las fuerzas sobre estos lados son los vectores $\vec{F}'$ y $-\vec{F}'$; su magnitud F' está dada por

$$F' = IbB \operatorname{sen}(90° - \phi) = IbB \cos \phi$$

Las líneas de acción de ambas fuerzas están sobre el eje *y*.

La fuerza *total* en la espira es igual a cero porque las fuerzas en lados opuestos se cancelan por pares.

La fuerza neta sobre una espira de corriente en un campo magnético uniforme es igual a cero. Sin embargo, la torca neta, en general, no es igual a cero.

(Tal vez encuentre que en este momento sería útil repasar el análisis de una torca, en la sección 10.1). En la figura 27.31*a*, las dos fuerzas $\vec{F}'$ y $-\vec{F}'$ están en la misma línea, por lo que originan una torca neta igual a cero con respecto a cualquier punto. Las dos fuerzas $\vec{F}$ y $-\vec{F}$ quedan a lo largo de distintas líneas de acción, y cada una origina una torca con respecto al eje *y*. Según la regla de la mano derecha, las torcas debidas a $\vec{F}$ y $-\vec{F}$ están, ambas, en la dirección $+y$; de ahí que la torca neta $\vec{\tau}$ también esté en la dirección $+y$. El brazo de palanca para cada una de estas fuerzas (igual a

la distancia perpendicular desde el eje de rotación hasta la línea de acción de la fuerza) es $(b/2)\text{sen}\,\phi$, así que la torca debida a cada fuerza tiene magnitud $F(b/2)\text{sen}\,\phi$. Si se utiliza la ecuación (27.21) para F, la magnitud de la torca neta es

$$\tau = 2F(b/2)\,\text{sen}\,\phi = (IBa)(b\,\text{sen}\,\phi) \tag{27.22}$$

La torca es máxima cuando $\phi = 90°$, $\vec{B}$ está en el plano de la espira y la normal a este plano es perpendicular a $\vec{B}$ (figura 27.31*b*). La torca es igual a cero cuando ϕ es 0° o 180°; en tanto que la normal a la espira es paralela o antiparalela al campo (figura 27.31*c*). El valor $\phi = 0°$ es una posición de equilibrio estable porque ahí la torca es cero, y cuando la espira se gira un poco a partir de dicha posición, la torca resultante tiende a girarla de regreso hacia $\phi = 0°$. La posición $\phi = 180°$ es una posición de equilibrio *inestable*: si se aparta un poco de ella, la espira tiende a alejarse aún más de $\phi = 180°$. La figura 27.31 ilustra la rotación alrededor del eje y, pero como la fuerza neta sobre la espira es cero, la ecuación (27.22) para la torca es válida para *cualquier* selección de ejes.

El área A de la espira es igual a ab, por lo que la ecuación (27.22) se puede rescribir como

$$\tau = IBA\,\text{sen}\,\phi \qquad \text{(magnitud de la torca en una espira de corriente)} \tag{27.23}$$

El producto IA se denomina **momento dipolar magnético** o **momento magnético** de la espira, el cual se denota con el símbolo μ (letra griega mu):

$$\mu = IA \tag{27.24}$$

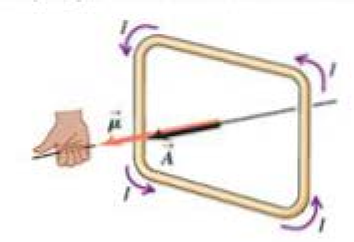
Es similar al momento dipolar eléctrico que se estudió en la sección 21.7. En términos de μ, la magnitud de la torca sobre una espira de corriente es

$$\tau = \mu B\,\text{sen}\,\phi \tag{27.25}$$

donde ϕ es el ángulo entre la normal a la espira (dirección del área vectorial $\vec{A}$) y $\vec{B}$. La torca tiende a hacer girar la espira en la dirección en que *disminuye* ϕ, es decir, hacia su posición de equilibrio estable donde la espira queda en el plano xy perpendicular a la dirección del campo $\vec{B}$ (figura 27.31*c*). Una espira de corriente, o cualquier otro cuerpo que experimenta una torca magnética dada por la ecuación (27.25), también recibe el nombre de **dipolo magnético**.

Torca magnética: forma vectorial

También podemos definir un momento magnético vectorial $\vec{\mu}$ con magnitud IA; este se ilustra en la figura 27.31. La dirección de $\vec{\mu}$ se define como la perpendicular al plano de la espira, con sentido determinado por la regla de la mano derecha, como se observa en la figura 27.32. Enrosque los dedos de su mano derecha alrededor del perímetro de la espira en la dirección de la corriente. Después extienda su pulgar de modo que quede perpendicular al plano de la espira; su dirección está en la dirección de $\vec{\mu}$ (y la del área vectorial $\vec{A}$ de la espira). La torca es máxima cuando $\vec{\mu}$ y $\vec{B}$ son perpendiculares, y es igual a cero cuando son paralelos o antiparalelos. En la posición de equilibrio estable, $\vec{\mu}$ y $\vec{B}$ son paralelos.



27.32 La regla de la mano derecha determina la dirección del momento magnético de una espira que transporta corriente. Esta es también la dirección del vector área $\vec{A}$ de la espira; $\vec{\mu} = I\vec{A}$ es una ecuación vectorial.

Por último, esta interacción puede expresarse en términos del vector de la torca $\vec{\tau}$, que usamos para las interacciones de dipolos *eléctricos* en la sección 21.7. De acuerdo con la ecuación (27.25), la magnitud de $\vec{\tau}$ es igual a la magnitud de $\vec{\mu} \times \vec{B}$, y en relación con esto, la figura 27.31 muestra que las direcciones también son las mismas. Por lo tanto, tenemos

$$\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B} \qquad \text{(torca sobre una espira de corriente)} \tag{27.26}$$

Este resultado es una analogía directa del que se obtuvo en la sección 21.7 para la torca ejercida por un campo *eléctrico* $\vec{E}$ sobre un dipolo *eléctrico* con momento dipolar $\vec{p}$.

Energía potencial de un dipolo magnético

Cuando un dipolo magnético cambia de orientación en un campo magnético, éste realiza trabajo sobre aquel. En un desplazamiento angular infinitesimal $d\phi$, el trabajo dW

está dado por $\tau\, d\phi$, y hay un cambio correspondiente en la energía potencial. Como sugiere el análisis anterior, la energía potencial es mínima cuando $\vec{\mu}$ y $\vec{B}$ son paralelos, y es máxima si son antiparalelos. Con la finalidad de encontrar una expresión para la energía potencial U en función de la orientación, utilizaremos la hermosa simetría que hay entre las interacciones dipolares eléctricas y magnéticas. La torca sobre un dipolo *eléctrico* en un campo *eléctrico* es $\vec{\tau} = \vec{p} \times \vec{E}$; en la sección 21.7 vimos que la energía potencial correspondiente es $U = -\vec{p} \cdot \vec{E}$. La torca sobre un dipolo *magnético* en un campo *magnético* es $\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B}$, por lo que concluimos de inmediato que la energía potencial correspondiente es

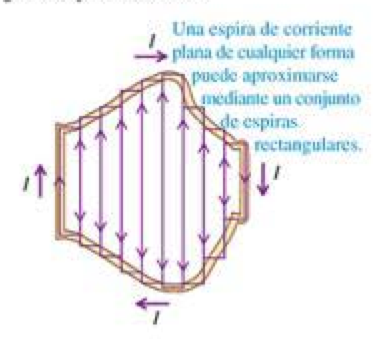
$$U = -\vec{\mu} \cdot \vec{B} = -\mu B \cos\phi \quad \text{(energía potencial de un dipolo magnético)} \qquad (27.27)$$

Con esta definición, U es igual a cero cuando el momento dipolar magnético es perpendicular al campo magnético.

Torca magnética: espiras y bobinas

Aunque las ecuaciones (27.21) a (27.27) se obtuvieron para una espira de corriente rectangular, todas estas relaciones son válidas para una espira plana de cualquier forma. Cualquier espira plana se puede aproximar tanto como queramos mediante un número muy grande de espiras rectangulares, como se ilustra en la figura 27.33. Si todas estas espiras conducen corrientes iguales en el mismo sentido horario, entonces las fuerzas y las torcas sobre los lados de dos espiras adyacentes se cancelan, y las únicas fuerzas y torcas que no se cancelan se deben a corrientes alrededor del límite. De modo que todas las relaciones anteriores son válidas para una espira de corriente plana que tenga cualquier forma, con el momento magnético $\vec{\mu}$ dado por $\vec{\mu} = I\vec{A}$.

27.33 En el límite, el conjunto de rectángulos coincide exactamente con la espira plana irregular, conforme el número de rectángulos tiende al infinito y el ancho de cada rectángulo se aproxima a cero.

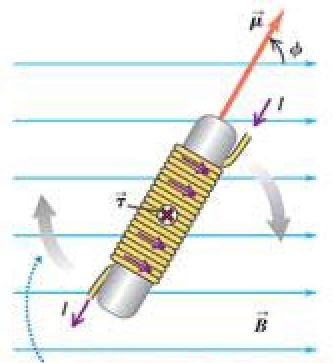


También se puede generalizar toda esta formulación para una bobina que tenga N espiras planas cercanas entre sí; el efecto es simplemente multiplicar cada fuerza, el momento magnético, la torca y la energía potencial por el factor N.

Un arreglo de particular interés es el **solenoide**, que es un devanado helicoidal de alambre como una bobina, enrollada en un cilindro (figura 27.34). Si los devanados están muy próximos unos con otros, el solenoide se puede aproximar por varias espiras circulares, que se encuentran en planos a ángulos rectos con respecto a su eje longitudinal. La torca total sobre un solenoide en un campo magnético es simplemente la suma de las torcas de las vueltas individuales. Para un solenoide con N vueltas en un campo uniforme B, el momento magnético es $\mu = NIA$, y

$$\tau = NIAB \operatorname{sen} \phi \qquad (27.28)$$

27.34 La torca $\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B}$ sobre este solenoide en un campo magnético uniforme entra a la página. Un solenoide real tiene muchas más vueltas, estrechamente enrolladas.



donde ϕ es el ángulo entre el eje del solenoide y la dirección del campo. El vector momento magnético $\vec{\mu}$ ocurre a lo largo del eje del solenoide. La torca es máxima cuando dicho eje es perpendicular al campo magnético, y es igual a cero cuando son paralelos. El efecto de esta torca es que tiende a hacer girar al solenoide hacia una posición donde su eje sea paralelo al campo. Los solenoides también son útiles como *fuentes* de campo magnético, como veremos en el capítulo 28.

El galvanómetro de d'Arsonval, descrito en la sección 26.3, utiliza una torca magnética sobre una bobina que conduce una corriente. Como se aprecia en la figura 26.14, el campo magnético no es uniforme sino *radial*, por lo que los empujes laterales sobre la bobina siempre son perpendiculares a su plano. Así, el ángulo ϕ en la ecuación (27.28) siempre es de 90°, y la torca magnética es directamente proporcional a la corriente, sin importar la orientación de la bobina. Dos resortes producen una torca de recuperación proporcional al desplazamiento angular de la bobina, al tiempo que también sirven como conductores de corriente hacia esta. Cuando se suministra corriente a la bobina, esta gira junto con su aguja indicadora acoplada, hasta que la torca de recuperación del resorte compensa la torca magnética. De este modo, la desviación de la aguja indicadora es proporcional a la corriente.

Entre las aplicaciones médicas importantes de la torca sobre un dipolo magnético destacan las *imágenes de resonancia magnética* (IRM). Se coloca a un paciente en un campo magnético de aproximadamente 1.5 T, lo cual es 10^4 veces más intenso que el campo de la Tierra. El núcleo de cada átomo de hidrógeno en el tejido ?

que se desea observar tiene un momento dipolar magnético, que experimenta una torca que lo alinea con el campo aplicado. Entonces el tejido se ilumina con ondas de radio de la frecuencia correcta para sacar a estos momentos magnéticos de su alineación. El grado en que estas ondas de radio son absorbidas por el tejido es proporcional a la cantidad de hidrógeno presente. De ahí que un tejido blando rico en hidrógeno se vea muy distinto de un hueso con poco hidrógeno, lo cual hace que la IRM sea ideal para analizar detalles de tejidos blandos que no se verían en las imágenes de rayos x (consulte la imagen que abre este capítulo).

Ejemplo 27.9 Torca magnética sobre una bobina circular



Una bobina circular de 0.0500 m de radio y 30 vueltas de alambre está en un plano horizontal. Conduce una corriente de 5.00 A en sentido antihorario (vista desde arriba). La bobina se encuentra en un campo magnético uniforme de 1.20 T dirigido a la derecha. Determine las magnitudes del momento magnético y de la torca sobre la bobina.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Este problema usa la definición de momento magnético y la expresión para la torca sobre un dipolo magnético en un campo magnético. La figura 27.35 ilustra la situación. La ecuación (27.24) da la magnitud μ del momento magnético de una sola vuelta de alambre; para N vueltas, el momento magnético es N veces mayor. La magnitud τ de la torca se obtiene con la ecuación (27.25).

EJECUTAR: El área de la bobina es $A = \pi r^2$. Según la ecuación (27.24), el momento magnético total de las 30 vueltas es

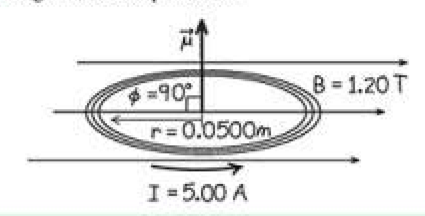
$$\mu_{\text{total}} = NIA = 30(5.00\ \text{A})\pi(0.0500\ \text{m})^2 = 1.18\ \text{A}\cdot\text{m}^2$$

El ángulo ϕ entre la dirección de $\vec{B}$ y la dirección de $\vec{\mu}$ (que está a lo largo de la normal al plano de la bobina) es de 90°. De acuerdo con la ecuación (27.25), la torca en la bobina es

$$\tau = \mu_{\text{total}} B \text{ sen } \phi = (1.18\ \text{A}\cdot\text{m}^2)(1.20\ \text{T})(\text{sen } 90°)$$
$$= 1.41\ \text{N}\cdot\text{m}$$

EVALUAR: La torca tiende a hacer girar el lado derecho de la bobina hacia abajo, y el lado izquierdo hacia arriba, a una posición donde la normal a su plano sea paralela a $\vec{B}$.

27.35 Diagrama de este problema.



Ejemplo 27.10 Energía potencial de una bobina en un campo magnético



Si la bobina del ejemplo 27.9 gira desde su posición inicial hasta otra donde su momento magnético $\vec{\mu}$ es paralelo a $\vec{B}$, ¿cuál es el cambio de la energía potencial?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: La energía potencial se calcula para cada orientación con la ecuación (27.27). La posición inicial se muestra en la figura 27.35, con $\phi_1 = 90°$. En la posición final, la bobina ha girado 90° en sentido horario, por lo que $\vec{\mu}$ y $\vec{B}$ son paralelos, de modo que el ángulo entre estos vectores es $\phi_2 = 0$.

EJECUTAR: De acuerdo con la ecuación (27.27), el cambio en la energía potencial es

$$\Delta U = U_2 - U_1 = -\mu B\cos\phi_2 - (-\mu B\cos\phi_1)$$
$$= -\mu B(\cos\phi_2 - \cos\phi_1)$$
$$= -(1.18\ \text{A}\cdot\text{m}^2)(1.20\ \text{T})(\cos 0° - \cos 90°) = -1.41\ \text{J}$$

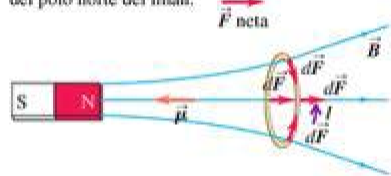
EVALUAR: La energía potencial disminuye porque la rotación ocurre en la dirección de la torca magnética que se obtuvo en el ejemplo 27.9.

Dipolo magnético en un campo magnético no uniforme

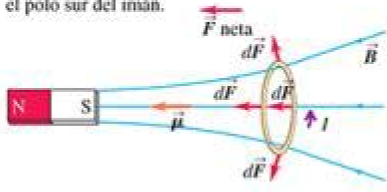
Hemos visto que una espira de corriente (es decir, un dipolo magnético) experimenta una fuerza neta igual a cero en un campo magnético uniforme. La figura 27.36 muestra dos espiras de corriente en el campo $\vec{B}$ *no uniforme* de un imán de barra; en ambos casos, la fuerza neta sobre la espira *no* es igual a cero. En la figura 27.36*a* el momento magnético $\vec{\mu}$ está en dirección opuesta al campo, y la fuerza $d\vec{F} = I\,d\vec{l} \times \vec{B}$ sobre un segmento de la espira tiene tanto una componente radial como una componente a la derecha. Cuando estas fuerzas se suman para obtener la fuerza neta $\vec{F}$ sobre la espira, las componentes radiales se cancelan, de modo que la fuerza neta es hacia la derecha, alejándose del imán. Observe que, en este caso, la fuerza va hacia la región donde las líneas de campo están muy separadas y la magnitud del campo B es menor. En la figura 27.36*b*, se invierte la polaridad del imán de barra, por lo que $\vec{\mu}$ y $\vec{B}$ son paralelos; ahora la fuerza neta sobre la espira actúa hacia la izquierda, hacia la re-

27.36 Fuerzas sobre espiras de corriente en un campo $\vec{B}$ no uniforme. En cada caso, el eje del imán de barra es perpendicular al plano de la espira y pasa por el centro de esta.

a) La fuerza neta sobre esta bobina se aleja del polo norte del imán.



b) La fuerza neta sobre la misma bobina va hacia el polo sur del imán.



27.37 *a*) Un trozo de hierro no magnetizado. (Solo se ilustran algunos momentos atómicos representativos). *b*) Un trozo de hierro magnetizado (imán de barra). El momento magnético neto del imán de barra apunta de su polo sur a su polo norte. *c*) Imán de barra en un campo magnético.

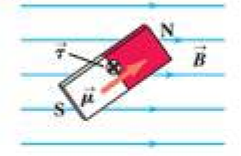
a) Hierro no magnetizado: los momentos magnéticos se orientan al azar.



b) En un imán de barra, los momentos magnéticos están alineados.



c) Un campo magnético crea una torca sobre el imán de barra que tiende a alinear su momento dipolar con el campo $\vec{B}$.



gión de la mayor magnitud del campo, cerca del imán. Más adelante en esta sección usaremos estas observaciones para explicar por qué los imanes de barra atraen objetos de hierro no magnetizados.

Dipolos magnéticos y cómo funcionan los imanes

El comportamiento de un solenoide en un campo magnético (véase la figura 27.34) se parece al de un imán de barra o al de la aguja de una brújula; si tienen libertad para girar, tanto el solenoide como el imán se orientan con sus ejes paralelos al campo $\vec{B}$. En ambos casos, esto se debe a la interacción entre las cargas eléctricas en movimiento y el campo magnético; la diferencia es que en un imán de barra el movimiento de la carga ocurre a escala microscópica del átomo.

Piense en un electrón como en una esfera de carga giratoria. En esta analogía, la circulación de la carga alrededor del eje de rotación es como una espira de corriente y, por ello, el electrón tiene un momento magnético neto. (Tal analogía, aunque útil, es inexacta, puesto que un electrón en realidad no es una esfera giratoria. La explicación completa del origen del momento magnético del electrón incluye mecánica cuántica, que está más allá de nuestro alcance en este momento). En un átomo de hierro, una fracción importante de los momentos magnéticos de los electrones se alinean entre sí, y el átomo tiene un momento magnético distinto de cero. (En contraste, los átomos de la mayoría de los elementos tienen poco o ningún momento magnético). En un trozo de hierro no magnetizado no hay una alineación de todos los momentos magnéticos de los átomos; su suma vectorial es cero, y el momento magnético neto también es cero (figura 27.37*a*). Pero en un imán de barra, los momentos magnéticos de muchos de sus átomos son paralelos, y existe un momento magnético neto $\vec{\mu}$ apreciable (figura 27.37*b*). Si el imán se coloca en un campo magnético $\vec{B}$, el campo ejerce una torca dada por la ecuación (27.26), que tiende a alinear $\vec{\mu}$ con $\vec{B}$ (figura 27.37*c*). Un imán de barra tiende a alinearse con un campo $\vec{B}$ de modo que una línea que vaya del polo sur al polo norte del imán estará en dirección de $\vec{B}$; de ahí que la relevancia verdadera de los polos norte y sur de un imán es que representan la cabeza y la cola, respectivamente, del momento magnético dipolar $\vec{\mu}$.

La torca experimentada por una espira de corriente en un campo magnético también explica por qué se magnetiza un objeto de hierro no magnetizado, como el de la figura 27.37*a*. Si un clip sujetapapeles de hierro no magnetizado se coloca cerca de un imán poderoso, los momentos magnéticos de los átomos del clip tienden a alinearse con el campo $\vec{B}$ del imán. Cuando se retira el sujetapapeles, sus dipolos atómicos tienden a seguir alineados y el clip tiene un momento magnético neto. El sujetapapeles se desmagnetiza si se deja caer al piso o se calienta; la energía interna que se agrega con esto sacude los dipolos atómicos y los vuelve a hacer aleatorios.

El diagrama del dipolo magnético de un imán de barra explica las fuerzas de atracción y de repulsión entre los imanes de barra de la figura 27.1. El momento magnético $\vec{\mu}$ de un imán de barra apunta de su polo sur a su polo norte, por lo que las espiras de corriente en las figuras 27.36*a* y 27.36*b* son equivalentes a un imán con su polo norte a la izquierda. De ahí que la situación ilustrada en la figura 27.36*a* sea equivalente a dos imanes de barra con sus polos norte uno junto al otro; la fuerza resultante es de repulsión, igual que en la figura 27.1*b*. En la figura 27.36*b*, nuevamente tenemos el equivalente de dos imanes de barra con sus extremos juntos, pero con el polo sur del imán de la izquierda junto al polo norte del imán de la derecha. La fuerza resultante es de atracción, como en la figura 27.1*a*.

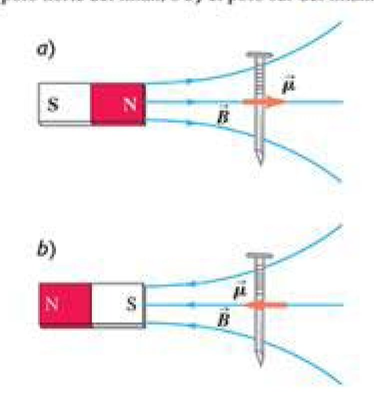
Por último, es posible explicar cómo un imán atrae un objeto de hierro no magnetizado (véase la figura 27.2). Se trata de un proceso en dos etapas. En la primera, los momentos magnéticos atómicos del hierro tienden a alinearse con el campo $\vec{B}$ del imán, por lo que el hierro adquiere un momento dipolar magnético neto $\vec{\mu}$ paralelo al campo. En la segunda, el campo no uniforme del imán atrae al dipolo magnético. La figura 27.38*a* muestra un ejemplo. El polo norte del imán está más cerca del clavo (que contiene hierro), y el dipolo magnético producido en el clavo es equivalente a una espira con una corriente que circula en dirección opuesta a la que se aprecia en la figura 27.36*a*; entonces, la fuerza magnética neta sobre el clavo es opuesta a la fuerza sobre la espira en la figura 27.36*a*, de manera que el clavo es atraído hacia el imán. Al cambiar la polaridad del imán, como en la figura 27.38*b*, se invierten las direcciones

tanto de $\vec{B}$ como de $\vec{\mu}$. Ahora, la situación es equivalente a la que se ilustra en la figura 27.36*b*; al igual que la espira en esa figura, el clavo es atraído hacia el imán. Es la causa de que un objeto no magnetizado previamente que contenga hierro se vea atraído hacia *cualquier* polo de un imán. En contraste, objetos de latón, aluminio o madera difícilmente responden a un imán; los dipolos magnéticos atómicos de estos materiales, si los hay, muestran menos tendencia a alinearse con un campo externo.

Nuestro análisis de la forma en que interactúan los imanes y los trozos de hierro apenas ha tocado la superficie de un tema conocido como *propiedades magnéticas de los materiales*. En la sección 28.8 estudiaremos tales propiedades con mayor profundidad.

Evalúe su comprensión de la sección 27.7 La figura 27.13*c* ilustra las líneas de campo magnético debidas a una espira circular que transporta corriente. *a*) ¿Cuál es la dirección del momento magnético de esta espira? *b*) ¿Qué lado de la espira es equivalente al polo norte de un imán, y cuál al polo sur? ❙

27.38 Un imán de barra atrae un clavo de hierro no magnetizado en dos etapas. En la primera, el campo $\vec{B}$ del imán de barra produce un momento magnético neto en el clavo. En la segunda, debido a que el campo del imán de barra no es uniforme, este dipolo magnético se ve atraído hacia el imán. La atracción es la misma si el clavo está más cerca de *a*) el polo norte del imán, o *b*) el polo sur del imán.



27.8 Motor de corriente directa

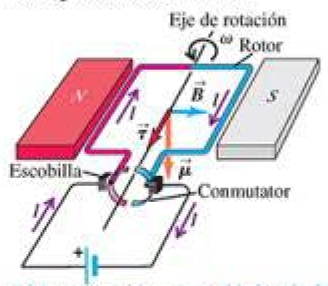
Los motores eléctricos desempeñan un papel importante en la sociedad contemporánea. En un motor, una torca magnética actúa sobre un conductor que transporta corriente, y la energía eléctrica se convierte en energía mecánica. Como ejemplo, veamos un tipo sencillo de motor de corriente directa (cd, que en ocasiones también se designa con estas siglas invertidas, dc, por *direct-current*), que se ilustra en la figura 27.39.

La parte móvil del motor es el *rotor*, es decir, un tramo de alambre moldeado como una espira de extremos abiertos y que tiene libertad para girar alrededor de un eje. Los extremos de los alambres del rotor están adheridos a segmentos circulares conductores que forman un *conmutador*. En la figura 27.39*a*, cada uno de los dos segmentos del conmutador hacen contacto con una de las terminales, o *escobillas*, de un circuito externo que incluye una fuente de fem. Esto provoca que una corriente fluya hacia el rotor por un lado, en color rojo, y salga del rotor por el otro lado, en azul. Por consiguiente, el rotor es una espira de corriente con momento magnético $\vec{\mu}$. El rotor se encuentra entre los polos opuestos de un imán permanente, por lo que hay un campo magnético $\vec{B}$ que ejerce una torca $\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B}$ sobre el rotor. Para la orientación del rotor que se aprecia en la figura 27.39*a*, la torca hace que el rotor gire en sentido antihorario, en una dirección que alineará $\vec{\mu}$ con $\vec{B}$.

En la figura 27.39*b*, el rotor ha girado 90° a partir de su orientación en la figura 27.39*a*. Si la corriente a través del rotor fuera constante, este se encontraría ahora en su orientación de equilibrio; simplemente oscilaría en torno de esta orientación. Pero aquí es donde entra en juego el conmutador; cada escobilla ahora está en contacto con

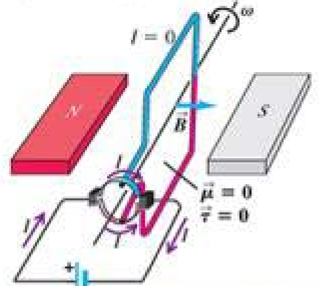
27.39 Diagrama de un motor sencillo de cd. El rotor es una espira de alambre con libertad para girar alrededor de un eje; los extremos del rotor están adheridos a los dos conductores curvos que forman el conmutador. (Por claridad, las mitades del rotor se muestran en colores rojo y azul). Los segmentos del conmutador están aislados uno de otro.

a) Las escobillas están alineadas con los segmentos del conmutador.



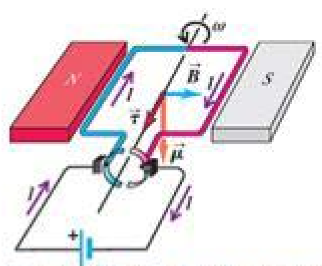
• La corriente ingresa por el lado rojo del rotor y sale por el lado azul.
• Por lo tanto, la torca magnética hace que el rotor gire en sentido.

b) El rotor ha girado 90°.



• Cada escobilla está en contacto con ambos segmentos del conmutador, por lo que la corriente se desvía totalmente del rotor.
• Ninguna torca magnética actúa sobre el rotor.

c) El rotor ha girado180°.



• Las escobillas están alineadas otra vez con los segmentos del conmutador. Esta vez la corriente entra por el lado azul del rotor y sale por el lado rojo.
• Por lo tanto, la torca magnética otra vez ocasiona que el rotor gire en sentido antihorario.

los *dos* segmentos del conmutador. No hay diferencia de potencial entre los conmutadores, por lo que, en este instante no fluye corriente por el rotor y el momento magnético es igual a cero. Por su inercia, el rotor continúa girando en sentido antihorario, y otra vez fluye corriente a través de él, como se aprecia en la figura 27.39*c*. Pero ahora la corriente entra en el lado *azul* del rotor y sale por el lado *rojo*, exactamente la situación opuesta a la de la figura 27.39*a*. Aun cuando la dirección de la corriente se haya invertido con respecto al rotor, este ha girado 180° y el momento magnético $\vec{\mu}$ está en la misma dirección con respecto al campo magnético. Entonces, la torca magnética $\vec{\tau}$ tiene la misma dirección en la figura 27.39*c* que en la figura 27.39*a*. Gracias al conmutador, la corriente se invierte cada 180° de giro, así que la torca siempre tiene la dirección que hace que el rotor gire en sentido antihorario. Cuando el motor "aumenta su rapidez", la torca magnética promedio está justamente compensada por una torca opuesta debido a la resistencia del aire, la fricción en los cojinetes del rotor, y la fricción entre el conmutador y las escobillas.

El motor sencillo que se ilustra en la figura 27.39 tiene tan solo una vuelta de alambre en su rotor. No obstante, en los motores prácticos, el rotor tiene muchas vueltas; esto incrementa el momento y la torca magnéticos, por lo que el motor puede hacer girar cargas más grandes. La torca también se incrementa si se utiliza un campo magnético más intenso, que es la razón por la cual muchos diseños de motores utilizan electroimanes en lugar de un imán permanente. Otra desventaja del diseño sencillo de la figura 27.39 es que la magnitud de la torca aumenta y disminuye a medida que gira el rotor. Esto se soluciona haciendo que el rotor incluya varias bobinas independientes de alambre, orientadas con diferentes ángulos (figura 27.40).

27.40 Este motor de una unidad de disco de computadora tiene 12 bobinas que transportan corriente e interactúan con imanes permanentes situados sobre la tornamesa (no se muestran) para hacerla girar. (Este diseño es el inverso del diseño de la figura 27.39, donde los imanes permanentes están fijos y es la bobina la que gira). Debido a que hay bobinas múltiples, la torca magnética es casi constante y la tornamesa gira con rapidez casi constante.



Potencia para los motores eléctricos

Debido a que el motor convierte energía eléctrica en mecánica o trabajo, requiere una alimentación de energía eléctrica. Si la diferencia de potencial entre sus terminales es V_{ab} y la corriente es I, entonces la entrada de potencia es $P = V_{ab}I$. Aun si las bobinas del motor tienen resistencia insignificante, debe haber una diferencia de potencial entre las terminales para que P sea diferente de cero. Esta diferencia de potencial es generada principalmente por las fuerzas magnéticas que se ejercen sobre las corrientes en los conductores del rotor, a medida que giran a través del campo magnético. La fuerza electromotriz asociada $\mathcal{E}$ se llama fem *inducida*; también recibe el nombre de fuerza *contraelectromotriz* debido a que su sentido es opuesto al de la corriente. En el capítulo 29 estudiaremos las fems inducidas que resultan del movimiento de conductores en campos magnéticos.

En un motor en *serie*, el rotor está conectado en serie con el electroimán que produce el campo magnético; en un motor en *derivación* están conectados en paralelo. En un motor en serie con resistencia interna r, V_{ab} es mayor que $\mathcal{E}$, y la diferencia es la caída de potencial Ir a través de la resistencia interna. Es decir,

$$V_{ab} = \mathcal{E} + Ir \qquad (27.29)$$

Como la fuerza magnética es proporcional a la velocidad, $\mathcal{E}$ *no* es constante sino proporcional a la rapidez de rotación del rotor.

Ejemplo 27.11 Motor de cd en serie



Un motor de cd con su rotor y bobinas conectados en serie tiene una resistencia interna de 2.00 Ω. Cuando opera a toda su capacidad en una línea de 120 V, toma una corriente de 4.00 A. *a*) ¿Cuál es la fem en el rotor? *b*) ¿Cuál es la potencia suministrada al motor? *c*) ¿Cuál es la tasa de disipación de energía en la resistencia interna del motor? *d*) ¿Cuál es la potencia mecánica desarrollada? *e*) ¿Cuál es la eficiencia del motor? *f*) ¿Qué pasa si la máquina que el motor impulsa se atora y el rotor se detiene repentinamente?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Este problema usa los conceptos de potencia y caída de potencial en un motor de cd en serie. Se conoce la resistencia interna $r = 2.00\ \Omega$, el voltaje $V_{ab} = 120$ V a través del motor, y la corriente $I = 4.00$ A a través del motor. Usamos la ecuación (27.29) para determinar la fem $\mathcal{E}$ a partir de estas cantidades. La potencia alimentada al motor es $V_{ab}I$, la tasa de disipación de energía es I^2r, y la potencia de salida del motor es la diferencia entre la potencia de entrada y la potencia disipada. La eficiencia e es la razón de la potencia de salida mecánica con respecto a la potencia de entrada eléctrica.

EJECUTAR: *a*) De acuerdo con la ecuación (27.29), $V_{ab} = \mathcal{E} + Ir$, se obtiene

$$120\ \text{V} = \mathcal{E} + (4.00\ \text{A})(2.00\ \Omega) \quad \text{por lo que} \quad \mathcal{E} = 112\ \text{V}$$

b) La potencia alimentada al motor por la fuente es

$$P_{\text{entrada}} = V_{ab}I = (120\ \text{V})(4.00\ \text{A}) = 480\ \text{W}$$

c) La potencia disipada en la resistencia *r* es

$$P_{\text{disipada}} = I^2 r = (4.00\ \text{A})^2(2.00\ \Omega) = 32\ \text{W}$$

d) La potencia mecánica de salida es la potencia de entrada eléctrica menos la tasa de disipación de energía en la resistencia del motor (suponiendo que no hay otras pérdidas de potencia):

$$P_{\text{salida}} = P_{\text{entrada}} - P_{\text{disipada}} = 480\ \text{W} - 32\ \text{W} = 448\ \text{W}$$

e) La eficiencia *e* es la razón de la potencia mecánica de salida con respecto a la potencia eléctrica de entrada:

$$e = \frac{P_{\text{salida}}}{P_{\text{entrada}}} = \frac{448\ \text{W}}{480\ \text{W}} = 0.93 = 93\%$$

f) Con el rotor atascado, la fuerza contraelectromotriz $\mathcal{E}$ (que es proporcional a la rapidez del rotor) se hace igual a cero. De acuerdo con la ecuación (27.29), la corriente es:

$$I = \frac{V_{ab}}{r} = \frac{120\ \text{V}}{2.00\ \Omega} = 60\ \text{A}$$

y la potencia disipada en la resistencia *r* se vuelve:

$$P_{\text{disipada}} = I^2 r = (60\ \text{A})^2(2.00\ \Omega) = 7200\ \text{W}$$

EVALUAR: Si esta sobrecarga masiva no funde (quema) un fusible ni dispara un interruptor de circuito, las bobinas se derretirán rápidamente. Cuando el motor se enciende por primera vez, hay una oleada momentánea de corriente hasta que el motor gana rapidez. Esta oleada ocasiona caídas de voltaje más grandes de lo normal ($V = IR$) en las líneas de potencia que suministran la corriente. Efectos similares son responsables de la atenuación momentánea de las luces de una casa, cuando arranca el motor de un acondicionador de aire o de la máquina lavavajillas.

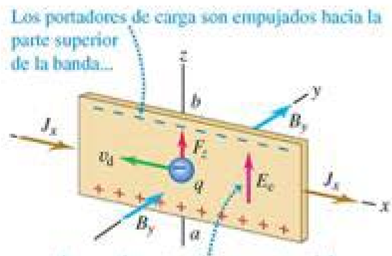
Evalúe su comprensión de la sección 27.8 En el circuito que se ilustra en la figura 27.39, se agrega un interruptor en serie con la fuente de fem, de manera que la corriente se puede encender o apagar. Cuando el interruptor se cierra para permitir el paso de corriente, ¿el rotor comenzará a girar sin que importe cuál sea su orientación original?

27.9 Efecto Hall

La realidad de las fuerzas que actúan sobre las cargas en movimiento de un conductor en un campo magnético queda demostrada de manera sorprendente por el *efecto Hall*: se trata de un efecto similar a la desviación transversal de un haz de electrones en un campo magnético en el vacío. (El efecto fue descubierto por el físico estadounidense Edwin Hall en 1879 cuando todavía era estudiante de posgrado). Para describir dicho efecto, consideremos un conductor en forma de banda plana, como se ilustra en la figura 27.41. La corriente está en dirección del eje $+x$ y hay un campo magnético uniforme $\vec{B}$ perpendicular al plano de la banda, en la dirección $+y$. La velocidad de deriva de las cargas en movimiento (magnitud de la carga, $|q|$) tiene una magnitud v_d. La figura 27.41*a* muestra el caso de cargas negativas, como los electrones de un metal, y la figura 27.41*b* muestra las cargas positivas. En ambos casos, la fuerza magnética va hacia arriba, del mismo modo en que la fuerza magnética en un conductor es la misma sin que importe que las cargas en movimiento sean positivas o negativas. En cualquier caso, una carga móvil es impulsada hacia el borde *superior* de la banda por la fuerza magnética $F_z = |q|v_d B$.

27.41 Fuerzas sobre portadores de carga de un conductor en un campo magnético.

a) Portadores de carga negativa (electrones)



b) Portadores de carga positiva

Los portadores de carga otra vez son empujados hacia la parte superior de la banda...

J_x B_y E_e q F_z v_d J_x B_y z y b a x

... de modo que la polaridad de la diferencia de potencial es opuesta a la de los portadores de carga negativa.

Si los portadores de la carga son electrones, como en la figura 27.41*a*, en el borde superior de la banda se acumula un exceso de carga negativa, lo cual deja un exceso de carga positiva en el borde inferior. Esta acumulación continúa hasta que el campo electrostático transversal resultante $\vec{E}_e$ se hace suficientemente grande como para generar una fuerza (magnitud $|q|E_e$) que sea igual y opuesta a la fuerza magnética (magnitud $|q|v_d B$). Después de eso, ya no hay ninguna fuerza transversal neta que desvíe las cargas móviles. Este campo eléctrico provoca una diferencia de potencial transversal entre los bordes opuestos de la banda, llamada *voltaje de Hall* o *fem de Hall*. La polaridad depende de si las cargas móviles son positivas o negativas. Los experimentos demuestran que para los metales, el borde superior de la banda en la figura 27.41*a sí* se carga negativamente, lo cual demuestra que los portadores de carga en un metal son en verdad electrones (ya que un electrón tiene carga negativa).

Sin embargo, si los portadores de la carga son *positivos*, como en la figura 27.41*b*, entonces en el borde superior se acumula carga *positiva*, y la diferencia de potencial es *opuesta* a la situación con cargas negativas. Poco después del descubrimiento del efecto Hall en 1879, se observó que ciertos materiales, en particular algunos *semiconductores*, mostraban una fem de Hall opuesta a la de los metales, como si sus portadores de carga estuvieran cargados positivamente. Ahora se sabe que estos materiales conducen mediante un proceso conocido como *conducción de huecos*. Dentro de tales materiales hay sitios, llamados *huecos*, que normalmente estarían ocupados por un electrón pero en realidad están vacíos. Una carga negativa faltante equivale a una carga positiva. Cuando un electrón se mueve en una dirección para llenar un hueco, deja otro hueco tras de sí. El hueco emigra en dirección opuesta a la del electrón.

En términos del eje de coordenadas de la figura 27.41*b*, el campo electrostático $\vec{E}_e$ para el caso de q positiva está en la dirección $-z$; su componente E_z es negativa. El campo magnético se encuentra en la dirección $+y$, y lo representamos como B_y. La fuerza magnética (en la dirección $+z$) es qv_dB_y. La densidad de corriente J_x está en la dirección $+x$. En el estado estable, cuando las fuerzas qE_z y qv_dB_y tienen la misma magnitud y dirección opuesta,

$$qE_z + qv_dB_y = 0 \qquad \text{o bien,} \qquad E_z = -v_dB_y$$

Esto confirma que cuando q es positiva, E_z es negativa. La densidad de corriente J_x es

$$J_x = nqv_d$$

Se elimina v_d entre estas ecuaciones y se obtiene

$$nq = \frac{-J_xB_y}{E_z} \qquad \text{(efecto Hall)} \qquad (27.30)$$

Observe que este resultado (así como todo el proceso de obtención) es válido para q tanto positiva como negativa. Cuando q es negativa, E_z es positiva, y a la inversa.

J_x, B_y y E_z se pueden medir, por lo que es posible obtener el producto nq. Tanto en metales como en semiconductores, q es igual en magnitud a la carga del electrón, por lo que el efecto Hall permite la medición directa de n, la concentración de cargas portadoras de corriente en el material. El *signo* de las cargas está determinado por la polaridad de la fem de Hall, como se describió.

El efecto Hall también se utiliza para hacer la medición directa de la rapidez de deriva v_d del electrón en los metales. Como vimos en el capítulo 25, estas rapideces son muy pequeñas, con frecuencia del orden de 1 mm/s o menos. Si movemos todo el conductor en dirección opuesta a la corriente con una rapidez igual a la rapidez de deriva, entonces los electrones están en reposo con respecto al campo magnético, y la fem de Hall desaparece. Así, la rapidez del conductor necesaria para hacer que la fem de Hall desaparezca es igual a la rapidez de deriva.

Ejemplo 27.12 Medición del efecto Hall



Se coloca una placa de cobre de 2.0 mm de espesor y 1.50 cm de ancho, en un campo magnético uniforme de 0.40 T, como se indica en la figura 27.41*a*. Cuando pasa una corriente de 75 A en la dirección $+x$, resulta que el potencial en la parte inferior de la placa es 0.81 μV más grande que el de la parte superior. A partir de esta medición, determine la concentración de electrones móviles en el cobre.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Este problema describe un experimento con el efecto Hall. Se usa la ecuación (27.30) para determinar la concentración n de electrones móviles.

EJECUTAR: En primer lugar, calculamos la densidad J_x de corriente y el campo eléctrico E_z:

$$J_x = \frac{I}{A} = \frac{75\ \text{A}}{(2.0 \times 10^{-3}\ \text{m})(1.50 \times 10^{-2}\ \text{m})} = 2.5 \times 10^6\ \text{A/m}^2$$

$$E_z = \frac{V}{d} = \frac{0.81 \times 10^{-6}\ \text{V}}{1.5 \times 10^{-2}\ \text{m}} = 5.4 \times 10^{-5}\ \text{V/m}$$

Entonces, de acuerdo con la ecuación (27.30),

$$n = \frac{-J_xB_y}{qE_z} = \frac{-(2.5 \times 10^6\ \text{A/m}^2)(0.40\ \text{T})}{(-1.60 \times 10^{-19}\ \text{C})(5.4 \times 10^{-5}\ \text{V/m})}$$
$$= 11.6 \times 10^{28}\ \text{m}^{-3}$$

EVALUAR: El valor real de n para el cobre es $8.5 \times 10^{28}\ \text{m}^{-3}$. La diferencia sugiere que el modelo sencillo del efecto Hall, que ignora los efectos cuánticos y las interacciones de los electrones con los iones, debe usarse con precaución. Este ejemplo también ilustra que con buenos conductores, la fem de Hall es muy pequeña aun con densidades de corriente grandes. En la práctica, los dispositivos de efecto Hall para hacer mediciones del campo magnético utilizan materiales semiconductores, para los cuales densidades moderadas de corriente dan fems de Hall mucho más grandes.

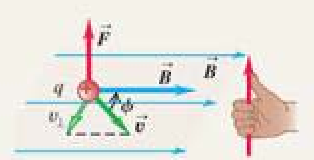
Evalúe su comprensión de la sección 27.9 Un alambre de cobre de sección transversal cuadrada está orientado verticalmente. Los cuatro lados del alambre están hacia norte, sur, este y oeste. Hay un campo magnético uniforme dirigido de este a oeste, y el alambre conduce corriente hacia abajo. ¿Qué lado del alambre tiene el mayor potencial eléctrico? **i.** El lado norte; **ii.** el lado sur; **iii.** el lado este; **iv.** el lado oeste. ❙

RESUMEN



Fuerzas magnéticas: Las interacciones magnéticas son fundamentalmente interacciones entre partículas cargadas en movimiento. Estas interacciones se describen mediante el campo magnético vectorial, denotado con $\vec{B}$. Una partícula con carga q que se mueve con velocidad $\vec{v}$ en un campo magnético $\vec{B}$ experimenta una fuerza $\vec{F}$ perpendicular tanto a $\vec{v}$ como a $\vec{B}$. La unidad del SI para el campo magnético es el tesla: 1 T = 1 N/A·m. (Véase el ejemplo 27.1).

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B} \quad (27.2)$$



Líneas de campo y flujo magnético: Un campo magnético se representa gráficamente con líneas de campo magnético. Para un punto cualquiera, una línea de campo magnético es tangente a la dirección de $\vec{B}$ en ese punto. Donde las líneas de campo están muy cercanas entre sí, la magnitud del campo es grande, y viceversa. El flujo magnético Φ_B a través de un área se define de forma similar al flujo eléctrico. La unidad del SI para el flujo magnético es el weber (1 Wb = 1 T·m^2). El flujo magnético neto a través de cualquier superficie cerrada es igual a cero (ley de Gauss del magnetismo). Como resultado, las líneas de campo magnético siempre se cierran sobre sí mismas. (Véase el ejemplo 27.2).

$$\Phi_B = \int B_\perp \, dA = \int B\cos\phi \, dA = \int \vec{B} \cdot d\vec{A} \quad (27.6)$$

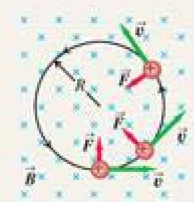
$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0 \text{ (superficie cerrada)} \quad (27.8)$$



Movimiento en un campo magnético: La fuerza magnética siempre es perpendicular a $\vec{v}$; una partícula que solo se mueve bajo la acción de un campo magnético lo hace con rapidez constante. En un campo uniforme, una partícula con velocidad inicial perpendicular al campo se mueve en un círculo con radio R, que depende de la intensidad B del campo magnético, y la masa m de la partícula, la rapidez v y la carga q. (Véase los ejemplos 27.3 y 27.4).

Los campos eléctricos y magnéticos cruzados se usan como selectores de velocidad. Las fuerzas eléctricas y magnéticas se cancelan exactamente cuando $v = E/B$. (Véase los ejemplos 27.5 y 27.6).

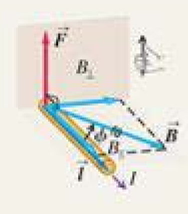
$$R = \frac{mv}{|q|B} \quad (27.11)$$



Fuerza magnética sobre un conductor: El segmento rectilíneo de un conductor que transporta una corriente I en un campo magnético uniforme $\vec{B}$ experimenta una fuerza $\vec{F}$ perpendicular tanto a $\vec{B}$ como al vector $\vec{l}$, que apunta en la dirección de la corriente y tiene magnitud igual a la longitud del segmento. Una relación similar da la fuerza $d\vec{F}$ sobre un segmento infinitesimal $d\vec{l}$ que transporta corriente. (Véase los ejemplos 27.7 y 27.8).

$$\vec{F} = I\vec{l} \times \vec{B} \quad (27.19)$$

$$d\vec{F} = I\,d\vec{l} \times \vec{B} \quad (27.20)$$



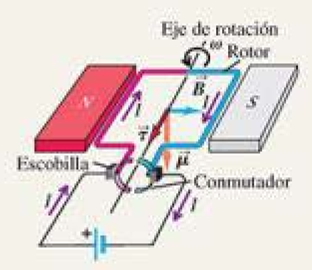
Torca magnética: Una espira de corriente con área A y corriente I en un campo magnético uniforme $\vec{B}$ no experimenta fuerza magnética neta, pero sí una torca magnética de magnitud τ. La torca vectorial $\vec{\tau}$ se expresa en términos del momento magnético $\vec{\mu} = I\vec{A}$ de la espira, igual que la energía potencial U de un momento magnético en un campo magnético $\vec{B}$. El momento magnético de una espira solo depende de la corriente y del área; es independiente de la forma de la espira. (Véase los ejemplos 27.9 y 27.10).

$$\tau = IBA \operatorname{sen} \phi \quad (27.23)$$

$$\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B} \quad (27.26)$$

$$U = -\vec{\mu} \cdot \vec{B} = -\mu B \cos\phi \quad (27.27)$$

Motores eléctricos: En un motor de cd, un campo magnético ejerce una torca sobre una corriente en el rotor. El movimiento del rotor a través del campo magnético causa una fem inducida llamada fuerza contraelectromotriz. Para un motor en serie, en el que la bobina del rotor está conectada en serie con las bobinas que producen el campo magnético, el voltaje terminal es la suma de la fuerza contraelectromotriz y la caída Ir a través de la resistencia interna. (Véase el ejemplo 27.11).



Efecto Hall: El efecto Hall es una diferencia de potencial perpendicular a la dirección de la corriente en un conductor, cuando el conductor se coloca en un campo magnético. El potencial de Hall está determinado por el requerimiento de que el campo eléctrico asociado debe compensar exactamente la fuerza magnética sobre una carga en movimiento. Las mediciones del efecto Hall se utilizan para determinar el signo de los portadores de carga y su concentración n. (Véase el ejemplo 27.12).

$$nq = \frac{-J_x B_y}{E_z} \qquad (27.30)$$



PROBLEMA PRÁCTICO Torca magnética sobre un anillo que transporta corriente

Un anillo circular con área de 4.45 cm^2 conduce una corriente de 12.5 A. El anillo, al inicio, está en reposo e inmerso en una región de campo magnético uniforme dado por $\vec{B} = (1.15 \times 10^{-2}\ \text{T})(12\hat{\imath} + 3\hat{\jmath} - 4\hat{k})$. El anillo está situado al principio, de modo que su momento magnético está dado por $\vec{\mu}_i = \mu(-0.800\hat{\imath} + 0.600\hat{\jmath})$, donde μ es la magnitud (positiva) del momento magnético. *a*) Determine la torca magnética inicial en el anillo. *b*) El anillo (el cual es libre de girar alrededor de un diámetro) se libera y gira un ángulo de 90.0°, punto en el que su momento magnético está dado por $\vec{\mu}_f = -\mu\hat{k}$. Determine la disminución de energía potencial. *c*) Si el momento de inercia del anillo alrededor del diámetro es de 8.50×10^{-7} kg $\cdot$ m^2, determine la rapidez angular del anillo conforme pasa a través de la segunda posición.

GUÍA DE SOLUCIÓN

Véase el área de estudio MasteringPhysics® para consultar una solución con Video Tutor.



IDENTIFICAR y PLANTEAR

1. El anillo conductor de corriente actúa como un dipolo magnético, de modo que se pueden usar las ecuaciones de un dipolo magnético en un campo magnético uniforme.
2. No hay fuerzas no conservativas actuando sobre el anillo conforme gira, de modo que la suma de su energía cinética giratoria (estudiada en la sección 9.4) y la energía potencial se conservan.

EJECUTAR

3. Se usa la expresión vectorial de la torca sobre un dipolo magnético para obtener la respuesta del inciso *a*). (*Sugerencia:* Tal vez desee revisar la sección 1.10 del vol. 1).
4. Calcule el cambio en la energía potencial de la primera a la segunda orientación del anillo.
5. Use el resultado del paso 4 para calcular la energía cinética giratoria del anillo cuando se encuentra en la segunda orientación.
6. Use el resultado del paso 5 para calcular la rapidez angular del anillo cuando llega a la segunda orientación.

EVALUAR

7. Si el anillo tuviera libertad para girar alrededor de *cualquier* diámetro, ¿en qué dirección apuntaría el momento magnético cuando el anillo se encuentre en estado de equilibrio estable?

Problemas

Para tareas asignadas por el profesor, visite www.masteringphysics.com



•, ••, •••: Problemas de dificultad creciente. **PA**: Problemas acumulativos que incorporan material de capítulos anteriores. **CALC**: Problemas que requieren cálculo. **BIO**: Problemas de ciencias biológicas.

PREGUNTAS PARA ANÁLISIS

P27.1 ¿Una partícula cargada puede moverse a través de un campo magnético sin experimentar fuerza alguna? Si es así, ¿cómo? Si no, ¿por qué?

P27.2 En cualquier punto del espacio, por definición, el campo eléctrico $\vec{E}$ tiene la dirección de la fuerza eléctrica sobre una partícula con carga positiva situada en ese punto. ¿Por qué no se determina de manera similar que el campo magnético $\vec{B}$ esté en la dirección de la fuerza magnética sobre una partícula en movimiento, cargada positivamente?

P27.3 En la sección 27.2 se describe un procedimiento para determinar la dirección de la fuerza magnética usando la mano derecha. Si se utiliza el mismo procedimiento pero con la mano izquierda, ¿se obtendrá la dirección correcta de la fuerza? Explique su respuesta.

P27.4 La fuerza magnética sobre una partícula cargada, en movimiento, siempre es perpendicular al campo magnético $\vec{B}$. ¿La trayectoria de una partícula cargada en movimiento siempre es perpendicular a las líneas de campo magnético? Explique su razonamiento.

P27.5 Una partícula cargada se dispara hacia una región cúbica del espacio donde hay un campo magnético uniforme. Fuera de esta región, no hay campo magnético. ¿Es posible que la partícula permanezca dentro de la región cúbica? ¿Por qué?

P27.6 Si la fuerza magnética *no* realiza trabajo sobre una partícula cargada, ¿cómo puede tener algún efecto sobre el movimiento de la partícula? ¿Existen otros ejemplos de fuerzas que no realicen trabajo, pero tengan un efecto significativo sobre el movimiento de la partícula?

P27.7 Una partícula cargada se mueve a través de una región del espacio con velocidad constante (magnitud y dirección). Si el campo magnético externo es igual a cero en esta región, ¿se puede concluir que el campo eléctrico externo a la región también vale cero? Explique. (Con "externo" nos referimos a aquellos campos que no son producidos por la partícula cargada). Si el campo eléctrico externo es de cero en la región, ¿se puede concluir que el campo magnético externo en la región también sea igual a cero?

P27.8 ¿Cómo puede usarse como brújula una espira de alambre que transporta corriente? ¿Una brújula de ese tipo distinguiría entre el norte y el sur? ¿Por qué?

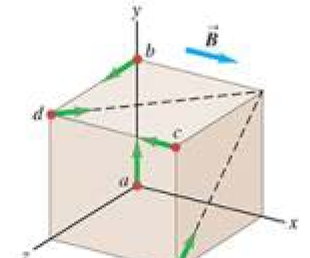
P27.9 ¿Cómo puede determinarse la dirección de un campo magnético únicamente con observaciones *cualitativas* de la fuerza magnética sobre un alambre recto que transporta corriente?

P27.10 Una espira suelta y flexible de alambre conduce una corriente I. La espira de alambre se coloca sobre una mesa horizontal en un campo magnético uniforme $\vec{B}$ perpendicular al plano de la mesa. Esto ocasiona que la espira de alambre se expanda en forma circular mientras permanece sobre la mesa. En un diagrama, muestre todas las orientaciones posibles de la corriente I y el campo magnético $\vec{B}$ que pudieran hacer que esto ocurra. Explique su razonamiento.

P27.11 Varias cargas entran a un campo magnético uniforme que entra a la página. *a*) ¿Qué trayectoria seguiría una carga positiva q que se moviera con una velocidad de magnitud v a través del campo? *b*) ¿Qué trayectoria tendría en el campo una carga positiva q que se moviera con una velocidad de magnitud $2v$? *c*) ¿Cuál sería la trayectoria que siguiera una carga negativa $-q$ que se moviera a través del campo con una velocidad de magnitud v? *d*) ¿Qué trayectoria tendría por el campo una partícula neutra?

P27.12 Cada uno de los puntos identificados con una letra en las esquinas del cubo que se aprecia en la figura P27.12 representa una carga positiva q que se mueve con una velocidad de magnitud v en la dirección indicada. La región en la figura está en un campo magnético uniforme $\vec{B}$, paralelo al eje x y dirigido hacia la derecha. ¿Cuáles cargas experimentan una fuerza debido a $\vec{B}$? ¿Cuál es la dirección de la fuerza en cada carga?

Figura **P27.12**



P27.13 Un estudiante afirma que si un relámpago cae sobre un mástil metálico, la fuerza ejercida por el campo magnético terrestre sobre la corriente en el mástil puede ser lo suficientemente grande como para doblarlo. Las corrientes comunes de los relámpagos son del orden de 10^4 a 10^5 A. ¿La opinión del estudiante está justificada? Explique su razonamiento.

P27.14 ¿Podría construirse un acelerador en el que *todas* las fuerzas sobre las partículas, para dirigirlas y para aumentar la rapidez, fueran magnéticas? ¿Por qué?

P27.15 Un altavoz ordinario como el que se ilustra en la figura 27.28 no debería colocarse cerca de un monitor de computadora o una pantalla de televisión. ¿Por qué no?

P27.16 La fuerza magnética que actúa sobre una partícula cargada nunca realiza trabajo porque, en cada instante, la fuerza es perpendicular a la velocidad. La torca ejercida por un campo magnético puede efectuar trabajo sobre una espira de corriente cuando la espira gira. Explique cómo se concilian estos enunciados contradictorios en apariencia.

P27.17 Si se produce una fem en un motor de cd, ¿sería posible usar el motor como una especie de generador o fuente, extrayendo potencia de él en lugar de alimentarla? ¿Cómo se llevaría a cabo esto?

P27.18 Cuando se invierte la polaridad del voltaje aplicado a un motor de cd, la dirección del movimiento *no* se invierte. ¿Por qué no? ¿Cómo *podría* invertirse la dirección del movimiento?

P27.19 En un experimento del efecto Hall, ¿es posible que *no* se observe diferencia de potencial transversal? ¿En qué circunstancias ocurriría esto?

P27.20 Los voltajes del efecto Hall son mucho mayores para conductores relativamente malos (como el germanio) que para buenos (como el cobre), en cuanto a corrientes, campos y dimensiones comparables. ¿Por qué?

EJERCICIOS

Sección 27.2 Campo magnético

27.1 • Una partícula con carga de -1.24×10^{-8} C se mueve con velocidad instantánea $\vec{v} = (4.19 \times 10^4 \text{ m/s})\hat{\imath} + (-3.85 \times 10^4 \text{ m/s})\hat{\jmath}$. ¿Cuál es la fuerza que sobre esta partícula ejerce un campo magnético, *a*) $\vec{B} = (1.40 \text{ T})\hat{\imath}$ y *b*) $\vec{B} = (1.40 \text{ T})\hat{k}$?

27.2 • Una partícula con masa de 0.195 g lleva una carga de -2.50×10^{-8} C. Se da a la partícula una velocidad horizontal inicial hacia el norte y con magnitud de 4.00×10^4 m/s. ¿Cuáles son la magnitud y la dirección del campo magnético mínimo que mantendrá la partícula en movimiento en el campo gravitacional terrestre, en la misma dirección horizontal hacia el norte?

27.3 • En un campo magnético de 1.25 T dirigido verticalmente hacia arriba, una partícula que tiene una carga de magnitud 8.50 μC, y se mueve inicialmente hacia el norte a 4.75 km/s, se desvía hacia el este. *a*) ¿Cuál es el signo de la carga de esta partícula? Elabore un diagrama que indique cómo obtuvo la respuesta. *b*) Calcule la fuerza magnética sobre la partícula.

27.4 • Una partícula con masa de 1.81×10^{-3} kg y una carga de 1.22×10^{-8} C tiene, en un instante dado, una velocidad $\vec{v} = (3.00 \times 10^4 \text{ m/s})\hat{\jmath}$. ¿Cuáles son la magnitud y la dirección de la aceleración de la partícula producida por un campo magnético uniforme $\vec{B} = (1.63 \text{ T})\hat{\imath} + (0.980 \text{ T})\hat{\jmath}$?

27.5 • Un electrón experimenta una fuerza magnética, cuya magnitud es de 4.60×10^{-15} N cuando se mueve con un ángulo de 60.0° con respecto a un campo magnético de magnitud 3.50×10^{-3} T. Calcule la rapidez del electrón.

27.6 • Un electrón se mueve a 2.50×10^6 m/s a través de una región en la que hay un campo magnético de dirección no especificada y magnitud de 7.40×10^{-2} T. *a*) ¿Cuáles son las magnitudes mayor y menor posibles de la aceleración del electrón debidas al campo magnético? *b*) Si la aceleración real del electrón es la cuarta parte de la magnitud más grande del inciso *a*), ¿cuál es el ángulo entre la velocidad del electrón y el campo magnético?

27.7 •• PA Una partícula con carga de 7.80 μC se mueve con velocidad $\vec{v} = -(3.80 \times 10^3 \text{ m/s})\hat{\jmath}$. Se mide la fuerza magnética sobre la partícula y resulta ser de $\vec{F} = +(7.60 \times 10^{-3} \text{ N})\hat{\imath} - (5.20 \times 10^{-3} \text{ N})\hat{k}$. *a*) Calcule todas las componentes del campo magnético que pueda con base en esta información. *b*) ¿Hay componentes del campo magnético que no estén determinadas por la medición de la fuerza? Explique su respuesta. *c*) Calcule el producto escalar $\vec{B} \cdot \vec{F}$. ¿Cuál es el ángulo entre $\vec{B}$ y $\vec{F}$?

27.8 •• PA Una partícula con carga de -5.60 nC se mueve en un campo magnético uniforme $\vec{B} = -(1.25 \text{ T})\hat{k}$. La medición de la fuerza

magnética sobre la partícula resulta ser $\vec{F} = -(3.40 \times 10^{-7}\ \text{N})\hat{\imath} + (7.40 \times 10^{-7}\ \text{N})\hat{\jmath}$. *a)* Calcule todas las componentes que pueda de la velocidad de la partícula con base en esta información. *b)* ¿Hay componentes de la velocidad que no estén determinadas por la medición de la fuerza? Explique su respuesta. *c)* Calcule el producto escalar $\vec{v} \cdot \vec{F}$ y diga cuál es el ángulo entre $\vec{v}$ y $\vec{F}$?

27.9 •• Un grupo de partículas se mueve en un campo magnético de magnitud y dirección desconocidas. Usted observa que un protón que se mueve a 1.50 km/s en la dirección $+x$ experimenta una fuerza de 2.25×10^{-16} N en la dirección $+y$, y otro electrón que se mueve a 4.75 km/s en la dirección $-z$ experimenta una fuerza de 8.50×10^{-16} N en la dirección $+y$. *a)* ¿Cuáles son la magnitud y la dirección del campo magnético? *b)* ¿Cuáles son la magnitud y la dirección de la fuerza magnética sobre un electrón que se mueve en la dirección $-y$ a 3.20 km/s?

Sección 27.3 Líneas de campo magnético y flujo magnético

27.10 • Una superficie plana, cuadrada, de 3.40 cm por lado se encuentra en el plano xy en $z = 0$. Calcule la magnitud del flujo a través de esta superficie producido por un campo magnético $\vec{B} = (0.200\ \text{T})\hat{\imath} + (0.300\ \text{T})\hat{\jmath} - (0.500\ \text{T})\hat{k}$.

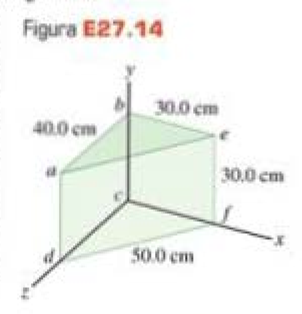
27.11 • Un área circular con radio de 6.50 cm se encuentra en el plano xy. ¿Cuál es la magnitud del flujo magnético a través de este círculo debido a un campo magnético uniforme $B = 0.230$ T, *a)* en la dirección $+z$; *b)* a un ángulo de 53.1° a partir de la dirección $+z$; *c)* en la dirección $+y$?

27.12 • Una superficie rectangular horizontal, de dimensiones 2.80 × 3.20 cm, se encuentra en un campo magnético uniforme dirigido a un ángulo de 30.0° arriba de la horizontal. ¿Cuál debe ser la magnitud del campo magnético para producir un flujo de 4.20×10^{-4} Wb a través de la superficie?

27.13 •• Una botella abierta de plástico de bebida gaseosa, con diámetro de abertura de 2.5 cm está colocada sobre una mesa. Un campo magnético uniforme de 1.75 T dirigido hacia arriba y orientado a 25° de la vertical rodea la botella. ¿Cuál es el flujo magnético total a través del plástico de la botella de bebida gaseosa?

27.14 •• El campo magnético $\vec{B}$ en cierta región es de 0.128 T, y su dirección es la del eje $+z$ en la figura E27.14. *a)* ¿Cuál es el flujo magnético a través de la superficie *abcd* en la figura? *b)* ¿Cuál es el flujo magnético a través de la superficie *befc*? *c)* ¿Cuál es el flujo magnético a través de la superficie *aefd*? *d)* ¿Cuál es el flujo neto a través de las cinco superficies que encierran el volumen sombreado?

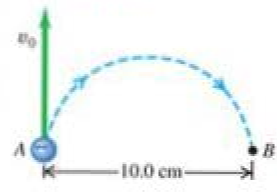
Figura **E27.14**



Sección 27.4 Movimiento de partículas cargadas en un campo magnético

27.15 •• Un electrón en el punto *A* de la figura E27.15 tiene una rapidez v_0 de 1.41×10^6 m/s. Calcule *a)* la magnitud y la dirección del campo magnético que hará que el electrón siga la trayectoria semicircular entre *A* y *B*, y *b)* el tiempo requerido para que el electrón se mueva de *A* a *B*.

Figura **E27.15**



27.16 •• Repita el ejercicio 27.15 para el caso en que la partícula es un protón en lugar de un electrón.

27.17 • PA Se deja caer una pelota de 150 g que contiene 4.00×10^8 electrones excedentes hacia un pozo vertical de 125 m. En el fondo del pozo, la pelota entra de súbito en un campo magnético uniforme horizontal con magnitud de 0.250 T y dirección de este a oeste. Si la resistencia del aire es despreciable, determine la magnitud y la dirección de la fuerza que este campo magnético ejerce sobre la pelota cuando acaba de entrar al campo.

27.18 • Una partícula alfa (núcleo de He que contiene dos protones y dos neutrones, y tiene una masa de 6.64×10^{-27} kg) se mueve horizontalmente a 35.6 km/s cuando entra a un campo magnético uniforme, vertical y con magnitud de 1.10 T. *a)* ¿Cuál es el diámetro de la trayectoria seguida por esta partícula alfa? *b)* ¿Qué efecto tiene el campo magnético sobre la rapidez de la partícula? *c)* ¿Cuáles son la magnitud y la dirección de la aceleración de la partícula alfa mientras está en el campo magnético? *d)* Explique por qué la rapidez de la partícula no cambia aun cuando actúe sobre ella una fuerza externa desequilibrante.

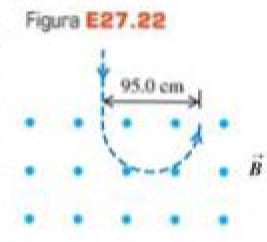
27.19 • PA Una partícula con carga de 6.40×10^{-19} C recorre una órbita circular con radio de 4.68 mm debido a la fuerza ejercida sobre ella por un campo magnético con magnitud de 1.65 T y perpendicular a la órbita. *a)* ¿Cuál es la magnitud del momento lineal $\vec{p}$ de la partícula? *b)* ¿Cuál es la magnitud del momento angular $\vec{L}$ de la partícula?

27.20 • *a)* Un núcleo ^{16}O (carga $+8e$) que se mueve horizontalmente de oeste a este con una rapidez de 500 km/s, experimenta una fuerza magnética de 0.00320 nN vertical hacia abajo. Calcule la magnitud y la dirección del campo magnético más débil que se requiere para generar esta fuerza. Explique cómo podría causarse esta misma fuerza con un campo magnético más grande. *b)* Un electrón se mueve en un campo magnético uniforme, horizontal, de 2.10 T dirigido hacia el oeste. ¿Cuáles deben ser la magnitud y la dirección de la velocidad mínima del electrón, para que la fuerza magnética sobre él sea de 4.60 pN vertical hacia arriba? Explique cómo la velocidad podría ser mayor que este valor mínimo con una fuerza de las mismas magnitud y dirección.

27.21 • Un deuterón (núcleo de un isótopo de hidrógeno) tiene una masa de 3.34×10^{-27} kg y una carga de $+e$. El deuterón se mueve en una trayectoria circular con un radio de 6.96 mm en un campo magnético con magnitud de 2.50 T. *a)* Calcule la rapidez del deuterón. *b)* Calcule el tiempo requerido para que recorra media revolución. *c)* ¿A través de cuál diferencia de potencial tendría que ser acelerado el deuterón para alcanzar tal rapidez?

27.22 • En un experimento con rayos cósmicos, un haz vertical de partículas que tienen carga de magnitud $3e$, y masa de 12 veces la masa del protón, entra a un campo magnético uniforme y horizontal de 0.250 T y se dobla en un semicírculo de 95.0 cm de diámetro, como se indica en la figura E27.22. *a)* Obtenga la rapidez de las partículas y el signo de su carga. *b)* ¿Es razonable ignorar la fuerza de gravedad sobre las partículas? *c)* ¿Cómo se compara la rapidez de las partículas al entrar al campo con la rapidez que tienen al salir de este?

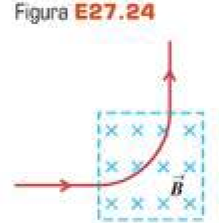
Figura **E27.22**



27.23 • Un físico desea producir ondas electromagnéticas de 3.0 THz de frecuencia (1 THz = 1 terahertz = 10^{12} Hz) usando un magnetrón (véase el ejemplo 27.3). *a)* ¿Cuál sería el campo magnético necesario? Compare este campo con los campos magnéticos constantes más intensos que se han producido en la Tierra, de aproximadamente 45 T. *b)* ¿Habría alguna ventaja en usar protones en lugar de electrones en el magnetrón? ¿Por qué?

27.24 •• Un haz de protones que se desplaza a 1.20 km/s entra a un campo magnético uniforme, viajando en forma perpendicular al campo. El haz sale del campo magnético en una dirección que es perpendicular con respecto a su dirección original (figura E27.24). El haz recorre una distancia de 1.18 cm *mientras está en el campo*. ¿Cuál es la magnitud del campo magnético?

Figura **E27.24**



27.25 • Un electrón del haz del cinescopio de un televisor es acelerado por una diferencia de potencial de 2.00 kV. Después pasa a través de una región de un campo magnético transversal, donde se mueve en un arco circular de 0.180 m de radio. ¿Cuál es la magnitud del campo?

27.26 • Un ion de ^{7}Li (un isótopo del litio) con una sola carga tiene una masa de 1.16×10^{-26} kg. Es acelerado a través de una diferencia de potencial de 220 V, y luego entra a un campo magnético de 0.723 T perpendicular a la trayectoria del ion. ¿Cuál es el radio de la trayectoria del ion en el campo magnético?

27.27 •• Un protón ($q = 1.60 \times 10^{-19}$ C, $m = 1.67 \times 10^{-27}$ kg) se mueve en un campo magnético uniforme $\vec{B} = (0.500 \text{ T})\hat{\imath}$. En $t = 0$ el protón tiene componentes de velocidad $v_x = 1.50 \times 10^5$ m/s, $v_y = 0$, y $v_z = 2.00 \times 10^5$ m/s (véase el ejemplo 27.4). *a*) ¿Cuáles son la magnitud y la dirección de la fuerza magnética que actúa sobre el protón? Además del campo magnético, hay un campo eléctrico uniforme en la dirección $+x$, $\vec{E} = (+2.00 \times 10^4 \text{ V/m})\hat{\imath}$. *b*) ¿El protón tendrá una componente de aceleración en la dirección del campo eléctrico? *c*) Describa la trayectoria del protón. ¿El campo eléctrico afecta el radio de la hélice? Explique su respuesta. *d*) En $t = T/2$, donde T es el periodo del movimiento circular del protón, ¿cuál es la componente x del desplazamiento del protón a partir de su posición en $t = 0$?

Sección 27.5 Aplicaciones del movimiento de partículas cargadas

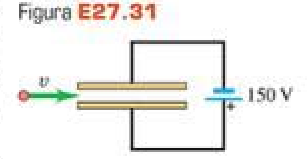
27.28 • *a*) ¿Cuál es la rapidez de un haz de electrones cuando la influencia simultánea de un campo eléctrico de 1.56×10^4 V/m y un campo magnético de 4.62×10^{-3} T, ambos campos normales al haz y entre sí, no produce desviación en los electrones? *b*) Muestre en un diagrama la orientación relativa de los vectores $\vec{v}$, $\vec{E}$ y $\vec{B}$. *c*) Cuando se elimina el campo eléctrico, ¿cuál es el radio de la órbita del electrón? ¿Cuál es el periodo de la órbita?

27.29 • Al diseñar un selector de velocidad que usa campos eléctricos y magnéticos perpendiculares uniformes, usted desea seleccionar los iones de carga de $+5e$ que viajan perpendicularmente a los campos a 8.75 km/s. El campo magnético disponible tiene una magnitud de 0.550 T. ¿Cuál es la magnitud del campo eléctrico que se necesita? *b*) Muestre cómo deben estar orientados los dos campos entre sí y con la velocidad de los iones. *c*) ¿El selector de velocidad permitirá también que los siguientes iones (que tienen la misma velocidad de los iones de $+5e$) pasen sin ser desviados: **i.** iones con carga negativa de $-5e$, **ii.** iones con carga positiva diferente de $+5e$?

27.30 • **Campos $\vec{E}$ y $\vec{B}$ transversales.** Una partícula con velocidad inicial $\vec{v}_0 = (5.85 \times 10^3 \text{ m/s})\hat{\jmath}$ entra a una región de campos eléctrico y magnético uniformes. El campo magnético en la región es $\vec{B} = -(1.35 \text{ T})\hat{k}$. Calcule la magnitud y la dirección del campo eléctrico en la región si la partícula debe pasarlo sin desviarse, para una partícula de carga *a*) +0.640 nC y *b*) −0.320 nC. Ignore el peso de la partícula.

27.31 •• Una batería de 150 V está conectada a través de dos placas metálicas paralelas con área de 28.5 cm^2 y separadas 8.20 mm. Un haz de partículas alfa (carga de $+2e$, masa de 6.64×10^{-27} kg) es acelerado desde el reposo a través de una diferencia de potencial de 1.75 kV y entra a la región entre las placas de manera perpendicular al campo eléctrico, como se muestra en la figura E27.31. ¿Qué magnitud y dirección del campo magnético se necesitan para que las partículas alfa salgan de las placas sin desviarse?

Figura **E27.31**



27.32 • Un átomo simplemente ionizado (al que se le retira un electrón, llamado también monoionizado) de ^{40}K pasa a través de un selector de velocidad formado por campos eléctricos y magnéticos uniformes perpendiculares. El selector se ajusta para permitir que los iones que tienen una rapidez de 4.50 km/s pasen sin desviarse cuando el campo magnético tiene un valor de 0.0250 T. Los iones entran en seguida a un segundo campo magnético uniforme (B') orientado en ángulo recto con respecto a su velocidad. El ^{40}K tiene 19 protones y 21 neutrones y una masa de 6.64×10^{-26} kg. *a*) ¿Cuál es la magnitud del campo eléctrico en el selector de velocidad? *b*) ¿Cuál debe ser la magnitud de B' de modo que los iones se curven en un semicírculo de radio igual a 12.5 cm?

27.33 • Átomos simplemente ionizados (a los que se les retira un electrón, llamados también monoionizados) se aceleran y luego pasan a través de un selector de velocidad formado por campos eléctrico y magnético perpendiculares. El campo eléctrico es de 155 V/m y el campo magnético de 0.0315 T. Los iones entran luego a un campo magnético uniforme de magnitud 0.0175 T orientado perpendicularmente a su velocidad. *a*) ¿Con qué rapidez se mueven los iones cuando salen del selector de velocidad? *b*) Si el radio de la trayectoria de los iones en el segundo campo magnético es de 17.5 cm, ¿cuál es su masa?

27.34 • En el espectrómetro de masas de Bainbridge (véase la figura 27.24), la magnitud del campo magnético en el selector de velocidad es de 0.650 T, y los iones cuya rapidez es de 1.82×10^6 m/s lo traviesan sin desviarse. *a*) ¿Cuál es la magnitud del campo eléctrico en el selector de velocidad? *b*) Si la separación de las placas es de 5.20 mm, ¿cuál es la diferencia de potencial entre las placas P y P'?

27.35 •• BIO **Dietas ancestrales.** Se puede determinar la cantidad de carne incluida en las dietas prehistóricas midiendo la razón entre los isótopos nitrógeno 15 y de nitrógeno 14 que permanecen en los huesos humanos. Los carnívoros concentran el ^{15}N, de modo que esta razón indica a los arqueólogos cuánta carne consumían las personas en la antigüedad. Use el espectrómetro del ejercicio 27.34 para determinar la separación de los isótopos ^{14}N y ^{15}N en el detector. Las masas medidas de estos isótopos son 2.32×10^{-26} kg (^{14}N) y 2.49×10^{-26} kg (^{15}N).

Sección 27.6 Fuerza magnética sobre un conductor que transporta corriente

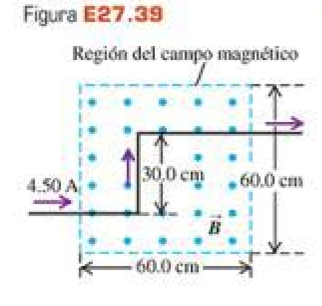
27.36 • Un alambre recto de 2.5 m transporta la típica corriente doméstica de 1.5 A (en una dirección), en un lugar donde el campo magnético de la Tierra es de 0.55 gauss de sur a norte. Calcule la magnitud y la dirección de la fuerza que ejerce el campo magnético de nuestro planeta sobre este alambre, si se orienta de tal manera que la corriente que transporta corra de *a*) oeste a este, *b*) verticalmente hacia arriba, *c*) de norte a sur. *d*) ¿La fuerza magnética siempre es lo suficientemente grande para provocar efectos significativos en condiciones domésticas normales?

27.37 • Un alambre rectilíneo de 2.00 m y 150 g conduce una corriente en una región donde el campo magnético terrestre es horizontal y con magnitud de 0.55 gauss. *a*) ¿Cuál es el valor mínimo que debe tener la corriente en el alambre, para que todo su peso esté soportado por la fuerza magnética del campo de la Tierra, si sobre él no actúa más fuerza que la gravedad? ¿Parece factible que un alambre así sea capaz de resistir una corriente de esa magnitud? *b*) Muestre cómo tendría que orientarse el alambre en relación con el campo magnético de la Tierra para que esté soportado en esa forma.

27.38 •• Un electroimán produce un campo magnético de 0.550 T en una región cilíndrica con radio de 2.50 cm entre sus polos. Un alambre rectilíneo que transporta una corriente de 10.8 A pasa por el centro de esta región en forma perpendicular a los ejes de la región cilíndrica y el campo magnético. ¿Cuál es la magnitud de la fuerza ejercida sobre el alambre?

27.39 •• Un alambre largo que conduce una corriente de 4.50 A forma dos dobleces de 90°, como se muestra en la figura E27.39. La parte flexionada del alambre pasa a través de un campo magnético uniforme de 0.240 T dirigido como se indica en la figura y confinado a una región limitada del espacio. Calcule la magnitud y la dirección de la fuerza que el campo magnético ejerce sobre el alambre.

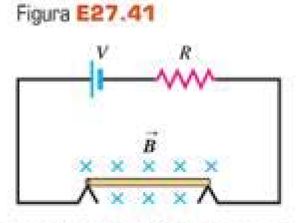
Figura **E27.39**



27.40 • Un alambre rectilíneo y vertical transporta una corriente de 1.20 A dirigida hacia abajo en una región entre los polos de un gran electroimán superconductor, donde el campo magnético tiene una magnitud $B = 0.588$ T y es horizontal. ¿Cuáles son la magnitud y la dirección de la fuerza magnética sobre una sección de 1.00 cm del alambre que se encuentra en este campo magnético uniforme, si la dirección del campo magnético es hacia *a*) el este, *b*) el sur y *c*) 30.0° al sur del oeste?

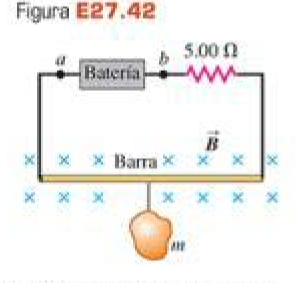
27.41 • Una barra de metal delgada de 50.0 cm de longitud y masa de 750 g descansa sobre dos soportes metálicos que no la sujetan, en un campo magnético uniforme de 0.450 T, como se ilustra en la figura E27.41. Una batería y un resistor de 25.0 Ω están conectados en serie a los soportes. *a*) ¿Cuál es el voltaje más alto que puede tener la batería sin que se interrumpa el circuito en los soportes? *b*) El voltaje de la batería tiene el valor máximo calculado en el inciso *a*). Si el resistor sufre de improviso un cortocircuito parcial, de modo que su resistencia baje a 2.0 Ω, calcule la aceleración inicial de la barra.

Figura **E27.41**



27.42 • **Balanza magnética.** El circuito que se ilustra en la figura E27.42 se utiliza para construir una balanza magnética para pesar objetos. La masa m que se quiere medir se cuelga del centro de una barra que está inmersa en un campo magnético uniforme de 1.50 T, que entra al plano de la figura. El voltaje de la batería se ajusta para hacer variar la corriente en el circuito. La barra horizontal mide 60.0 cm de largo y está hecha de un material extremadamente ligero. Está conectada a la batería mediante alambres delgados verticales que no resisten una tensión apreciable; todo el peso de la masa suspendida m está soportado por la fuerza magnética sobre la barra. Un resistor con $R = 5.00$ Ω está conectado en serie con la barra; la resistencia del resto del circuito es mucho menor que esto. *a*) ¿Cuál punto, *a* o *b*, debería ser la terminal positiva de la batería? *b*) Si el voltaje terminal máximo de la batería es de 175 V, ¿cuál es la masa más grande m que este instrumento es capaz de medir?

Figura **E27.42**



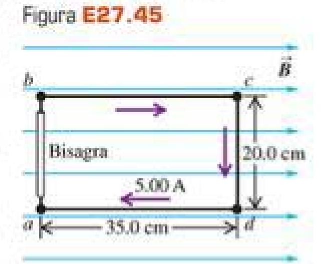
27.43 • Considere el conductor y la corriente del ejemplo 27.8, pero ahora el campo magnético es paralelo al eje *x*. *a*) ¿Cuáles son la magnitud y la dirección de la fuerza magnética total sobre el conductor? *b*) En el ejemplo 27.8, la fuerza total es la misma que si se reemplazara el semicírculo con un segmento rectilíneo a lo largo del eje *x*. ¿Esto sigue siendo verdadero cuando el campo magnético se encuentra en esta dirección diferente? ¿Puede explicar por qué?

Sección 27.7 Fuerza y torca en una espira de corriente

27.44 •• El plano de una espira rectangular de alambre, de 5.0 × 8.0 cm, es paralelo a un campo magnético de 0.19 T. La espira conduce una corriente de 6.2 A. *a*) ¿Cuál es la torca que actúa sobre la espira? *b*) ¿Cuál es el momento magnético de la espira? *c*) ¿Cuál es la torca máxima que se puede obtener con la misma longitud total de alambre que transporte la misma corriente en este campo magnético?

27.45 • El circuito rectangular de 20.0 × 35.0 cm mostrado en la figura E27.45 puede girar respecto de su lado *ab*. Transporta una corriente de 5.00 A en sentido horario y está ubicado en un campo magnético uniforme de 1.20 T perpendicular a dos de sus lados, como se indica. *a*) Elabore un diagrama que muestre con claridad la dirección de la fuerza que ejerce el campo magnético sobre cada segmento del circuito (*ab*, *bc*, etcétera). *b*) De las cuatro fuerzas que dibujó en el inciso *a*), identifique cuál ejerce una torca con respecto al lado *ab*. Luego calcule solo las fuerzas que contribuyen a esta torca. *c*) Use los resultados del inciso *b*) para calcular la torca que el campo magnético ejerce sobre el circuito con respecto al eje *ab*.

Figura **E27.45**



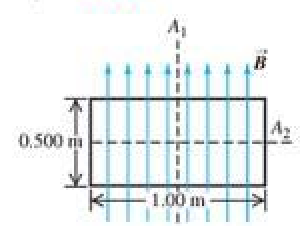
27.46 • Una bobina rectangular de alambre, de 22.0 × 35.0 cm, conduce una corriente de 1.40 A y está orientada con el plano de su espira perpendicular a un campo magnético uniforme de 1.50 T, como se ilustra en la figura E27.46. *a*) Calcule la fuerza neta y la torca que el campo magnético ejerce sobre la bobina. *b*) Se hace girar la bobina un ángulo de 30.0° en torno al eje que se muestra, de modo que el lado izquierdo salga del plano de la figura y el derecho avance hacia el plano. Calcule la fuerza neta y la torca que ejerce ahora el campo magnético sobre la bobina. (*Sugerencia:* Para visualizar este problema en tres dimensiones, dibuje con cuidado la bobina vista a lo largo del eje de rotación).

Figura **E27.46**



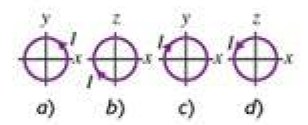
27.47 • PA Una bobina rectangular uniforme con masa total de 212 g y dimensiones de 0.500 × 1.00 m, está orientada en forma paralela a un campo magnético uniforme de 3.00 T (figura E27.47). De improviso, se inicia una corriente de 2.00 A en la bobina. *a*) ¿Sobre cuál eje (A_1 o A_2) comenzará a girar la bobina? ¿Por qué? *b*) Determine la aceleración angular inicial de la bobina cuando apenas comienza a fluir la corriente.

Figura **E27.47**



27.48 • Una bobina circular con área A y N vueltas tiene libertad para girar con respecto a un diámetro que coincide con el eje *x*. Una corriente I circula en la bobina. Hay un campo magnético uniforme $\vec{B}$ en la dirección *y* po-

Figura **E27.48**



sitiva. Calcule la magnitud y la dirección de la torca $\vec{\tau}$ y el valor de la energía potencial U, dado por la ecuación (27.27), cuando la bobina está orientada como se ilustra en los incisos *a*) a *d*) de la figura E27.48.

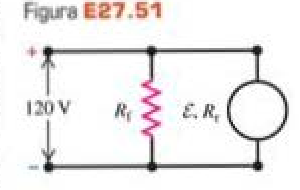
27.49 •• Una bobina con momento magnético de 1.45 A·m² está orientada inicialmente con su momento magnético antiparalelo a un campo magnético uniforme de 0.835 T. ¿Cuál es el cambio en la energía potencial de la bobina cuando se hace girar 180°, de modo que su momento magnético sea paralelo al campo?

Sección 27.8 Motor de corriente directa

27.50 • Un motor de cd con su rotor y bobinas de campo conectadas en serie tiene una resistencia interna de 3.2 Ω. Cuando el motor funciona con carga completa sobre una línea de 120 V, la fem en el rotor es de 105 V. *a*) ¿Cuál es la corriente que el motor toma de la línea? *b*) ¿Cuál es la potencia entregada al motor? *c*) ¿Cuál es la potencia mecánica que el motor desarrolla?

27.51 •• En un motor de cd devanado en derivación, las bobinas de campo y el rotor están conectados en paralelo (figura E27.51). La resistencia R_f de las bobinas del campo es de 106 Ω, y la resistencia R_r del rotor es de 5.9 Ω. Cuando una diferencia de potencial de 120 V se aplica a las escobillas y el motor funciona a su máxima rapidez, entregando energía mecánica, la corriente que se le suministra es de 4.82 A. *a*) ¿Cuál es la corriente en las bobinas del campo? *b*) ¿Cuál es la corriente en el rotor? *c*) ¿Cuál es la fem inducida que desarrolla el motor? *d*) ¿Cuánta potencia mecánica desarrolla este motor?

Figura **E27.51**

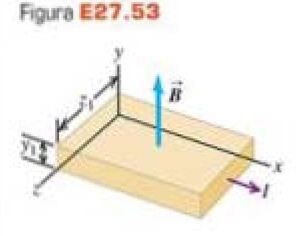


27.52 • Un motor de cd devanado en derivación, con las bobinas del campo y el rotor conectados en paralelo (figura E27.51), funciona conectado a una línea eléctrica de cd de 120 V. La resistencia de los devanados de campo, R_f, es de 218 Ω. La resistencia del rotor, R_r, es de 5.9 Ω. Cuando el motor está operando, el rotor desarrolla una fem $\mathcal{E}$. El motor toma una corriente de 4.82 A de la línea. Las pérdidas por fricción son de 45.0 W. Calcule *a*) la corriente del campo; *b*) la corriente del rotor; *c*) la fem $\mathcal{E}$; *d*) la tasa de desarrollo de energía térmica en los devanados del campo; *e*) la tasa de desarrollo de energía térmica en el rotor; *f*) la potencia de alimentación al motor; *g*) la eficiencia del motor.

Sección 27.9 Efecto Hall

27.53 • La figura E27.53 ilustra una porción de un listón de plata con $z_1 = 11.8$ mm y $y_1 = 0.23$ mm, que transporta una corriente de 120 A en la dirección $+x$. El listón se encuentra en un campo magnético uniforme, en la dirección y, con magnitud de 0.95 T. Aplique el modelo simplificado del efecto Hall que se presentó en la sección 27.9. Si hay 5.85×10^{28} electrones libres por metro cúbico, encuentre *a*) la magnitud de la velocidad de deriva de los electrones en la dirección x; *b*) la magnitud y la dirección del campo eléctrico en la dirección z debido al efecto Hall; *c*) la fem de Hall.

Figura **E27.53**

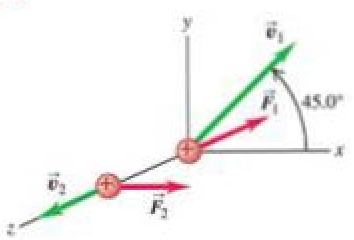


27.54 • Sea la figura E27.53 una tira de un metal desconocido de las mismas dimensiones que el listón de plata del ejercicio 27.53. Cuando el campo magnético es de 2.29 T y la corriente es de 78.0 A, la fem de Hall es de 131 μV. ¿Cuál es el resultado que proporciona el modelo simplificado del efecto Hall presentado en la sección 27.9, para la densidad de los electrones libres en el metal desconocido?

PROBLEMAS

27.55 • Cuando una partícula con una carga $q > 0$ se mueve con una velocidad $\vec{v}_1$ orientada a 45.0° del eje $+x$ en el plano xy, un campo magnético uniforme ejerce una fuerza $\vec{F}_1$ a lo largo del eje $-z$ (figura P27.55). Cuando la misma partícula se mueve con velocidad $\vec{v}_2$ con igual magnitud que $\vec{v}_1$ pero a lo largo del eje $+z$, se ejerce sobre ella una fuerza $\vec{F}_2$ de magnitud F_2 a lo largo del eje $+x$. *a*) ¿Cuáles son la magnitud (en términos de q, v_1 y F_2) y la dirección del campo magnético? *b*) ¿Cuál es la magnitud de $\vec{F}_1$ en términos de F_2?

Figura **P27.55**



27.56 • Una partícula con carga de 9.45×10^{-8} C se mueve en una región donde hay un campo magnético uniforme de 0.650 T en la dirección $+x$. En un instante específico, la velocidad de la partícula tiene componentes $v_x = -1.68 \times 10^4$ m/s, $v_y = -3.11 \times 10^4$ m/s y $v_z = 5.85 \times 10^4$ m/s. ¿Cuáles son las componentes de la fuerza sobre la partícula en este instante?

27.57 ••• PA **Reactor de fusión.** Si dos núcleos de deuterio (carga $+e$, masa 3.34×10^{-27} kg) se acercan lo suficiente, la atracción de la fuerza nuclear fuerte los fusionará y formarán un isótopo de helio, de manera que se liberará una vasta cantidad de energía. El rango de esta fuerza es alrededor de 10^{-15} m. Este es el principio detrás del reactor de fusión. Los núcleos de deuterio se mueven demasiado rápido para ser contenidos por paredes físicas, por lo que se confinan usando magnetismo. *a*) ¿Qué tan rápido tendrían que moverse dos núcleos para que en una colisión de frente se acerquen tanto que se fusionen? (Suponga que sus rapideces son iguales, trate a los núcleos como cargas puntuales, y suponga también que se requiere una separación de 1.0×10^{-15} para que ocurra la fusión). *b*) ¿Qué intensidad de campo magnético se necesita para hacer que núcleos de deuterio con esta rapidez viajen en un círculo de 2.50 m de diámetro?

27.58 •• **Momento magnético del átomo de hidrógeno.** En el modelo de Bohr del átomo de hidrógeno (véase la sección 38.5), en el estado de menor energía, el electrón circunda al protón a una rapidez de 2.2×10^6 m/s en una órbita circular de radio 5.3×10^{-11} m. *a*) ¿Cuál es el periodo orbital del electrón? *b*) Si el electrón que orbita se considera una espira de corriente, ¿cuál es la corriente I? *c*) ¿Cuál es el momento magnético del átomo debido al movimiento del electrón?

27.59 •• Usted quiere acertar en la diana (el punto central de un blanco de tiro) ubicada a varios metros de distancia, con una moneda cargada cuya masa es de 4.25 g y cuya carga es de +2500 μC. Da a la moneda una velocidad inicial de 12.8 m/s, y en la región existe un campo eléctrico uniforme dirigido hacia abajo con intensidad de 27.5 N/C. Si apunta directamente a la diana y lanza la moneda horizontalmente, ¿qué magnitud y dirección del campo magnético uniforme en la región se necesitan para que la moneda dé en la diana?

27.60 • Un ciclotrón debe acelerar protones hasta una energía de 5.4 MeV. El electroimán del superconductor del ciclotrón produce un campo magnético de 2.9 T perpendicular a las órbitas de los protones. *a*) Cuando estos han alcanzado una energía cinética de 2.7 MeV, ¿cuál es el radio de su órbita circular y qué rapidez angular tienen? *b*) Repita el inciso *a*) cuando los protones hayan alcanzado su energía cinética final de 5.4 MeV.

27.61 • Los polos magnéticos de un ciclotrón pequeño producen un campo magnético de magnitud 0.85 T. Los polos tienen un radio de 0.40 m, que es el radio máximo de las órbitas de las partículas aceleradas. *a*) ¿Cuál es la energía máxima a la que los protones ($q = 1.60 \times 10^{-19}$ C, $m = 1.67 \times 10^{-27}$ kg) se pueden acelerar en este ciclotrón? Exprese la respuesta en electrón volts y joules. *b*) ¿Cuál es el tiempo que se requiere para que un protón complete una revolución con este radio máximo? *c*) ¿Cuál tendría que ser la magnitud del campo magnético para que la máxima energía a la que puede acelerarse el protón sea el doble de lo que se calculó en el inciso *a*)? *d*) Para $B = 0.85$ T, ¿cuál es la energía máxima a la que las partículas alfa ($q = 3.20 \times 10^{-19}$ C, $m = 6.65 \times 10^{-27}$ kg) se pueden acelerar con el ciclotrón? ¿Cómo se compara esto con la energía máxima para los protones?

27.62 •• Una partícula con carga q se mueve con rapidez v en dirección $-y$, y lo hace en un campo magnético uniforme $\vec{B} = B_x\hat{\imath} + B_y\hat{\jmath} + B_z\hat{k}$. *a*) ¿Cuáles son las componentes de la fuerza $\vec{F}$ que el campo magnético ejerce sobre la partícula? *b*) Si $q > 0$, ¿cuáles deben ser los signos de las componentes de $\vec{B}$ si las componentes de $\vec{F}$ son todas no negativas? *c*) Si $q < 0$ y $B_x = B_y = B_z > 0$, encuentre la dirección $\vec{F}$ y la magnitud de $\vec{F}$ en términos de $|q|$, v y B_x.

27.63 •• Una partícula con carga negativa q y masa $m = 2.58 \times 10^{-15}$ kg se mueve por una región que contiene un campo magnético uniforme $\vec{B} = -(0.120\text{ T})\hat{k}$. En un instante específico, la velocidad de la partícula es $\vec{v} = (1.05 \times 10^6\text{ m/s})(-3\hat{\imath} + 4\hat{\jmath} + 12\hat{k})$ y la fuerza $\vec{F}$ sobre la partícula tiene una magnitud de 2.45 N. *a*) Determine la carga q. *b*) Determine la aceleración $\vec{a}$ de la partícula. *c*) Explique por qué la trayectoria de la partícula es una hélice, y determine el radio de curvatura R de la componente circular de la trayectoria helicoidal. *d*) Determine la frecuencia de ciclotrón de la partícula. *e*) Aunque el movimiento helicoidal no es periódico en el sentido estricto de la palabra, las coordenadas x y y varían en forma periódica. Si las coordenadas de la partícula en $t = 0$ son $(x, y, z) = (R, 0, 0)$, determine sus coordenadas en el momento $t = 2T$, donde T es el periodo del movimiento en el plano xy.

27.64 •• BIO **Uso médico de los ciclotrones.** El ciclotrón más grande de Estados Unidos es el *Tevatrón* del laboratorio Fermilab en Chicago, Illinois. Se conoce como tevatrón porque puede acelerar partículas a energías en un rango de TeV: 1 tera-eV = 10^{12} eV. Su circunferencia es de 6.4 km, y su corriente puede producir una energía máxima de 2.0 TeV. En cierto experimento médico, los protones serán acelerados a energías de 1.25 MeV apuntando a un tumor para destruir sus células. *a*) ¿Con qué rapidez se mueven estos protones cuando golpean el tumor? *b*) ¿Qué intensidad debe tener el campo magnético para desviar los protones en el círculo especificado?

27.65 • Un campo magnético ejerce una torca t sobre una espira de alambre redondo que conduce una corriente. ¿Cuál será la torca sobre esta espira (en términos de t) si su diámetro se triplica?

27.66 •• Una partícula de carga $q > 0$ se mueve con rapidez v en la dirección $+z$ a través de una región de campo magnético uniforme $\vec{B}$. La fuerza magnética sobre la partícula es $\vec{F} = F_0(3\hat{\imath} + 4\hat{\jmath})$, donde F_0 es una constante positiva. *a*) Determine las componentes B_x, B_y y B_z, o las que sean posibles con la información proporcionada. *b*) Si además se tiene el dato de que la magnitud del campo magnético es de $6F_0/qv$, determine tantas de las componentes restantes de $\vec{B}$ como sea posible.

27.67 •• Suponga que el campo eléctrico entre las placas en la figura 27.24 es de 1.88×10^4 V/m y el campo magnético en ambas regiones es de 0.682 T. Si la fuente contiene los tres isótopos de criptón, ^{82}Kr, ^{84}Kr y ^{86}Kr, y los iones tienen una sola carga, encuentre la distancia entre las líneas que forman los tres isótopos en el detector de partículas. Suponga que las masas atómicas de los isótopos (en unidades de masa atómica) son iguales a sus números de masa 82, 84 y 86. (Una unidad de masa atómica = 1 u = 1.66×10^{-27} kg).

27.68 •• **Espectrógrafo de masas.** Un espectrógrafo de masas se utiliza para medir las masas de los iones, o para separar los iones con masas diferentes (véase la sección 27.5). En un diseño de tal instrumento, los iones con masa m y carga q se aceleran a través de una diferencia de potencial V. Después entran a un campo magnético uniforme perpendicular a su velocidad, y experimentan una desviación en una trayectoria semicircular de radio R. Un detector mide el sitio donde los iones completan el semicírculo y, a partir de esto, es fácil calcular el valor de R. *a*) Obtenga la ecuación para calcular la masa del ion a partir de las mediciones de B, V, R y q. *b*) ¿Cuál es la diferencia de potencial V que se necesita para que átomos simplemente ionizados (o monoionizados) de ^{12}C tengan $R = 50.0$ cm en un campo magnético de 0.150 T? *c*) Suponga que el haz consiste en una mezcla de iones de ^{12}C y ^{14}C. Si V y B tienen los mismos valores que en el inciso *b*), calcule la separación de estos dos isótopos en el detector. ¿Piensa que la separación de este haz es suficiente para distinguir los dos iones? (Haga la suposición descrita en el problema 27.67 para las masas de los iones).

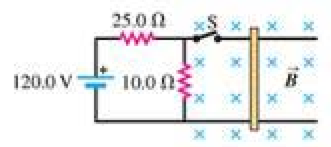
27.69 •• Un tramo recto de alambre conductor con masa M y longitud L se coloca en un plano inclinado sin fricción con un ángulo θ a partir de la horizontal (figura P27.69). En todos los puntos hay un campo magnético uniforme y vertical $\vec{B}$ (producido por un arreglo de imanes que no se muestran en la figura). Para evitar que el alambre se deslice por el plano inclinado, se acopla una fuente de voltaje en los extremos del alambre, de modo que el alambre permanece en reposo justo cuando fluye por él la cantidad correcta de corriente. Determine la magnitud y la dirección de la corriente en el alambre que hará que esté en reposo. Haga una copia de la figura y dibuje en ella la dirección de la corriente. Además, muestre en un diagrama de cuerpo libre todas las fuerzas que actúen sobre el alambre.

Figura **P27.69**



27.70 •• PA Una barra metálica, con peso de 2.60 N y 1.50 m de longitud, tiene una resistencia de 10.0 Ω y descansa horizontal sobre alambres conductores que la conectan al circuito de la figura P27.70. La barra está en un campo magnético uniforme horizontal de 1.60 T y no está sujeta a los alambres del circuito. ¿Cuál es la aceleración de la barra justo después de que se cierra el interruptor S?

Figura **P27.70**



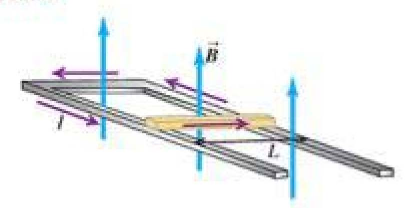
27.71 •• **Uso de la ley de Gauss del magnetismo.** En cierta región del espacio, el campo magnético $\vec{B}$ no es uniforme. El campo magnético tiene una componente z y otra componente que apunta radialmente hacia afuera del eje z o está dirigido hacia él. La componente z está dada por $B_z(z) = \beta z$, donde β es una constante positiva. La componente radial B_r depende solo de r, la distancia radial desde el eje z. *a*) Use la ley de Gauss para el magnetismo, ecuación (27.8), y calcule la componente radial B_r en función de r. (*Sugerencia:* Pruebe con una superficie gaussiana cilíndrica de radio r concéntrica con el eje z, con un extremo en $z = 0$ y el otro en $z = L$). Dibuje las líneas de campo magnético.

27.72 •• PA Una espira circular de plástico con radio R y carga positiva q está distribuida uniformemente alrededor de la circunferencia de la espira. Después, esta se hace girar alrededor de su eje central, perpendicular al plano de la espira, con rapidez angular ω. Si la espira está en una región donde existe un campo magnético uniforme $\vec{B}$ dirigido en forma paralela al plano de la espira, calcule la magnitud de la torca magnética sobre la espira.

27.73 •• BIO **Determinación de la dieta.** Un método para determinar la cantidad de maíz en las dietas de los antiguos indígenas norteamericanos es la técnica del *análisis de la razón del isótopo estable* (ARIE). Cuando el maíz efectúa la fotosíntesis, concentra el isótopo carbono 13, mientras que la mayoría de las demás plantas concentran el carbono 12. El consumo excesivo del maíz se puede relacionar con ciertas enfermedades, porque el maíz carece del aminoácido esencial lisina. Los arqueólogos utilizan espectrómetros de masas para separar los isótopos ^{12}C y ^{13}C en muestras de restos humanos. Suponga que usa un selector de velocidad para obtener átomos simplemente ionizados (que perdieron un electrón, por lo que también se llaman monoionizados) con rapidez de 8.50 km/s, y quiere desviarlos dentro de un campo magnético uniforme en un semicírculo con diámetro de 25.0 cm para el ^{12}C. Las masas medidas de estos isótopos son 1.99×10^{-26} kg (^{12}C) y 2.16×10^{-26} kg (^{13}C). *a*) ¿Qué intensidad de campo magnético se requiere? *b*) ¿Cuál es el diámetro del semicírculo para el ^{13}C? *c*) ¿Cuál es la separación de los iones ^{12}C y ^{13}C en el detector al final del semicírculo? ¿Esta distancia es suficientemente grande para observarse con facilidad?

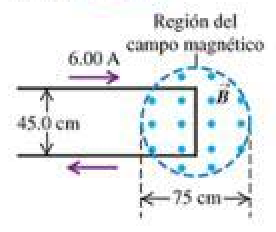
27.74 •• PA **Cañón electromagnético de rieles.** Una barra conductora con masa m y longitud L se desliza sobre rieles horizontales que están conectados a una fuente de voltaje, la cual mantiene una corriente constante I en los rieles y la barra, en tanto que un campo magnético uniforme, constante y vertical llena la región entre los rieles (figura P27.74). *a*) Calcule la magnitud y la dirección de la fuerza neta sobre la barra conductora. Ignore la fricción, y las resistencias del aire y eléctrica. *b*) Si la barra tiene masa m, obtenga la distancia d que debe moverse la barra a lo largo de los rieles, si parte del reposo, para alcanzar una rapidez v. *c*) Se ha sugerido que los cañones de rieles con base en este principio podrían acelerar cargas hasta una órbita terrestre o más lejos aún. Determine la distancia que la barra debe recorrer sobre los rieles para alcanzar la rapidez de escape de la Tierra (11.2 km/s). Sea $B = 0.80$ T, $I = 2.0 \times 10^3$ A, $m = 25$ kg y $L = 50$ cm. Por sencillez, suponga que la fuerza neta sobre el objeto es igual a la fuerza magnética de los incisos *a*) y *b*), aun cuando la gravedad desempeña un papel importante en un lanzamiento real al espacio.

Figura **P27.74**



27.75 • Un alambre largo que transporta una corriente de 6.00 A invierte su dirección mediante dos flexiones en ángulo recto, como se indica en la figura P27.75. La parte del alambre donde ocurre la flexión está en un campo magnético de 0.666 T, confinado a una región circular de 75 cm de diámetro, como se observa. Encuentre la magnitud y la dirección de la fuerza neta que el campo magnético ejerce sobre este alambre.

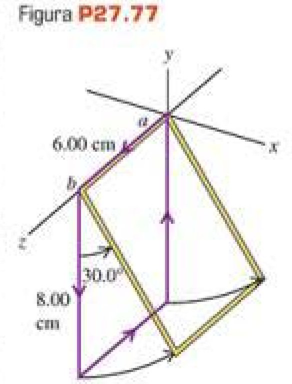
Figura **P27.75**



27.76 • Un alambre de 25.0 cm de largo está sobre el eje z y conduce una corriente de 7.40 A en la dirección $+z$. El campo magnético es uniforme y tiene componentes $B_x = -0.242$ T, $B_y = -0.985$ T y $B_z = -0.336$ T. *a*) Calcule las componentes de la fuerza magnética sobre el alambre. *b*) ¿Cuál es la magnitud de la fuerza magnética neta sobre el alambre?

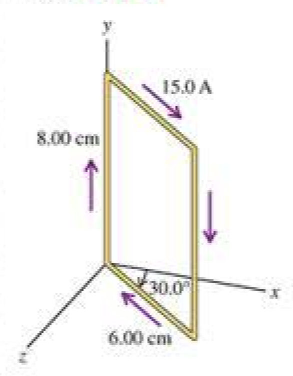
27.77 •• PA La espira rectangular de alambre que se ilustra en la figura P27.77 tiene una masa de 0.15 g por centímetro de longitud, y gira sobre el lado ab en un eje sin fricción. La corriente en el alambre es de 8.2 A en la dirección que se ilustra. Encuentre la magnitud y la dirección del campo magnético paralelo al eje y que ocasionará que la espira se balancee hasta que su plano forme un ángulo de 30.0° con el plano yz.

Figura **P27.77**



27.78 •• La espira rectangular que se muestra en la figura P27.78 gira sobre el eje y y conduce una corriente de 15.0 A en la dirección indicada. *a*) Si la espira está en un campo magnético uniforme con magnitud de 0.48 T en la dirección $+x$, calcule la magnitud y la dirección de la torca que se requiere para mantener la espira en la posición que se muestra. *b*) Repita el inciso *a*) para el caso en que el campo esté en la dirección $-z$. *c*) Para cada uno de los campos magnéticos mencionados, ¿cuál es la torca que se requeriría si la espira girara en torno a un eje que pasa por su centro, paralelo al eje y?

Figura **P27.78**



27.79 •• PA CALC Una varilla delgada y uniforme con masa despreciable mide 0.200 m y está sujeta al piso por una bisagra sin fricción en el punto P (figura P27.79). Un resorte horizontal con constante de fuerza de $k = 4.80$ N/m sujeta el otro extremo de la varilla con una pared vertical. La varilla está en un campo magnético uniforme $B = 0.340$ T que entra al plano de la figura. En la varilla hay una corriente $I = 6.50$ A, en la dirección que se aprecia. *a*) Calcule la torca debida a la fuerza magnética sobre la varilla, para un eje en P. Cuando se calcula la torca, ¿es correcto tomar la fuerza magnética total como si actuara en el centro de gravedad de la varilla? Explique su respuesta. *b*) Cuando la varilla está en equilibrio y forma un ángulo de 53.0° con el piso, ¿el resorte se estira o se comprime? *c*) ¿Cuánta energía almacenada hay en el resorte cuando la varilla se encuentra en equilibrio?

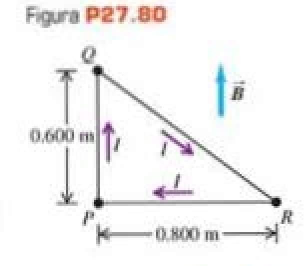
Figura **P27.79**

k
B
I
53.0°
P

27.80 •• La espira de alambre que se muestra en la figura P27.80 forma un triángulo rectángulo y conduce una corriente $I = 5.00$ A en la dirección que se indica. La espira está en un campo magnético uniforme con magnitud $B = 3.00$ T y en la misma dirección que la corriente en el lado PQ de la espira. *a*) Calcule la fuerza ejercida por el campo magnético en cada lado del triángulo. Si la fuerza es diferente de cero, especifique su dirección. *b*) ¿Cuál es la fuerza neta en la espira? *c*) La espira gira en torno a un eje situado a lo largo del lado PR. Use las fuerzas calculadas en el inciso *a*) para determinar la torca

sobre cada lado de la espira (véase el problema 27.79). *d*) ¿Cuál es la magnitud de la torca neta sobre la espira? Calcule la torca neta a partir de las torcas calculadas en el inciso *c*) y también con la ecuación (27.28). ¿Concuerdan estos resultados? *e*) ¿La torca neta está dirigida para girar el punto *Q* hacia el plano de la figura o hacia afuera de este plano?

Figura **P27.80**



27.81 •• **PA** Una barra de metal, uniforme, de 458 g y 75.0 cm de longitud, transporta una corriente *I* en un campo magnético uniforme, horizontal, de 1.25 T, como se muestra en la figura P27.81. En la figura se muestran las direcciones de $\vec{B}$ e *I*. La barra gira libremente debido a una bisagra sin fricción en el punto *b*. El otro extremo de la barra descansa sobre un soporte conductor en el punto *a*, aunque no está sujeta ahí. La barra reposa a un ángulo de 60.0° arriba de la horizontal. ¿Cuál es el valor máximo que puede tener la corriente *I* sin interrumpir el contacto eléctrico en *a*? (Véase el problema 27.77).

Figura **P27.81**



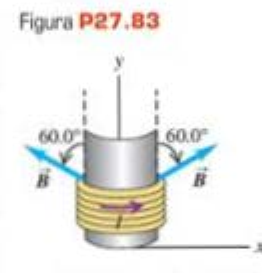
27.82 •• **Paleoclima.** Los climatólogos determinan temperaturas del pasado en la Tierra al comparar la razón entre el isótopo del oxígeno 18 y el isótopo del oxígeno 16 en el aire atrapado en capas de hielo antiguas, como las de Groenlandia. En un método para separar estos isótopos, primero se ioniza simplemente una muestra (es decir, se elimina de ella un electrón) que contiene a ambos y luego se acelera desde el reposo a través de una diferencia de potencial *V*. Después, este haz ingresa a un campo magnético *B* a ángulos rectos con el campo y se flexiona en un cuarto de círculo. Un detector de partículas en el extremo de la trayectoria mide la cantidad de cada isótopo. *a*) Demuestre que la separación Δr de los dos isótopos en el detector está dada por

$$\Delta r = \frac{\sqrt{2eV}}{eB}(\sqrt{m_{18}} - \sqrt{m_{16}})$$

donde m_{16} y m_{18} son las masas de los dos isótopos de oxígeno. *b*) Las masas medidas de los dos isótopos son 2.66×10^{-26} kg (^{16}O) y 2.99×10^{-26} kg (^{18}O). Si el campo magnético tiene una intensidad de 0.050 T, ¿cuál debe ser el potencial de aceleración *V*, de modo que estos dos isótopos estén separados por una distancia de 4.00 cm en el detector?

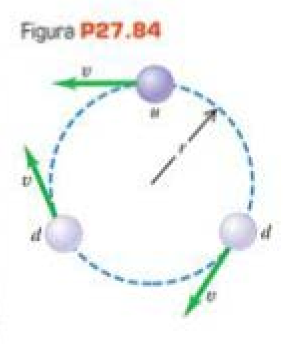
27.83 •• **CALC** **Bobina de sonido.** En la sección 27.7 se demostró que la fuerza neta sobre una espira de corriente en un campo magnético *uniforme* es igual a cero. La fuerza magnética en la bobina de sonido de un altavoz (véase la figura 27.28) es distinta de cero debido a que el campo magnético en la bobina no es uniforme. La bobina de sonido en un altavoz tiene 50 vueltas de alambre y un diámetro de 1.56 cm, y la corriente en la bobina es de 0.950 A. Suponga que el campo magnético en cada punto de la bobina tiene una magnitud constante de 0.220 T y está dirigida con un ángulo de 60.0° hacia afuera de la normal al plano de la bobina (figura P27.83). Consideremos que el eje de la bobina esté en la dirección *y*. La corriente en la bobina está en la dirección que se muestra (en sentido antihorario, vista desde un punto por arriba de la bobina, sobre el eje *y*). Calcule la magnitud y la dirección de la fuerza magnética neta sobre la bobina.

Figura **P27.83**



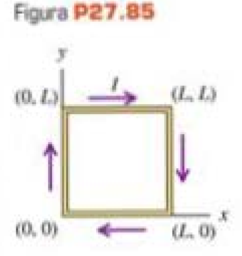
27.84 •• **Modelo de los quarks para el neutrón.** El neutrón es una partícula con carga igual a cero. No obstante, tiene un momento magnético distinto de cero con componente *z* de 9.66×10^{-27} A·m². Esto se explica por la estructura interna del neutrón. Hay muchas evidencias que indican que un neutrón está compuesto por tres partículas fundamentales llamadas *quarks*: un quark "arriba" (*u*) con carga $+2e/3$; y dos quarks "abajo" (*d*), cada uno con carga $-e/3$. La combinación de los tres quarks produce una carga neta de $2e/3 - e/3 - e/3 = 0$. Si los quarks están en movimiento, producen un momento magnético distinto de cero. Como un modelo muy sencillo, suponga que el quark *u* se mueve en una trayectoria circular en sentido antihorario, y que los quarks *d* se mueven con trayectoria circular en sentido horario, todos con radio *r* y la misma rapidez *v* (figura P27.84). *a*) Determine la corriente debida a la circulación del quark *u*. *b*) Calcule la magnitud del momento magnético debido al quark *u* en circulación. *c*) Obtenga la magnitud del momento magnético del sistema de tres quarks. (Tenga cuidado con el uso de las direcciones correctas del momento magnético). *d*) ¿Con qué rapidez *v* deben moverse los quarks para que este modelo reproduzca el momento magnético del neutrón? Utilice $r = 1.20 \times 10^{-15}$ m (el radio del neutrón) como radio de las órbitas.

Figura **P27.84**



27.85 •• **CALC** **Fuerza sobre una espira de corriente en un campo magnético no uniforme.** En la sección 27.7 vimos que la fuerza neta sobre una espira de corriente en un campo magnético *uniforme* es igual a cero. Pero, ¿qué pasa si $\vec{B}$ *no* es uniforme? La figura P27.85 muestra una espira de alambre cuadrada que se encuentra en el plano *xy*. La espira tiene sus esquinas en (0, 0), (0, *L*), (*L*, 0) y (*L*, *L*) y transporta una corriente *I* constante en sentido horario. El campo magnético no tiene componente *x*, pero tiene componentes *y* y *z*: $\vec{B} = (B_0z/L)\hat{\jmath} + (B_0y/L)\hat{k}$, donde B_0 es una constante positiva. *a*) Elabore un dibujo de las líneas de campo magnético en el plano *yz*. *b*) Calcule la magnitud y la dirección de la fuerza magnética ejercida sobre cada uno de los lados de la espira integrando la ecuación (27.20). *c*) Calcule la magnitud y la dirección de la fuerza magnética neta sobre la espira.

Figura **P27.85**

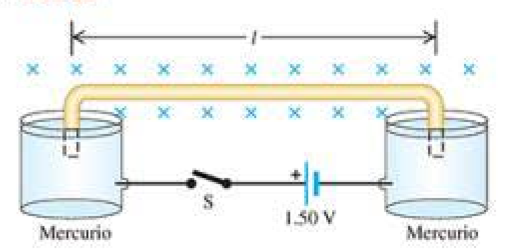


27.86 • **CALC** **Torca sobre una espira de corriente en un campo magnético no uniforme.** En la sección 27.7 se obtuvo la expresión para la torca sobre una espira de corriente, suponiendo que el campo magnético $\vec{B}$ era uniforme. Pero, ¿qué sucede si $\vec{B}$ *no* es uniforme? La figura P27.85 muestra una espira de alambre cuadrada que está en el plano *xy*. La espira tiene esquinas en (0, 0), (0, *L*), (*L*, 0) y (*L*, *L*), y conduce una corriente constante *I* en sentido horario. El campo magnético no tiene componente *z* pero sí las otras dos componentes, *x* y *y*: $\vec{B} = (B_0y/L)\hat{\imath} + (B_0x/L)\hat{\jmath}$, donde B_0 es una constante positiva. *a*) Dibuje las líneas de campo magnético en el plano *xy*. *b*) Determine la magnitud y la dirección de la fuerza magnética ejercida sobre cada uno de los lados de la espira al integrar la ecuación (27.20). *c*) Si la espira tiene libertad para girar en torno al eje *x*, encuentre la magnitud y la dirección de la torca magnética sobre la espira. *d*) Repita el inciso *c*) para el caso en que la espira tiene libertad para girar en torno al eje *y*. *e*) ¿La ecuación (27.26), $\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B}$, es una buena descripción de la torca sobre esta espira? ¿Por qué?

27.87 •• **PA** Un alambre aislado con masa $m = 5.40 \times 10^{-5}$ kg está doblado en forma de U invertida, de modo que la parte horizontal tiene longitud $l = 15.0$ cm. Los extremos doblados del alambre están sumer-

gidos parcialmente en dos estanques de mercurio, con 2.5 cm de cada uno bajo la superficie del mercurio. Toda la estructura está en una región que contiene un campo magnético uniforme de 0.00650 T que entra a la página (figura P27.87). Se hace una conexión eléctrica entre los estanques de mercurio a través de los extremos de los alambres. Los estanques de mercurio están conectados a una batería de 1.50 V y a un interruptor S. Cuando este último se encuentra cerrado, el alambre salta 35.0 cm en el aire, medidos desde su posición inicial. *a*) Determine la rapidez v del alambre en el momento en que sale del mercurio. *b*) Suponiendo que la corriente I a través del alambre era constante desde el momento en que se cerró el interruptor hasta que el alambre salió del mercurio, determine el valor de I. *c*) Ignore la resistencia del mercurio y los alambres del circuito, y determine la resistencia del alambre móvil.

Figura **P27.87**

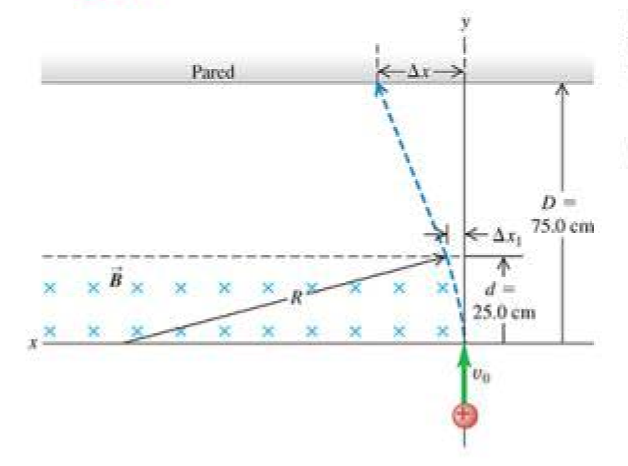


27.88 •• Una espira circular de alambre y área A se encuentra en el plano xy. Vista a lo largo del eje z, desde $-z$ hacia el origen, hay una corriente I que circula en sentido horario alrededor de la espira. La torca producida por un campo magnético exterior $\vec{B}$ está dado por $\vec{\tau} = D(4\hat{\imath} - 3\hat{\jmath})$, donde D es una constante positiva, y para esta orientación de la espira, la energía potencial magnética $U = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}$ es negativa. La magnitud del campo magnético es $B_0 = 13D/IA$. *a*) Determine el momento magnético vectorial de la espira de corriente. *b*) Determine las componentes B_x, B_y y B_z de $\vec{B}$.

PROBLEMAS DE DESAFÍO

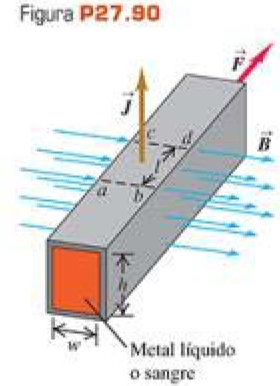
27.89 ••• Una partícula, con carga de 2.15 μC y masa de 3.20 × 10^{-11} kg, viaja inicialmente en la dirección $+y$ con rapidez v_0 = 1.45 × 10^5 m/s. Después, entra a una región que contiene un campo magnético uniforme que apunta perpendicularmente hacia la página en la figura P27.89. La magnitud del campo es 0.420 T. La región se extiende una distancia de 25.0 cm a lo largo de la dirección inicial del recorrido; a 75.0 cm desde el punto de entrada en la región del campo magnético hay una pared. Entonces, la longitud de la región libre del campo es de 50.0 cm. Cuando la partícula cargada ingresa al campo magnético, sigue una trayectoria curva cuyo radio de curvatura es R. Después de un tiempo t_1 sale del campo magnético y se desvía una distancia Δx_1. Entonces, la partícula viaja en la región libre del campo y choca contra la pared después de haber sufrido una desviación total Δx. *a*) Determine el radio R de la parte curva de la trayectoria. *b*) Determine t_1, el tiempo que la partícula pasa en el campo magnético. *c*) Obtenga el valor de Δx_1, la desviación horizontal en el punto de salida del campo. *d*) Calcule Δx, la desviación horizontal total.

Figura **P27.89**



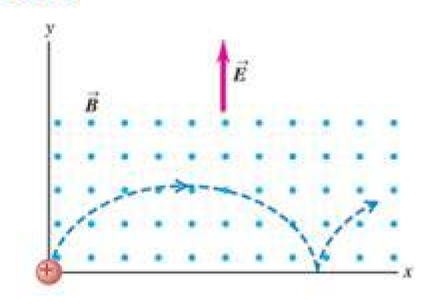
27.90 ••• **Bomba electromagnética.** Las fuerzas magnéticas que actúan sobre fluidos conductores ofrecen un medio adecuado para bombear tales fluidos. Por ejemplo, este método se puede usar para bombear sangre sin el daño que una bomba mecánica haría a las células. Un tubo horizontal con sección transversal rectangular (altura h, ancho w) se coloca en ángulos rectos con un campo magnético uniforme de magnitud B, de modo que una longitud l está en el campo (figura P27.90). El tubo se llena con un líquido conductor, y se mantiene una corriente eléctrica de densidad J que es perpendicular tanto a l como al campo magnético (es decir, en la tercera dirección mutuamente perpendicular). *a*) Demuestre que la diferencia de presiones entre un punto del líquido en un plano vertical a través de ab y otro punto del líquido en otro plano vertical a través de cd, en condiciones en que se impide que el líquido fluya, es $\Delta p = JlB$. *b*) ¿Cuál es la densidad de corriente que se necesita para obtener una diferencia de presiones de 1.00 atm entre estos dos puntos, si B = 2.20 T y l = 35.0 mm?

Figura **P27.90**



27.91 ••• PA **Trayectoria cicloidal.** Una partícula con masa m y carga positiva q parte del reposo desde el origen, como se ilustra en la figura P27.91. Hay un campo eléctrico uniforme $\vec{E}$ en la dirección $+y$ y un campo magnético uniforme $\vec{B}$ que sale de la página. En libros más avanzados se demuestra que la trayectoria es una *cicloide*, cuyo radio de curvatura en los puntos superiores es el doble de la coordenada y en ese nivel. *a*) Explique por qué la trayectoria tiene esta forma general y por qué es repetitiva. *b*) Demuestre que la rapidez en cualquier punto es igual a $\sqrt{2qEy/m}$. (*Sugerencia:* Use la conservación de la energía). *c*) Aplique la segunda ley de Newton en el punto más alto y tome al radio de curvatura como $2y$, para demostrar que la rapidez en este punto es $2E/B$.

Figura **P27.91**



Respuestas

Pregunta inicial del capítulo 

En la IRM los núcleos de los átomos de hidrógeno dentro de los tejidos blandos actúan como espiras de corriente en miniatura, cuyos momentos magnéticos se alinean con el campo aplicado. Véase la sección 27.7 para mayores detalles.

Preguntas de las secciones
Evalúe su comprensión

27.1 Respuesta: sí Cuando un imán se corta, cada parte tiene un polo norte y un polo sur (véase la figura 27.4). Entonces, la parte roja pequeña se comporta en gran medida como la aguja original completa de una brújula.

27.2 Respuesta: trayectoria 3 La aplicación de la regla de la mano derecha a los vectores $\vec{v}$ (que apuntan a la derecha) y $\vec{B}$ (que entra al plano de la figura) dice que la fuerza $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$ sobre una carga *positiva* apuntaría *hacia arriba*. Como la carga es *negativa*, la fuerza apunta *hacia abajo* y la partícula sigue una trayectoria curva hacia abajo.

27.3 Respuestas: *a*) ii, *b*) no La magnitud de $\vec{B}$ se incrementaría a medida que se moviera hacia la derecha, y alcanzaría un máximo al cruzar el plano de la espira. Al moverse más allá del plano de la espira, disminuiría la magnitud del campo. Lo que se puede decir del espaciamiento de las líneas de campo es que cuanto más cerca estén unas de otras, más intenso será el campo. La dirección del campo sería a la derecha de todos los puntos a lo largo de la trayectoria, ya que esta ocurre a lo largo de una línea de campo, y la dirección de $\vec{B}$ en cualquier punto es tangente a la línea de campo a través de dicho punto.

27.4 Respuestas: *a*) ii, *b*) i. El radio de la órbita como lo da la ecuación (27.11) es directamente proporcional a la rapidez, por lo que duplicar la rapidez de la partícula ocasiona que el radio también se duplique. La partícula tiene que viajar lo doble para completar una órbita, pero lo hace duplicando la rapidez, así que el tiempo requerido para una órbita no cambia. Este resultado también se obtiene con la ecuación (27.12), que afirma que la rapidez angular ω es independiente de la rapidez lineal v. De ahí que el tiempo por órbita, $T = 2\pi/\omega$, tampoco depende de v.

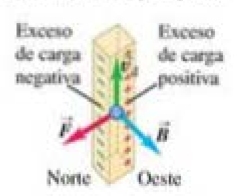
27.5 Respuesta: iii. De la ecuación (27.13), la rapidez $v = E/B$ con que viajan las partículas en línea recta a través del selector de velocidad no depende de la magnitud, del signo de la carga o de la masa de la partícula. Todo lo que se requiere es que las partículas (iones, en este caso) tengan una carga distinta de cero.

27.6 Respuesta: A Esta orientación hará que la corriente fluya en sentido horario alrededor del circuito y, por ello, a través de la barra conductora en dirección de la parte superior a la parte inferior de la figura. Entonces, según la regla de la mano derecha, la fuerza magnética $\vec{F} = I\vec{l} \times \vec{B}$ sobre la barra apuntará a la derecha.

27.7 Respuestas: *a*) a la derecha; *b*) el polo norte a la derecha, el polo sur a la izquierda Si usted cierra los dedos de su mano derecha alrededor de la bobina en la dirección de la corriente, su pulgar derecho apuntará a la derecha (perpendicular al plano de la bobina). Esta es la dirección del momento magnético $\vec{\mu}$. El momento magnético apunta del polo sur al polo norte, por lo que el lado derecho de la espira es equivalente a un polo norte, y el lado izquierdo equivale a un polo sur.

27.8 Respuesta: no El rotor no comenzará a girar cuando se cierre el interruptor si el rotor está orientado inicialmente como se muestra en la figura 27.39*b*. En este caso, no hay corriente a través del rotor y, por ello, no hay torca magnética. Esta situación se remedia mediante el uso de bobinas múltiples en el rotor, orientadas a ángulos diferentes en torno al eje de rotación. Con este arreglo siempre habrá una torca magnética sin importar la orientación.

27.9 Respuesta: ii. Los portadores móviles de carga en el cobre son electrones, los cuales están cargados negativamente, que se mueven por el alambre hacia arriba para dar una corriente hacia abajo. Según la regla de la mano derecha, la fuerza sobre una partícula con carga positiva que se mueva hacia arriba en un campo magnético que apunte hacia el oeste estaría dirigida hacia el sur; entonces, la fuerza sobre una partícula con carga negativa es hacia el norte. El resultado es un excedente de carga negativa sobre el lado norte del alambre, lo cual deja un exceso de carga positiva, y por ello, un potencial eléctrico mayor en el lado sur.



Problema práctico

Respuestas: *a*) $\tau_x = -1.54 \times 10^{-4}$ N·m, $\tau_y = -2.05 \times 10^{-4}$ N·m, $\tau_z = -6.14 \times 10^{-4}$ N·m

***b*)** -7.55×10^{-4} J ***c*)** 42.1 rad/s

FUENTES DE CAMPO MAGNÉTICO





? El inmenso cilindro que aparece en esta fotografía es en realidad una bobina conductora de corriente, o solenoide, que genera un campo magnético uniforme en su interior y forma parte de un experimento realizado en la Organización Europea para la Investigación Nuclear (CERN). Si dos de estos solenoides se unieran por sus extremos, ¿qué tan fuerte sería el campo magnético?

OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

Al estudiar este capítulo, usted aprenderá:

- La naturaleza del campo magnético producido por una sola partícula cargada en movimiento.
- A describir el campo magnético producido por un elemento de un conductor portador de corriente.
- A calcular el campo magnético producido por un alambre largo y recto que transporta corriente.
- Por qué los alambres que conducen corrientes en el mismo sentido se atraen, mientras los que conducen corrientes en sentidos opuestos se repelen.
- Cómo calcular el campo magnético generado por un alambre portador de corriente en forma de círculo.
- Qué es la ley de Ampère y qué nos dice acerca de los campos magnéticos.
- Cómo usar la ley de Ampère para calcular el campo magnético de distribuciones simétricas de corriente.

En el capítulo 27 estudiamos las fuerzas ejercidas sobre cargas en movimiento y sobre conductores que transportan corriente en un campo magnético. No nos preocupamos de cómo llegó ahí el campo magnético: simplemente consideramos su existencia como un hecho. Pero, ¿cómo se *crean* los campos magnéticos? Sabemos que los imanes permanentes y las corrientes eléctricas en los electroimanes crean campos magnéticos. En este capítulo estudiaremos con detalle esas fuentes de campo magnético.

Hemos aprendido que una carga crea un campo eléctrico y que este ejerce una fuerza sobre una carga. Pero un campo *magnético* ejerce una fuerza solo si la carga está en *movimiento*. ¿Es verdad también que una carga *crea* un campo magnético solo cuando está en movimiento? En una palabra, sí.

Nuestro análisis comenzará con el campo magnético creado por una sola carga puntual en movimiento. Este análisis nos servirá para determinar el campo creado por un segmento pequeño de un conductor que transporta corriente. Una vez hecho esto, es posible, en principio, encontrar el campo magnético producido por un conductor de *cualquier* forma.

Después estudiaremos la ley de Ampère, que en el magnetismo desempeña un papel análogo al de la ley de Gauss en la electrostática. La ley de Ampère permite aprovechar las propiedades de simetría para relacionar los campos magnéticos con sus fuentes.

Las partículas móviles con carga dentro de los átomos responden a los campos magnéticos y también actúan como fuentes de campo magnético. Nos apoyaremos en estas ideas para comprender cómo pueden emplearse ciertos materiales magnéticos para intensificar los campos magnéticos, y descubriremos por qué algunos materiales, como el hierro, actúan como imanes permanentes.

28.1 Campo magnético de una carga en movimiento

Comenzaremos con lo fundamental: el campo magnético de una carga puntual q que se mueve con velocidad constante $\vec{v}$. En las aplicaciones prácticas, como la del solenoide que aparece en la fotografía que abre este capítulo, los campos magnéticos son producto de un número enorme de partículas con carga que se desplazan como una corriente.

Pero una vez comprendida la forma de calcular el campo debido a una carga puntual, basta un pequeño paso para calcular el campo producido por un alambre o un conjunto de alambres que transportan corriente.

Igual que hicimos en el caso de los campos eléctricos, llamaremos **punto fuente** a la ubicación de la carga en movimiento en un instante dado, y **punto de campo** al punto P donde queremos calcular el campo. En la sección 21.4 vimos que en un punto de campo situado a una distancia r de una carga puntual q, la magnitud del campo *eléctrico* $\vec{E}$ generado por la carga es proporcional a la magnitud de la carga $|q|$ y a $1/r^2$, y la dirección de $\vec{E}$ (para q positiva) está a lo largo de la línea que une al punto fuente con el punto de campo. La relación correspondiente para el campo *magnético* $\vec{B}$ de una carga puntual q que se mueve con velocidad constante tiene algunas similitudes y ciertas diferencias interesantes.

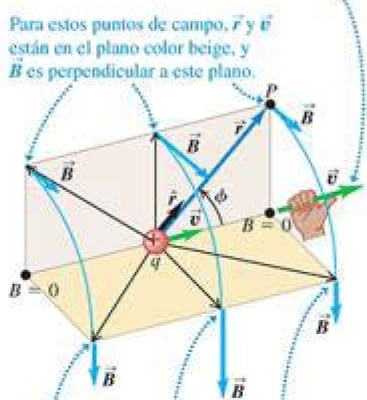
Los experimentos han demostrado que la magnitud de $\vec{B}$ también es proporcional a $|q|$ y a $1/r^2$. Pero la *dirección* de $\vec{B}$ *no* es a lo largo de la línea que va del punto fuente al punto de campo. En lugar de ello, $\vec{B}$ es perpendicular al plano que contiene esta línea y al vector velocidad, $\vec{v}$, de la partícula, como se ilustra en la figura 28.1. Además, la *magnitud* B del campo también es proporcional a la rapidez v de la partícula y al seno del ángulo ϕ. Así, la magnitud del campo magnético en el punto P está dada por

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{|q|v \operatorname{sen}\phi}{r^2} \tag{28.1}$$

donde $\mu_0/4\pi$ es una constante de proporcionalidad (el símbolo μ_0 se lee "mu subíndice cero"). La razón de escribir la constante en esta forma particular se verá dentro de poco. En la sección 21.3 hicimos algo similar en relación con la ley de Coulomb.

28.1 *a*) Vectores campo magnético debidos a una carga puntual positiva q en movimiento. En cada punto, $\vec{B}$ es perpendicular al plano de $\vec{r}$ y $\vec{v}$, y su magnitud es proporcional al seno del ángulo entre ellos. *b*) Las líneas de campo magnético en un plano contienen a la carga positiva en movimiento.

a) Vista en perspectiva



b) Vista desde atrás de la carga



Carga en movimiento: Campo magnético vectorial

Es posible incorporar tanto la magnitud como la dirección de $\vec{B}$ en una sola ecuación vectorial utilizando el producto vectorial. Para evitar tener que decir "la dirección desde la fuente q al punto de campo P" una y otra vez, introduciremos un vector *unitario* $\hat{r}$ (r con acento circunflejo) que apunte desde el punto fuente al punto de campo. (En la sección 21.4 usamos con el mismo propósito). Este vector unitario es igual al vector $\hat{r}$ de la fuente al punto de campo dividido entre su magnitud: $\hat{r} = \vec{r}/r$. Así, el campo $\vec{B}$ de una carga puntual en movimiento es

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q\vec{v} \times \hat{r}}{r^2} \quad \text{(campo magnético de una carga puntual con velocidad constante)} \tag{28.2}$$

La figura 28.1 muestra la relación que hay entre $\hat{r}$ y P, y también muestra el campo magnético $\vec{B}$ en varios puntos en la vecindad de la carga. En todos los puntos a lo largo de una línea que pase por la carga y sea paralela a la velocidad $\vec{v}$, el campo es igual a cero porque sen $\phi = 0$ en todos ellos. A cualquier distancia r desde q, $\vec{B}$ alcanza su valor máximo en los puntos localizados en un plano perpendicular a $\vec{v}$, porque, en todos ellos, $\phi = 90°$ y sen $\phi = 1$. Si la carga q es negativa, las direcciones de $\vec{B}$ son opuestas a las que se ilustran en la figura 28.1.

Carga en movimiento: Líneas de campo magnético

Una carga puntual en movimiento también produce un campo *eléctrico*, con líneas de campo radiales hacia afuera desde una carga positiva. Las líneas de campo *magnético* son diferentes por completo. Para una carga puntual que se mueve con velocidad $\vec{v}$, las líneas de campo magnético son *círculos* con centro en la línea de $\vec{v}$ y que se encuentran en planos perpendiculares a esta línea. Las direcciones de las líneas de campo para una carga positiva están dadas por la *regla de la mano derecha*, una de las varias que encontraremos en este capítulo: tome el vector velocidad $\vec{v}$ con su mano derecha de manera que su pulgar apunte en dirección de $\vec{v}$; luego, cierre sus dedos alrededor de la línea de $\vec{v}$ en el mismo sentido que las líneas de campo magnético, suponiendo que q es positiva. La figura 28.1*a* muestra partes de algunas líneas de campo; la figura 28.1*b* presenta algunas líneas de campo en un plano a través de q, perpendiculares a $\vec{v}$. Si la carga puntual es negativa, las direcciones del campo y líneas de campo son opuestas a las que se ilustran en la figura 28.1.

Las ecuaciones (28.1) y (28.2) describen el campo $\vec{B}$ de una carga puntual que se mueve con velocidad *constante*. Si la carga *acelera*, el campo es mucho más complicado. Para nuestros fines, no necesitaremos estos resultados más complejos. (Las partículas cargadas en movimiento que forman una corriente en un alambre se aceleran en los puntos en que este se dobla y la dirección de $\vec{v}$ cambia. Pero como la magnitud v_d de la velocidad de deriva en un conductor por lo general es muy pequeña, la aceleración centrípeta v_d^2/r es tan pequeña, que pueden ignorarse sus efectos).

Como se vio en la sección 27.2, la unidad de B es un tesla (1 T):

$$1\text{ T} = 1\text{ N}\cdot\text{s/C}\cdot\text{m} = 1\text{ N/A}\cdot\text{m}$$

Usando esto en la ecuación (28.1) o (28.2), vemos que las unidades de la constante μ_0 son

$$1\text{ N}\cdot\text{s}^2/\text{C}^2 = 1\text{ N/A}^2 = 1\text{ Wb/A}\cdot\text{m} = 1\text{ T}\cdot\text{m/A}$$

En el SI de unidades, el valor numérico de μ_0 es exactamente $4\pi \times 10^{-7}$. Por lo tanto,

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\text{ N}\cdot\text{s}^2/\text{C}^2 = 4\pi \times 10^{-7}\text{ Wb/A}\cdot\text{m}$$
$$= 4\pi \times 10^{-7}\text{ T}\cdot\text{m/A} \qquad (28.3)$$

Parece increíble que μ_0 ¡tenga *exactamente* este valor numérico! De hecho, este es un valor *calculado* que surge de la definición de ampere, como veremos en la sección 28.4.

En la sección 21.3 se mencionó que la constante $1/4\pi\epsilon_0$ en la ley de Coulomb está relacionada con la rapidez de la luz, c:

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = (10^{-7}\text{ N}\cdot\text{s}^2/\text{C}^2)c^2$$

Cuando estudiemos las ondas electromagnéticas en el capítulo 32, veremos que su rapidez de propagación en el vacío, que es igual a la rapidez de la luz, c, está dada por

$$c^2 = \frac{1}{\epsilon_0\mu_0} \qquad (28.4)$$

Si despejamos ϵ_0 en la ecuación $k = 1/4\pi\epsilon_0$, luego sustituimos la expresión resultante en la ecuación (28.4) y despejamos μ_0, obtendremos el valor de μ_0 que se mencionó antes. Este análisis es un poco prematuro, pero da idea de que los campos eléctricos y magnéticos están relacionados con la naturaleza de la luz.



Ejemplo 28.1 Fuerzas entre dos protones en movimiento

Dos protones se mueven paralelos al eje x en sentidos opuestos (figura 28.2) con la misma rapidez v (pequeña en comparación con la rapidez c de la luz). En el instante que se ilustra, calcule las fuerzas eléctricas y magnéticas sobre el protón de la parte superior y compare sus magnitudes.

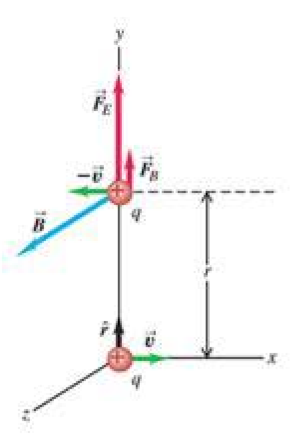
SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: La fuerza eléctrica F_E sobre el protón de arriba está dada por la ley de Coulomb [ecuación (21.2)]. La ley de la fuerza magnética [ecuación (27.2)] permite determinar la fuerza magnética sobre el protón superior; para usarla, primero debemos utilizar la ecuación (28.2) con la finalidad de determinar el campo magnético que produce el protón de la parte inferior en la posición del protón de arriba. El vector unitario del protón inferior (la fuente) para la posición del protón superior es $\hat{r} = \hat{j}$.

EJECUTAR: De acuerdo con la ley de Coulomb, la magnitud de la fuerza eléctrica sobre el protón de arriba es

$$F_E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q^2}{r^2}$$

28.2 Fuerzas eléctricas y magnéticas entre dos protones en movimiento.



Continúa

Las fuerzas son de repulsión, y la fuerza sobre el protón superior es vertical hacia arriba (en la dirección $+y$).

La velocidad del protón inferior es $\vec{v} = v\hat{\imath}$. Según la regla de la mano derecha para el producto cruz $\vec{v} \times \hat{r}$ de la ecuación (28.2), el campo $\vec{B}$ debido al protón inferior en la posición del protón superior está en la dirección $+z$ (véase la figura 28.2). Según la ecuación (28.2), el campo es

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q(v\hat{\imath}) \times \hat{\jmath}}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{qv}{r^2}\hat{k}$$

La velocidad del protón superior es $-\vec{v} = -v\hat{\imath}$, y la fuerza magnética sobre él es

$$\vec{F}_B = q(-\vec{v}) \times \vec{B} = q(-v\hat{\imath}) \times \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{qv}{r^2}\hat{k} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q^2v^2}{r^2}\hat{\jmath}$$

La interacción magnética en esta situación también es de repulsión. La razón de las magnitudes de las fuerzas es

$$\frac{F_B}{F_E} = \frac{\mu_0 q^2v^2/4\pi r^2}{q^2/4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{\mu_0 v^2}{1/\epsilon_0} = \epsilon_0\mu_0 v^2$$

Con la relación $\epsilon_0\mu_0 = 1/c^2$, ecuación (28.4), esto se convierte en

$$\frac{F_B}{F_E} = \frac{v^2}{c^2}$$

Cuando v es pequeña en comparación con la rapidez de la luz, la fuerza magnética es mucho menor que la fuerza eléctrica.

EVALUAR: Hemos descrito las velocidades, los campos y las fuerzas como los mediría un observador en el sistema de coordenadas estacionario de la figura 28.2. En un sistema de coordenadas que se mueve con una de las cargas, una de las velocidades sería igual a cero, por lo que *no* habría fuerza magnética. La explicación de esta aparente paradoja tiende uno de los caminos que condujeron a la teoría especial de la relatividad.

Evalúe su comprensión de la sección 28.1 *a*) Si dos protones viajan paralelos entre sí en la *misma* dirección y con igual rapidez, ¿la fuerza magnética entre ellos es **i.** de atracción o **ii.** de repulsión? *b*) ¿La fuerza neta entre ellos es **i.** de atracción, **ii.** de repulsión o **iii.** igual a cero? (Suponga que la rapidez de los protones es mucho menor que la rapidez de la luz).

28.2 Campo magnético de un elemento de corriente

Al igual que en el caso del campo eléctrico, hay un **principio de superposición de campos magnéticos**:

El campo magnético total generado por varias cargas en movimiento es la suma vectorial de los campos generados por las cargas individuales.

Este principio se puede utilizar con los resultados de la sección 28.1 para obtener el campo magnético producido por una corriente en un conductor.

Comenzamos con el cálculo del campo magnético generado por un segmento pequeño $d\vec{l}$ de un conductor que transporta corriente, como se ilustra en la figura 28.3*a*. El volumen del segmento es $A\ dl$, donde A es el área de la sección transversal del conductor. Si hay n partículas cargadas en movimiento por unidad de volumen, cada una con una carga q, la carga total dQ que se mueve en el segmento es

$$dQ = nqA\ dl$$

Las cargas en movimiento en este segmento son equivalentes a una sola carga dQ que viaja con una velocidad igual a la velocidad de *deriva* $\vec{v}_d$. (Los campos magnéticos debidos a los movimientos *al azar* de las cargas, en promedio, se cancelarán en cada punto). De acuerdo con la ecuación (28.1), la magnitud del campo resultante $d\vec{B}$ en cualquier punto de campo P es

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{|dQ|v_d \operatorname{sen}\phi}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{n|q|v_d A\ dl \operatorname{sen}\phi}{r^2}$$

Pero, según la ecuación (25.2), $n|q|v_d A$ es igual a la corriente I en el elemento. Por lo tanto,

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\ dl \operatorname{sen}\phi}{r^2} \qquad (28.5)$$

Elemento de corriente: Campo magnético vectorial

En forma vectorial, usando el vector unitario $\hat{r}$ como en la sección 28.1, se tiene

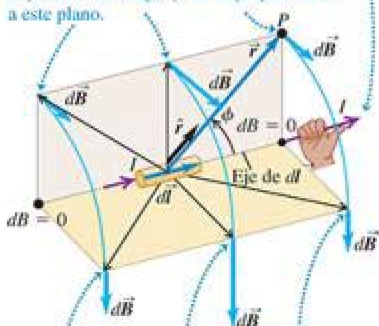
$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\ d\vec{l} \times \hat{r}}{r^2} \qquad \text{(campo magnético de un elemento de corriente)} \qquad (28.6)$$

28.3 *a*) Vectores del campo magnético que se deben a un elemento de corriente $d\vec{l}$. *b*) Líneas de campo magnético en un plano que contiene el elemento de corriente $d\vec{l}$. Compare esta figura con la 28.1 para el campo de una carga puntual en movimiento.

a) Vista en perspectiva

Regla de la mano derecha para el campo magnético debido a un elemento de corriente: apunte el pulgar de su mano derecha en dirección de la corriente. Ahora cierre sus dedos alrededor del elemento de corriente en dirección de las líneas de campo magnético.

Para estos puntos de campo, $\vec{r}$ y $d\vec{l}$ están en el plano color beige, y $d\vec{B}$ es perpendicular a este plano.



Para estos puntos de campo, $\vec{r}$ y $d\vec{l}$ encuentran en el plano color dorado, y $d\vec{B}$ es perpendicular a este plano.

b) Vista a lo largo del eje del elemento de corriente



donde $d\vec{l}$ es un vector con longitud dl, en la misma dirección que la corriente en el conductor.

Las ecuaciones (28.5) y (28.6) constituyen la **ley de Biot y Savart**. Esta ley se utiliza para obtener el campo magnético total $\vec{B}$ en cualquier punto del espacio debido a la corriente en un circuito completo. Para hacerlo, se integra la ecuación (28.6) con respecto a todos los segmentos $d\vec{l}$ que conduzcan corriente; usando símbolos,

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{I\, d\vec{l} \times \hat{r}}{r^2} \qquad (28.7)$$

En las siguientes secciones se llevará a cabo esta integración vectorial en varios de los ejemplos.

Elemento de corriente: Líneas de campo magnético

Como se aprecia en la figura 28.3, los vectores campo $d\vec{B}$ y las líneas de campo magnético de un elemento de corriente son exactamente como los que genera una carga positiva dQ que se desplaza en la dirección de la velocidad de deriva $\vec{v}_d$. Las líneas de campo son círculos en planos perpendiculares a $d\vec{l}$ y con centro en la línea de $d\vec{l}$. Sus direcciones están dadas por la misma regla de la mano derecha que se presentó en la sección 28.1 para cargas puntuales.

Las ecuaciones (28.5) o (28.6) no se pueden comprobar directamente porque nunca es posible experimentar con un segmento aislado de un circuito que conduzca corriente. Lo que se mide experimentalmente es $\vec{B}$ *total* para un circuito completo. Pero estas ecuaciones sí se verifican de manera indirecta calculando $\vec{B}$ para varias configuraciones de corriente utilizando la ecuación (28.7) y comparando los resultados con mediciones experimentales.

Si hay materia presente en el espacio alrededor de un conductor que transporta corriente, el campo en el punto de campo P de su vecindad tendrá una contribución adicional que proviene de la *magnetización* del material. En la sección 28.8 volveremos a este asunto. Sin embargo, a menos que el material sea hierro u otro material ferromagnético, el campo adicional es pequeño y, por lo general, despreciable. Si hay campos eléctricos o magnéticos presentes que varíen con el tiempo, o si el material es superconductor, surgen complicaciones adicionales; más adelante volveremos a estos temas.

Estrategia para resolver problemas 28.1 Cálculos en campos magnéticos



IDENTIFICAR *los conceptos relevantes:* La ley de Biot y Savart [ecuaciones (28.5) y (28.6)] permiten calcular el campo magnético en el punto de campo P debido a un alambre portador de corriente de la forma que sea. La idea es calcular el elemento $d\vec{B}$ del campo en un punto P debido a un elemento de corriente representativo en el alambre, e integrar estos elementos del campo para obtener el campo $\vec{B}$ en P.

PLANTEAR *el problema* de acuerdo con los siguientes pasos:

1. Elabore un diagrama que muestre un elemento de corriente representativo y el punto de campo P.
2. Dibuje el elemento de corriente $d\vec{l}$, asegurándose de que apunte en la dirección de la corriente.
3. Dibuje el vector unitario $\hat{r}$ dirigido *desde* el elemento de corriente (el punto fuente) al punto P.
4. Identifique la incógnita (normalmente $\vec{B}$).

EJECUTAR *la solución* como sigue:

1. Utilice la ecuación (28.5) o (28.6) para expresar el campo magnético $d\vec{B}$ en P desde el elemento de corriente representativo.
2. Sume todos los elementos $d\vec{B}$ para obtener el campo total en el punto P. En ciertas situaciones, los elementos $d\vec{B}$ en el punto P tienen la misma dirección con respecto a todos los elementos de corriente; en estos casos, la magnitud del campo total $\vec{B}$ es la suma de las magnitudes de los elementos $d\vec{B}$. Pero es frecuente $d\vec{B}$ que estos tengan direcciones distintas para elementos diferentes de la corriente. En ese caso, se tiene que establecer un sistema de coordenadas y representar cada $d\vec{B}$ en términos de sus componentes. La integral para $\vec{B}$ total queda expresada en términos de una integral para cada componente.
3. En ocasiones es posible aprovechar la simetría del arreglo para determinar que una componente de $\vec{B}$ debe desaparecer. Siempre hay que estar alerta para identificar maneras de usar la simetría que permitan simplificar el problema.
4. Busque maneras de utilizar el principio de superposición de campos magnéticos. Más adelante, en este capítulo, se determinarán los campos producidos por ciertos conductores con formas sencillas; si encuentra un conductor de forma compleja que pueda representarse como una combinación de estas formas simples, será posible utilizar el principio de superposición para obtener el campo de forma compleja. Ejemplos de estos son una espira rectangular y un semicírculo con segmentos rectilíneos en ambos lados.

EVALUAR *la respuesta:* Con frecuencia, la respuesta será una expresión matemática de $\vec{B}$ en función de la posición del punto de campo. Compruebe la respuesta examinando su comportamiento en los límites que sea posible.



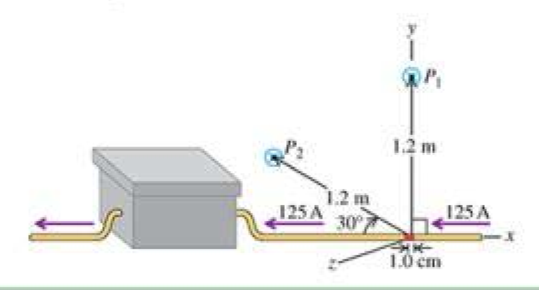
Ejemplo 28.2 Campo magnético de un segmento con corriente

Un alambre de cobre conduce una corriente constante de 125 A hacia un tanque galvanizado (figura 28.4). Calcule el campo magnético generado por un segmento de alambre de 1.0 cm en un punto localizado a 1.2 m de él, si ese punto es *a*) el punto P_1, directamente arriba del segmento y *b*) el punto P_2, en el plano *xy* sobre una línea a 30° respecto del segmento.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Aunque las ecuaciones (28.5) y (28.6) se usan solo con elementos de corriente infinitesimales, se les puede emplear aquí, puesto que la longitud del segmento es mucho menor que la distancia al punto de campo. En la figura 28.4 se muestra con color rojo el elemento de corriente, y apunta en la dirección $-x$ (la dirección de la corriente), de modo que $d\vec{l} = dl(-\hat{\imath})$. El vector unitario $\hat{r}$ de cada punto de campo está dirigido desde el elemento de corriente hacia ese punto: $\hat{r}$ está en la dirección $+y$ en el caso del punto P_1 y forma un ángulo de 30° por arriba de la dirección $-x$ en el caso del punto P_2.

28.4 Cálculo del campo magnético en dos puntos debido a un segmento de 1.0 cm de un alambre conductor de corriente (el dibujo no está a escala).



EJECUTAR: *a*) En el punto P_1, $\hat{r} = \hat{\jmath}$, por lo que

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\,d\vec{l}\times\hat{r}}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\,dl(-\hat{\imath})\times\hat{\jmath}}{r^2} = -\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\,dl}{r^2}\hat{k}$$
$$= -(10^{-7}\ \mathrm{T\cdot m/A})\frac{(125\ \mathrm{A})(1.0\times10^{-2}\ \mathrm{m})}{(1.2\ \mathrm{m})^2}\hat{k}$$
$$= -(8.7\times10^{-8}\ \mathrm{T})\hat{k}$$

La dirección de $\vec{B}$ en P_1 es hacia el plano *xy* de la figura 28.4.

b) En el punto P_2, el vector unitario es $\hat{r} = (-\cos 30°)\hat{\imath} + (\mathrm{sen}\ 30°)\hat{\jmath}$. De acuerdo con la ecuación (28.6),

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\,d\vec{l}\times\hat{r}}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\,dl(-\hat{\imath})\times(-\cos 30°\hat{\imath} + \mathrm{sen}\,30°\hat{\jmath})}{r^2}$$
$$= -\frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{dl\,\mathrm{sen}\,30°}{r^2}\hat{k}$$
$$= -(10^{-7}\ \mathrm{T\cdot m/A})\frac{(125\ \mathrm{A})(1.0\times10^{-2}\ \mathrm{m})(\mathrm{sen}\,30°)}{(1.2\ \mathrm{m})^2}\hat{k}$$
$$= -(4.3\times10^{-8}\ \mathrm{T})\hat{k}$$

La dirección de $\vec{B}$ en P_2 también está hacia el plano *xy* de la figura 28.4.

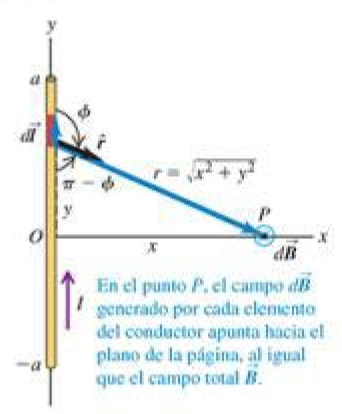
EVALUAR: Los resultados de la dirección de $\vec{B}$ se comprueban comparándolos con la figura 28.3. El plano *xy* de la figura 28.4 corresponde al plano color beige de la figura 28.3, pero en este caso, la dirección de la corriente y, por lo tanto, de $d\vec{l}$ es contraria a la mostrada en la figura 28.3, de manera que la dirección del campo magnético también se invierte. De aquí que el campo en puntos del plano *xy* en la figura 28.4 debe apuntar *hacia* el plano, y no hacia afuera de él. Esto es exactamente lo que concluimos anteriormente.

Evalúe su comprensión de la sección 28.2 Un elemento infinitesimal de corriente localizado en el origen ($x = y = z = 0$) conduce una corriente I en la dirección positiva de *y*. Clasifique las siguientes ubicaciones en orden decreciente de la intensidad del campo magnético que el elemento de corriente produce en cada sitio. **i.** $x = L$, $y = 0$, $z = 0$; **ii.** $x = 0$, $y = L$, $z = 0$; **iii.** $x = 0$, $y = 0$, $z = L$; **iv.** $x = L/\sqrt{2}$, $y = L/\sqrt{2}$, $z = 0$. ❙



28.3 Campo magnético de un conductor recto que transporta corriente

28.5 Campo magnético producido por un conductor recto portador de corriente de longitud $2a$.



Usemos la ley de Biot y Savart para calcular el campo magnético producido por un conductor recto que conduce corriente. Este resultado es útil debido a que prácticamente en todos los aparatos eléctricos y electrónicos se encuentran alambres conductores rectos. La figura 28.5 muestra un conductor como este con longitud $2a$ que conduce una corriente I. Calcularemos $\vec{B}$ en un punto a una distancia x del conductor, sobre la bisectriz perpendicular.

Primero usamos la ley de Biot y Savart, ecuación (28.5), para obtener el campo $d\vec{B}$ generado por el elemento conductor de longitud $dl = dy$ que se ilustra en la figura 28.5. Según la figura, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ y $\mathrm{sen}\ \phi = \mathrm{sen}(\pi - \phi) = x/\sqrt{x^2 + y^2}$. La regla de la mano derecha para el producto vectorial $d\vec{l} \times \hat{r}$ indica que la *dirección* de $d\vec{B}$ es hacia el plano de la figura, perpendicular al plano; además, las direcciones de los $d\vec{B}$ generados por *todos* los elementos del conductor son las mismas. Así, al integrar la ecuación (28.7), simplemente se suman las *magnitudes* de los elementos $d\vec{B}$, una simplificación significativa.

Juntando los elementos, vemos que la magnitud total del campo $\vec{B}$ es

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-a}^{a} \frac{x\,dy}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$$

Podemos integrar esto por sustitución trigonométrica o usando una tabla de integrales:

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{2a}{x\sqrt{x^2 + a^2}} \qquad (28.8)$$

Cuando la longitud $2a$ del conductor es muy grande en comparación con su distancia x desde el punto P, se puede considerar infinitamente larga. Cuando a es mucho mayor que x, $\sqrt{x^2 + a^2}$ es aproximadamente igual a a; de aquí que en el límite, $a \to \infty$, la ecuación (28.8) se convierte en

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi x}$$

En la situación física existe simetría axial con respecto al eje y. Por lo tanto, $\vec{B}$ debe tener la misma *magnitud* en todos los puntos de un círculo con centro en el conductor y que se encuentre en un plano perpendicular a él, y la *dirección* de $\vec{B}$ debe ser tangente en cualquier parte del círculo (figura 28.6). Así, en todos los puntos de un círculo de radio r alrededor del conductor, la magnitud B es

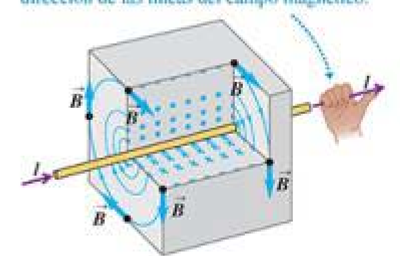
$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \quad \text{(cerca de un conductor largo y recto portador de corriente)} \qquad (28.9)$$

La geometría de este problema es similar a la del ejemplo 21.10 (sección 21.5), en el que resolvimos el problema del campo *eléctrico* generado por una línea infinita de carga. En ambos problemas aparece la misma integral, y en ellos las magnitudes del campo son proporcionales a $1/r$. Pero las líneas de $\vec{B}$ en el problema del magnetismo tienen formas completamente diferentes de las de $\vec{E}$ en el problema eléctrico análogo. Las líneas de campo eléctrico son radiales hacia afuera desde una distribución lineal de carga positiva (hacia adentro en el caso de cargas negativas). En contraste, las líneas de campo magnético *circundan* la corriente que actúa como su fuente. Las líneas de campo eléctrico debidas a las cargas comienzan y terminan en esas cargas, pero las líneas del campo magnético forman espiras cerradas y *nunca* tienen extremos, sin importar la forma del conductor portador de corriente que genera el campo. Como se vio en la sección 27.3, esta es una consecuencia de la ley de Gauss para el magnetismo, que plantea que el flujo magnético total a través de *cualquier* superficie cerrada siempre es igual a cero:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0 \quad \text{(flujo magnético a través de cualquier superficie cerrada)} \qquad (28.10)$$

Cualquier línea de campo magnético que entra a una superficie cerrada debe salir de ella.

28.6 Campo magnético alrededor de un conductor largo y recto portador de corriente. Las líneas de campo son círculos, con direcciones determinadas por la regla de la mano derecha.



MasteringPHYSICS
ActivPhysics 13.1: Magnetic Field of a Wire

Ejemplo 28.3 Campo magnético de un solo alambre

Un conductor largo y recto conduce una corriente de 1.0 A. ¿A qué distancia del eje del conductor, el campo magnético generado tiene una magnitud $B = 0.5 \times 10^{-4}$ T (aproximadamente el campo magnético terrestre en Pittsburgh)?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: La longitud de un conductor "largo", es mucho mayor que la distancia desde el conductor al punto de campo. Por ello, podemos utilizar las ideas de esta sección. La geometría es la misma que en la figura 28.6, por lo que empleamos la ecuación (28.9). Se conocen todas las cantidades de esta ecuación, excepto la incógnita, la distancia r.

EJECUTAR: Se despeja r de la ecuación (28.9):

$$r = \frac{\mu_0 I}{2\pi B} = \frac{(4\pi \times 10^{-7}\,\text{T}\cdot\text{m/A})(1.0\,\text{A})}{(2\pi)(0.5 \times 10^{-4}\,\text{T})}$$
$$= 4 \times 10^{-3}\,\text{m} = 4\,\text{mm}$$

EVALUAR: Como vimos en el ejemplo 26.14, las corrientes de uno o más amperes son típicas de las que se encuentran en el cableado de los aparatos electrodomésticos. Este ejemplo muestra que los campos magnéticos producidos por estos aparatos son muy débiles, incluso muy cerca del alambre; los campos son proporcionales a $1/r$, de modo que se vuelven incluso más débiles a distancias mayores.



Ejemplo 28.4 Campo magnético de dos alambres

La figura 28.7*a* es la vista de los extremos de dos alambres largos, rectos y paralelos, que son perpendiculares al plano *xy*, cada uno de los cuales conduce una corriente *I* pero en sentidos opuestos. *a*) Calcule $\vec{B}$ en los puntos P_1, P_2 y P_3. *b*) Deduzca una expresión para $\vec{B}$ en cualquier punto del eje *x* a la derecha del alambre 2.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Con las ideas de esta sección, es posible obtener los campos magnéticos $\vec{B}_1$ y $\vec{B}_2$ debidos a los alambres 1 y 2 en cada punto. Por el principio de superposición, el campo magnético en cada punto es $\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2$. Se utiliza la ecuación (28.9) para obtener las magnitudes B_1 y B_2 de estos campos y la regla de la mano derecha para determinar las direcciones correspondientes. La figura 28.7*a* muestra $\vec{B}_1$, $\vec{B}_2$ y $\vec{B} = \vec{B}_{total}$ en cualquier punto; usted debe confirmar que las direcciones y magnitudes relativas mostradas son correctas. La figura 28.7*b* muestra algunas líneas de campo magnético debidas a este sistema de dos alambres.

EJECUTAR: *a*) Como el punto P_1 está a una distancia 2*d* del alambre 1 y a una distancia 4*d* del alambre 2, $B_1 = \mu_0 I/2\pi(2d) = \mu_0 I/4\pi d$ y $B_2 = \mu_0 I/2\pi(4d) = \mu_0 I/8\pi d$. La regla de la mano derecha indica que $\vec{B}_1$ está en la dirección *y* negativa, y que $\vec{B}_2$ está en la dirección *y* positiva, así que

$$\vec{B}_{total} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 = -\frac{\mu_0 I}{4\pi d}\hat{j} + \frac{\mu_0 I}{8\pi d}\hat{j} = -\frac{\mu_0 I}{8\pi d}\hat{j} \qquad \text{(punto } P_1\text{)}$$

En el punto P_2, a una distancia *d* entre los dos alambres, $\vec{B}_1$ y $\vec{B}_2$ tienen ambos la dirección *y* positiva, y los dos tienen la misma magnitud $B_1 = B_2 = \mu_0 I/2\pi d$. Por lo tanto,

$$\vec{B}_{total} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi d}\hat{j} + \frac{\mu_0 I}{2\pi d}\hat{j} = \frac{\mu_0 I}{\pi d}\hat{j} \qquad \text{(punto } P_2\text{)}$$

Por último, en el punto P_3 la regla de la mano derecha indica que $\vec{B}_1$ está en la dirección *y* positiva, y $\vec{B}_2$ en la dirección *y* negativa. Este punto se encuentra a una distancia 3*d* del alambre 1 y a una distancia *d* del alambre 2, por lo que $B_1 = \mu_0 I/2\pi(3d) = \mu_0 I/6\pi d$ y $B_2 = \mu_0 I/2\pi d$. El campo total en P_3 es

$$\vec{B}_{total} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 = \frac{\mu_0 I}{6\pi d}\hat{j} - \frac{\mu_0 I}{2\pi d}\hat{j} = -\frac{\mu_0 I}{3\pi d}\hat{j} \qquad \text{(punto } P_3\text{)}$$

Se puede usar la misma técnica para obtener $\vec{B}_{total}$ en cualquier punto; se debe tener cuidado en la suma vectorial de los puntos fuera del eje *x*, ya que $\vec{B}_1$ y $\vec{B}_2$ no necesitan ser simplemente paralelos o antiparalelos.

b) En cualquier punto sobre el eje *x* a la derecha del alambre 2 (es decir, para $x > d$), $\vec{B}_1$ y $\vec{B}_2$ están en las mismas direcciones que en P_3. Este punto está a una distancia $x + d$ del alambre 1 y a una distancia $x - d$ del alambre 2, de modo que el campo total es

$$\vec{B}_{total} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi(x+d)}\hat{j} - \frac{\mu_0 I}{2\pi(x-d)}\hat{j} = -\frac{\mu_0 I d}{\pi(x^2 - d^2)}\hat{j}$$

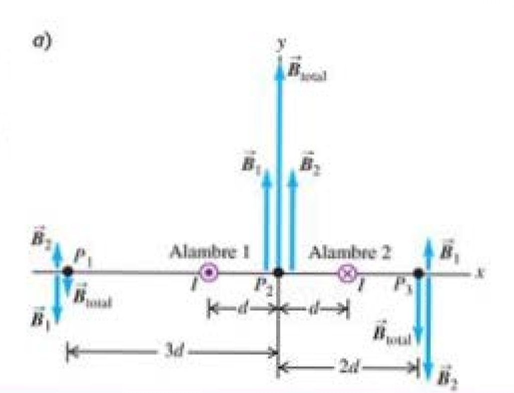
donde los dos términos se han combinado usando un denominador común.

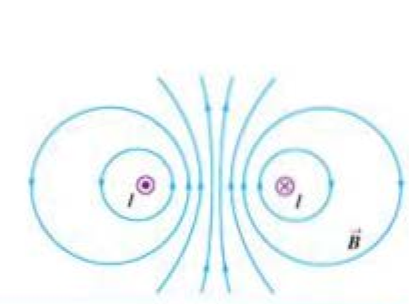
EVALUAR: Considere el resultado del inciso *b*) en un punto muy alejado de los alambres, de modo que *x* sea mucho mayor que *d*. En ese caso, el término d^2 en el denominador resulta despreciable, y la magnitud del campo total es aproximadamente $B_{total} = \mu_0 I d/\pi x^2$. Para un solo alambre, la ecuación (28.9) muestra que el campo magnético disminuye con la distancia en proporción de $1/x$; en el caso de dos alambres que conducen corrientes opuestas, $\vec{B}_1$ y $\vec{B}_2$ se cancelan entre sí parcialmente, por lo que la magnitud B_{total} disminuye con más rapidez, en proporción de $1/x^2$. Este efecto se utiliza en sistemas de comunicación, como redes telefónicas o de computadoras. El cableado se dispone de manera que un conductor lleva una señal en un sentido y el otro conduce la señal de regreso, y ambos se encuentran lado a lado, como en la figura 28.7*a*, o bien, están entrelazados (figura 28.8). Como resultado, el campo magnético de estas señales producido *afuera* de los conductores es muy pequeño, y es menos probable que ejerza fuerzas indeseables en otras corrientes portadoras de información.

28.8 Los cables de computadora o de equipos para audio y video crean poco o ningún campo magnético. Esto se debe a que dentro de cada cable hay alambres muy cercanos que llevan corriente en ambos sentidos a lo largo del cable. Los campos magnéticos de estas corrientes opuestas se cancelan entre sí.



28.7 *a*) Dos conductores largos y rectos portan corrientes iguales en sentidos opuestos. Los conductores se observan desde sus extremos. *b*) Mapa del campo magnético producido por los dos conductores. Las líneas de campo están muy próximas unas de otras entre los conductores, donde el campo tiene la intensidad máxima.





Evalúe su comprensión de la sección 28.3 La figura de la derecha muestra un circuito que se encuentra sobre una mesa horizontal, sobre el cual se coloca una brújula, como se ilustra. Va a conectarse una batería en el circuito, de manera que cuando el interruptor se cierra, la aguja de la brújula experimenta una desviación en sentido antihorario. ¿En cuál orientación, A o B, debería colocarse la batería en el circuito?



28.4 Fuerza entre conductores paralelos

En el ejemplo 28.4 (sección 28.3) se mostró cómo usar el principio de superposición de campos magnéticos para obtener el campo total debido a dos conductores largos portadores de corriente. Otro aspecto importante de esta configuración es la *fuerza de interacción* entre los conductores. Dicha fuerza desempeña un papel importante en muchas situaciones prácticas en las que los alambres portadores de la corriente se hallan cerca uno del otro. La figura 28.9 presenta segmentos de dos conductores largos, rectos y paralelos, separados por una distancia r y que portan las corrientes I e I' en el mismo sentido. Cada conductor se encuentra en el campo magnético producido por el otro, por lo que cada uno experimenta una fuerza. El diagrama ilustra algunas de las líneas de campo generadas por la corriente en el conductor de la parte inferior.

Según la ecuación (28.9), el conductor inferior produce un campo $\vec{B}$ que, en la posición del conductor de arriba, tiene una magnitud

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

De acuerdo con la ecuación (27.19), la fuerza que ejerce este campo sobre una longitud L del conductor superior es $\vec{F} = I'\vec{L} \times \vec{B}$, donde el vector $\vec{L}$ está en dirección de la corriente I' y tiene magnitud L. Como $\vec{B}$ es perpendicular a la longitud del conductor y, por lo tanto, a $\vec{L}$, la magnitud de esta fuerza es

$$F = I'LB = \frac{\mu_0 II'L}{2\pi r}$$

y la fuerza *por unidad de longitud* F/L es

$$\frac{F}{L} = \frac{\mu_0 II'}{2\pi r} \quad \text{(dos conductores largos, paralelos y portadores de corriente)} \qquad (28.11)$$

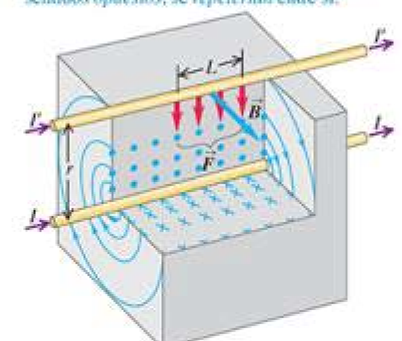
La aplicación de la regla de la mano derecha a $\vec{F} = I'\vec{L} \times \vec{B}$ indica que la fuerza sobre el conductor de arriba está dirigida *hacia abajo*.

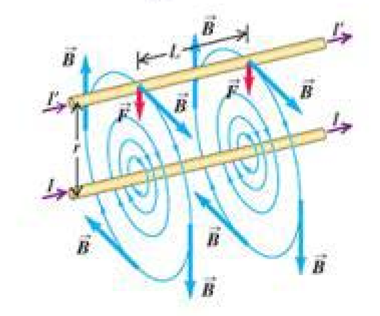
La corriente en el conductor *superior* también origina un campo en la posición del *inferior*. Dos aplicaciones sucesivas de la regla de la mano derecha para productos vectoriales (una para encontrar la dirección del campo $\vec{B}$ debido al conductor superior, como en la sección 28.2, y otra para determinar la dirección de la fuerza que ejerce este campo sobre el conductor de abajo, como en la sección 27.6) muestran que la fuerza sobre el conductor inferior va *hacia arriba*. Así, *dos conductores paralelos que transportan corriente en el mismo sentido se atraen uno al otro.* Si se invierte el sentido de cualquiera de las corrientes, las fuerzas también se invierten. *Dos conductores paralelos que transportan corriente en sentidos opuestos se repelen entre sí.*

28.9 Los conductores paralelos que transportan corriente en el mismo sentido se atraen uno al otro. Los diagramas muestran cómo el campo magnéticod $\vec{B}$ generado por la corriente del conductor inferior ejerce una fuerza $\vec{F}$ sobre el conductor superior.

El campo magnético del alambre inferior ejerce una fuerza de atracción sobre el alambre superior. De igual modo, el alambre superior atrae al de abajo.

Si los conductores transportaran corrientes en sentidos *opuestos*, se *repelerían* entre sí.





Fuerzas magnéticas y la definición de ampere

La atracción o repulsión entre dos conductores rectos, paralelos y portadores de corriente es la base de la definición oficial del **ampere** en el SI:

> ***Un ampere* es la corriente constante que, si está presente en dos conductores paralelos de longitud infinita y separados por una distancia de un metro de espacio vacío, provoca que cada conductor experimente una fuerza de exactamente 2×10^{-7} newtons por metro de longitud.**

De acuerdo con la ecuación (28.11), se ve que esta definición de ampere es lo que nos condujo a obtener el valor de $4\pi \times 10^{-7}$ T·m/A para μ_0. También constituye la base

de la definición del coulomb en el SI, que es la cantidad de carga transferida en un segundo por una corriente de un ampere.

Esta es una *definición operativa*; nos da un procedimiento experimental concreto para medir la corriente y definir la unidad de corriente. Para una estandarización de mucha precisión del ampere, se utilizan bobinas de alambre en lugar de alambres rectos, y su separación es de unos cuantos centímetros. Inclusive son posibles mediciones aún más precisas del ampere estándar empleando una versión del efecto Hall (véase la sección 27.9).

Existen fuerzas de atracción no solo entre *alambres* que conducen corrientes en el mismo sentido, sino también entre elementos longitudinales de un solo conductor que transporta corriente. Si el conductor es un líquido o un gas ionizado (un plasma), estas fuerzas dan como resultado una contracción del conductor. La contracción del conductor se llama *efecto pellizco*. Las altas temperaturas que produce el efecto pellizco en un plasma se han utilizado en una técnica para lograr la fusión nuclear.



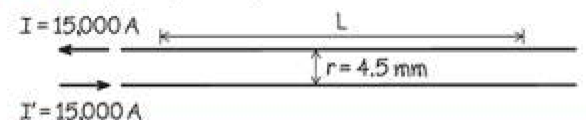
Ejemplo 28.5 Fuerzas entre alambres paralelos

Dos alambres superconductores rectos y paralelos, separados por una distancia de 4.5 mm, conducen corrientes iguales de 15,000 A en sentidos opuestos. ¿Qué fuerza, por unidad de longitud, ejercen entre sí estos alambres?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: La figura 28.10 muestra la situación. Se calcula F/L, la fuerza magnética por unidad de longitud del alambre, usando la ecuación (28.11).

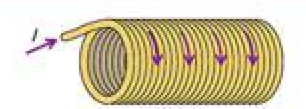
28.10 Diagrama para este problema.



EJECUTAR: Como las corrientes van en sentidos opuestos, los dos conductores *se repelen*. De acuerdo con la ecuación (28.11), la fuerza por unidad de longitud es

$$\frac{F}{L} = \frac{\mu_0 I I'}{2\pi r} = \frac{(4\pi \times 10^{-7}\ \mathrm{T\cdot m/A})(15{,}000\ \mathrm{A})^2}{(2\pi)(4.5 \times 10^{-3}\ \mathrm{m})}$$
$$= 1.0 \times 10^4\ \mathrm{N/m}$$

EVALUAR: Esta es una fuerza grande, más de una tonelada por metro. Las corrientes y las separaciones de esta magnitud se utilizan en electroimanes superconductores de los aceleradores de partículas, y el análisis de esfuerzos mecánicos es una parte crucial del proceso de diseño.



Evalúe su comprensión de la sección 28.4 Un solenoide es un alambre enrollado como bobina helicoidal. La figura de la izquierda muestra un solenoide que conduce una corriente I. *a)* La fuerza *magnética* que una espira de la bobina ejerce sobre otra adyacente, ¿es **i.** de atracción, **ii.** de repulsión o **iii.** igual a cero? *b)* La fuerza *eléctrica* que una espira de la bobina ejerce sobre otra adyacente, ¿es **i.** de atracción, **ii.** de repulsión o **iii.** igual a cero? *c)* La fuerza *magnética* entre lados opuestos de la misma espira de la bobina, ¿es **i.** de atracción, **ii.** de repulsión o **iii.** igual a cero? *d)* La fuerza *eléctrica* entre lados opuestos de la misma espira de la bobina, ¿es **i.** de atracción, **ii.** de repulsión o **iii.** igual a cero? |

28.5 Campo magnético de una espira circular de corriente

28.11 Este electroimán contiene una bobina conductora de corriente con numerosas espiras de alambre. El campo magnético resultante es capaz de atraer grandes cantidades de barras de acero y otros objetos de hierro.



Si se observa el interior de un timbre para puerta, un transformador, un motor eléctrico o un electroimán (figura 28.11), se encontrarán bobinas de alambre con gran número de vueltas espaciadas tan estrechamente, que cada vuelta está muy cerca de formar una espira plana circular. En estas bobinas se utiliza una corriente para generar un campo magnético. De modo que es conveniente obtener una expresión para el campo magnético que produce una sola espira conductora circular portadora de corriente, o para las N espiras circulares estrechamente espaciadas que forman una bobina. En la sección 27.7 se consideró la fuerza y la torca sobre una espira de corriente de este tipo colocada en un campo magnético externo generado por otras corrientes; ahora vamos a obtener el campo magnético generado por la espira misma.

La figura 28.12 muestra un conductor circular de radio a. Una corriente I se hace circular por la espira a través de dos alambres largos y rectos colocados lado a lado; las corrientes en estos alambres rectos van en sentidos opuestos, y sus campos magnéticos casi se cancelan entre sí (véase el ejemplo 28.4 en la sección 28.3).

Para encontrar el campo magnético en el punto P sobre el eje de la espira, a una distancia x del centro, se usa la ley de Biot y Savart, ecuaciones (28.5) o (28.6). Como se observa en la figura $d\vec{l}$ y $\hat{r}$ son perpendiculares, y la dirección del campo $d\vec{B}$ generado por este elemento $d\vec{l}$ en particular se encuentra en el plano xy. Como $r^2 = x^2 + a^2$, la magnitud dB del campo debido al element $d\vec{l}$ es

$$dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dl}{(x^2 + a^2)} \qquad (28.12)$$

Las componentes del vector $d\vec{B}$ son

$$dB_x = dB\cos\theta = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dl}{(x^2 + a^2)} \frac{a}{(x^2 + a^2)^{1/2}} \qquad (28.13)$$

$$dB_y = dB\,\text{sen}\,\theta = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dl}{(x^2 + a^2)} \frac{x}{(x^2 + a^2)^{1/2}} \qquad (28.14)$$

El campo *total* $\vec{B}$ en P tiene solo una componente x (es perpendicular al plano de la espira). He aquí la razón: para cada elemento $d\vec{l}$ hay otro elemento correspondiente en el lado opuesto de la espira, con dirección opuesta. Estos dos elementos hacen contribuciones iguales a la componente x de $d\vec{B}$, dada por la ecuación (28.13), pero dan componentes *opuestas* perpendiculares al eje x. Así, todas las componentes perpendiculares se cancelan y solo sobreviven las componentes x.

Para obtener la componente x del campo total $\vec{B}$, se integra la ecuación (28.13), incluyendo todos los elementos $d\vec{l}$ alrededor de la espira. Todos los elementos de esta expresión, excepto dl, son constantes, por lo que se pueden sacar de la integral para obtener

$$B_x = \int \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{a\,dl}{(x^2 + a^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 I a}{4\pi(x^2 + a^2)^{3/2}} \int dl$$

La integral de dl es justamente la circunferencia del círculo, $\int dl = 2\pi a$, y finalmente obtenemos

$$B_x = \frac{\mu_0 I a^2}{2(x^2 + a^2)^{3/2}} \quad \text{(sobre el eje de una espira circular)} \qquad (28.15)$$

La *dirección* del campo magnético sobre el eje de una espira portadora de corriente está dada por la regla de la mano derecha. Si se cierran los dedos de la mano derecha alrededor de la espira en la dirección de la corriente, el pulgar derecho apunta en la dirección del campo (figura 28.13).

Campo magnético sobre el eje de una bobina

Ahora suponga que en lugar de una sola espira en la figura 28.12, se tiene una bobina que consiste en N espiras, todas con el mismo radio. La separación entre las espiras es tan pequeña que el plano de cada una está prácticamente a la misma distancia x del punto de campo P. Entonces, el campo total es N veces el campo producido por una sola espira:

$$B_x = \frac{\mu_0 N I a^2}{2(x^2 + a^2)^{3/2}} \quad \text{(sobre el eje de } N \text{ espiras circulares)} \qquad (28.16)$$

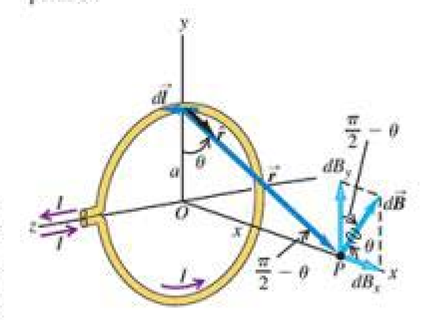
El factor N en la ecuación (28.16) es la razón por la que se utilizan bobinas de alambre, y no espiras aisladas, para generar campos magnéticos intensos; para obtener una intensidad de campo deseada, el uso de una sola espira requeriría una corriente I tan grande que superaría la capacidad nominal del alambre de la espira.

La figura 28.14 muestra una gráfica de B_x como función de x. El valor máximo del campo está en $x = 0$, el centro de la espira o bobina:

$$B_x = \frac{\mu_0 N I}{2a} \quad \text{(en el centro de } N \text{ espiras circulares)} \qquad (28.17)$$

Conforme se avanza a lo largo del eje, la magnitud del campo disminuye.

28.12 Campo magnético en el eje de una espira circular. La corriente en el segmento $d\vec{l}$ genera el campo $d\vec{B}$, que está en el plano xy. Las corrientes de los otros $d\vec{l}$ generan $d\vec{B}$ con distintas componentes perpendiculares al eje x; la suma de estas componentes es cero. Las componentes x de los elementos $d\vec{B}$ se combinan para dar el campo total $\vec{B}$ en el punto P.



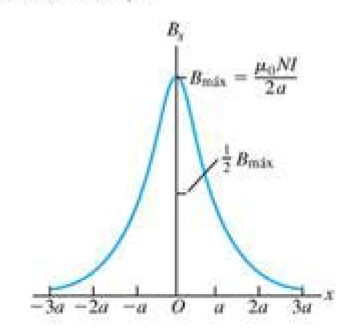
MasteringPHYSICS

PhET: Faraday's Electromagnetic Lab
PhET: Magnets and Electromagnets
ActivPhysics 13.2: Magnetic Field of a Loop

28.13 Regla de la mano derecha para la dirección del campo magnético producido sobre el eje de una bobina que conduce corriente.



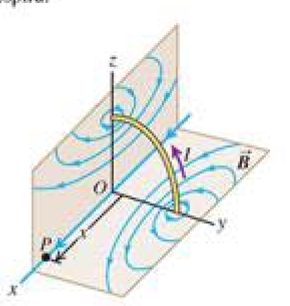
28.14 Gráfica del campo magnético a lo largo del eje de una bobina circular con N vueltas. Cuando x es mucho mayor que a, la magnitud del campo disminuye aproximadamente en $1/x^3$.



Aplicación Campos magnéticos de una imagen por resonancia magnética (IRM)
La técnica de diagnóstico conocida como imagen por resonancia magnética (IRM) (véase la sección 27.7) requiere de un campo magnético de aproximadamente 1.5 T. En una exploración normal con IRM, el paciente permanece dentro de una bobina que produce un campo magnético intenso. Las corrientes requeridas son muy altas, de modo que las bobinas están inmersas en un baño de helio líquido a una temperatura de 4.2 K para evitar el sobrecalentamiento.



28.15 Líneas de campo magnético producidas por la corriente en una espira circular. En los puntos sobre el eje, el campo $\vec{B}$ tiene la misma dirección que el momento magnético de la espira.



En la sección 27.7 se definió que el *momento dipolar magnético* μ (o *momento magnético*) de una espira portadora de corriente es igual a IA, donde A es el área de la sección transversal de la espira. Si hay N espiras, el momento magnético total es NIA. La espira circular en la figura 28.12 tiene un área $A = \pi a^2$, por lo que el momento magnético de una sola espira es $\mu = I\pi a^2$; para N espiras, $\mu = NI\pi a^2$. Al sustituir estos resultados en las ecuaciones (28.15) y (28.16), se encuentra que estas expresiones se pueden escribir como

$$B_x = \frac{\mu_0 \mu}{2\pi(x^2 + a^2)^{3/2}} \quad \text{(sobre el eje de cualquier número de espiras circulares)} \qquad (28.18)$$

En la sección 27.7 se describió un dipolo magnético en términos de su respuesta a un campo magnético producido por corrientes fuera del dipolo. Pero un dipolo magnético también es una *fuente* de campo magnético; la ecuación (28.18) describe el campo magnético *producido* por un dipolo magnético para puntos a lo largo del eje del dipolo. Este campo es directamente proporcional al momento dipolar magnético μ. Observe que el campo a lo largo del eje x está en la misma dirección que el momento magnético vectorial $\vec{\mu}$; esto es cierto para el eje x tanto positivo como negativo.

CUIDADO **Campo magnético de una bobina** Las ecuaciones (28.15), (28.16) y (28.18) son válidas solo sobre el *eje* de una espira o bobina. ¡No trate de aplicarlas en otros puntos!

La figura 28.15 muestra algunas de las líneas de campo magnético que rodean una espira circular de corriente (dipolo magnético) en planos a través del eje. Las direcciones de las líneas de campo están dadas por la misma regla de la mano derecha que la de un conductor largo y recto. Tome el conductor con su mano derecha, con el pulgar en la dirección de la corriente; los dedos se doblan ahora en la misma dirección que las líneas de campo. Para la espira circular de corriente, las líneas de campo son curvas cerradas que circundan el conductor; sin embargo, *no* son círculos.

Ejemplo 28.6 Campo magnético de una bobina



Una bobina con 100 espiras circulares con radio de 0.60 m conduce una corriente de 5.0 A. *a*) Calcule el campo magnético en un punto a lo largo del eje de la bobina, a 0.80 m del centro. *b*) Sobre el eje, ¿a qué distancia desde el centro de la bobina, la magnitud del campo es $\frac{1}{8}$ de la que tiene en el centro?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Este problema se relaciona con la magnitud B del campo magnético a lo largo del eje de una bobina que conduce corriente, por lo que podemos utilizar los conceptos de esta sección, y en particular la ecuación (28.16). Se sabe que $N = 100$, $I = 5.0$ A y $a = 0.60$ m. En el inciso *a*) la incógnita es B_x en un valor dado de la coordenada x. En el inciso *b*) la incógnita es el valor de x en el que el campo tiene $\frac{1}{8}$ de la magnitud que se registra en el origen.

EJECUTAR: *a*) Usando $x = 0.80$ m en la ecuación (28.16), se tiene

$$B_x = \frac{(4\pi \times 10^{-7}\,\text{T}\cdot\text{m/A})(100)(5.0\text{ A})(0.60\text{ m})^2}{2[(0.80\text{ m})^2 + (0.60\text{ m})^2]^{3/2}}$$
$$= 1.1 \times 10^{-4}\,\text{T}$$

b) Considerando la ecuación (28.16), queremos encontrar un valor de x tal que

$$\frac{1}{(x^2 + a^2)^{3/2}} = \frac{1}{8}\frac{1}{(0^2 + a^2)^{3/2}}$$

Para despejar x, se toma el recíproco de todo y luego se elevan ambos lados a la potencia 2/3; el resultado es

$$x = \pm\sqrt{3}a = \pm 1.04\text{ m}$$

EVALUAR: La respuesta del inciso *a*) se comprueba obteniendo el momento magnético de la bobina y sustituyendo el resultado en la ecuación (28.18):

$$\mu = NI\pi a^2 = (100)(5.0\text{ A})\pi(0.60\text{ m})^2 = 5.7 \times 10^2\text{ A}\cdot\text{m}^2$$
$$B_x = \frac{(4\pi \times 10^{-7}\,\text{T}\cdot\text{m/A})(5.7 \times 10^2\text{ A}\cdot\text{m}^2)}{2\pi[(0.80\text{ m})^2 + (0.60\text{ m})^2]^{3/2}} = 1.1 \times 10^{-4}\,\text{T}$$

El momento magnético μ es relativamente grande; sin embargo, se trata de un campo más bien pequeño, comparable con el campo magnético terrestre. Este ejemplo muestra lo difícil que es producir campos intensos de 1 T o más.

Evalúe su comprensión de la sección 28.5 La figura 28.12 muestra el campo magnético $d\vec{B}$ producido en un punto P por un segmento $d\vec{l}$ que está sobre el eje y positivo (en la parte superior de la espira). Este campo tiene componentes $dB_x > 0$, $dB_y > 0$, $dB_z = 0$. *a)* ¿Cuáles son los signos de las componentes del campo $d\vec{B}$ producido en P por un segmento $d\vec{l}$ sobre el eje y negativo (en la parte inferior de la espira)? **i.** $dB_x > 0$, $dB_y > 0$, $dB_z = 0$; **ii.** $dB_x > 0$, $dB_y < 0$, $dB_z = 0$; **iii.** $dB_x < 0$, $dB_y > 0$, $dB_z = 0$; **iv.** $dB_x < 0$, $dB_y < 0$, $dB_z = 0$; **v.** ninguno de los anteriores. *b)* ¿Cuáles son los signos de las componentes del campo $d\vec{B}$ producido en P por un segmento $d\vec{l}$ en el eje z negativo (en el lado derecho de la espira)? **i.** $dB_x > 0$, $dB_y > 0$, $dB_z = 0$; **ii.** $dB_x > 0$, $dB_y < 0$, $dB_z = 0$; **iii.** $dB_x < 0$, $dB_y > 0$, $dB_z = 0$; **iv.** $dB_x < 0$, $dB_y < 0$, $dB_z = 0$; **v.** ninguno de los anteriores.

28.6 Ley de Ampère

Hasta este momento, el cálculo del campo magnético debido a una corriente ha consistido en la obtención del campo infinitesimal $d\vec{B}$ debido a un elemento de corriente, y luego sumar todos los $d\vec{B}$ para determinar el campo total. Este enfoque es directamente análogo a los cálculos para el campo *eléctrico* que efectuamos en el capítulo 21.

Para el problema del campo eléctrico, se vio que en situaciones en las que había una distribución de carga con un alto grado de simetría, con frecuencia era más fácil usar la ley de Gauss para encontrar $\vec{E}$. Asimismo, existe una ley que nos permite obtener con más facilidad los campos *magnéticos* generados por distribuciones de *corriente* con un alto grado de simetría. Pero la ley que permite hacer esto, llamada *ley de Ampère*, es de naturaleza diferente de la ley de Gauss.

La ley de Gauss para campos eléctricos implica el flujo de $\vec{E}$ a través de una superficie cerrada; establece que este flujo es igual al total de la carga encerrada dentro de la superficie, dividida entre la constante ϵ_0. Así, esta ley relaciona los campos eléctricos con las distribuciones de carga. En contraste, la ley de Gauss para campos *magnéticos*, ecuación (28.10), *no* es una relación entre campos magnéticos y distribuciones de corriente; plantea que el flujo de $\vec{B}$ a través de *cualquier* superficie cerrada siempre es igual a cero, haya o no una corriente dentro de la superficie. Por lo tanto, la ley de Gauss referente a $\vec{B}$ no se puede utilizar para determinar el campo magnético generado por una distribución de corriente en particular.

La ley de Ampère no está formulada en términos del flujo magnético, sino de la *integral de línea* de $\vec{B}$ alrededor de una trayectoria cerrada que se expresa como

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l}$$

En el capítulo 6 del volumen 1 se emplearon integrales de línea para definir el trabajo, y en el capítulo 23 para calcular el potencial eléctrico. Para evaluar esta integral, se divide la trayectoria en segmentos infinitesimales $d\vec{l}$, para cada uno de los cuales se calcula el producto escalar $\vec{B} \cdot d\vec{l}$ y se suman los resultados. En general, $\vec{B}$ varía de un punto a otro, y se debe emplear el valor de $\vec{B}$ en la ubicación de cada $d\vec{l}$. Una notación alternativa es $\oint B_\parallel\, dl$, donde $B_\parallel$ es la componente de $\vec{B}$ paralela a $d\vec{l}$ en cada punto. El círculo sobre el signo de la integral indica que esta se calcula siempre para una trayectoria *cerrada*, es decir, una trayectoria cuyo punto inicial es igual al punto final.

Ley de Ampère en un conductor largo y recto

Para introducir la idea básica de la ley de Ampère, consideremos otra vez el campo magnético generado por un conductor largo y recto que transporta una corriente I. En la sección 28.3 se vio que el campo a una distancia r del conductor tiene una magnitud de

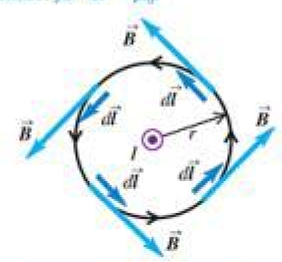
$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

Las líneas de campo magnético son círculos con centro en el conductor. Tomemos la integral de línea de $\vec{B}$ alrededor de uno de estos círculos con radio r, como se observa en la figura 28.16*a*. En cada punto del círculo, $\vec{B}$ y $d\vec{l}$ son paralelos, por lo que $\vec{B} \cdot d\vec{l} = B\,dl$; como r es constante alrededor del círculo, B también es constante. Alternativamente, podemos decir que $B_\parallel$ es constante e igual a B en cada punto del

28.16 Tres trayectorias para integrar la integral de línea de $\vec{B}$ en la vecindad de un conductor largo y recto que transporta una corriente I, hacia *afuera* del plano de la página (como lo indica el círculo con un punto). El conductor se ve desde un extremo.

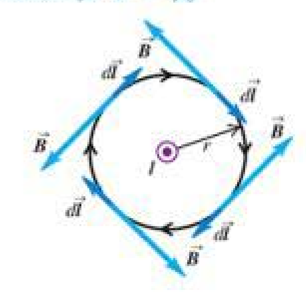
a) La trayectoria de integración es un círculo centrado en el conductor; la integración recorre el círculo en sentido antihorario.

Resultado: $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I$



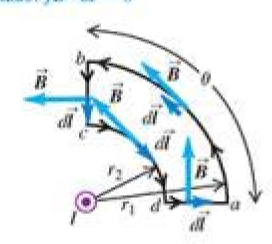
b) Misma trayectoria de integración que en el inciso *a)*, pero la integración recorre el círculo en sentido horario.

Resultado: $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = -\mu_0 I$



c) Trayectoria de integración que no encierra al conductor.

Resultado: $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = 0$



círculo. Por lo tanto, podemos sacar a B de la integral. La integral restante es exactamente la circunferencia del círculo, por lo que

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint B_{\parallel}\, dl = B \oint dl = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}(2\pi r) = \mu_0 I$$

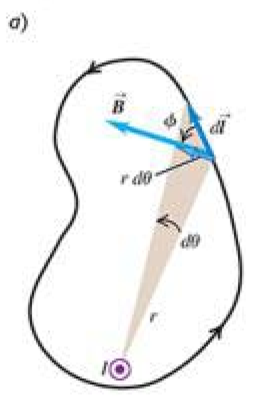
Así, la integral de línea es independiente del radio del círculo e igual a μ_0 multiplicada por la corriente que pasa a través del área limitada por el círculo.

En la figura 28.16*b*, la situación es la misma, pero ahora la trayectoria de integración va alrededor del círculo en sentido opuesto. Ahora $\vec{B}$ y $d\vec{l}$ son antiparalelos, por lo que $\vec{B} \cdot d\vec{l} = -B\, dl$ y la integral de línea es igual a $-\mu_0 I$. Se obtiene el mismo resultado si la trayectoria de integración es la misma que la de la figura 28.16*a*, pero se invierte el sentido de la corriente. Así, $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l}$ es igual a μ_0 multiplicada por la corriente que pasa a través del área limitada por la trayectoria de integración, con signo positivo o negativo dependiendo de la dirección de la corriente con respecto a la dirección de integración.

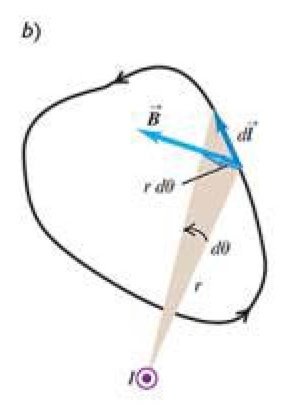
Hay una regla sencilla para determinar el signo de la corriente; seguramente no le sorprenderá saber que hay que utilizar la mano derecha. Doble los dedos de su mano derecha alrededor de la trayectoria de integración en la dirección de esta última (es decir, la dirección que usa para evaluar $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l}$). Entonces, su pulgar derecho indica la dirección de la corriente positiva. Las corrientes que pasan a través de la trayectoria de integración en esta dirección son positivas; aquellas en dirección opuesta son negativas. Con esta regla, usted podrá confirmar que la corriente es positiva en la figura 28.16*a*, y negativa en la 28.16*b*. Otra manera de decir lo mismo es la siguiente: mirando hacia la superficie limitada por la trayectoria de integración, integre alrededor de esta en sentido antihorario, como se ilustra en la figura 28.16*a*. Las corrientes que se mueven hacia usted a través de la superficie son positivas, y las que se alejan son negativas.

28.17 *a*) Una trayectoria de integración más general para la integral de línea de $\vec{B}$ alrededor de un conductor largo y recto que transporta una corriente I, hacia *afuera* del plano de la página. El conductor se ve desde su extremo. *b*) Trayectoria más general de integración que no encierra al conductor.

a)



b)



En la figura 28.16*c* se usa una trayectoria de integración que *no* encierra al conductor. A lo largo del arco circular ab de radio r_1, $\vec{B}$ y $d\vec{l}$ son paralelos, y $B_{\parallel} = B_1 = \mu_0 I/2\pi r_1$; a lo largo del arco circular cd de radio r_2, $\vec{B}$ y $d\vec{l}$ son antiparalelos y $B_{\parallel} = -B_2 = -\mu_0 I/2\pi r_2$. El campo $\vec{B}$ es perpendicular a $d\vec{l}$ en cada punto de las secciones rectas bc y da, por lo que $B_{\parallel} = 0$, y estas secciones no contribuyen a la integral de línea, que en total es

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint B_{\parallel} dl = B_1 \int_a^b dl + (0)\int_b^c dl + (-B_2)\int_c^d dl + (0)\int_d^a dl$$
$$= \frac{\mu_0 I}{2\pi r_1}(r_1\theta) + 0 - \frac{\mu_0 I}{2\pi r_2}(r_2\theta) + 0 = 0$$

La magnitud de $\vec{B}$ es mayor en el arco cd que en el ab, pero la longitud del arco es menor, por lo que las contribuciones de los dos arcos se cancelan exactamente. Aun cuando hay un campo magnético en toda la extensión de la trayectoria de integración, la integral de línea $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l}$ es igual a cero si no hay corriente que pase a través del área limitada por la trayectoria.

Estos resultados también se pueden obtener para trayectorias de integración más generales, como la de la figura 28.17*a*. En la posición del elemento de línea $d\vec{l}$, el ángulo entre $d\vec{l}$ y $\vec{B}$ es ϕ, y

$$\vec{B} \cdot d\vec{l} = B\, dl \cos\phi$$

A partir de la figura, $dl \cos\phi = r\, d\theta$, donde $d\theta$ es el ángulo que subtiende $d\vec{l}$ en la posición del conductor, y r es la distancia de $d\vec{l}$ desde el conductor. Así,

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint \frac{\mu_0 I}{2\pi r}(r\, d\theta) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \oint d\theta$$

Pero $\oint d\theta$ es exactamente igual a 2π, el ángulo total barrido por la línea radial desde el conductor a $d\vec{l}$ durante un recorrido completo alrededor de la trayectoria. De esta forma, se obtiene

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I \qquad (28.19)$$

Este resultado no depende de la forma de la trayectoria ni de la posición del conductor dentro de ella. Si la corriente en el alambre es opuesta a la que se ilustra, la integral tiene el signo contrario. Pero si la trayectoria no encierra el alambre (figura 28.17*b*), entonces el cambio neto de θ durante el recorrido alrededor de la trayectoria de integración es igual a cero; $\oint d\theta$ es cero en lugar de 2π y la integral de línea es cero.

Ley de Ampère: Enunciado general

La ecuación (28.19) casi es, aunque no plenamente, el enunciado general de la ley de Ampère. Para generalizar aún más, suponga que *varios* conductores largos y rectos pasan a través de la superficie limitada por la trayectoria de integración. El campo magnético total $\vec{B}$ en cualquier punto de la trayectoria es la suma vectorial de los campos generados por los conductores individuales. Así, la integral de línea de $\vec{B}$ total es igual a μ_0 multiplicada por la *suma algebraica* de las corrientes. Al calcular esta suma se utiliza la regla de los signos para corrientes que describimos antes. Si la trayectoria de integración no encierra un alambre particular, la integral de línea del campo $\vec{B}$ de ese alambre es igual a cero, ya que el barrido del ángulo total θ es cero en lugar de 2π durante la integración. Todo conductor que no esté encerrado por una trayectoria particular puede contribuir al valor de $\vec{B}$ en todos los puntos, pero las *integrales de línea* de sus campos alrededor de la trayectoria tienen un valor cero.

Así, en la ecuación (28.19) se puede reemplazar I por I_{enc}, la suma algebraica de las corrientes *encerradas* o *limitadas* por la trayectoria de integración, con la suma evaluada con base en la regla de los signos que se acaba de describir (figura 28.18). Así, el enunciado de la **ley de Ampère** es

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{enc} \quad \text{(ley de Ampère)} \qquad (28.20)$$

Aunque hemos obtenido la ley de Ampère solo para el caso especial del campo de varios conductores largos, rectos y paralelos, la ecuación (28.20) de hecho es válida para conductores y trayectorias de *cualquier* forma. En principio, la deducción general no es diferente de lo que se ha expuesto, pero la geometría es más complicada.

Si $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = 0$, esto *no* necesariamente significa que $\vec{B} = \mathbf{0}$ a todo lo largo de la trayectoria, sino que la corriente total a través de un área limitada por la trayectoria es igual a cero. En las figuras 28.16*c* y 28.17*b*, las trayectorias de integración no encierran ninguna corriente; en la figura 28.19 hay corrientes positivas y negativas de igual magnitud a través del área encerrada por la trayectoria. En ambos casos, $I_{enc} = 0$, y la integral de línea es cero.

CUIDADO **Integrales de línea de campos eléctricos y magnéticos** En el capítulo 23 vimos que la integral de línea del campo electrostático $\vec{E}$ alrededor de cualquier trayectoria cerrada es igual a cero; este es el enunciado de que la fuerza electrostática $\vec{F} = q\vec{E}$ sobre una carga puntual q es conservativa, por lo que esta fuerza no realiza trabajo sobre una carga en movimiento alrededor de una trayectoria cerrada que vuelve al punto de partida. Tal vez usted piense que el valor de la integral de línea $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l}$ se relaciona de manera similar con la cuestión de si la fuerza *magnética* es conservativa. Este no es en absoluto el caso. Recuerde que la fuerza magnética $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$ sobre una partícula con carga en movimiento siempre es *perpendicular* a $\vec{B}$, por lo que $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l}$ *no* se relaciona con el trabajo realizado por la fuerza magnética; como se establece en la ley de Ampère, esta integral solo se relaciona con la corriente total que cruza una superficie limitada por la trayectoria de integración. De hecho, la fuerza magnética sobre una partícula con carga en movimiento *no* es conservativa. Una fuerza conservativa solo depende de la posición del cuerpo sobre el que se ejerce la fuerza, pero la fuerza magnética sobre una partícula con carga en movimiento también depende de la *velocidad* de la partícula.

La ecuación (28.20) es válida solo si las corrientes son constantes y si no están presentes materiales magnéticos o campos eléctricos que varíen con el tiempo. En el capítulo 29 veremos cómo generalizar la ley de Ampère para campos variables con el tiempo.

28.18 Ley de Ampère.

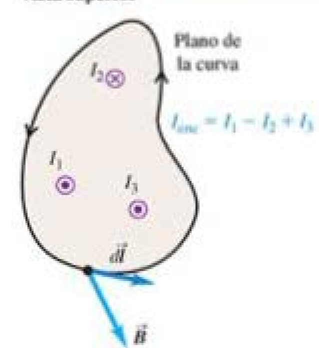
Vista en perspectiva

I_2, I_1, I_3, $d\vec{l}$, $\vec{B}$

Curva cerrada arbitraria alrededor de los conductores

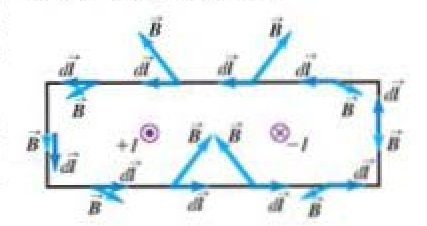
Doble los dedos de la mano derecha alrededor de la trayectoria de integración: el pulgar apunta en la dirección de la corriente positiva.

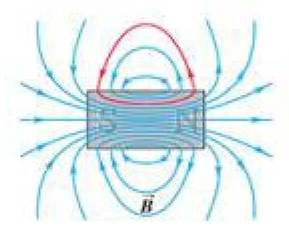
Vista superior



Ley de Ampère: Si se calcula la integral de línea del campo magnético alrededor de una curva cerrada, el resultado es igual a μ_0 multiplicada por la corriente total encerrada: $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{enc}$

28.19 Dos conductores largos y rectos que transportan corrientes iguales en sentidos opuestos. Los conductores se ven desde sus extremos, y la trayectoria de integración va en sentido antihorario. La integral de línea $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l}$ recibe una contribución nula de los segmentos superior e inferior, una contribución positiva del segmento de la izquierda y otra negativa del segmento de la derecha; la integral neta es igual a cero.





Evalúe su comprensión de la sección 28.6 La figura de la izquierda muestra líneas de campo magnético a través del centro de un imán permanente. El imán no está conectado a una fuente de fem. Una de las líneas de campo está en color rojo. ¿Qué concluye usted acerca de las corrientes dentro del imán permanente en el interior de la región encerrada por esta línea de campo? **i.** No hay corrientes en el interior del imán; **ii.** hay corrientes dirigidas hacia afuera del plano de la página; **iii.** hay corrientes dirigidas hacia el plano de la página; **iv.** no se da información suficiente para concluir. ❙

28.7 Aplicaciones de la ley de Ampère

La ley de Ampère es útil cuando se puede aprovechar la simetría de una situación para evaluar la integral de línea de $\vec{B}$. A continuación se dan varios ejemplos. La Estrategia para resolver problemas 28.2 es directamente análoga a la Estrategia para resolver problemas 22.1 (sección 22.4) para aplicaciones de la ley de Gauss; se sugiere que repase esa estrategia ahora y compare los dos métodos.

Estrategia para resolver problemas 28.2 Ley de Ampère



IDENTIFICAR *los conceptos relevantes:* Al igual que la ley de Gauss, la ley de Ampère es más útil cuando el campo magnético tiene un alto grado de simetría. En la forma $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{enc}$, se puede obtener la magnitud de $\vec{B}$ en función de la posición si se conocen la magnitud y la dirección de la corriente eléctrica que genera el campo.

PLANTEAR *el problema* de acuerdo con los siguientes pasos:
1. Identifique la(s) incógnita(s). Generalmente, una de ellas será la magnitud del campo $\vec{B}$ como función de la posición.
2. Seleccione la trayectoria de integración que se usará con la ley de Ampère. Si lo que quiere es determinar el campo magnético en cierto punto, entonces la trayectoria debe pasar por ese punto. La trayectoria de integración no necesita ser ninguna frontera física real. Por lo general, es una curva puramente geométrica; puede estar en el espacio vacío, incrustada en un cuerpo sólido o tener algo de ambas cosas. La trayectoria de integración debe tener suficiente *simetría* para hacer posible la evaluación de la integral. De manera ideal, la trayectoria será tangente a $\vec{B}$ en las regiones de interés; en cualquier lugar, la trayectoria debe ser perpendicular a $\vec{B}$ o recorrer regiones en las cuales $\vec{B} = 0$.

EJECUTAR *la solución* como sigue:
1. Resuelva la integral $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l}$ a lo largo de la trayectoria seleccionada. Si $\vec{B}$ es tangente a toda la trayectoria de integración o a una parte de ella y tiene la misma magnitud B en todos los puntos, entonces su integral de línea es igual al producto de B por la longitud de esa porción de la trayectoria. Si $\vec{B}$ es perpendicular a alguna porción de la trayectoria, o si $\vec{B} = 0$, esa parte no hace ninguna contribución a la integral.
2. En la integral $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l}$, $\vec{B}$ es el campo magnético *total* en cada punto de la trayectoria; este campo puede ser generado por corrientes encerradas *o no encerradas* por la trayectoria. Si *no* hay corrientes netas contenidas dentro de la trayectoria, el campo en los puntos sobre la trayectoria no necesariamente es igual a cero, pero la integral $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l}$ siempre es igual a cero.
3. Determine la corriente I_{enc} encerrada por la trayectoria de integración. El signo de esta corriente está dado por la regla de la mano derecha: si se doblan los dedos de la mano derecha de manera que sigan la trayectoria en la dirección de integración, entonces el pulgar apunta en la dirección de la corriente positiva. Si $\vec{B}$ es tangente a la trayectoria en todos los puntos e I_{enc} es positiva, la dirección de $\vec{B}$ es la misma que la dirección de la integración; si por el contrario, I_{enc} es negativa, $\vec{B}$ está en la dirección opuesta a la de integración.
4. Use la ley de Ampère, $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I$ para obtener la incógnita.

EVALUAR *la respuesta:* Si el resultado es una expresión para la magnitud del campo como función de la posición, se puede comprobar examinando la forma en que se comporta la expresión en diferentes límites.

Ejemplo 28.7 Campo de un conductor largo, recto y portador de corriente



En la sección 28.6 se obtuvo la ley de Ampère empleando la ecuación (28.9) para el campo $\vec{B}$ de un conductor largo, recto que transporta corriente. Revierta este proceso y utilice la ley de Ampère para encontrar $\vec{B}$ en esta situación.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: En este caso la simetría es cilíndrica, por lo que al usar la ley de Ampère tomaremos como trayectoria de integración un círculo con radio r centrado en el conductor y ubicado en un plano perpendicular a este, como en la figura 28.16*a*. En todos lados, $\vec{B}$ es tangente a este círculo y tiene la misma magnitud B en todos los puntos del círculo.

EJECUTAR: De acuerdo con la elección de la trayectoria de integración, la ley de Ampère [ecuación (28.20)] se convierte en

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint B_{\parallel}\, dl = B(2\pi r) = \mu_0 I$$

y de inmediato sigue la ecuación (28.9), $B = \mu_0 I/2\pi r$.

La ley de Ampère determina la dirección de $\vec{B}$ y su magnitud. Como vamos alrededor de la trayectoria de integración en sentido antihorario, la dirección positiva de la corriente queda fuera del plano de la figura 28.16*a*; esta es la misma que la dirección real de la corriente en la figura, por lo que I es positiva y la integral $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l}$ también es positiva. Como los elementos $d\vec{l}$ van en sentido antihorario, la dirección de $\vec{B}$ debe ser también en sentido antihorario, como se muestra en la figura 28.16*a*.

EVALUAR: Los resultados son congruentes con los de la sección 28.6.



Ejemplo 28.8 Campo en un conductor largo cilíndrico

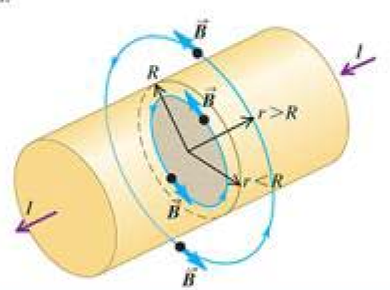
Un conductor cilíndrico con radio R transporta una corriente I (figura 28.20). La corriente está distribuida de manera uniforme sobre la superficie de la sección transversal del conductor. Obtenga el campo magnético, como función de la distancia r desde el eje del conductor, a puntos situados tanto dentro ($r < R$) como fuera ($r > R$) del conductor.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Al igual que en el ejemplo 28.7, la distribución de corriente tiene simetría cilíndrica, y las líneas de campo magnético deben ser círculos concéntricos con el eje en el conductor. Para obtener el campo magnético dentro y fuera del conductor, se eligen trayectorias de integración circulares de radios $r < R$ y $r > R$, respectivamente (véase la figura 28.20).

EJECUTAR: En cualquier caso, el campo $\vec{B}$ tiene la misma magnitud en todos los puntos de la trayectoria circular de integración y es tangente a esta. Así, la magnitud de la integral de línea es simplemente $B(2\pi r)$. Para calcular la corriente I_{enc} encerrada por la trayectoria circular de integración dentro del conductor ($r < R$), note que la densidad de corriente (corriente por unidad de área) es $J = I/\pi R^2$, por lo que $I_{enc} = J(\pi r^2) = Ir^2/R^2$. De modo que, la ley de Ampère da $B(2\pi r) = \mu_0 I r^2/R^2$, o bien,

28.20 Para obtener el campo magnético para $r < R$, se aplica la ley de Ampère al círculo que encierra el área de color gris. La corriente a través del área gris es $(r^2/R^2)I$. Para obtener el campo magnético con $r > R$, se aplica la ley de Ampère al círculo que encierra todo el conductor.



$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\frac{r}{R^2} \quad \text{(dentro del conductor, } r < R\text{)} \qquad (28.21)$$

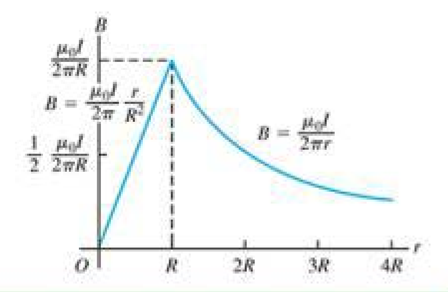
La trayectoria de integración circular afuera del conductor encierra la corriente total en el conductor, de modo que $I_{enc} = I$. La aplicación de la ley de Ampère da la misma ecuación que en el ejemplo 28.7, con el mismo resultado para B:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \quad \text{(afuera del conductor, } r > R\text{)} \qquad (28.22)$$

En el exterior del conductor, el campo magnético es el mismo que el de un conductor largo y recto que transporta una corriente I, independientemente del radio R sobre el que se distribuye la corriente. De hecho, el campo magnético afuera de *cualquier* distribución de corriente con simetría cilíndrica es igual que si toda la corriente estuviera concentrada a lo largo del eje de la distribución. Esto es análogo a los resultados de los ejemplos 22.5 y 22.9 (sección 22.4), en los que se vio que el campo *eléctrico* afuera de un cuerpo *con carga* con simetría esférica era igual que si toda la carga se localizara en el centro.

EVALUAR: Observe que en la superficie del conductor ($r = R$), las ecuaciones (28.21) y (28.22) concuerdan, como debe ser. La figura 28.21 muestra una gráfica de B como función de r.

28.21 Magnitud del campo magnético dentro y fuera de un conductor cilíndrico, largo y recto con radio R, que transporta una corriente I.



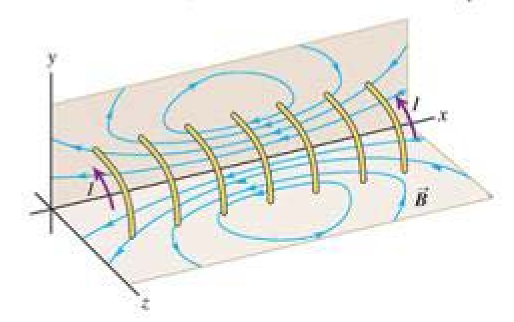


Ejemplo 28.9 Campo de un solenoide

Un solenoide es un alambre enrollado de manera helicoidal sobre un cilindro, por lo general con sección transversal circular. Puede tener miles de vueltas muy apretadas (con frecuencia en varias capas), cada una de las cuales puede considerarse como una espira circular. Por sencillez, la figura 28.22 muestra un solenoide con unas cuantas vueltas, todas las cuales conducen la misma corriente I, y el campo total $\vec{B}$ en cada punto es la suma vectorial de los campos generados por las vueltas individuales. La figura ilustra las líneas de campo en los planos xy y xz. En el centro del solenoide aparecen dibujadas líneas de campo espaciadas de manera uniforme. Los cálculos exactos demuestran que para un solenoide largo y con embobinado (o devanado) compacto, la mitad de las líneas de campo emergen de los extremos, y la otra mitad se "fuga" a través de los embobinados entre el centro y el extremo, como lo sugiere la figura.

Si el solenoide es muy largo comparado con el diámetro de su sección transversal y las bobinas tienen un embobinado compacto, el campo dentro del solenoide cerca del punto medio es casi uniforme en la sección transversal y paralelo al eje; el campo *externo* cerca del punto medio es muy pequeño.

28.22 Líneas del campo magnético producido por la corriente en un solenoide. Por claridad, solo se muestran unas cuantas espiras.



Continúa

Aplique la ley de Ampère para obtener el campo en el centro de un solenoide largo de este tipo, o cerca de él, si tiene n espiras de alambre por unidad de longitud y conduce una corriente I.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Suponemos que $\vec{B}$ es uniforme en el interior del solenoide y cero en el exterior. La figura 28.23 presenta la situación y la trayectoria de integración, el rectángulo *abcd*. El lado *ab*, con longitud L, es paralelo al eje del solenoide. Los lados *bc* y *da* se consideran muy largos, de manera que el lado *cd* está lejos del solenoide; entonces, el campo en el lado *cd* es tan pequeño que resulta despreciable.

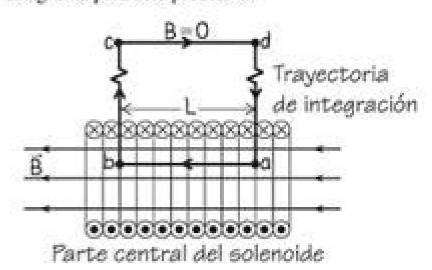
EJECUTAR: A lo largo del lado *ab*, $\vec{B}$ es paralelo a la trayectoria y es constante. Al efectuar la integración de la ley de Ampère, vamos a lo largo del lado *ab* en la misma dirección que $\vec{B}$, así que, $B_{\parallel} = +B$, y

$$\int_a^b \vec{B} \cdot d\vec{l} = BL$$

A lo largo de los lados *bc* y *da*, $\vec{B}$ es perpendicular a la trayectoria y, por lo tanto, $B_{\parallel} = 0$; a lo largo del lado *cd*, $\vec{B} = \mathbf{0}$ y, por consiguiente, $B_{\parallel} = 0$. Así, alrededor de la trayectoria cerrada completa, tenemos $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = BL$.

En la longitud L tenemos nL vueltas, cada una de las cuales pasa una vez a través de *abcd* y conduce una corriente I. Por lo tanto, la corriente total encerrada por el rectángulo es $I_{enc} = nLI$.

28.23 Diagrama para este problema.



La integral $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l}$ es positiva, de modo que por la ley de Ampère, I_{enc} también debe ser positiva; esto significa que la corriente que pasa a través de la superficie limitada por la trayectoria de integración debe tener la dirección que se muestra en la figura 28.23. Entonces, la ley de Ampère da $BL = \mu_0 nLI$, o bien,

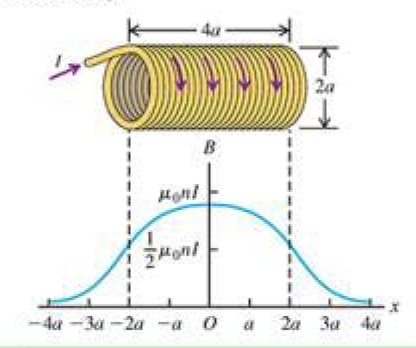
$$B = \mu_0 nI \qquad \text{(solenoide)} \tag{28.23}$$

El lado *ab* no necesariamente se encuentra sobre el eje del solenoide, por lo que este resultado demuestra que el campo es uniforme en toda la sección transversal en el centro de la longitud del solenoide.

EVALUAR: Observe que la *dirección* de $\vec{B}$ dentro del solenoide es la misma del momento magnético vectorial $\vec{\mu}$, del solenoide, el mismo resultado que encontramos en la sección 28.5 para una sola espira portadora de corriente.

Para puntos a lo largo del eje, el campo es más intenso en el centro del solenoide y decae cerca de los extremos. Para un solenoide muy largo en comparación con su diámetro, la magnitud del campo en cada extremo tiene exactamente la mitad que en el centro. Este es el caso inclusive para un solenoide relativamente corto, como el de la figura 28.24.

28.24 Magnitud del campo magnético en puntos a lo largo del eje de un solenoide con longitud $4a$, equivalente a cuatro veces su radio a. La magnitud del campo en cada extremo es alrededor de la mitad de su valor en el centro. (Compare con la figura 28.14 para el campo de N espiras circulares).



Ejemplo 28.10 Campo de un solenoide toroidal



La figura 28.25*a* muestra un **solenoide toroidal** en forma de rosquilla, con embobinado compacto de N espiras de alambre que conduce una corriente I. (En un solenoide práctico las espiras estarían más apretadas de lo que aparecen en la figura). Obtenga el campo magnético en todos los puntos.

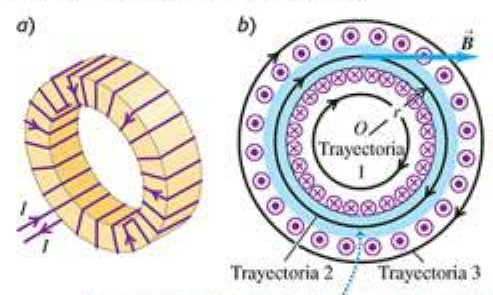
SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Ignorando el paso pequeño de los embobinados helicoidales, podemos considerar cada vuelta de un solenoide toroidal con embobinado compacto como una espira que se encuentra en un plano perpendicular al eje circular grande del toroide. La simetría de la situación nos dice que las líneas de campo magnético deben ser círculos concéntricos al eje del toroide. Por lo tanto, se eligen trayectorias de integración circulares (de las cuales se muestran tres en la figura 28.25*b*) para usarlas con la ley de Ampère, de modo que el campo $\vec{B}$ (si lo hay) sea tangente a cada trayectoria en todos sus puntos.

EJECUTAR: A lo largo de cada trayectoria, $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l}$ es igual al producto de B por la circunferencia $l = 2\pi r$ de la trayectoria. Pero la corriente total encerrada por la trayectoria 1 es igual a cero, por lo que según la ley de Ampère, el campo $\vec{B} = \mathbf{0}$ en cualquier punto de dicha trayectoria.

Cada espira del embobinado pasa *dos veces* a través del área limitada por la trayectoria 3, llevando corrientes iguales en sentidos opuestos.

28.25 *a*) Solenoide toroidal. Por claridad, solo se muestran algunas vueltas del embobinado. *b*) Trayectorias de integración (círculos negros) usadas para calcular el campo magnético $\vec{B}$ generado por la corriente (se representa con puntos y cruces).



Por lo tanto, la corriente *neta* encerrada dentro de esta área es igual a cero, por lo que también $\vec{B} = \mathbf{0}$ en todos los puntos de la trayectoria. Se concluye que *el campo de un solenoide toroidal ideal está confinado al espacio encerrado por los embobinados*. Podemos visualizar un

solenoide de este tipo como un solenoide recto con embobinado compacto que se ha doblado para formar un círculo.

Para la trayectoria 2, tenemos $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = 2\pi rB$. Cada vuelta del embobinado pasa *una vez* por el área limitada por esta trayectoria, de modo que $I_{enc} = NI$. Observe que I_{enc} es positiva para la dirección de integración en el sentido horario de la figura 28.25*b*, de manera que $\vec{B}$ está en la dirección mostrada. Por consiguiente, según la ley de Ampère, $2\pi rB = \mu_0 NI$, así que

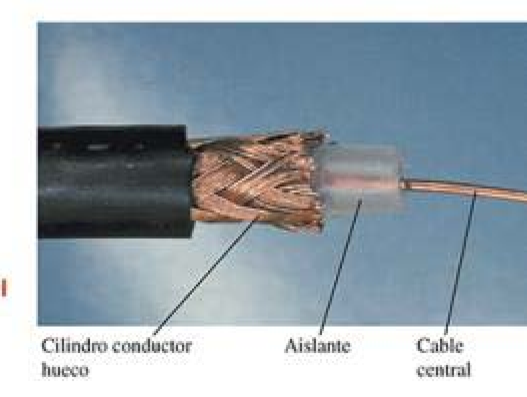
$$B = \frac{\mu_0 NI}{2\pi r} \qquad \text{(solenoide toroidal)} \qquad (28.24)$$

EVALUAR: La ecuación (28.24) indica que B *no* es uniforme en todo el interior del núcleo, porque diferentes puntos de su interior se encuentran a diferentes distancias r del eje del toroide. Sin embargo, si el espesor radial del núcleo es pequeño en comparación con r, la variación es ligera. En ese caso, si se considera que $2\pi r$ es la longitud de la circunferencia del toroide y que $N/2\pi r$ es el número de vueltas por unidad de longitud n, el campo se puede representar como $B = \mu_0 nI$, igual que si estuviera en el centro de un solenoide largo y *recto*.

En un solenoide toroidal real, las vueltas no son precisamente espiras circulares, sino segmentos de una hélice doblada. Como resultado, el campo en el exterior no vale estrictamente cero. Para estimar su magnitud, imaginemos que la figura 28.25*a* equivale *aproximadamente*, con respecto a puntos situados afuera del toro, a *una sola espira* circular de radio r. En el centro de cada una de estas espiras, la ecuación (28.17) da $B = \mu_0 I/2r$; este es más pequeño que el campo en el interior del solenoide aproximadamente en un factor de N/π.

Las ecuaciones que hemos obtenido para el campo en un solenoide recto o toroidal con embobinado compacto solo son correctas en el sentido estricto si los devanados están en un *vacío*. Sin embargo, para la mayoría de los fines prácticos, se pueden aplicar a embobinados en aire o sobre un núcleo de algún material no magnético y no superconductor. En la siguiente sección se verá cómo se modifican estas ecuaciones si el núcleo es un material magnético.

Evalúe su comprensión de la sección 28.7 Considere un alambre conductor que corre a lo largo del eje central de un cilindro conductor hueco. Ese arreglo, llamado *cable coaxial*, tiene muchas aplicaciones en las telecomunicaciones. (Un ejemplo es el cable que conecta un televisor con el proveedor local de señal de cable). En ese cable, una corriente I corre en un sentido a lo largo del cilindro conductor hueco y se distribuye uniformemente en el área de la sección transversal del cilindro. Una corriente igual corre en sentido opuesto a lo largo del cable central. ¿Cómo depende la magnitud B del campo magnético afuera del cable, de la distancia r desde el eje central del cable? **i.** B es proporcional a $1/r$; **ii.** B es proporcional a $1/r^2$; **iii.** B es igual a cero en todos los puntos afuera del cable. ❙



28.8 Materiales magnéticos

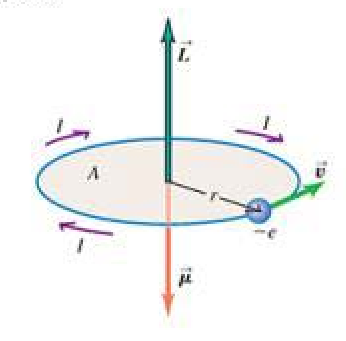
En el análisis de cómo es que las corrientes generan campos magnéticos, se ha supuesto que los conductores están rodeados por vacío. Pero las bobinas de transformadores, motores, generadores y electroimanes casi siempre tienen núcleos de hierro para incrementar el campo magnético y confinarlo a las regiones deseadas. Los imanes permanentes, las cintas magnéticas de grabación y los discos de computadora dependen directamente de las propiedades magnéticas de los materiales; cuando se guarda información en un disco de computadora, en realidad se establece una configuración de imanes permanentes microscópicos en el disco. Así que conviene examinar algunos aspectos de las propiedades magnéticas de los materiales. Después de describir los orígenes atómicos de las propiedades magnéticas, estudiaremos las tres grandes clases de comportamiento magnético que ocurren en los materiales: *paramagnetismo*, *diamagnetismo* y *ferromagnetismo*.

El magnetón de Bohr

Como se vio brevemente en la sección 27.7, los átomos que constituyen toda la materia contienen electrones en movimiento, los cuales forman espiras microscópicas de corriente que producen campos magnéticos por sí mismos. En muchos materiales, estas corrientes se encuentran orientadas al azar y no producen un campo magnético neto. Pero en algunos materiales, un campo externo (producido por corrientes afuera del material) ocasiona que estas espiras se orienten en forma preferencial con el campo, por lo que sus campos magnéticos se *suman* al campo exterior. Entonces decimos que el material se ha *magnetizado*.

Veamos cómo surgen estas corrientes microscópicas. La figura 28.26 muestra un modelo primitivo de un electrón en un átomo. Se representa el electrón (masa, m; carga, $-e$) como si se desplazara en una órbita circular con radio r y velocidad v. Esta carga en movimiento es equivalente a una espira de corriente. En la sección 27.7 se vio que una espira de corriente con área A y corriente I tiene un momento dipolar magnético μ dado por $\mu = IA$; para el electrón en órbita, el área de la espira es $A = \pi r^2$.

28.26 Un electrón en movimiento con rapidez v en una órbita circular de radio r tiene un momento angular $\vec{L}$ y un momento dipolar magnético orbital opuesto $\vec{\mu}$. También tiene un momento angular de espín y un momento dipolar magnético de espín en sentido opuesto.



Para obtener la corriente asociada con el electrón, vemos que el periodo orbital T (el tiempo que tarda el electrón en completar una órbita) es la circunferencia de la órbita dividida entre la rapidez del electrón: $T = 2\pi r/v$. La corriente equivalente I es la carga total que pasa por cualquier punto de la órbita por unidad de tiempo, la cual es justamente la magnitud e de la carga del electrón dividida entre el periodo orbital T:

$$I = \frac{e}{T} = \frac{ev}{2\pi r}$$

Entonces, el momento magnético $\mu = IA$ es

$$\mu = \frac{ev}{2\pi r}(\pi r^2) = \frac{evr}{2} \tag{28.25}$$

Es útil expresar μ en términos del *momento angular* L del electrón. Para una partícula que se desplaza en una trayectoria circular, la magnitud del momento angular es igual a la magnitud del momento lineal mv multiplicado por el radio r, es decir, $L = mvr$ (véase la sección 10.5). Al comparar esto con la ecuación (28.25), podemos escribir

$$\mu = \frac{e}{2m}L \tag{28.26}$$

La ecuación (28.26) es útil en este análisis porque el momento angular atómico está *cuantizado*; su componente en una dirección particular siempre es múltiplo entero de $h/2\pi$, donde h es una constante física fundamental llamada *constante de Planck*. El valor numérico de h es

$$h = 6.626 \times 10^{-34}\ \text{J}\cdot\text{s}$$

La cantidad $h/2\pi$ representa una unidad fundamental del momento angular en los sistemas atómicos, del mismo modo que e es una unidad fundamental de carga. Asociada con la cuantización de $\vec{L}$ hay una incertidumbre fundamental en la *dirección* de $\vec{L}$ y, por lo tanto, de $\vec{\mu}$. En el siguiente análisis, cuando hablemos de la magnitud de un momento magnético, un enunciado más preciso sería "componente máxima en una dirección". De esta forma, decir que un momento magnético $\vec{\mu}$ está alineado con un campo magnético $\vec{B}$ en realidad significa que $\vec{\mu}$ tiene su componente máxima posible en la dirección de $\vec{B}$; tales componentes siempre están cuantizadas.

La ecuación (28.26) muestra que, asociada con la unidad fundamental del momento angular, hay otra unidad fundamental correspondiente de momento magnético. Si $L = h/2\pi$, entonces

$$\mu = \frac{e}{2m}\left(\frac{h}{2\pi}\right) = \frac{eh}{4\pi m} \tag{28.27}$$

Esta cantidad se llama **magnetón de Bohr**, y se expresa con μ_B. Su valor numérico es

$$\mu_B = 9.274 \times 10^{-24}\ \text{A}\cdot\text{m}^2 = 9.274 \times 10^{-24}\ \text{J/T}$$

Le recomendamos verificar que estos dos conjuntos de unidades sean congruentes. El segundo conjunto es útil cuando se calcula la energía potencial $U = -\vec{\mu}\cdot\vec{B}$ para un momento magnético en un campo magnético.

Los electrones también tienen momento angular intrínseco, llamado *espín*, que no se relaciona con el movimiento orbital, sino que se puede visualizar en un modelo clásico como si girara sobre su propio eje. Este momento angular también tiene asociado un momento magnético, y su magnitud resulta ser casi exactamente un magnetón de Bohr. (Ciertos efectos que tienen que ver con la cuantización del campo electromagnético ocasionan que el espín del momento magnético sea alrededor de $1.001\ \mu_B$).

Paramagnetismo

En un átomo, la mayoría de los distintos momentos magnéticos orbitales y de espín de los electrones suman cero. Sin embargo, en ciertos casos el átomo tiene un momento magnético total que es del orden de μ_B. Cuando un material así se coloca en un campo magnético, este ejerce una torca sobre cada momento magnético, de

acuerdo con la ecuación (27.26): $\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B}$. Estas torcas tienden a alinear los momentos magnéticos con el campo, como se vio en la sección 27.7. En esta posición, las direcciones de las espiras de corriente son de tal naturaleza que se *suman* al campo magnético aplicado.

En la sección 28.5 vimos que el campo $\vec{B}$ producido por una espira de corriente es proporcional al momento dipolar magnético de la espira. Del mismo modo, el campo adicional $\vec{B}$ producido por espiras de corriente microscópicas de los electrones, es proporcional al momento magnético total $\vec{\mu}_{total}$ por unidad de volumen V en el material. Esta cantidad vectorial recibe el nombre de **magnetización** del material, y se expresa con $\vec{M}$:

$$\vec{M} = \frac{\vec{\mu}_{total}}{V} \tag{28.28}$$

El campo magnético adicional debido a la magnetización del material resulta ser igual a $\mu_0\vec{M}$, donde μ_0 es la misma constante que aparece en la ley de Biot y Savart y la ley de Ampère. Cuando un material así rodea por completo un conductor portador de corriente, el campo magnético total $\vec{B}$ en el material es

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \mu_0\vec{M} \tag{28.29}$$

donde $\vec{B}_0$ es el campo generado por la corriente en el conductor.

Para comprobar que las unidades de la ecuación (28.29) son congruentes, observe que la magnetización $\vec{M}$ es momento magnético por unidad de volumen. Las unidades de momento magnético son las de corriente por área $(A \cdot m^2)$, por lo que las unidades de magnetización son $(A \cdot m^2)/m^3 = A/m$. De acuerdo con la sección 28.1, las unidades de la constante μ_0 son $T \cdot m/A$. Así que las unidades de $\mu_0\vec{M}$ son las mismas que las de $\vec{B}$: $(T \cdot m/A)(A/m) = T$.

Se dice que un material que tenga el comportamiento que se acaba de describir es **paramagnético**. El resultado es que el campo magnético en cualquier punto de un material así es mayor en un factor adimensional K_m, llamado **permeabilidad relativa** del material, de lo que sería si ese material se reemplazara por un vacío. El valor de K_m es diferente para distintos materiales; para sólidos y líquidos paramagnéticos comunes a temperatura ambiente, es común que K_m varíe entre 1.00001 a 1.003.

Todas las ecuaciones de este capítulo que relacionan los campos magnéticos con sus fuentes se adaptan a la situación en la que el conductor que transporta corriente está dentro de un material paramagnético. Todo lo que se necesita hacer es sustituir μ_0 por $K_m\mu_0$. Este producto por lo general se indica como μ y se llama **permeabilidad** del material:

$$\mu = K_m\mu_0 \tag{28.30}$$

CUIDADO **Dos significados del símbolo μ** La ecuación (28.30) implica cierta notación realmente peligrosa, porque también hemos usado μ para expresar el momento dipolar magnético. Es costumbre usar μ para ambas cantidades, pero cuidado: de aquí en adelante, cada vez que vea μ, cerciórese de si representa permeabilidad o momento magnético. Por lo general, eso se deduce a partir del contexto.

La cantidad en que la permeabilidad relativa difiere de la unidad se llama **susceptibilidad magnética**, y se denota con χ_m:

$$\chi_m = K_m - 1 \tag{28.31}$$

Tanto K_m como χ_m son cantidades adimensionales. En la tabla 28.1 se dan valores de susceptibilidad magnética para varios materiales. Por ejemplo, para el aluminio, $\chi_m = 2.2 \times 10^{-5}$ y $K_m = 1.000022$. Los materiales en el primer grupo de la tabla son paramagnéticos; dentro de poco estudiaremos el segundo grupo de materiales, a los que llamamos *diamagnéticos*.

La tendencia que tienen los momentos magnéticos atómicos a alinearse de forma paralela al campo magnético (donde la energía potencial es mínima) se opone al movimiento térmico aleatorio, el cual tiende a distribuir sus orientaciones al azar. Por esta razón, la susceptibilidad paramagnética siempre disminuye con el aumento de

Tabla 28.1 Susceptibilidades magnéticas de materiales paramagnéticos y diamagnéticos a $T = 20°C$

Material	$\chi_m = K_m - 1\ (\times 10^{-5})$
Paramagnéticos	
Alumbre de hierro y amonio	66
Uranio	40
Platino	26
Aluminio	2.2
Sodio	0.72
Oxígeno gaseoso	0.19
Diamagnéticos	
Bismuto	−16.6
Mercurio	−2.9
Plata	−2.6
Carbono (diamante)	−2.1
Plomo	−1.8
Cloruro de sodio	−1.4
Cobre	−1.0

temperatura. En muchos casos es inversamente proporcional a la temperatura absoluta T, y la magnetización M puede expresarse como

$$M = C\frac{B}{T} \tag{28.32}$$

Esta relación se llama *ley de Curie*, en honor de su descubridor, Pierre Curie (1859-1906). La cantidad C es una constante, diferente para los distintos materiales, llamada *constante de Curie*.

Como se describió en la sección 27.7, un cuerpo con dipolos magnéticos atómicos es atraído hacia los polos de un imán. En la mayoría de las sustancias paramagnéticas, esta atracción es muy débil debido a la redistribución térmica aleatoria de los momentos magnéticos atómicos. Pero a temperaturas muy bajas, los efectos térmicos se reducen, la magnetización aumenta de acuerdo con la ley de Curie, y las fuerzas de atracción son mayores.

Ejemplo 28.11 Dipolos magnéticos en un material paramagnético



El óxido nítrico (NO) es un compuesto paramagnético. El momento magnético de cada molécula de NO tiene una componente máxima en cualquier dirección de alrededor de un magnetón de Bohr. En un campo magnético de 1.5 T, compare la energía de interacción de estos momentos magnéticos con la energía cinética de traslación media de las moléculas a una temperatura de 300 K.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Este problema implica la energía de un momento magnético en un campo magnético y la energía cinética térmica media. Tenemos la ecuación (27.27), $U = -\vec{\mu}\cdot\vec{B}$, para la energía de interacción de un momento magnético $\vec{\mu}$ con un campo $\vec{B}$ y la ecuación (18.16), $K = \frac{3}{2}kT$, para la energía cinética de traslación media de una molécula a temperatura T.

EJECUTAR: Podemos escribir $U = -\mu_{\parallel}B$, donde $\mu_{\parallel}$ es la componente del momento magnético $\vec{\mu}$ en la dirección del campo $\vec{B}$. En este caso, el valor máximo de la componente $\mu_{\parallel}$ de aproximadamente μ_B, por lo que

$$|U|_{\text{máx}} \approx \mu_B B = (9.27 \times 10^{-24}\ \text{J/T})(1.5\ \text{T})$$
$$= 1.4 \times 10^{-23}\ \text{J} = 8.7 \times 10^{-5}\ \text{eV}$$

La energía cinética de traslación media K es

$$K = \tfrac{3}{2}kT = \tfrac{3}{2}(1.38 \times 10^{-23}\ \text{J/K})(300\ \text{K})$$
$$= 6.2 \times 10^{-21}\ \text{J} = 0.039\ \text{eV}$$

EVALUAR: A 300 K, la energía de interacción magnética es solo de 0.2% aproximadamente de la energía cinética térmica, de modo que se espera un pequeño grado de alineamiento. Por eso, las susceptibilidades paramagnéticas a temperatura ordinaria son, por lo general, muy pequeñas.

Diamagnetismo

En ciertos materiales, el momento magnético total de todas las espiras atómicas de corriente es igual a cero cuando no hay un campo magnético. Pero incluso estos materiales tienen efectos magnéticos porque un campo externo altera los movimientos de los electrones dentro de los átomos, lo que genera espiras de corriente adicionales y dipolos magnéticos inducidos comparables a los dipolos *eléctricos* inducidos que se estudiaron en la sección 28.5. En este caso, la dirección del campo adicional provocado por estas espiras de corriente siempre es *opuesta* a la dirección del campo externo. (Este comportamiento se explica mediante la ley de Faraday de la inducción, que se estudiará en el capítulo 29. Una corriente inducida siempre tiende a cancelar el cambio de campo que la provocó).

Se dice que tales materiales son **diamagnéticos**. Siempre tienen susceptibilidad negativa, como se aprecia en la tabla 28.1, y permeabilidad relativa K_m ligeramente *menor* que la unidad, comúnmente del orden de 0.99990 a 0.99999 para sólidos y líquidos. Las susceptibilidades diamagnéticas están muy cerca de ser independientes de la temperatura.

Ferromagnetismo

Existe una tercera clase de materiales, llamados **ferromagnéticos**, que incluyen al hierro, níquel, cobalto y muchas aleaciones que contienen estos elementos. En esos materiales, las interacciones fuertes entre los momentos magnéticos atómicos los llevan a alinearse paralelamente entre sí en regiones llamadas **dominios magnéticos**, aun cuando no esté presente un campo externo. La figura 28.27 muestra un ejemplo

de estructura de dominio magnético. Dentro de cada dominio, casi todos los momentos magnéticos atómicos son paralelos.

Cuando no hay un campo externo aplicado, las magnetizaciones de los dominios están orientadas al azar. Pero cuando está presente un campo $\vec{B}_0$ (generado por corrientes externas), los dominios tienden a orientarse paralelamente al campo. Las fronteras de dominio también se desplazan; los dominios magnetizados en dirección del campo crecen, y aquellos que lo están en otras direcciones se reducen. Como el momento magnético total de un dominio puede ser de muchos miles de magnetones de Bohr, las torcas que tienden a alinear los dominios con un campo externo son mucho más intensas que aquellas que se presentan en los materiales paramagnéticos. La permeabilidad relativa K_m es *mucho* mayor que la unidad, comúnmente del orden de 1000 a 100,000. Como resultado, un objeto hecho de un material ferromagnético como el hierro es magnetizado fuertemente por el campo de un imán permanente y es atraído por este (véase la figura 27.38). Un material paramagnético como el aluminio también es atraído por un imán permanente, pero las K_m de los materiales paramagnéticos son tan pequeñas en comparación con las de los materiales ferromagnéticos, que la atracción es muy débil. Por eso, un imán puede levantar clavos de hierro, pero no latas de aluminio.

A medida que se incrementa el campo externo, se alcanza en algún momento un punto en que casi *todos* los momentos magnéticos en el material ferromagnético están alineados en forma paralela con el campo externo. Esta condición se llama *magnetización de saturación*; una vez que esta se alcanza, un mayor incremento del campo externo ya no ocasiona un aumento en la magnetización ni en el campo adicional provocado por la magnetización.

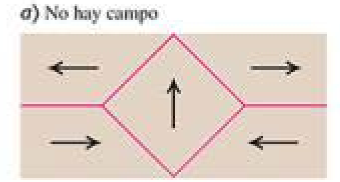
La figura 28.28 muestra una "curva de magnetización", una gráfica de la magnetización M como función del campo magnético externo B_0, para el hierro forjado. Una descripción alternativa de este comportamiento es que K_m no es constante, sino que disminuye conforme aumenta B_0. (Los materiales paramagnéticos también presentan saturación en campos suficientemente intensos. Pero los campos magnéticos que se requieren son tan grandes que la desviación con respecto a una relación lineal entre M y B_0 en estos materiales solo se observa a temperaturas muy bajas, de 1 K o cercanas).

Para muchos materiales ferromagnéticos, la relación entre magnetización y el campo magnético externo es diferente cuando el campo externo aumenta que cuando disminuye. La figura 28.29*a* muestra dicha relación para un material de este tipo. Cuando el material se magnetiza hasta la saturación y luego el campo externo se reduce a cero, permanece cierta magnetización. Tal comportamiento es característico de los imanes permanentes, que retienen la mayor parte de su magnetización de saturación cuando se retira el campo magnético. Para reducir la magnetización a cero se requiere un campo magnético en la dirección inversa.

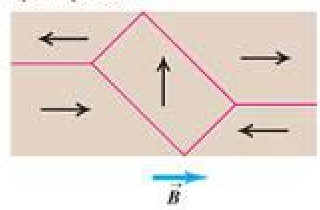
Este comportamiento se llama **histéresis**, y las curvas de la figura 28.29 se denominan *curvas* o *ciclos de histéresis*. La magnetización y desmagnetización de un material que tiene histéresis implica la disipación de energía, por lo que la temperatura del material aumenta durante este proceso.

28.27 En este diagrama, adaptado de una fotografía con aumento, las flechas señalan las direcciones de magnetización en los dominios de un solo cristal de níquel. Los dominios que están magnetizados en la dirección de un campo magnético aplicado crecen.

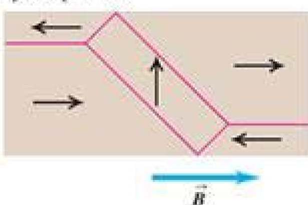
a) No hay campo



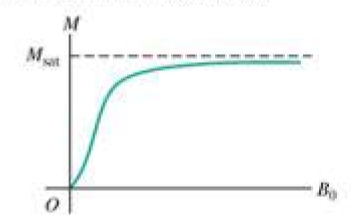
b) Campo débil



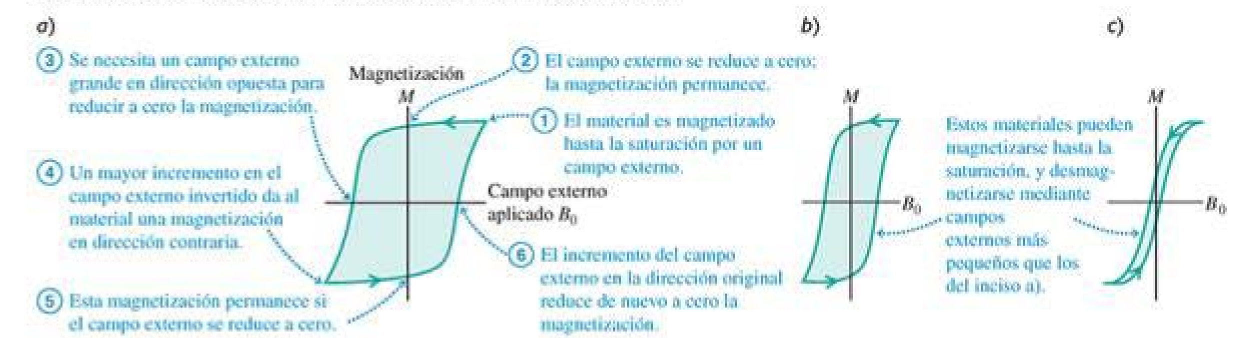
c) Campo fuerte



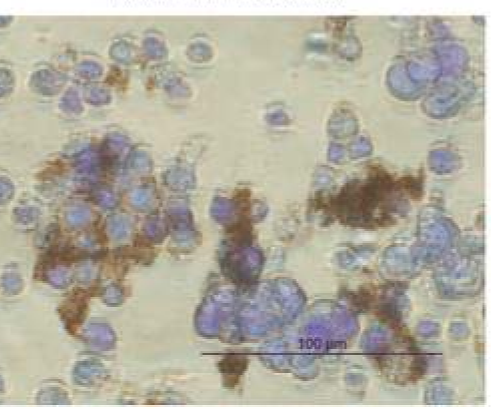
28.28 Curva de magnetización para un material ferromagnético. La magnetización M se aproxima a su valor de saturación M_{sat} conforme el campo magnético B_0 (generado por corrientes externas) aumenta.

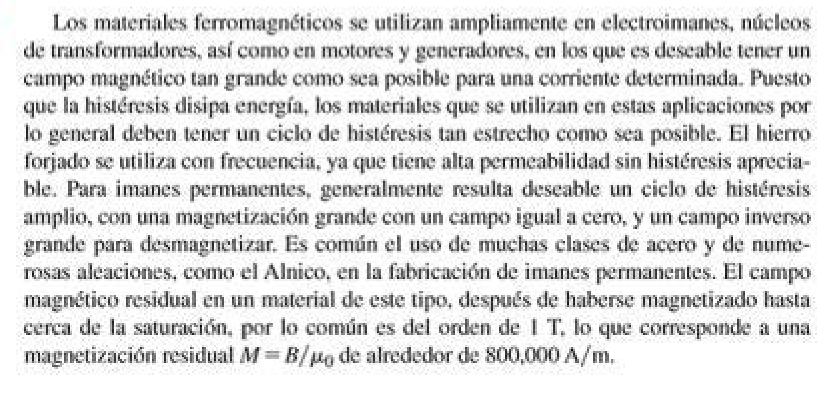


28.29 Ciclos de histéresis. Los materiales en los incisos *a*) y *b*) permanecen muy magnetizados cuando B_0 se reduce a cero. Como el material de *a*) también es difícil de desmagnetizar, sería adecuado para imanes permanentes. Puesto que el material de *b*) se magnetiza y desmagnetiza con más facilidad, podría usarse como material para memorias de computadoras. El material de *c*) sería útil para transformadores y otros dispositivos de corriente alterna en los que sería óptima una histéresis de cero.



Aplicación Nanopartículas magnéticas en el tratamiento contra el cáncer
En esta imagen microscópica, las manchas de color violeta son células cancerosas que se desprendieron de un tumor y amenazan con dispersarse por el cuerpo del paciente. Una técnica experimental para combatir estas células consiste en utilizar partículas de un material magnético (en color café) que se inyecta en el cuerpo. Estas partículas están recubiertas con una sustancia química que se adhiere preferentemente a las células cancerosas. Un imán colocado fuera del paciente se utiliza entonces para "conducir" a las partículas fuera del cuerpo. (Fotografía cortesía del investigador sobre el cáncer, el doctor Kenneth Scarberry).




Los materiales ferromagnéticos se utilizan ampliamente en electroimanes, núcleos de transformadores, así como en motores y generadores, en los que es deseable tener un campo magnético tan grande como sea posible para una corriente determinada. Puesto que la histéresis disipa energía, los materiales que se utilizan en estas aplicaciones por lo general deben tener un ciclo de histéresis tan estrecho como sea posible. El hierro forjado se utiliza con frecuencia, ya que tiene alta permeabilidad sin histéresis apreciable. Para imanes permanentes, generalmente resulta deseable un ciclo de histéresis amplio, con una magnetización grande con un campo igual a cero, y un campo inverso grande para desmagnetizar. Es común el uso de muchas clases de acero y de numerosas aleaciones, como el Alnico, en la fabricación de imanes permanentes. El campo magnético residual en un material de este tipo, después de haberse magnetizado hasta cerca de la saturación, por lo común es del orden de 1 T, lo que corresponde a una magnetización residual $M = B/\mu_0$ de alrededor de 800,000 A/m.

Ejemplo 28.12 Material ferromagnético



Un imán permanente en forma de cubo está hecho de un material ferromagnético con magnetización M de alrededor de 8×10^5 A/m. El imán tiene 2 cm por lado. *a*) Calcule el momento dipolar magnético del imán. *b*) Estime el campo magnético debido al imán en un punto situado a 10 cm del imán a lo largo de su eje.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Este problema se basa en la relación entre la magnetización M y el momento dipolar magnético μ_{total}, así como en la idea de que un dipolo magnético produce un campo magnético. Calculamos μ_{total} usando la ecuación (28.28). Para estimar el campo magnético, aproximamos el imán como una espira de corriente con el mismo momento magnético y usamos la ecuación (28.18).

EJECUTAR: *a*) De acuerdo con la ecuación (28.28),

$$\mu_{total} = MV = (8 \times 10^5\ \text{A/m})(2 \times 10^{-2}\ \text{m})^3 = 6\ \text{A} \cdot \text{m}^2$$

b) Según la ecuación (28.18), el campo magnético sobre el eje de una espira de corriente con momento magnético μ_{total} es

$$B = \frac{\mu_0 \mu_{total}}{2\pi(x^2 + a^2)^{3/2}}$$

donde x es la distancia desde la espira y a es su radio. Aquí se utiliza la misma expresión, si tomamos a como el tamaño del imán permanente. En sentido estricto, hay complicaciones porque nuestro imán no tiene la misma geometría que una espira de corriente circular. Pero como $x = 10$ cm es muy grande en comparación con el tamaño de 2 cm del imán, el término a^2 es insignificante en comparación con x^2, por lo que podemos ignorarlo. Entonces,

$$B \approx \frac{\mu_0 \mu_{total}}{2\pi x^3} = \frac{(4\pi \times 10^{-7}\ \text{T} \cdot \text{m/A})(6\ \text{A} \cdot \text{m}^2)}{2\pi(0.1\ \text{m})^3}$$
$$= 1 \times 10^{-3}\ \text{T} = 10\ \text{G}$$

el cual es alrededor de 10 veces más intenso que el campo magnético de la Tierra.

EVALUAR: Calculamos B en un punto ubicado *afuera* del material magnético y, por lo tanto, usamos μ_0, no la permeabilidad μ del material magnético. Habría que sustituir μ_0 por la permeabilidad μ si se tuviera que calcular B *dentro* de un material con permeabilidad relativa K_m, para el que $\mu = K_m \mu_0$.

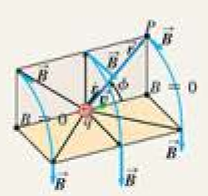
Evalúe su comprensión de la sección 28.8 ¿Cuáles de los siguientes materiales son atraídos por un imán? **i.** Sodio; **ii.** bismuto; **iii.** plomo; **iv.** uranio. ❙

RESUMEN



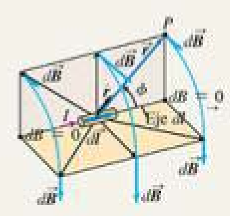
Campo magnético de una carga en movimiento: El campo magnético $\vec{B}$ creado por una carga q en movimiento con velocidad $\vec{v}$ depende de la distancia r entre el punto fuente (ubicación de q) y el punto de campo (donde se mide $\vec{B}$). El campo $\vec{B}$ es perpendicular a $\vec{v}$ y a $\hat{r}$, el vector unitario dirigido del punto fuente al punto de campo. El principio de superposición de campos magnéticos dice que el campo total producido por varias cargas en movimiento es la suma vectorial de los campos producidos por las cargas individuales. (Véase el ejemplo 28.1).

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q\vec{v} \times \hat{r}}{r^2} \qquad (28.2)$$



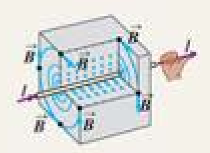
Campo magnético de un conductor que transporta corriente: La ley de Biot y Savart da el campo magnético $d\vec{B}$ creado por un elemento $d\vec{l}$ de un conductor que transporta una corriente I. El campo $d\vec{B}$ es perpendicular tanto a $d\vec{l}$ como a $\hat{r}$, el vector unitario dirigido desde el elemento hasta el punto de campo. El campo $\vec{B}$ creado por un conductor finito que transporta corriente es la integral de $d\vec{B}$ a lo largo de la longitud del conductor. (Véase el ejemplo 28.2).

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\,d\vec{l} \times \hat{r}}{r^2} \qquad (28.6)$$



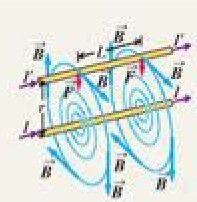
Campo magnético de un conductor largo, recto y portador de corriente: El campo magnético $\vec{B}$ a una distancia r de un conductor largo, recto y que transporta una corriente I tiene una magnitud inversamente proporcional a r. Las líneas de campo magnético son círculos coaxiales con el cable, con direcciones dadas por la regla de la mano derecha. (Véase los ejemplos 28.3 y 28.4).

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \qquad (28.9)$$



Fuerza magnética entre conductores que transportan corriente: Dos conductores largos, paralelos y que transportan corriente se atraen si las corrientes van en el mismo sentido, y se repelen si las corrientes tienen sentidos opuestos. La fuerza magnética por unidad de longitud entre los conductores depende de sus corrientes I e I' y su separación r. La definición de ampere se basa en esta relación. (Véase el ejemplo 28.5).

$$\frac{F}{L} = \frac{\mu_0 I I'}{2\pi r} \qquad (28.11)$$



Campo magnético de una espira de corriente: La ley de Biot y Savart permite calcular el campo magnético producido a lo largo del eje de una espira circular conductora, de radio a, que transporta una corriente I. El campo depende de la distancia x a lo largo del eje desde el centro de la espira al punto de campo. Si hay N espiras, el campo se multiplica por N. En el centro de la espira, $x = 0$. (Véase el ejemplo 28.6).

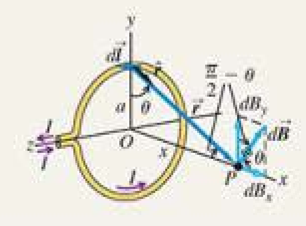
$$B_x = \frac{\mu_0 I a^2}{2(x^2 + a^2)^{3/2}} \qquad (28.15)$$



(espira circular)

$$B_x = \frac{\mu_0 N I}{2a} \qquad (28.17)$$

(centro de N espiras circulares)



Ley de Ampère: La ley de Ampère establece que la integral de línea de $\vec{B}$ alrededor de cualquier trayectoria cerrada es igual a μ_0 multiplicada por la corriente total a través del área encerrada por la trayectoria. El sentido positivo de la corriente se determina mediante la regla de la mano derecha. (Véase los ejemplos 28.7 a 28.10).

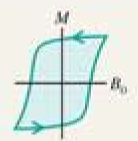
$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{\text{enc}} \qquad (28.20)$$



Campos magnéticos debidos a distribuciones de corriente: La siguiente tabla muestra los campos magnéticos generados por varias distribuciones de corriente. En cada caso, el conductor transporta una corriente I.

Distribución de corriente	Punto en el campo magnético	Magnitud del campo magnético
Conductor largo y recto	Distancia r desde el conductor	$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$
Espira circular de radio a	Sobre el eje de la espira	$B = \frac{\mu_0 I a^2}{2(x^2 + a^2)^{3/2}}$
	En el centro de la espira	$B = \frac{\mu_0 I}{2a}$ (para N espiras, multiplique estas expresiones por N)
Conductor largo y cilíndrico de radio R	Dentro del conductor, $r < R$	$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\frac{r}{R^2}$
	Fuera del conductor, $r > R$	$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$
Solenoide largo, con embobinado compacto y n vueltas por unidad de longitud, cerca de su punto medio	Dentro del solenoide, cerca del centro	$B = \mu_0 n I$
	Fuera del solenoide	$B \approx 0$
Solenoide toroidal (toroide) con embobinado compacto y N vueltas	Dentro del espacio encerrado por el embobinado, a una distancia r del eje de simetría.	$B = \frac{\mu_0 N I}{2\pi r}$
	Fuera del espacio encerrado por el embobinado	$B \approx 0$

Materiales magnéticos: Cuando están presentes materiales magnéticos, la magnetización del material ocasiona una contribución adicional a $\vec{B}$. Para materiales paramagnéticos y diamagnéticos, μ_0 se sustituye en las expresiones del campo magnético por $\mu = K_m\mu_0$, donde μ es la permeabilidad del material y K_m es su permeabilidad relativa. La susceptibilidad magnética χ_m se define como $\chi_m = K_m - 1$. Las susceptibilidades magnéticas para materiales paramagnéticos son pequeñas cantidades positivas; las de los materiales diamagnéticos son pequeñas cantidades negativas. Para materiales ferromagnéticos, K_m es mucho mayor que la unidad y no es constante. Algunos materiales ferromagnéticos son imanes permanentes y mantienen su magnetización aun después de retirado el campo magnético externo. (Véase los ejemplos 28.11 y 28.12).



PROBLEMA PRÁCTICO Campo magnético de un disco dielétrico giratorio cargado



Un disco delgado de material dieléctrico de radio a tiene una carga total $+Q$ distribuida de manera uniforme sobre su superficie. El disco gira n veces por segundo alrededor de un eje perpendicular a la superficie del disco y que pasa por su centro. Obtenga el campo magnético en el centro del disco.

GUÍA DE SOLUCIÓN

Véase el área de estudio MasteringPhysics® para consultar una solución con Video Tutor.

IDENTIFICAR y PLANTEAR

1. Visualice el disco giratorio como una serie de anillos giratorios concéntricos. Cada anillo actúa como una espira circular de corriente que produce un campo magnético en el centro del disco.
2. Use los resultados de la sección 28.5 para obtener el campo magnético debido a un solo anillo. Luego, integre a lo largo de todos los anillos para determinar el campo total.

EJECUTAR

3. Calcule la carga en un anillo de radio interior r y radio exterior $r + dr$.
4. ¿Cuánto tiempo tarda la carga calculada en el paso 3 en realizar un recorrido completo alrededor del anillo giratorio? Use este tiempo para calcular la corriente del anillo.
5. Emplee el resultado de la sección 28.5 para determinar el campo magnético que este anillo produce en el centro del disco.
6. Integre el resultado del paso 5 para determinar el campo magnético total de todos los anillos con radios de $r = 0$ a $r = a$.

EVALUAR

7. ¿La respuesta tiene las unidades correctas?
8. Suponga que toda la carga estuviera concentrada en el borde del disco (en $r = a$). ¿Esto aumentaría o disminuiría el campo en el centro del disco?

Problemas

Para tareas asignadas por el profesor, visite www.masteringphysics.com 

•, ••, •••: Problemas de dificultad creciente. **PA**: Problemas acumulativos que incorporan material de capítulos anteriores. **CALC**: Problemas que requieren cálculo. **BIO**: Problemas de ciencias biológicas.

PREGUNTAS PARA ANÁLISIS

P28.1 Un tema de interés actual en la investigación en física es la búsqueda (aún sin éxito) de un polo magnético aislado, o *monopolo* magnético. Si se encontrara, ¿cómo podría reconocerse? ¿Cuáles serían sus propiedades?

P28.2 El flujo de partículas con carga emitidas por el Sol durante los periodos de actividad solar genera una perturbación en el campo magnético de la Tierra. ¿Cómo ocurre esto?

P28.3 En el texto se analiza el campo magnético de un conductor infinitamente largo y recto que transporta una corriente. Por supuesto, no hay *nada* que sea infinitamente largo. ¿Cómo determinaría usted que un alambre en particular es suficientemente largo como para considerarlo infinito?

P28.4 Dos conductores paralelos que llevan corriente en el mismo sentido se atraen entre sí. Si se les permitiera acercarse, las fuerzas de atracción harían trabajo. ¿De dónde proviene la energía? ¿Contradice esto la afirmación que se hizo en el capítulo 27 de que las fuerzas magnéticas sobre cargas en movimiento no efectúan trabajo? Explique su respuesta.

P28.5 En ocasiones, los pares de conductores que transportan corriente hacia o desde los componentes de suministro de energía de los equipos electrónicos están entrelazados para reducir los efectos de los campos magnéticos. ¿Cómo ayuda esto?

P28.6 Suponga que tiene tres alambres largos y paralelos dispuestos de manera que, vistos en sección transversal, se encuentran en los vértices de un triángulo equilátero. ¿Hay algún modo de arreglar las corrientes de manera que los tres alambres se atraigan entre sí? ¿Y de modo que los tres se rechacen entre sí? Explique su respuesta.

P28.7 Al obtener la fuerza sobre uno de los conductores largos que transportan corriente, en la sección 28.4, ¿por qué usamos el campo magnético debido solo a uno de los conductores? Es decir, ¿por qué no utilizamos el campo magnético *total* debido a *ambos* conductores?

P28.8 Dos espiras circulares concéntricas coplanares de alambre, de distinto diámetro, conducen corrientes en el mismo sentido. Describa la naturaleza de la fuerza ejercida sobre la espira interior por la espira exterior, y sobre la espira exterior por la espira interior.

P28.9 Se envió una corriente a través de un resorte helicoidal. El resorte se contrajo, como si se hubiera comprimido. ¿Por qué?

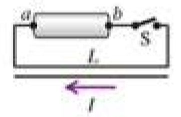
P28.10 ¿Cuáles son las ventajas y desventajas relativas de la ley de Ampère y de la ley de Biot y Savart para hacer cálculos prácticos de campos magnéticos?

P28.11 Las líneas de campos magnéticos nunca tienen principio ni fin. Con base en esto, explique por qué es razonable que el campo de un solenoide toroidal esté confinado por completo en su interior, mientras que un solenoide recto *debe* tener cierto campo en el exterior.

P28.12 Si la magnitud del campo magnético a una distancia R de un alambre largo, recto y que conduce corriente es B, ¿a qué distancia del alambre el campo tendrá una magnitud de $3B$?

P28.13 Dos cables muy largos y paralelos, transportan corrientes iguales en sentidos opuestos. *a*) ¿Hay algún sitio en el que sus campos magnéticos se anulen por completo? Si es así, ¿dónde? Si no, ¿por qué? *b*) ¿Cómo cambiaría la respuesta del inciso *a*) si las corrientes tuvieran el mismo sentido?

Figura **P28.14**



P28.14 En el circuito que se ilustra en la figura P28.14, cuando se cierra súbitamente el interruptor S, el alambre L experimenta un tirón hacia el alambre inferior que transporta la corriente I. ¿Cuál (a o b) es la terminal positiva de la batería? ¿Cómo lo sabe?

P28.15 Un anillo de metal conduce una corriente que genera un campo magnético B_0 en el centro del anillo, y un campo B en el punto P a una distancia x del centro a lo largo del eje del anillo. Si el radio del anillo se duplica, encuentre el campo magnético en el centro. ¿El campo en el punto P cambiaría en el mismo factor? ¿Por qué?

P28.16 ¿Por qué debe esperarse que la permeabilidad de un material paramagnético disminuya al aumentar la temperatura?

P28.17 Si un imán es suspendido sobre un recipiente de aire líquido, atrae gotas a sus polos. Las gotas contienen solo oxígeno líquido; aunque el elemento principal que constituye el aire es el nitrógeno, no se ve atraído por el imán. Explique qué dice esto sobre las susceptibilidades magnéticas del oxígeno y el nitrógeno, y explique por qué un imán ordinario, a temperatura ambiente, no atrae moléculas de oxígeno *gaseoso* a sus polos.

P28.18 ¿Qué características de la estructura atómica determinan si un elemento es diamagnético o paramagnético? Explique su respuesta.

P28.19 La susceptibilidad magnética de los materiales paramagnéticos depende mucho de la temperatura, pero la de los materiales diamagnéticos casi es independiente de la temperatura. ¿A qué se debe la diferencia?

P28.20 Se coloca un cilindro de hierro de manera que tenga libertad para girar alrededor de su eje. Al principio, el cilindro está en reposo y se le aplica un campo magnético de manera que se magnetice en una dirección paralela a su eje. Si la dirección del campo *externo* se invierte súbitamente, la dirección de magnetización también se invertirá y el cilindro comenzará a girar alrededor de su eje. (Esto se llama *efecto de Einstein-de Haas*). Explique por qué comienza a girar el cilindro.

P28.21 En el análisis de las fuerzas magnéticas en espiras de corriente en la sección 27.7, se dijo que sobre una espira completa en un campo magnético uniforme no se ejerce una fuerza neta, solo una torca. Pero los materiales magnetizados que contienen espiras atómicas de corriente *sí* experimentan fuerzas netas en campos magnéticos. ¿Cómo se podría resolver esta discrepancia?

P28.22 Demuestre que las unidades $A \cdot m^2$ y J/T para el magnetón de Bohr son equivalentes.

EJERCICIOS

Sección 28.1 Campo magnético de una carga en movimiento

28.1 •• Una carga puntual de $+6.00\ \mu C$ se desplaza con rapidez constante de 8.00×10^6 m/s en la dirección $+y$ con respecto de un marco de referencia. En el instante en que la carga puntual está en el origen de este marco de referencia, ¿cuál es el vector del campo magnético $\vec{B}$ que produce en los siguientes puntos: *a*) $x = 0.500$ m, $y = 0$, $z = 0$; *b*) $x = 0$, $y = -0.500$ m, $z = 0$; *c*) $x = 0$, $y = 0$, $z = +0.500$ m; *d*) $x = 0$, $y = -0.500$ m, $z = +0.500$ m?

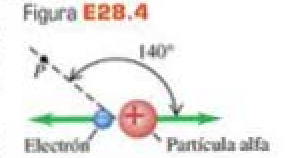
28.2 • **Campos dentro del átomo.** En el modelo de Bohr del átomo de hidrógeno, el electrón se desplaza en una órbita circular de radio 5.3×10^{-11} m con una rapidez de 2.2×10^6 m/s. Si se observa el átomo en forma tal que la órbita del electrón esté en el plano del papel y el electrón se mueva en sentido horario, determine la magnitud y dirección de los campos eléctrico y magnético que produce el electrón en la ubicación del núcleo (considerado como un punto).

28.3 • Un electrón se mueve a 0.100*c*, como se muestra en la figura E28.3. Calcule la magnitud y dirección del campo magnético que este electrón produce en los siguientes puntos, cada uno situado a 2.00 μm desde el electrón: *a*) puntos *A* y *B*; *b*) punto *C*; *c*) punto *D*.

Figura **E28.3**

28.4 •• Una partícula alfa (carga +2*e*) y un electrón se mueven en sentidos opuestos desde el mismo punto, cada uno con rapidez de 2.50×10^5 m/s (figura E28.4). Calcule la magnitud y dirección del campo magnético total que producen estas cargas en el punto *P*, que se encuentra a 1.75 nm de cada uno.

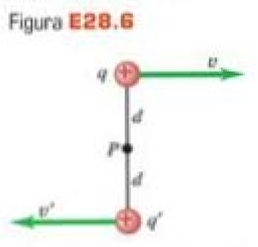
Figura **E28.4**



28.5 • Una carga de −4.80 μC se desplaza con rapidez constante de 6.80×10^5 m/s en la dirección +*x* en relación con un marco de referencia. En el instante en que la carga puntual está en el origen, ¿cuál es la magnitud del vector campo magnético que produce en los siguientes puntos? *a*) $x = 0.500$ m, $y = 0$, $z = 0$; *b*) $x = 0$, $y = 0.500$ m, $z = 0$; *c*) $x = 0.500$ m, $y = 0.500$ m, $z = 0$; *d*) $x = 0$, $y = 0$, $z = 0.500$ m.

28.6 • Dos cargas puntuales positivas, $q = +8.00$ μC y $q' = +3.00$ μC, se desplazan en relación con un observador en el punto *P*, como se ilustra en la figura E28.6. La distancia *d* es 0.120 m, $v = 4.50 \times 10^6$ m/s, y $v' = 9.00 \times 10^6$ m/s. *a*) Cuando las dos cargas están en las ubicaciones que se indican en la figura, ¿cuáles son la magnitud y la dirección del campo magnético neto que producen en el punto *P*? *b*) ¿Cuáles son la magnitud y la dirección de las fuerzas eléctrica y magnética que cada carga ejerce sobre la otra? ¿Cuál es la razón entre la magnitud de la fuerza eléctrica y la magnitud de la fuerza magnética? *c*) Si la dirección de $\vec{v}'$ se invierte, de manera que las dos cargas se desplacen en la misma dirección, ¿cuáles son la magnitud y la dirección de las fuerzas magnéticas que cada carga ejerce sobre la otra?

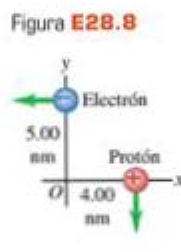
Figura **E28.6**



28.7 •• La figura E28.6 muestra dos cargas puntuales *q* y *q'*, que se desplazan en relación con un observador situado en el punto *P*. Suponga que la carga inferior en realidad es *negativa*, con $q' = -q$. *a*) Encuentre el campo magnético (magnitud y dirección) producido por las dos cargas en el punto *P* si **i.** $v' = v/2$; **ii.** $v' = v$; **iii.** $v' = 2v$. *b*) Calcule la dirección de la fuerza magnética que ejerce *q* sobre *q'*, y encuentre la dirección de la fuerza magnética que *q'* ejerce sobre *q*. *c*) Si $v = v' = 3.00 \times 10^5$ m/s, ¿cuál es la razón entre la magnitud de la fuerza magnética que actúa sobre cada carga y la magnitud de la fuerza de Coulomb que actúa sobre cada una?

28.8 •• Un electrón y un protón se desplazan cada uno a 845 km/s en trayectorias perpendiculares, como se ilustra en la figura E28.8. En el instante en que están en las posiciones ilustradas en la figura, determine la magnitud y dirección de *a*) el campo magnético total que producen en el origen; *b*) el campo magnético que produce el electrón en la ubicación del protón; *c*) la fuerza eléctrica total y la fuerza magnética total que el electrón ejerce sobre el protón.

Figura **E28.8**



28.9 • Una carga negativa $q = -3.60 \times 10^{-6}$ C está ubicada en el origen y tiene una velocidad $\vec{v} = (7.50 \times 10^4 \text{ m/s})\hat{\imath} + (-4.90 \times 10^4 \text{ m/s})\hat{\jmath}$. En ese instante, ¿cuáles son la magnitud y la dirección del campo magnético producido por esta carga en el punto $x = 0.200$ m, $y = -0.300$ m, $z = 0$?

Sección 28.2 Campo magnético de un elemento de corriente

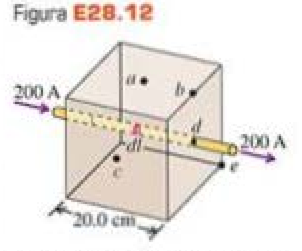
28.10 • Un elemento de corriente $d\vec{l} = (0.500 \text{ mm})\hat{\jmath}$ transporta una corriente de 8.20 A en la misma dirección de $d\vec{l}$. El punto *P* está ubicado en $\vec{r} = (-0.730 \text{ m})\hat{\imath} + (0.390 \text{ m})\hat{k}$. Use vectores unitarios para expresar el campo magnético en *P* producido por este elemento de corriente.

28.11 • Un alambre recto transporta una corriente de 10.0 A (figura E28.11). *ABCD* es un rectángulo con el punto *D* a la mitad de un segmento de 1.10 mm del alambre, y su punto *C* está en el alambre. Calcule la magnitud y dirección del campo magnético debido a este segmento en *a*) el punto *A*; *b*) el punto *B*; *c*) el punto *C*.

Figura **E28.11**

28.12 • Un alambre largo y recto que transporta una corriente de 200 A pasa a través de una caja cúbica de madera, entrando y saliendo por agujeros en los centros de caras opuestas (figura E28.12). La longitud de cada lado de la caja es de 20.0 cm. Considere un elemento *dl* del alambre de 0.100 cm de largo en el centro de la caja. Calcule la magnitud *dB* del campo magnético producido por este elemento en los puntos *a*, *b*, *c*, *d* y *e* en la figura E28.12. Los puntos *a*, *c* y *d* son los centros de las caras del cubo; el punto *b* está en el punto medio de una arista, y el punto *e* se encuentra en un vértice. Copie la figura e indique las direcciones y magnitudes relativas de los vectores campo. (*Nota:* Suponga que la longitud *dl* es pequeña en comparación con las distancias desde el elemento de corriente a los puntos donde el campo magnético va a calcularse).

Figura **E28.12**



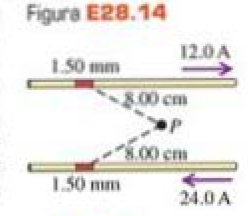
28.13 •• Un alambre largo y recto está sobre el eje *z* y conduce una corriente de 4.00 A en la dirección +*z*. Determine el campo magnético (magnitud y dirección) producido en los siguientes puntos por un segmento de 0.500 mm del alambre con centro en el origen: *a*) $x = 2.00$ m, $y = 0$, $z = 0$; *b*) $x = 0$, $y = 2.00$ m, $z = 0$; *c*) $x = 2.00$ m, $y = 2.00$ m, $z = 0$; *d*) $x = 0$, $y = 0$, $z = 2.00$ m.

28.14 •• Dos alambres paralelos están separados por una distancia de 5.00 cm y conducen corrientes en sentidos opuestos, como se ilustra en la figura E28.14. Determine la magnitud y dirección del campo magnético en el punto *P* debido a dos segmentos de 1.50 mm de cable que están opuestos entre sí y cada uno a 8.00 cm de *P*.

Figura **E28.14**

28.15 • Un alambre que conduce corriente de 28.0 A se dobla en ángulo recto. Considere dos segmentos de 2.00 mm de alambre, cada uno a 3.00 cm del doblez (figura E28.15). Determine la magnitud y dirección del campo magnético que producen estos dos segmentos en el punto *P*, que se encuentra a la mitad entre ellos.

Figura **E28.15**



28.16 •• Una espira cuadrada de alambre de 10.0 cm por lado transporta una corriente de 15.0 A en el sentido horario. Calcule la magnitud y dirección del campo magnético en su centro debido a los cuatro segmentos de alambre de 1.20 mm en el punto medio de cada lado.

Sección 28.3 Campo magnético de un conductor recto que transporta corriente

28.17 • **Campo magnético de un relámpago.** Los relámpagos conducen corrientes de hasta 20 kA, aproximadamente. Esta corriente se puede modelar como la equivalente de la que conduce un alambre muy largo y recto. *a*) Si una persona es tan desafortunada para estar a 5.0 m del relámpago, ¿qué tan grande sería el campo magnético que experimentaría? *b*) ¿Cómo se compara este campo con el que experimentaría esa persona si estuviera a 5.0 cm de una corriente doméstica de 10 A transportada por un conductor largo y recto?

28.18 • Un alambre muy largo, recto y horizontal conduce una corriente tal que pasan 3.50×10^{18} electrones por segundo en cualquier punto dado, de oeste a este. ¿Cuáles son la magnitud y la dirección del campo magnético que produce este alambre en un punto a 4.00 cm directamente por encima de él?

28.19 • BIO **Corrientes en el corazón.** El cuerpo contiene muchas corrientes pequeñas provocadas por el movimiento de iones en los órganos y las células. Mediciones del campo magnético alrededor del pecho, provocado por las corrientes del corazón, dan valores de aproximadamente 10 μG. Aun cuando las corrientes reales son bastante complicadas, podemos tener una comprensión aproximada de su magnitud si las modelamos como un alambre largo y recto. Si la superficie del pecho está a 5.0 cm de esta corriente, ¿qué tan grande es la corriente en el corazón?

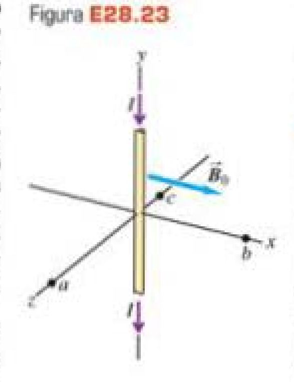
28.20 • BIO **Bacteria navegante.** Cierta bacteria (*Aquaspirillum magnetotacticum*) tiende a nadar hacia el polo norte geográfico terrestre porque contiene partículas diminutas, llamadas magnetosomas, que son sensibles a un campo magnético. Si se tiende bajo el agua una línea de transmisión que transporta 100 A, ¿en qué intervalo de distancias el campo magnético de esta línea sería lo suficientemente grande para interferir con la migración de esta bacteria? (Suponga que un campo menor del 5% del campo terrestre tendría poco efecto sobre la bacteria. Considere que el campo de la Tierra es de 5.0×10^{-5} T e ignore los efectos del agua de mar).

28.21 • *a*) ¿De qué magnitud tiene que ser la corriente que debe transportar un alambre largo y recto para que el campo magnético a 2.00 cm del alambre sea de 1.00 G (comparable con el campo magnético de la Tierra)? *b*) Si el alambre es horizontal, con la corriente que va de este a oeste, ¿en qué ubicaciones el campo magnético del alambre apuntaría en la misma dirección que la componente horizontal del campo magnético terrestre? *c*) Repita el inciso *b*) considerando ahora que el alambre es vertical y que la corriente va hacia arriba.

28.22 • Dos alambres largos y rectos, uno sobre el otro, están separados por una distancia $2a$ y son paralelos al eje x. El eje $+y$ está en el plano de los alambres en dirección del alambre inferior al alambre superior. Cada cable lleva una corriente I en la dirección $+x$. ¿Cuáles son la magnitud y la dirección del campo magnético neto de los dos alambres en un punto situado en el plano de los alambres *a*) a medio camino entre ambos; *b*) a una distancia a por encima del alambre superior; *c*) a una distancia a por debajo del alambre inferior?

28.23 •• Un alambre largo y recto se encuentra a lo largo del eje y y transporta una corriente $I = 8.00$ A en la dirección $-y$ (figura E28.23). Además del campo magnético debido a la corriente en el alambre, hay un campo magnético uniforme $\vec{B}_0$ con magnitud de 1.50×10^{-6} T en la dirección $+x$. ¿Cuál es el campo total (magnitud y dirección) en los siguientes puntos del plano xz: *a*) $x = 0$, $z = 1.00$ m; *b*) $x = 1.00$ m, $z = 0$; *c*) $x = 0$, $z = -0.25$ m?

Figura **E28.23**



28.24 •• BIO **Campo electromagnético.** Las líneas de transmisión de corriente pueden ser de 100 A o más. Algunas personas han expresado su preocupación porque los campos electromagnéticos (CEM) de estas líneas cerca de sus casas podrían ser peligrosos para la salud. En una línea con una corriente de 150 A y a una altura de 8 m arriba del suelo, ¿qué campo magnético produce la línea en el nivel del suelo? Exprese su respuesta en teslas y como un porcentaje del campo magnético terrestre, el cual es de 0.50 gauss. ¿Esto debería ser motivo de preocupación?

28.25 • Dos alambres largos, rectos y paralelos, separados por una distancia de 10.0 cm, transportan corrientes iguales de 4.00 A en la misma dirección, como se ilustra en la figura E28.25. Determine la magnitud y dirección del campo magnético en *a*) el punto P_1, a medio camino entre los dos alambres; *b*) el punto P_2, a 25.0 cm a la derecha de P_1; *c*) el punto P_3, a 20.0 cm directamente arriba de P_1.

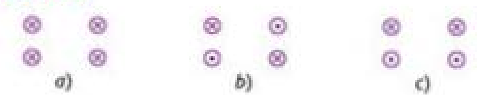
Figura **E28.25**

I ⊙ ←— 10.0 cm —→ ⊙ I

28.26 •• Una espira rectangular con dimensiones de 4.20×9.50 cm transporta una corriente I. La corriente en la espira produce, en el centro de esta, un campo magnético que tiene una magnitud de 5.50×10^{-5} T y en una dirección que se aleja de usted cuando mira el plano de la espira. ¿Cuáles son la magnitud y el sentido (horario o antihorario) de la corriente en la espira?

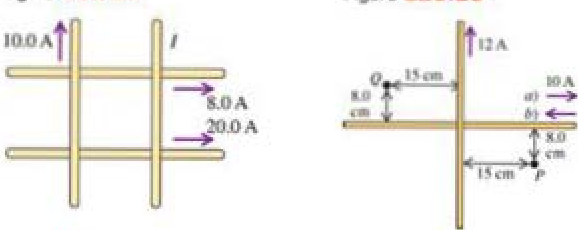
28.27 • Cuatro líneas largas y paralelas de energía conducen corrientes de 100 A cada una. El diagrama de la sección transversal de estas líneas es un cuadrado de 20.0 cm por lado. Para cada uno de los tres casos que se ilustran en la figura E28.27, calcule el campo magnético en el centro del cuadrado.

Figura **E28.27**



28.28 • Cuatro cables muy largos, que transportan corriente, están en el mismo plano y se intersecan para formar un cuadrado de 40.0 cm por lado, como se ilustra en la figura E28.28. Determine la magnitud y dirección de la corriente I de manera que el campo magnético en el centro del cuadrado sea igual a cero.

Figura **E28.28** Figura **E28.29**

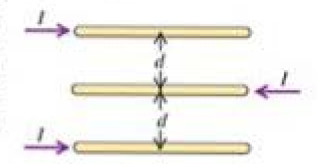


28.29 •• Dos alambres aislados, perpendiculares entre sí en el mismo plano, transportan corrientes como se indica en la figura E28.29. Determine la magnitud del campo magnético *neto* que producen estos alambres en los puntos P y Q si la corriente de 10.0 A va *a*) hacia la derecha o *b*) hacia la izquierda.

Sección 28.4 Fuerza entre conductores paralelos

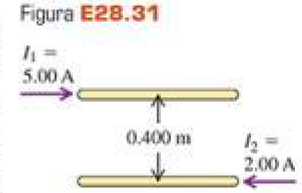
28.30 • Cada uno de tres alambres paralelos conduce una corriente I en los sentidos que se indican en la figura E28.30. Si la separación entre alambres adyacentes es d, calcule la magnitud y dirección de la fuerza magnética neta por unidad de longitud de cada alambre.

Figura **E28.30**



28.31 • Dos alambres largos y paralelos están separados por una distancia de 0.400 m (figura E28.31). Las corrientes I_1 e I_2 tienen las direcciones que se indican. *a*) Calcule la magnitud de la fuerza ejercida por cada alambre sobre un tramo de 1.20 m del otro. ¿La fuerza es de atracción o de repulsión? *b*) Cada corriente se duplica, de manera que I_1 es ahora de 10.0 A e I_2 de 4.00 A. En esas condiciones, ¿cuál es la magnitud de la fuerza que cada alambre ejerce sobre un tramo de 1.20 m del otro?

Figura **E28.31**

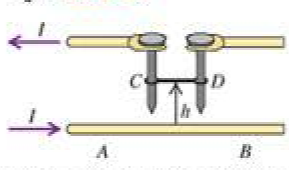


28.32 • Dos alambres largos y paralelos están separados por una distancia de 2.50 cm. La fuerza por unidad de longitud que cada uno ejerce sobre el otro es de 4.00×10^{-5} N/m, y los alambres se repelen. La corriente en uno de ellos es de 0.600 A. *a*) ¿Cuál es la corriente en el segundo alambre? *b*) ¿Las dos corrientes fluyen en el mismo sentido o en sentidos opuestos?

28.33 • **Cables de una lámpara.** Es común que los alambres de las lámparas domésticas estén separados 3.0 mm de centro a centro y conduzcan corrientes iguales en sentidos opuestos. Si el cable conduce corriente a una bombilla eléctrica de 100 W conectada a través de una diferencia de potencial de 120 V, ¿cuál es la fuerza por metro que cada alambre del cable ejerce sobre el otro? ¿La fuerza es de atracción o repulsión? ¿Esta fuerza es suficientemente grande como para considerarla en el diseño del cable? (Modele el cable de la lámpara como un alambre muy largo y recto).

28.34 • Un alambre largo y horizontal *AB* se encuentra sobre la superficie de una mesa y conduce una corriente *I*. El alambre horizontal *CD* está verticalmente arriba del alambre *AB*, y tiene libertad para deslizarse hacia arriba o abajo sobre las dos guías metálicas verticales *C* y *D* (figura E28.34). El alambre *CD* está conectado a través de contactos corredizos con otro alambre que también transporta una corriente *I*, en sentido opuesto a la corriente del alambre *AB*. La masa por unidad de longitud del alambre *CD* es λ. ¿Hasta qué altura de equilibrio *h* se elevará el alambre *CD* si se supone que la fuerza magnética que actúa sobre él se debe por completo a la corriente del alambre *AB*?

Figura **E28.34**

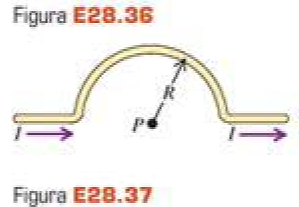


Sección 28.5 Campo magnético de una espira circular de corriente

28.35 • BIO **Corrientes en el cerebro.** Según las mediciones, el campo magnético alrededor de la cabeza es de 3.0×10^{-8} G. Si bien las corrientes que generan este campo son bastante complicadas, podemos estimar aproximadamente su tamaño modelándolas como una sola espira circular de corriente de 16 cm de diámetro (el ancho de una cabeza normal). ¿Cuál es la corriente necesaria para producir este campo en el centro de la espira?

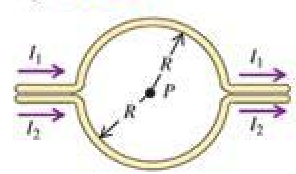
28.36 • Calcule la magnitud y dirección del campo magnético en el punto *P* debido a la corriente en el trozo semicircular del alambre que se ilustra en la figura E28.36 (*Sugerencia:* Pregúntese si la corriente en el trozo largo y recto del alambre produce un campo en *P*).

Figura **E28.36**



28.37 •• Calcule la magnitud del campo magnético en el punto *P* de la figura E28.37 en términos de *R*, I_1 e I_2. ¿Qué resultado da su expresión cuando $I_1 = I_2$?

Figura **E28.37**



28.38 •• Una bobina circular con devanado compacto y radio de 2.40 cm tiene 800 espiras. *a*) ¿Cuál debe ser la corriente en la bobina si el campo magnético en el centro de ella es de 0.0580 T? *b*) ¿A qué distancia *x* del centro de la bobina, sobre su eje, el campo magnético alcanza la mitad del valor que tiene en el centro?

28.39 •• Una bobina circular con devanado compacto y diámetro de 4.00 cm tiene 600 espiras y conduce una corriente de 0.500 A. ¿Cuál es la magnitud del campo magnético *a*) en el centro de la bobina y *b*) en un punto sobre el eje *x* de la bobina a 8.00 cm de su centro?

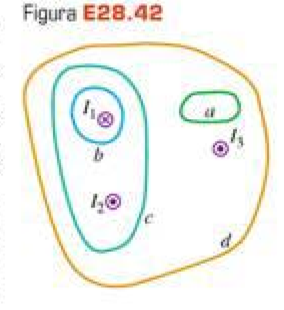
28.40 •• Una bobina con devanado compacto tiene un radio de 6.00 cm y conduce una corriente de 2.50 A. ¿Cuántas espiras debe tener si, en un punto sobre el eje de la bobina que está a 6.00 cm de su centro, el campo magnético es de 6.39×10^{-4} T?

28.41 •• Dos espiras de alambre circulares concéntricas se encuentran sobre una mesa, una dentro de la otra. El alambre interior tiene un diámetro de 20.0 cm y transporta una corriente de 12.0 A en sentido horario, cuando se le observa desde arriba, y el alambre exterior tiene un diámetro de 30.0 cm. ¿Cuáles deben ser la magnitud y el sentido de la corriente en el alambre exterior (observándolo desde arriba) para que el campo magnético neto de esta combinación de alambres sea cero en el centro común?

Sección 28.6 Ley de Ampère

28.42 • La figura E28.42 muestra, en sección transversal, varios conductores que transportan corrientes a través del plano de la figura. Las corrientes tienen las magnitudes $I_1 = 4.0$ A, $I_2 = 6.0$ A, e $I_3 = 2.0$ A, con los sentidos que se indican. Se presentan cuatro trayectorias, designadas de *a* a *d*. ¿Cuál es la integral de línea $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l}$ para cada trayectoria? Cada integral implica ir alrededor de la trayectoria en sentido antihorario. Explique sus respuestas.

Figura **E28.42**



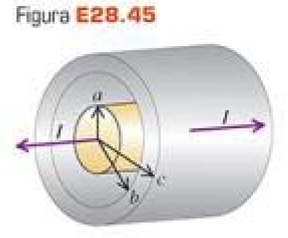
28.43 • Una curva cerrada encierra varios conductores. La integral de línea $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l}$ alrededor de esta curva es igual a 3.83×10^{-4} T·m. *a*) ¿Cuál es la corriente neta en los conductores? *b*) Si se integrara alrededor de la curva en el sentido opuesto, ¿cuál sería el valor de la integral de línea? Explique su respuesta.

Sección 28.7 Aplicaciones de la ley de Ampère

28.44 •• Como nuevo técnico electricista, usted está diseñando un solenoide grande para producir un campo magnético uniforme de 0.150 T cerca del centro del solenoide. Tiene alambre suficiente para 4000 vueltas circulares. Este solenoide debe medir 1.40 m de largo y 2.80 cm de diámetro. ¿Qué corriente debe suministrarse para producir el campo necesario?

28.45 • **Cable coaxial.** Un conductor sólido con radio *a* está sostenido por discos aislantes sobre el eje de un tubo conductor con radio interior *b* y radio exterior *c* (figura E28.45). El conductor central y el tubo conducen corrientes iguales *I* en sentidos opuestos. Las corrientes están distribuidas de manera uniforme en las secciones transversales de cada conductor. Obtenga una expresión para la magnitud del campo magnético *a*) en puntos situados afuera del conductor central sólido pero en el interior del tubo ($a < r < b$), y *b*) en puntos situados afuera del tubo ($r > c$).

Figura **E28.45**



28.46 • Repita el ejercicio 28.45 para el caso en que la corriente en el conductor central sólido es I_1, la corriente en el tubo es I_2, y ambas corrientes fluyen en el mismo sentido y no en sentidos opuestos.

28.47 • Un alambre cilíndrico, largo y recto, de radio R, conduce una corriente distribuida de manera uniforme en su sección transversal. ¿En qué ubicaciones el campo magnético producido por esta corriente es igual a la mitad de su valor máximo? Considere puntos situados adentro y afuera del alambre.

28.48 •• Un solenoide de 15.0 cm de largo con radio de 0.750 cm tiene un embobinado compacto con 600 espiras de alambre. La corriente en el embobinado es de 8.00 A. Calcule el campo magnético en un punto cercano al centro del solenoide.

28.49 •• Un solenoide está diseñado para producir un campo magnético de 0.0270 T en su centro. Tiene un radio de 1.40 cm y longitud de 40.0 cm, y el alambre puede conducir una corriente máxima de 12.0 A. *a*) ¿Cuál es el número mínimo de vueltas por unidad de longitud que debe tener el solenoide? *b*) ¿Cuál es la longitud total de alambre que se requiere?

28.50 • Un solenoide toroidal tiene un radio interior de 12.0 cm y un radio exterior de 15.0 cm. Transporta una corriente de 1.50 A. ¿Cuántas espiras igualmente espaciadas debe tener para que produzca un campo magnético de 3.75 mT en puntos dentro de las espiras a 14.0 cm del centro?

28.51 • En el Francis Bitter National Magnetic Laboratory del MIT se logró obtener un campo magnético de 37.2 T. Calcule la corriente necesaria para generar ese campo *a*) a 2.00 cm de un alambre largo y recto; *b*) en el centro de una bobina circular con radio de 42.0 cm que tiene 100 espiras; *c*) cerca del centro de un solenoide con radio de 2.40 cm, longitud de 32.0 cm y 40,000 espiras.

28.52 • Un solenoide toroidal (véase el ejemplo 28.10) tiene un radio interior $r_1 = 15.0$ cm y un radio exterior $r_2 = 18.0$ cm. El solenoide tiene 250 espiras y conduce una corriente de 8.50 A. ¿Cuál es la magnitud del campo magnético a las siguientes distancias del centro del toro? *a*) 12.0 cm; *b*) 16.0 cm; *c*) 20.0 cm.

28.53 •• Sobre un anillo de madera cuyo diámetro medio es de 14.0 cm se ha formado un embobinado toroidal compacto de 600 espiras. Calcule la magnitud del campo magnético en el centro de la sección transversal del embobinado cuando la corriente en este último es de 0.650 A.

Sección 28.8 Materiales magnéticos

28.54 •• Un solenoide toroidal con 400 espiras de alambre y radio medio de 6.0 cm conduce una corriente de 0.25 A. La permeabilidad relativa del núcleo es 80. *a*) ¿Cuál es el campo magnético en el núcleo? *b*) ¿Qué parte del campo magnético se debe a corrientes atómicas?

28.55 • Un solenoide toroidal con 500 espiras está embobinado sobre un anillo con radio medio de 2.90 cm. Determine la corriente que se requiere en el embobinado para generar un campo magnético de 0.350 T en el anillo si *a*) el anillo es de hierro forjado ($K_m = 1400$) y *b*) si el anillo está elaborado de acero al silicio ($K_m = 5200$).

28.56 • La corriente en el embobinado de un solenoide toroidal es de 2.400 A. Tiene 500 espiras y su radio medio es de 25.00 cm. El solenoide toroidal está relleno de un material magnético. El campo magnético en el interior del embobinado es de 1.940 T. Calcule *a*) la permeabilidad relativa y *b*) la susceptibilidad magnética del material que llena el toroide.

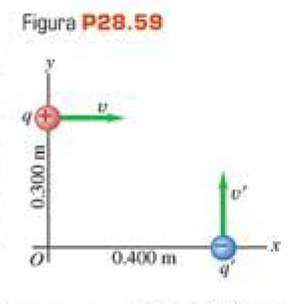
28.57 • Un solenoide largo con 60 espiras de alambre por centímetro conduce una corriente de 0.15 A. El alambre que forma el solenoide está enrollado en torno a un núcleo sólido de acero al silicio ($K_m = 5200$). (El cable del solenoide está recubierto con un aislante para que no fluya ninguna corriente hacia el núcleo). *a*) Con respecto a un punto en el interior del núcleo, encuentre las magnitudes de **i.** el campo magnético $\vec{B}_0$ debido a la corriente en el solenoide; **ii.** la magnetización $\vec{M}$; **iii.** el campo magnético total $\vec{B}$. *b*) En un diagrama del solenoide y su núcleo, indique las direcciones de los vectores $\vec{B}$, $\vec{B}_0$ y $\vec{M}$ en el interior del núcleo.

28.58 • Cuando cierto material paramagnético se coloca en un campo magnético externo de 1.5000 T, el campo medido dentro del material es de 1.5023 T. Calcule *a*) la permeabilidad relativa y *b*) la permeabilidad magnética de este material.

PROBLEMAS

28.59 •• Un par de cargas puntuales, $q = +8.00\ \mu C$ y $q' = -5.00\ \mu C$, se desplazan como se indica en la figura P28.59, en cada caso, con una rapidez $v = 9.00 \times 10^4$ m/s y $v' = 6.50 \times 10^4$ m/s. Cuando las cargas están en las ubicaciones que se muestran en la figura, ¿cuáles son la magnitud y la dirección de *a*) el campo magnético producido en el origen y *b*) la fuerza magnética que ejerce q' sobre q?

Figura **P28.59**



28.60 •• En un instante particular, la carga $q_1 = +4.80 \times 10^{-6}$ C está en el punto (0, 0.250 m, 0) y tiene una velocidad $\vec{v}_1 = (9.20 \times 10^5\ \text{m/s})\hat{\imath}$. La carga $q_2 = -2.90 \times 10^{-6}$ C se encuentra en el punto (0.150 m, 0, 0) y tiene una velocidad $\vec{v}_2 = (-5.30 \times 10^5\ \text{m/s})\hat{\jmath}$. En este instante, ¿cuáles son la magnitud y la dirección de la fuerza magnética que q_1 ejerce sobre q_2?

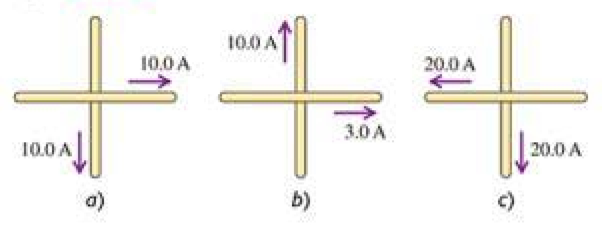
28.61 ••• Dos líneas de transmisión largas y paralelas, separadas una distancia de 40.0 cm, conducen corrientes de 25.0 A y 75.0 A. Determine todas las ubicaciones en que el campo magnético neto de los dos alambres es igual a cero, si las corrientes fluyen *a*) en el mismo sentido y *b*) en sentidos opuestos.

28.62 • Un alambre largo y recto conduce una corriente de 5.20 A. Un electrón viaja en la vecindad del alambre. En el instante en que el electrón está a 4.50 cm del alambre y viaja con una rapidez de 6.00×10^4 m/s directamente hacia el alambre, ¿cuáles son la magnitud y la dirección (en relación con la dirección de la corriente) de la fuerza que ejerce el campo magnético de la corriente sobre el electrón?

28.63 • **PA** Un alambre largo y recto conduce una corriente de 13.0 A. Se lanza un electrón paralelo al alambre con una velocidad de 250 km/s en la misma dirección de la corriente, a 2.00 cm del alambre. *a*) Calcule la magnitud y dirección de la aceleración inicial del electrón. *b*) ¿Cuáles deben ser la magnitud y la dirección de un campo eléctrico uniforme que permitan que el electrón siga su recorrido paralelo al alambre? *c*) ¿Es necesario incluir los efectos de la gravedad? Justifique su respuesta.

28.64 • Dos alambres muy largos y rectos conducen las corrientes que se indican en la figura P28.64. En cada caso, encuentre todas las ubicaciones en que el campo magnético es igual a cero.

Figura **P28.64**



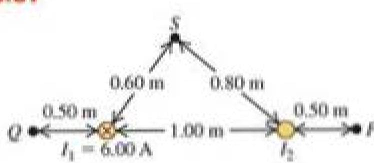
28.65 •• **PA** Dos espiras de alambre idénticas y circulares, de 40.0 cm de diámetro cada una, conducen una corriente de 3.80 A en el mismo sentido. Estas espiras son paralelas entre sí y están separadas por una distancia de 25.0 cm. La recta *ab* es normal al plano de las espiras y

pasa por sus centros. Se dispara un protón a 2400 km/s perpendicular a la línea *ab* desde un punto intermedio entre los centros de las espiras. Calcule la magnitud de la fuerza magnética que ejercen estas espiras sobre el protón inmediatamente después del disparo.

28.66 • Una carga puntual negativa $q = -7.20$ mC se desplaza en un marco de referencia. Cuando la carga puntual está en el origen, el campo magnético que produce en el punto $x = 25.0$ cm, $y = 0$, $z = 0$, es $\vec{B} = (6.00\ \mu\text{T})\hat{\boldsymbol{j}}$, y su rapidez es de 800 m/s. *a*) ¿Cuáles son las componentes *x*, *y* y *z* de la velocidad $\vec{v}_0$ de la carga? *b*) En ese mismo instante, ¿cuál es la magnitud del campo magnético que la carga produce en el punto $x = 0$, $y = 25.0$ cm, $z = 0$?

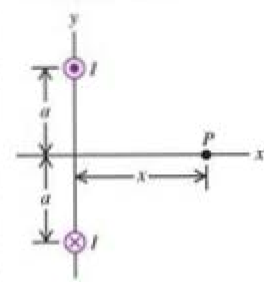
28.67 • Dos alambres largos, rectos y paralelos están separados por una distancia de 1.00 m (figura P28.67). El alambre de la izquierda conduce una corriente I_1 de 6.00 A hacia el plano del papel. *a*) ¿Cuáles deben ser la magnitud y el sentido de la corriente I_2 para que el campo neto en el punto *P* sea cero? *b*) ¿Cuáles son la magnitud y la dirección del campo neto en *Q*? *c*) ¿Cuál es la magnitud del campo neto en *S*?

Figura **P28.67**



28.68 •• La figura P28.68 muestra la vista desde un extremo de dos alambres largos y paralelos, perpendiculares al plano *xy*, cada uno de los cuales conduce una corriente *I* pero en sentidos opuestos. *a*) Copie el diagrama y dibuje los vectores que muestren el campo $\vec{B}$ en cada alambre y el campo $\vec{B}$ neto en el punto *P*. *b*) Obtenga la expresión para la magnitud de $\vec{B}$ en cualquier punto del eje *x* en términos de la coordenada *x* del punto. ¿Cuál es la dirección de $\vec{B}$? *c*) Dibuje la gráfica de la magnitud de $\vec{B}$ en puntos sobre el eje *x*. *d*) ¿En qué valor de *x* es máxima la magnitud de $\vec{B}$. *e*) ¿Cuál es la magnitud de $\vec{B}$ cuando $x \gg a$?

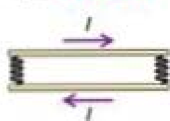
Figura **P28.68**



28.69 • Remítase a la situación del problema 28.68. Suponga que un tercer alambre, largo, recto y paralelo a los otros dos pasa por el punto *P* (véase la figura P28.68) y que cada uno transporta una corriente $I = 6.00$ A. Sea $a = 40.0$ cm y $x = 60.0$ cm. Encuentre la magnitud y la dirección de la fuerza por unidad de longitud sobre el tercer alambre, *a*) si la corriente en él está dirigida hacia el plano de la figura y *b*) si la corriente en él está dirigida hacia afuera del plano de la figura.

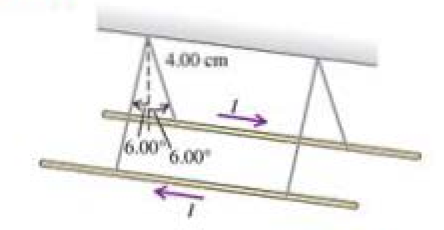
28.70 •• PA Un par de varillas metálicas largas y rígidas, cada una de longitud *L*, están paralelas sobre una mesa perfectamente lisa. Se conectan sus extremos con resortes conductores idénticos, muy ligeros, con constante de fuerza *k* (figura P28.70) y cuya longitud es despreciable cuando no se encuentran estirados. Si una corriente *I* circula por el circuito, los resortes se estirarán. ¿Con qué separación las varillas permanecerán en reposo? Suponga que *k* es suficientemente grande para que la separación de las varillas sea mucho menor que *L*.

Figura **P28.70**



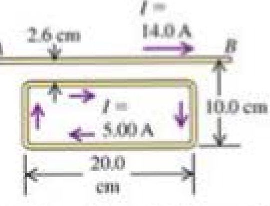
28.71 ••• PA Dos alambres largos y paralelos cuelgan de cordeles de 4.00 cm de largo de un eje común (figura P28.71). Los alambres tienen una masa por unidad de longitud de 0.0125 kg/m y transportan la misma corriente en sentidos opuestos. ¿Cuál es la corriente en cada alambre si los cordeles cuelgan a un ángulo de 6.00° con respecto a la vertical?

Figura **P28.71**



28.72 • El alambre largo y recto, *AB*, que se ilustra en la figura P28.72, conduce una corriente de 14.0 A. La espira rectangular, cuyos lados largos son paralelos al alambre, conduce una corriente de 5.00 A. Encuentre la magnitud y dirección de la fuerza neta que el campo magnético del alambre ejerce sobre la espira.

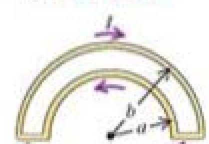
Figura **P28.72**



28.73 •• PA Un anillo de hierro redondo y plano de 5.00 cm de diámetro tiene una corriente que pasa a través de él y genera un campo magnético de 75.4 μT en su centro. Este anillo está colocado en un campo magnético externo uniforme de 0.375 T. ¿Cuál es la torca máxima que el campo externo puede ejercer sobre el anillo? Muestre cómo debe estar orientado el anillo en relación con el campo para que la torca tenga su valor máximo.

28.74 • Los semicírculos de alambre que se muestran en la figura P28.74 tienen radios *a* y *b*. Calcule el campo magnético neto (magnitud y dirección) que produce la corriente de los alambres en el punto *P*.

Figura **P28.74**



28.75 • CALC **Bobinas de Helmholtz.** La figura P28.75 muestra un corte de dos bobinas circulares con radio *a*, cada una con devanado de *N* vueltas de alambre que conduce una corriente *I*, la cual circula en el mismo sentido en ambas bobinas. Estas se hallan separadas por una distancia *a* igual a sus radios. Esta configuración se conoce como bobinas de Helmholtz, las cuales producen un campo magnético muy uniforme en la región ubicada entre ellas. *a*) Obtenga la expresión para la magnitud *B* del campo magnético en un punto sobre el eje a una distancia *x* a la derecha del punto *P*, el cual está a la mitad de la distancia entre las bobinas. *b*) Dibuje una gráfica de *B* contra *x*, de $x = 0$ a $x = a/2$. Compare esta gráfica con otra para el campo magnético debido solamente a la bobina de la derecha. *c*) A partir del inciso *a*), obtenga una expresión para la magnitud del campo magnético en el punto *P*. *d*) Calcule la magnitud del campo magnético en *P* si $N = 300$ espiras, $I = 6.00$ A y $a = 8.00$ cm. *e*) Calcule dB/dx y d^2B/dx^2 en $P(x = 0)$. Analice el modo en que sus resultados muestran que el campo es muy uniforme en la vecindad de *P*.

Figura **P28.75**

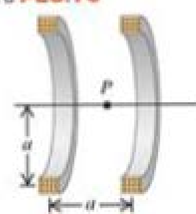


Figura **P28.76**



28.76 • Un alambre circular de diámetro *D* está sobre una mesa horizontal y conduce una corriente *I*. En la figura P28.76 el punto *A* indica el centro del círculo y el punto *C* está sobre su borde. *a*) Calcule la

magnitud y dirección del campo magnético en el punto *A*. *b*) Ahora se desenrolla el alambre de manera que queda recto, con centro en el punto *C*, y perpendicular a la recta *AC*, pero se mantiene la misma corriente en él. En tales circunstancias, encuentre el campo magnético en el punto *A*. *c*) ¿Cuál campo es mayor, el del inciso *a*) o el del inciso *b*)? ¿En qué factor? ¿Por qué es razonable físicamente este resultado?

28.77 • **CALC** Un alambre largo, recto, con sección transversal circular de radio *R*, conduce una corriente *I*. Suponga que la densidad de corriente no es constante en la sección transversal del alambre, sino que varía según $J = \alpha r$, donde α es una constante. *a*) De acuerdo con el requerimiento de que *J* integrada sobre la sección transversal del alambre da la corriente total *I*, calcule la constante α en términos de *I* y *R*. *b*) Con base en la ley de Ampère, calcule el campo magnético *B*(*r*) correspondiente a **i.** $r \leq R$, y **ii.** $r \geq R$. Exprese sus respuestas en términos de *I*.

28.78 • **CALC** El alambre mostrado en la figura P28.78 es infinitamente largo y transporta una corriente *I*. Calcule la magnitud y dirección del campo magnético que esta corriente produce en el punto *P*.

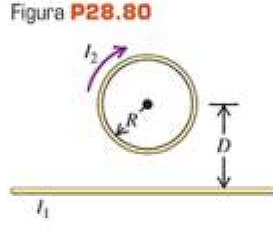
Figura **P28.78**



28.79 • Se fabrica un conductor en forma de cilindro hueco con radios interior y exterior *a* y *b*, respectivamente. Transporta una corriente *I* distribuida de manera uniforme en su sección transversal. Obtenga expresiones para la magnitud del campo magnético en las regiones *a*) $r < a$; *b*) $a < r < b$; *c*) $r > b$.

28.80 • Una espira circular tiene radio *R* y conduce una corriente I_2 en sentido horario (figura P28.80). El centro de la espira está a una distancia *D* arriba de un alambre largo y recto. ¿Cuáles son la magnitud y la dirección de la corriente I_1 en el alambre si el campo magnético en el centro de la espira es igual a cero?

Figura **P28.80**



28.81 • **CALC** Un cilindro sólido, largo, recto y orientado con su eje en la dirección *z* conduce una corriente cuya densidad es $\vec{J}$. La densidad de corriente, aunque simétrica con respecto al eje del cilindro, no es constante y varía de acuerdo con la relación

$$\begin{aligned} \vec{J} &= \frac{2I_0}{\pi a^2}\left[1 - \left(\frac{r}{a}\right)^2\right]\hat{k} \quad \text{para } r \leq a \\ &= \mathbf{0} \qquad\qquad\qquad\qquad\quad \text{para } r \geq a \end{aligned}$$

donde el radio del cilindro es *a*, *r* es la distancia radial desde el eje del cilindro, e I_0 es una constante que tiene unidades de amperes. *a*) Demuestre que I_0 es la corriente total que pasa a través de toda la sección transversal del alambre. *b*) Con base en la ley de Ampère, obtenga una expresión para la magnitud del campo magnético $\vec{B}$ en la región $r \geq a$. *c*) Obtenga una expresión para la corriente *I* contenida en una sección transversal circular de radio $r \leq a$ y con centro en el eje del cilindro. *d*) Con base en la ley de Ampère, obtenga una expresión para la magnitud del campo magnético $\vec{B}$ en la región $r \leq a$. Compare los resultados de los incisos *b*) y *d*) cuando $r = a$.

28.82 • Un cilindro sólido, largo, recto y orientado con su eje en la dirección *z* conduce una corriente cuya densidad es $\vec{J}$. La densidad de corriente, aunque simétrica con respecto al eje del cilindro, no es constante y varía de acuerdo con la relación

$$\begin{aligned} \vec{J} &= \left(\frac{b}{r}\right)e^{(r-a)/\delta}\hat{k} \quad \text{para } r \leq a \\ &= \mathbf{0} \qquad\qquad\qquad \text{para } r \geq a \end{aligned}$$

donde el radio del cilindro es $a = 5.00$ cm, *r* es la distancia radial desde el eje del cilindro, *b* es una constante igual a 600 A/m, y δ es una constante igual a 2.50 cm. *a*) Sea I_0 la corriente total que pasa a través de la sección transversal total del alambre. Obtenga una expresión para I_0 en términos de *b*, δ y *a* y evalúela para obtener un valor numérico de I_0. *b*) Con base en la ley de Ampère, obtenga una expresión para el campo magnético $\vec{B}$ en la región $r \geq a$. Exprese su respuesta en términos de I_0 en lugar de *b*. *c*) Obtenga una expresión para la corriente *I* contenida en una sección transversal circular de radio $r \leq a$ y con centro en el eje del cilindro. Exprese su respuesta en términos de I_0 en lugar de *b*. *d*) Con base en la ley de Ampère, obtenga una expresión para el campo magnético $\vec{B}$ en la región $r \leq a$. *e*) Evalúe la magnitud del campo magnético en $r = \delta$, $r = a$, y $r = 2a$.

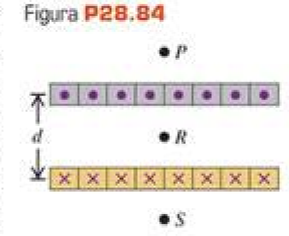
28.83 • **Lámina infinita de corriente.** Se disponen conductores largos y rectos de sección transversal cuadrada, unos al lado de otros; cada conductor transporta una corriente *I*, para formar una lámina infinita de corriente (figura P28.83). Los conductores están en el plano *xy*, paralelos al eje *y*, y transportan corriente en la dirección +*y*. Hay *n* conductores por unidad de longitud, medida a lo largo del eje *x*. *a*) ¿Cuáles son la magnitud y la dirección del campo magnético a una distancia *a* abajo de la lámina de corriente? *b*) ¿Cuáles son la magnitud y la dirección del campo magnético a una distancia *a* arriba de la lámina de corriente?

Figura **P28.83**



28.84 • Se disponen conductores rectos y largos de sección transversal cuadrada, unos al lado de otros; cada conductor transporta una corriente *I*, para formar una lámina infinita de corriente con la dirección de la corriente hacia afuera del plano de la página (figura P28.84). Una segunda lámina de corriente infinita se ubica a una distancia *d* abajo de la primera y paralela a ella. La segunda lámina conduce corriente hacia el plano de la página. Cada lámina tiene *n* conductores por unidad de longitud. (Consulte el problema 28.83). Calcule la magnitud y dirección del campo magnético neto en *a*) el punto *P* (arriba de la lámina superior); *b*) el punto *R* (equidistante de las dos láminas); *c*) el punto *S* (abajo de la lámina inferior).

Figura **P28.84**



28.85 • **PA** Una pieza de hierro tiene magnetización $M = 6.50 \times 10^4$ A/m. Encuentre el momento dipolar magnético promedio *por átomo* en esta pieza de hierro. Exprese su respuesta tanto en $\text{A} \cdot \text{m}^2$ como en magnetones de Bohr. La densidad del hierro se especifica en la tabla 14.1, y su masa atómica (en gramos por mol) se indica en el apéndice D. El símbolo químico del hierro es Fe.

PROBLEMAS DE DESAFÍO

28.86 ••• Una banda aislante larga y ancha tiene una carga positiva uniforme por unidad de área σ en su cara superior. Unos rodillos situados en cada extremo mueven la banda hacia la derecha con rapidez constante *v*. Calcule la magnitud y dirección del campo magnético producido por la banda en movimiento en un punto justo arriba de su superficie. (*Sugerencia:* En los puntos cercanos a la superficie y alejados de sus bordes o extremos, la banda móvil se puede considerar una lámina infinita de corriente, como la del problema 28.83).

28.87 ••• **PA** Dos alambres conductores largos y rectos, con densidad de masa lineal λ, están suspendidos de cordeles en posición horizontal, paralelos uno al otro y separados una distancia *d*. Los extremos posteriores de los alambres están conectados entre sí por un alambre de conexión holgado y de baja resistencia. Ahora se incorpora al sistema un capacitor con carga (capacitancia *C*); la placa positiva del capacitor (carga inicial $+Q_0$) se conecta al extremo frontal de uno de los alambres, y la placa negativa del capacitor (carga inicial $-Q_0$) se conecta al extremo frontal del otro alambre (figura P28.87). Ambas conexiones se

hacen también con alambres holgados de baja resistencia. Una vez establecida la conexión, la fuerza de repulsión entre los alambres los empuja hacia los lados, y cada alambre tiene una velocidad horizontal inicial de magnitud v_0. Suponga que la constante de tiempo de descarga del capacitor es insignificante en comparación con el tiempo necesario para que ocurra un desplazamiento apreciable en la posición de los alambres. *a*) Demuestre que la rapidez inicial v_0 de cualquiera de los alambres está dada por

Figura **P28.87**



$$v_0 = \frac{\mu_0 Q_0^2}{4\pi\,\lambda RCd}$$

donde R es la resistencia total del circuito. *b*) ¿A qué altura h se elevará cada cable como resultado de la conexión del circuito?

28.88 ••• **CALC** Un alambre en forma de semicírculo con radio a está orientado en el plano yz con su centro de curvatura en el origen (figura P28.88). Si la corriente en el alambre es I, calcule las componentes del campo magnético producido en el punto P, a una distancia x a lo largo del eje x. (*Nota:* No olvide la contribución del alambre recto en la parte inferior del semicírculo que va de $z = -a$ a $z = +a$. Puede considerar el hecho de que los campos de las dos corrientes antiparalelas se anulan en $z > a$, pero debe explicar *por qué* se anulan).

Figura **P28.88**



Respuestas

Pregunta inicial del capítulo 

En la intensidad del campo magnético *no* habría cambio. De acuerdo con el ejemplo 28.9 (sección 28.7), el campo dentro de un solenoide tiene una magnitud $B = \mu_0 nI$, donde n es el número de vueltas del alambre por unidad de longitud. Al unir dos solenoides por sus extremos se duplica tanto el número de vueltas como la longitud, por lo que el número de vueltas por unidad de longitud no cambia.

Preguntas de las secciones Evalúe su comprensión

28.1 Respuesta: *a*) i, *b*) ii. La situación es la misma de la figura 28.2, excepto que el protón superior tiene velocidad $\vec{v}$ en lugar de $-\vec{v}$. El campo magnético debido al protón inferior es el mismo que el de la figura 28.2, pero se invierte la dirección de la fuerza magnética $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$ sobre el protón superior. Así que la fuerza magnética es de atracción. Como la velocidad v es pequeña en comparación con c, la fuerza magnética es mucho menor que la fuerza eléctrica de repulsión, por lo que la fuerza neta es de repulsión.

28.2 Respuesta: i y iii (empate), iv, ii. De acuerdo con la ecuación (28.5), la magnitud del campo dB debido al elemento de corriente de longitud dl que transporta una corriente I es $dB = (\mu_0/4\pi)(I\,dl \text{ sen } \phi/r^2)$. En esta expresión, r es la distancia del elemento al punto de campo, y ϕ es el ángulo entre la dirección de la corriente y un vector desde el elemento de corriente al punto de campo. Los cuatro puntos están a la misma distancia $r = L$ desde el elemento de corriente, por lo que el valor dB es proporcional al valor de sen ϕ. Para los cuatro puntos, el ángulo es **i.** $\phi = 90°$, **ii.** $\phi = 0$, **iii.** $\phi = 90°$ y **iv.** $\phi = 45°$, por lo que los valores de sen ϕ son **i.** 1, **ii.** 0, **iii.** 1 y **iv.** $1/\sqrt{2}$.

28.3 Respuesta: A Esta orientación hará que la corriente fluya alrededor del circuito en sentido horario. Así que la corriente fluirá hacia el sur a través del alambre que se encuentra bajo la brújula. Según la regla de la mano derecha para el campo magnético producido por un conductor largo, recto y que lleva corriente, esto producirá un campo magnético que apunta a la izquierda en la posición de la brújula (que se encuentra arriba del alambre). La combinación del campo magnético terrestre hacia el norte y el dirigido hacia el oeste producido por la corriente da un campo magnético neto hacia el noroeste, por lo que la aguja de la brújula se moverá en sentido antihorario para alinearse con este campo.

28.4 Respuestas: *a*) i, *b*) iii, *c*) ii, *d*) iii. La corriente fluye en el mismo sentido en espiras adyacentes de la bobina, por lo que las fuerzas magnéticas entre ellas son de atracción. La corriente fluye en sentidos opuestos en lados opuestos de la misma espira, por lo que las fuerzas magnéticas entre estos lados son de repulsión. Así, las fuerzas magnéticas en las espiras del solenoide las comprimen en la dirección a lo largo de su eje, pero las empujan radialmente. Las fuerzas *eléctricas* son iguales a cero porque el alambre es eléctricamente neutro, con igual cantidad de carga positiva que negativa.

28.5 Respuestas: *a*) ii, *b*) v. El vector $d\vec{B}$ está en dirección de $d\vec{l} \times \vec{r}$. Para un segmento sobre el eje y negativo, $d\vec{l} = -\hat{k}\,dl$ apunta en la dirección de z negativa y $\vec{r} = x\hat{\imath} + a\hat{\jmath}$. Entonces, $d\vec{l} \times \vec{r} = (a\,dl)\hat{\imath} - (x\,dl)\hat{\jmath}$, que tiene una componente x positiva, una componente y negativa y una componente z igual a cero. Para un segmento en el eje z negativo, $d\vec{l} = \hat{\jmath}\,dl$ apunta en la dirección de y positiva, y $\vec{r} = x\hat{\imath} + a\hat{k}$. Entonces, $d\vec{l} \times \vec{r} = 1(a\,dl)\hat{\imath} - 1(x\,dl)\hat{k}$, que tiene una componente x positiva, una componente y igual a cero y una componente z negativa.

28.6 Respuesta: ii. Imagine que se resuelve la integral $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l}$ a lo largo de una trayectoria de integración en sentido antihorario alrededor de la línea de campo magnético. En cada punto a lo largo de la trayectoria, el campo magnético $\vec{B}$ y el segmento infinitesimal $d\vec{l}$ son tangentes a la trayectoria, por lo que $\vec{B} \cdot d\vec{l}$ es positivo en cada punto y la integral $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l}$ también es positiva. De acuerdo con la ley de Ampère $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{enc}$ y la regla de la mano derecha, se deduce que la trayectoria de integración encierra una corriente dirigida hacia afuera del plano de la página. No hay corrientes en el espacio vacío afuera del imán, por lo que debe haber corrientes en el interior de este (véase la sección 28.8).

28.7 Respuesta: iii. Por simetría, cualquier campo $\vec{B}$ afuera del cable debe circular alrededor de este, con líneas de campo circulares como las que rodean el conductor cilíndrico sólido de la figura 28.20. Elija una trayectoria de integración como la que se ilustra en la figura 28.20, con radio $r > R$, de manera que la trayectoria encierre por completo al cable. Como en el ejemplo 28.8, la integral $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l}$ para esta trayectoria tiene magnitud $B(2\pi r)$. De acuerdo con la ley de Ampère, esto es igual a $\mu_0 I_{enc}$. La corriente neta encerrada I_{enc} es igual a cero porque incluye dos corrientes de igual magnitud, pero con sentidos opuestos: una en el alambre central y otra en el cilindro hueco. Así que $B(2\pi r) = 0$, y $B = 0$ para cualquier valor de r afuera del cable. (El campo es diferente de cero *adentro* del cable; véase el ejercicio 28.45).

28.8 Respuesta: i, iv. El sodio y el uranio son materiales paramagnéticos, por lo que un imán los atrae, mientras que el bismuto y el plomo son materiales diamagnéticos y son repelidos por un imán. (Véase la tabla 28.1).

Problema práctico

Respuesta: $B = \dfrac{\mu_0 n Q}{a}$

INDUCCIÓN ELECTROMAGNÉTICA





? Cuando una tarjeta de crédito se "desliza" por el lector digital, la información codificada en un patrón magnético al reverso de la tarjeta se transmite al banco del cuentahabiente. ¿Por qué es necesario deslizar e insertar la tarjeta en vez de sostenerla fijamente frente a la ranura del lector?

OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

Al estudiar este capítulo, usted aprenderá:

- La evidencia experimental de que un campo magnético variable induce una fem.
- Cómo es que la ley de Faraday relaciona la fem inducida en una espira con el cambio del flujo magnético a través de la espira.
- A determinar el sentido de una fem inducida.
- A calcular la fem inducida en un conductor que se mueve a través de un campo magnético.
- La manera en que un flujo magnético variable genera un campo eléctrico que es muy diferente del producido por un arreglo de cargas.
- Las cuatro ecuaciones fundamentales que describen por completo la electricidad y el magnetismo.

Casi todos los dispositivos o máquinas modernas, desde una computadora hasta una lavadora o un taladro eléctrico, tienen circuitos eléctricos en su interior. En el capítulo 25 vimos que se requiere una fuerza electromotriz (fem) para que una corriente fluya por un circuito; en los capítulos 25 y 26 casi siempre dimos por hecho que la fuente de fem era una batería. Pero para la gran mayoría de los aparatos eléctricos que se usan en la industria y el hogar (incluido cualquiera que se conecte a un contacto de pared), la fuente de fem *no* es una batería, sino una estación generadora de electricidad, la cual produce energía eléctrica convirtiendo otras formas de energía: energía potencial gravitacional en una planta hidroeléctrica; energía química en una planta termoeléctrica que consume carbón o petróleo, y energía atómica en una central nucleoeléctrica. Pero, ¿cómo se realiza esta conversión de la energía?

La respuesta es un fenómeno conocido como *inducción electromagnética*: si el flujo magnético en un circuito cambia, se inducen una fem y una corriente en el circuito. En una estación generadora de electricidad, hay imanes que se mueven con respecto a bobinas de alambre para producir en ellas un flujo magnético variable y, por lo tanto, una fem. Otros componentes clave de los sistemas de energía eléctrica, como los transformadores, también dependen de las fem inducidas magnéticamente.

El principio fundamental de la inducción electromagnética, y la piedra angular de este capítulo, es la *ley de Faraday*, que relaciona la fem inducida con el flujo magnético variable en cualquier circuito, incluido un circuito cerrado. También analizaremos la ley de Lenz, que ayuda a predecir el sentido de las fem y las corrientes inducidas. Estos principios nos permitirán comprender los dispositivos de conversión de energía eléctrica, como los motores eléctricos, generadores y transformadores.

La inducción electromagnética nos indica que un campo magnético que varía con el tiempo actúa como fuente de campo eléctrico. También veremos cómo un campo *eléctrico* que varía con el tiempo actúa como fuente de campo *magnético*. Estas valiosas observaciones forman parte de un conjunto de fórmulas llamadas *ecuaciones de Maxwell*, las cuales describen el comportamiento de los campos eléctricos y magnéticos en *cualquier* situación y preparan el terreno para entender las ondas electromagnéticas, el tema del capítulo 32.

Mastering PHYSICS

ActivPhysics 13.9: Electromagnetic Induction

29.1 Experimentos de inducción

Durante la década de 1830, Michael Faraday en Inglaterra y Joseph Henry (1797-1878) en Estados Unidos, quien fuera director de la Smithsonian Institution, realizaron los primeros experimentos con una fem inducida magnéticamente. La figura 29.1 ilustra varios ejemplos. En la figura 29.1*a*, una bobina de alambre está conectada a un galvanómetro. Cuando el imán cercano está inmóvil, el medidor no indica corriente. Esto no es sorprendente, pues en el circuito no hay fuente de fem. Sin embargo, cuando el imán se *mueve* y se acerca o se aleja de la bobina, el medidor indica corriente en el circuito, pero tan *solo* mientras el imán se halla en movimiento (figura 29.1*b*). Si el imán permanece fijo y es la bobina la que se mueve, otra vez se detecta corriente durante el movimiento. Esto se llama **corriente inducida**, y la fem correspondiente que se requiere para generarla recibe el nombre de **fem inducida**.

En la figura 29.1*c* se ha sustituido el imán por una segunda bobina conectada a una batería. Cuando la segunda bobina está fija, no hay corriente en la primera bobina. No obstante, cuando movemos la segunda bobina acercándola o alejándola de la primera, o hacemos lo mismo con la primera bobina con respecto a la segunda, hay corriente en la primera bobina pero, de nuevo, tan *solo* mientras una de las bobinas se mueve con respecto a la otra.

Por último, en el sistema de dos bobinas de la figura 29.1*d*, ambas se mantienen inmóviles y se varía la corriente en la segunda, ya sea abriendo y cerrando el interruptor, o bien, cambiando la resistencia de la segunda bobina con el interruptor cerrado (por ejemplo, modificando la temperatura de la segunda bobina). Se observa que al abrir o cerrar el interruptor, hay un pulso momentáneo de corriente en el primer circuito. Cuando se modifica la resistencia (y, por lo tanto, la corriente) de la segunda bobina, hay una corriente inducida en el primer circuito, pero únicamente mientras está cambiando la corriente en el segundo circuito.

Para explorar más a fondo los elementos comunes en estas observaciones, consideremos una serie de experimentos más detallada (figura 29.2). Se conecta una bobina de alambre a un galvanómetro; luego, se coloca la bobina entre los polos de un electroimán cuyo campo magnético se pueda modificar. A continuación se describe lo que se observa:

1. Cuando no hay corriente en el electroimán, por lo que $\vec{B} = \mathbf{0}$, el galvanómetro no indica corriente.
2. Cuando el electroimán se activa, hay una corriente momentánea a través del medidor conforme $\vec{B}$ se incrementa.
3. Cuando $\vec{B}$ se nivela en un valor estable, la corriente cae a cero, sin importar qué tan grande sea $\vec{B}$.
4. Con la bobina en un plano horizontal, la comprimimos para reducir el área de su sección transversal. El medidor detecta corriente solo *durante* la deforma-

29.1 Demostración del fenómeno de la corriente inducida.

a) Un imán fijo NO induce una corriente en la bobina



Todas estas acciones inducen una corriente en la bobina. ¿Qué tienen en común?*



b) Movimiento del imán acercándolo o alejándolo de la bobina

c) Movimiento de una segunda bobina que conduce corriente, acercándola o alejándola de la primera

d) Variación de la corriente en la segunda bobina (cerrando o abriendo el interruptor)



* Provocan que *cambie* el campo magnético a través de la bobina.

ción, no antes ni después. Cuando aumentamos el área para que la bobina regrese a su forma original, hay corriente en sentido opuesto, pero únicamente mientras cambia el área de la bobina.

5. Si se hace girar la bobina algunos grados alrededor de un eje horizontal, el medidor detecta corriente durante la rotación, en el mismo sentido que cuando se redujo el área. Cuando se hace girar de regreso la bobina, hay una corriente en sentido opuesto durante tal rotación.
6. Si se saca la bobina bruscamente del campo magnético, hay corriente durante el movimiento, en el mismo sentido que cuando se redujo el área.
7. Si reducimos el número de vueltas de la bobina desenrollando una o más de ellas, durante el proceso hay corriente en el mismo sentido que cuando se redujo el área. Si enrollamos más espiras en la bobina, hay una corriente en sentido opuesto al enrollar.
8. Cuando se desactiva el electroimán, hay una corriente momentánea en el sentido opuesto al de la corriente cuando fue activado.
9. Cuanto más rápido se efectúen estos cambios, mayor será la corriente.
10. Si se repiten todos estos experimentos con una bobina que tenga la misma forma pero diferentes material y resistencia, la corriente en cada caso es inversamente proporcional a la resistencia total del circuito. Esto demuestra que las fem inducidas que producen la corriente no dependen del material de la bobina, sino de su forma y del campo magnético.

29.2 Bobina en un campo magnético. Cuando el campo $\vec{B}$ es constante, y no cambian la forma, ubicación y orientación de la bobina, no hay corriente inducida en la bobina. Solo se induce corriente cuando cambia alguno de estos factores.



El elemento común en todos estos experimentos es el *flujo magnético* variable Φ_B a través de la bobina conectada al galvanómetro. En cada caso, el flujo cambia ya sea porque el campo magnético cambia con el tiempo o porque la bobina se mueve a través de un campo magnético no uniforme. La ley de inducción de Faraday, el tema de la siguiente sección, establece que en todas estas situaciones la fem inducida es proporcional a la *razón de cambio* del flujo magnético Φ_B a través de la bobina. La *dirección* de la fem inducida depende de si el flujo aumenta o disminuye. Si el flujo es constante, no hay fem inducida.

Las fem inducidas no son meras curiosidades de laboratorio, pues tienen muchísimas aplicaciones prácticas. Si está leyendo esto en el interior de un recinto, ¡está haciendo uso de fem inducidas en este preciso momento! En la central eléctrica que abastece su vecindario, un generador eléctrico produce una fem haciendo variar el flujo magnético a través de bobinas de alambre. (En la siguiente sección veremos con detalle cómo se hace esto). Esta fem proporciona el voltaje entre las terminales de las tomas de corriente en la pared de su casa, y este voltaje proporciona la energía a la lámpara o el dispositivo que ilumina su libro. De hecho, cualquier aparato que se conecte a la toma de corriente de pared utiliza fem inducidas.

Las fem inducidas magnéticamente, al igual que aquellas que se estudiaron en la sección 25.4, son el resultado de la acción de fuerzas *no electrostáticas*. Tenemos que diferenciar con cuidado entre los campos eléctricos electrostáticos producidos por cargas (de acuerdo con la ley de Coulomb), y los no electrostáticos producidos por campos magnéticos variables. Más adelante, en este capítulo y el siguiente, estudiaremos esta diferencia.

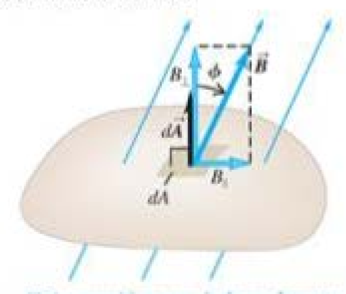
29.2 Ley de Faraday

El elemento común en todos los efectos de inducción es el flujo magnético variable a través de un circuito. Antes de enunciar la sencilla ley física que resume todas las clases de experimentos descritos en la sección 29.1, revisemos primero el concepto de flujo magnético Φ_B (que se presentó en la sección 27.3). Para un elemento de área infinitesimal $d\vec{A}$ en un campo magnético $\vec{B}$ (figura 29.3), el flujo magnético $d\Phi_B$ a través del área es

$$d\Phi_B = \vec{B} \cdot d\vec{A} = B_\perp \, dA = B \, dA \cos\phi$$

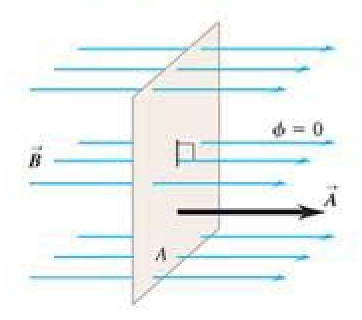
donde $B_\perp$ es la componente de $\vec{B}$ perpendicular a la superficie del elemento de área, y Φ es el ángulo entre $\vec{B}$ y $d\vec{A}$. (Al igual que en el capítulo 27, hay que tener cuidado en

29.3 Cálculo del flujo magnético a través de un elemento del área.

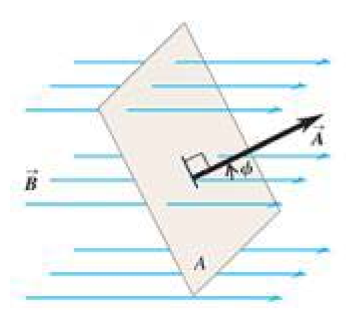


29.4 Cálculo del flujo de un campo magnético uniforme a través de un área plana. (Compare con la figura 22.6, que muestra las reglas para calcular el flujo de un campo *eléctrico* uniforme).

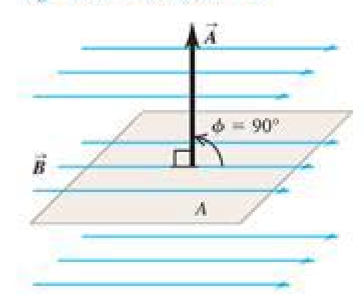
La superficie está completamente de frente al flujo magnético:
- $\vec{B}$ y $\vec{A}$ son paralelos (el ángulo entre $\vec{B}$ y $\vec{A}$ es $\phi = 0$).
- El flujo magnético $\Phi_B = \vec{B}\cdot\vec{A} = BA$.



La superficie está inclinada un ángulo ϕ con respecto a una orientación totalmente de frente ϕ:
- El ángulo entre $\vec{B}$ y $\vec{A}$ es ϕ.
- El flujo magnético $\Phi_B = \vec{B}\cdot\vec{A} = BA\cos\phi$.



La superficie está de perfil al campo magnético:
- $\vec{B}$ y $\vec{A}$ son perpendiculares (el ángulo entre $\vec{B}$ y $\vec{A}$ es $\phi = 90°$).
- El flujo magnético $\Phi_B = \vec{B}\cdot\vec{A} = BA\cos 90° = 0$.



distinguir entre las dos cantidades llamadas "fi": ϕ y Φ_B). El flujo magnético total Φ_B a través de un área finita es la integral de esta expresión sobre el área:

$$\Phi_B = \int \vec{B}\cdot d\vec{A} = \int B\, dA \cos\phi \tag{29.1}$$

Si $\vec{B}$ es uniforme a través de un área plana $\vec{A}$, entonces,

$$\Phi_B = \vec{B}\cdot\vec{A} = BA\cos\phi \tag{29.2}$$

La figura 29.4 repasa las reglas para el uso de la ecuación (29.2).

CUIDADO **Al elegir la dirección de $d\vec{A}$ o $\vec{A}$** En las ecuaciones (29.1) y (29.2) tenemos que ser cautelosos para definir la dirección del área vectorial $d\vec{A}$ o $\vec{A}$ sin ambigüedades. Siempre hay dos direcciones perpendiculares a cualquier área dada, y el signo del flujo magnético a través de esta depende de cuál se elija como positiva. Por ejemplo, en la figura 29.3 se eligió que $d\vec{A}$ apuntara hacia arriba, por lo que ϕ es menor que 90° y $\vec{B}\cdot d\vec{A}$ es positivo. Si en lugar de lo anterior, hubiéramos elegido que $d\vec{A}$ apuntara hacia abajo, ϕ habría sido mayor que 90° y $\vec{B}\cdot d\vec{A}$ habría sido negativo. Cualquier opción es igual de adecuada; pero una vez que se elige una, debemos conservarla.

La **ley de Faraday de la inducción** establece lo siguiente:

La fem inducida en un circuito cerrado es igual al negativo de la razón de cambio en el tiempo del flujo magnético a través del circuito.

En símbolos, la ley de Faraday es

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt} \quad \text{(ley de Faraday de la inducción)} \tag{29.3}$$

Para comprender el signo negativo, es necesario introducir una convención de signos para la fem inducida $\mathcal{E}$. Pero primero veamos un ejemplo sencillo práctico de esta ley.



Ejemplo 29.1 Fem y corriente inducidas en una espira

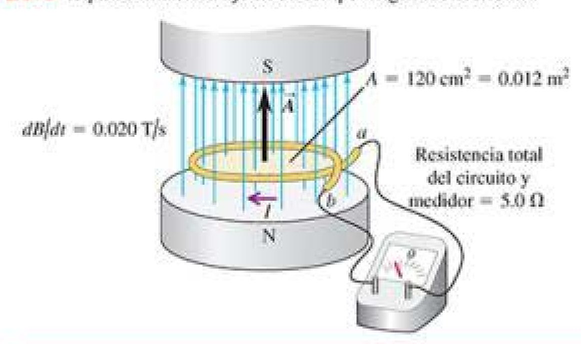
El campo magnético entre los polos del electroimán de la figura 29.5 es uniforme en cualquier momento, pero su magnitud se incrementa a razón de 0.020 T/s. El área de la espira conductora en el campo es de 120 cm^2, y la resistencia total del circuito, incluyendo el medidor, es de 5.0 Ω. *a*) Determine la fem inducida y la corriente inducida en el circuito. *b*) Si se sustituye la espira por otra hecha de un material aislante, ¿qué efecto tendrá esto sobre la fem inducida y la corriente inducida?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: El flujo magnético Φ_B a través de la espira cambia conforme se modifica el campo magnético. Así, habrá una fem $\mathcal{E}$ y una corriente I inducidas en la espira. Calculamos Φ_B usando la ecuación (29.2) y, luego, calculamos $\mathcal{E}$ usando la ley de Faraday. Finalmente, se calcula I usando $\mathcal{E} = IR$, donde R es la resistencia total del circuito que incluye la espira.

EJECUTAR: *a*) El área vectorial $\vec{A}$ de la espira es perpendicular al plano de la misma; elegiremos que $\vec{A}$ sea vertical hacia arriba. Así, $\vec{A}$ y $\vec{B}$ son paralelos, y como $\vec{B}$ es uniforme, el flujo magnético a través de la espira es $\Phi_B = \vec{B} \cdot \vec{A} = BA \cos 0 = BA$. El área $A = 0.012\ \text{m}^2$ es constante, por lo que la razón de cambio del flujo magnético es

29.5 Espira conductora fija en un campo magnético creciente.



$$\frac{d\Phi_B}{dt} = \frac{d(BA)}{dt} = \frac{dB}{dt}A = (0.020\ \text{T/s})(0.012\ \text{m}^2)$$
$$= 2.4 \times 10^{-4}\ \text{V} = 0.24\ \text{mV}$$

Esto, aparte de un signo que aún no hemos analizado, es la fem inducida $\mathcal{E}$. La corriente inducida correspondiente es

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{2.4 \times 10^{-4}\ \text{V}}{5.0\ \Omega} = 4.8 \times 10^{-5}\ \text{A} = 0.048\ \text{mA}$$

b) Al cambiar a una espira hecha de material aislante, su resistencia se hace muy grande. La ley de Faraday, ecuación (29.3), no involucra la resistencia del circuito de ninguna forma, por lo que la *fem* inducida no cambia. Pero la *corriente* será menor, según la ecuación $I = \mathcal{E}/R$. Si la espira estuviera hecha de un aislante perfecto de resistencia infinita, la corriente inducida sería igual a cero. Se trata de una situación parecida a la de una batería aislada, cuyas terminales no están conectadas a nada: hay una fem presente, pero no fluye corriente.

EVALUAR: Verifiquemos la consistencia de las unidades. Un modo de hacerlo es observar que la relación de fuerza magnética $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$ implica que las unidades de $\vec{B}$ son las de la fuerza divididas entre las unidades de (carga por velocidad): $1\ \text{T} = (1\ \text{N})/(1\ \text{C} \cdot \text{m/s})$. Por lo que, las unidades de flujo magnético son $(1\ \text{T})(1\ \text{m}^2) = 1\ \text{N} \cdot \text{s} \cdot \text{m/C}$, y la razón de cambio en el tiempo del flujo magnético es $1\ \text{N} \cdot \text{m/C} = 1\ \text{J/C} = 1\ \text{V}$. Así, la unidad de $d\Phi_B/dt$ es el volt, como lo requiere la ecuación (29.3). También recordemos que la unidad de flujo magnético es el weber (Wb): $1\ \text{T} \cdot \text{m}^2 = 1\ \text{Wb}$, por lo que $1\ \text{V} = 1\ \text{Wb/s}$.

Dirección de la fem inducida

La dirección de una fem o corriente inducidas se calcula con la ecuación (29.3) y con algunas sencillas reglas para los signos. El procedimiento es el siguiente:

1. Defina una dirección positiva para el vector área $\vec{A}$.
2. A partir de las direcciones de $\vec{A}$ y del campo magnético $\vec{B}$, determine el signo del flujo magnético Φ_B y su razón de cambio $d\Phi_B/dt$. La figura 29.6 incluye varios ejemplos.
3. Determine el signo de la fem o de la corriente inducida. Si el flujo es creciente, de manera que $d\Phi_B/dt$ es positiva, entonces la fem o la corriente inducida es negativa; si el flujo es decreciente, entonces $d\Phi_B/dt$ es negativa y la fem o la corriente inducida es positiva.
4. Por último, determine la dirección de la fem o de la corriente inducida usando su mano derecha. Doble los dedos de la mano derecha alrededor del vector $\vec{A}$ con el pulgar en dirección de $\vec{A}$. Si la fem o la corriente inducida en el circuito es *positiva*, está en la misma dirección de los dedos doblados. Si la fem o la corriente inducida es *negativa*, se encuentra en la dirección opuesta.

En el ejemplo 29.1, donde $\vec{A}$ va hacia arriba, una $\mathcal{E}$ positiva estaría dirigida en sentido antihorario alrededor de la espira, como se observa en la figura. En el ejemplo, tanto $\vec{A}$ como $\vec{B}$ van hacia arriba, por lo que Φ_B es positivo; la magnitud B es creciente, por lo que $d\Phi_B/dt$ es positiva. Entonces, según la ecuación (29.3), la $\mathcal{E}$ del ejemplo 29.1 es *negativa*. Su dirección real va *en sentido horario* alrededor de la espira, como se observa en la figura.

Si la espira de la figura 29.5 es un conductor, de la fem resulta una corriente inducida que también va en sentido horario, como se muestra en la figura 29.5. Esta corriente inducida produce un campo magnético adicional a través de la espira, y la regla de la mano derecha que se describió en la sección 28.6 indica que la dirección de este campo es *opuesta* al campo creciente producido por el electroimán. Este es un ejemplo de una regla general llamada *ley de Lenz*, la cual establece que cualquier efecto de inducción tiende a oponerse al cambio que lo ocasionó; en este caso, el

Aplicación Exploración del cerebro con fem inducidas

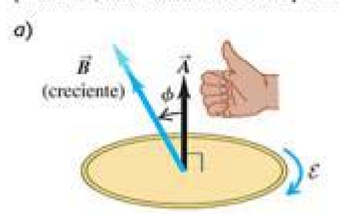
La estimulación magnética transcraneana (TMS, por las siglas de *transcranial magnetic stimulation*) es una técnica para estudiar la función de varias partes del cerebro. Una bobina colocada en la cabeza del sujeto transporta una corriente eléctrica variable, generando así un campo magnético variable. Este campo provoca una fem inducida que activa la actividad eléctrica en la región del cerebro que se encuentra bajo la bobina. Observando cómo responde el sujeto a la TMS (por ejemplo, los músculos que mueve al estimularse cierta parte del cerebro), un médico puede probar diversas condiciones neurológicas.



29.6 El flujo magnético se hace *a*) más positivo, *b*) menos positivo, *c*) más negativo y *d*) menos negativo. Por lo tanto, Φ_B es creciente en los incisos *a*) y *d*) y decreciente en *b*) y *c*). En *a*) y *d*) las fem son negativas (opuestas a la dirección de los dedos doblados de la mano derecha cuando el pulgar apunta a lo largo de $\vec{A}$). En *b*) y *c*) las fem son positivas (en la misma dirección que los dedos enrollados).

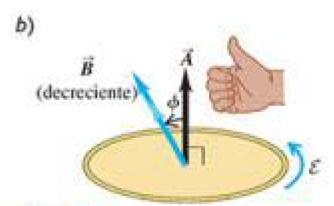


a)



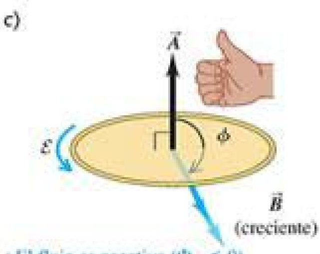
- El flujo es positivo ($\Phi_B > 0$)...
- ... y se vuelve más positivo ($d\Phi_B/dt > 0$).
- La fem inducida es negativa ($\mathcal{E} < 0$).

b)



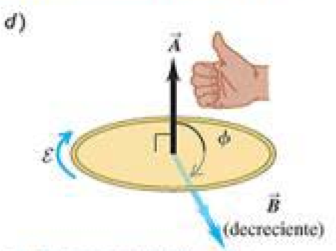
- El flujo es positivo ($\Phi_B > 0$)...
- ... y se vuelve menos positivo ($d\Phi_B/dt < 0$).
- La fem inducida es positiva ($\mathcal{E} > 0$).

c)



- El flujo es negativo ($\Phi_B < 0$)...
- ... y se vuelve más negativo ($d\Phi_B/dt < 0$).
- La fem inducida es positiva ($\mathcal{E} > 0$).

d)



- El flujo es negativo ($\Phi_B < 0$)...
- ... y se vuelve menos negativo ($d\Phi_B/dt > 0$).
- La fem inducida es negativa ($\mathcal{E} < 0$).

cambio es el incremento en el flujo del campo del electroimán a través de la espira. (En la siguiente sección se estudiará esta ley con todo detalle).

El lector debería comprobar los signos de las fem y corrientes inducidas para la lista de experimentos de la sección 29.1. Por ejemplo, cuando la espira de la figura 29.2 está en un campo constante y la inclinamos o comprimimos de manera que *disminuya* el flujo que pasa por ella, la fem y corriente inducidas van en sentido antihorario, vistas desde arriba.



PhET: Faraday's Electromagnetic Lab
PhET: Faraday's Law
PhET: Generator

CUIDADO **Las fem inducidas son ocasionadas por cambios en el flujo** Como el flujo magnético tiene un papel central en la ley de Faraday, es tentador pensar que el *flujo* es la causa de la fem inducida y que en un circuito aparecerá una fem inducida siempre que haya un campo magnético en la región limitada por el circuito. Pero la ecuación (29.3) demuestra que solo un *cambio* en el flujo a través del circuito, no el flujo en sí, puede inducir una fem en el circuito. Si el flujo a través del circuito tiene un valor constante, ya sea positivo, negativo o cero, no habrá fem inducida.

Si se tiene una bobina con N espiras idénticas y si el flujo varía a la misma razón a través de cada espira, la razón *total* de cambio a través de todas las espiras es N veces más grande que para una sola espira. Si Φ_B es el flujo a través de cada espira, la fem total en una bobina con N espiras es

$$\mathcal{E} = -N\frac{d\Phi_B}{dt} \qquad (29.4)$$

Como se indicó en la introducción de este capítulo, las fem inducidas desempeñan una función esencial en la generación de energía eléctrica para uso comercial. Varios de los ejemplos que siguen exploran diferentes métodos para generar fem usando el movimiento de un conductor con respecto a un campo magnético, lo cual da lugar a un flujo variable a través de un circuito.

Estrategia para resolver problemas 29.1 Ley de Faraday

IDENTIFICAR *los conceptos relevantes:* La ley de Faraday se aplica cuando hay un flujo magnético variable. Para utilizarla se identifica un área a través de la cual hay un flujo de campo magnético. Por lo general, esta será el área encerrada por la espira, hecha de un material conductor (aunque no siempre; véase el inciso *b*) del ejemplo 29.1). Identifique las incógnitas.

PLANTEAR *el problema* de acuerdo con los siguientes pasos:

1. La ley de Faraday relaciona la fem inducida con la razón de cambio del flujo magnético. Para calcular esta razón primero se tiene que entender qué es lo que hace que cambie el flujo: ¿El conductor se está moviendo? ¿Está cambiando su orientación? ¿El campo magnético está cambiando? Recuerde que no es el flujo en sí mismo lo que importa, sino su *razón de cambio*.
2. El vector área $\vec{A}$ (o $d\vec{A}$) debe ser perpendicular al plano del área. Siempre hay dos opciones para su dirección; por ejemplo, si el área está en un plano horizontal, $\vec{A}$ podría apuntar hacia arriba o hacia abajo. Elija una dirección y úsela de manera consistente en todo el problema.

EJECUTAR *la solución* como sigue:

1. Calcule el flujo magnético usando la ecuación (29.2) si $\vec{B}$ es uniforme a través del área de la espira, o con la ecuación (29.1) si no es uniforme, tomando en cuenta la dirección que se eligió para el vector área.
2. Calcule la fem inducida empleando la ecuación (29.3) o la (29.4) (si el conductor tiene N espiras en la bobina). Aplique la regla de los signos (descrita inmediatamente después del ejemplo 29.1) para determinar la dirección positiva de la fem.
3. Si conoce la resistencia del circuito, puede calcular la magnitud de la corriente inducida I con $\mathcal{E} = IR$.

EVALUAR *la respuesta:* Compruebe las unidades de los resultados y vuelva a revisar que haya utilizado correctamente las reglas de los signos para el cálculo del flujo magnético y la fem inducida.

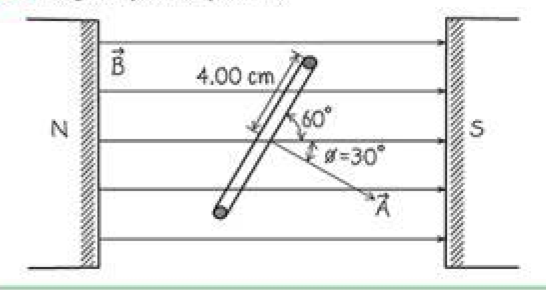
Ejemplo 29.2 Magnitud y dirección de una fem inducida

Se coloca una bobina circular de alambre que tiene 500 espiras con radio de 4.00 cm entre los polos de un electroimán grande, donde el campo magnético es uniforme y forma un ángulo de 60° con el plano de la bobina; el campo disminuye a una tasa de 0.200 T/s. ¿Cuáles son la magnitud y dirección de la fem inducida?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: La incógnita es la fem inducida por un flujo magnético variable a través de la bobina. El flujo varía debido a que la amplitud del campo magnético disminuye. Se elige que la dirección del vector área $\vec{A}$ sea la que se observa en la figura 29.7. Con esta elección, la geometría es muy similar a la figura 29.6*b*. Esa figura nos ayudará a determinar la dirección de la fem inducida.

29.7 Diagrama para este problema.



EJECUTAR: El campo magnético es uniforme en toda la espira, por lo que es posible calcular el flujo con la ecuación (29.2): $\Phi_B = BA\cos\phi$, donde $\phi = 30°$. En esta expresión, la única cantidad que cambia con el tiempo es la magnitud B del campo, de modo que $d\Phi_B/dt = (dB/dt)A\cos\phi$.

CUIDADO **Recuerde cómo se define ϕ** Tal vez estuvo tentado a utilizar $\phi = 60°$ en este problema. Si así fue, recuerde que ϕ es el ángulo entre $\vec{A}$ y $\vec{B}$, *no* entre $\vec{B}$ y el plano de la espira. **!**

Según la ecuación (29.4), la fem inducida en la bobina de $N = 500$ espiras es

$$\mathcal{E} = -N\frac{d\Phi_B}{dt} = N\frac{dB}{dt}A\cos\phi$$
$$= 500(-0.200\ \text{T/s})\pi(0.0400\ \text{m})^2(\cos 30°) = 0.435\ \text{V}$$

La respuesta positiva significa que cuando se apunta el pulgar derecho en la dirección del vector área $\vec{A}$ (30° por debajo del campo magnético $\vec{B}$ en la figura 29.7), la dirección positiva para $\mathcal{E}$ corresponde a la dirección de los dedos doblados de la mano derecha. Si en la figura 29.7 viéramos la bobina desde el lado izquierdo y en la dirección de $\vec{A}$, la fem iría en sentido horario.

EVALUAR: Si se conectan los extremos del alambre, la dirección de la corriente en la bobina sería la misma que la de la fem, es decir, en sentido horario, viendo desde la izquierda de la bobina. Una corriente en sentido horario aumenta el flujo magnético a través de la bobina, por lo que tiende a oponerse a la disminución del flujo total. Este es un ejemplo de la ley de Lenz, que estudiaremos en la sección 29.3.

Ejemplo 29.3 Generador I: un alternador sencillo

La figura 29.8*a* ilustra la versión sencilla de un *alternador*, que es un dispositivo que genera una fem. Se hace girar una espira rectangular con rapidez angular constante ω alrededor del eje que se indica. El campo magnético $\vec{B}$ es uniforme y constante. En el momento $t = 0$, $\phi = 0$. Determine la fem inducida.



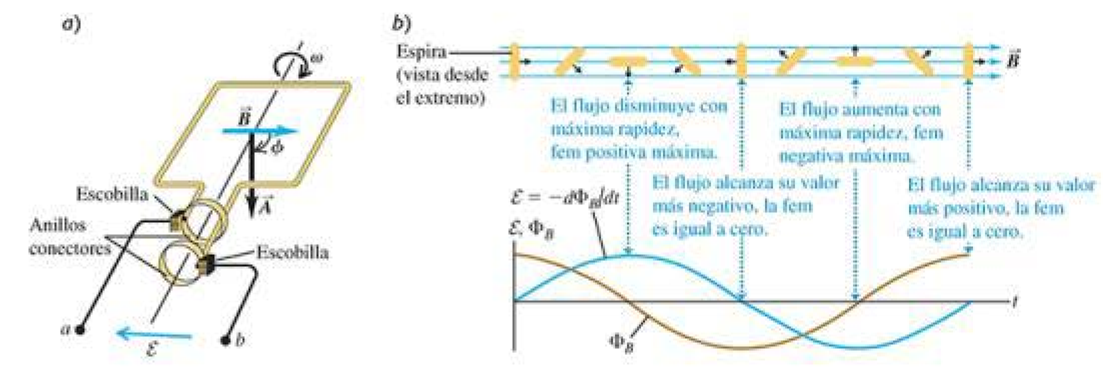
SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: El campo magnético $\vec{B}$ y el área A de la espira son constantes, pero el flujo a través de la espira cambia porque esta gira de modo que el ángulo ϕ entre $\vec{B}$ y el vector área $\vec{A}$ cambia

Continúa



29.8 *a*) Diagrama de un alternador. Una espira conductora gira en un campo magnético, lo cual produce una fem. Las conexiones entre cada extremo de la espira y el circuito externo se hacen mediante un anillo conector en ese extremo. El sistema se ilustra para el momento en que el ángulo $\phi = \omega t = 90°$. *b*) Gráfica del flujo a través de la espira y la fem resultante entre las terminales a y b, a lo largo de las posiciones correspondientes de la espira durante una rotación completa.



(figura 29.8*a*). Como la rapidez angular es constante y $\phi = 0$ en $t = 0$, el ángulo en función del tiempo está dado por $\phi = \omega t$.

EJECUTAR: El campo magnético es uniforme en toda la espira, por lo que el flujo magnético es $\Phi_B = BA\cos\phi = BA\cos\omega t$. Entonces, por la ley de Faraday [ecuación (29.3)] la fem inducida es

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{d}{dt}(BA\cos\omega t) = \omega BA\,\mathrm{sen}\,\omega t$$

EVALUAR: La fem inducida $\mathcal{E}$ varía en forma sinusoidal con respecto al tiempo (figura 29.8*b*). Cuando el plano de la espira es perpendicular a $\vec{B}$ ($\phi = 0$ o 180°), Φ_B alcanza sus valores máximo y mínimo. En esos momentos, su razón instantánea de cambio es igual a cero y $\mathcal{E}$ es cero. A la inversa, $\mathcal{E}$ alcanza sus valores máximo y mínimo cuando el plano de la espira es paralelo a $\vec{B}$ ($\phi = 90°$ o 270°) y Φ_B cambia más rápidamente. Observe que la fem inducida no depende de la *forma* de la espira, tan solo de su área.

Podemos utilizar un alternador como fuente de fem en un circuito externo utilizando dos *anillos conectores* que giran con la espira, como se ilustra en la figura 29.8*a*. Los anillos se deslizan contra unos contactos fijos llamados *escobillas*, que están conectados a las terminales exteriores a y b. Como la fem varía en forma sinusoidal, la corriente resultante en el circuito es *alterna*, cuya magnitud y dirección también varían en forma sinusoidal. La amplitud de la fem aumenta si se incrementa la rapidez de rotación, la magnitud del campo o el área de la espira, o bien, utilizando N espiras en lugar de una, como en la ecuación (29.4).

Los alternadores se usan en los automóviles para generar las corrientes en los sistemas de encendido, luces y entretenimiento. El arreglo es un poco diferente del de este ejemplo: en vez de tener una espira giratoria en un campo magnético, la espira permanece fija y es el electroimán el que gira. (La rotación se consigue mediante una conexión mecánica entre el alternador y el motor). Pero el resultado es el mismo; el flujo a través de la espira varía de manera sinusoidal, lo cual produce una fem que cambia de modo sinusoidal. En las plantas de generación de energía eléctrica se utiliza el mismo tipo de alternadores, solo que más grandes (figura 29.9).

29.9 Los alternadores comerciales utilizan muchas espiras de alambre enrolladas alrededor de una estructura con apariencia de barril llamada armadura. La armadura y el alambre permanecen fijos mientras los electroimanes giran sobre un eje (que no se muestra), el cual pasa por el centro de la armadura. La fem inducida resultante es mucho más grande de lo que sería posible con una sola espira de alambre.



Ejemplo 29.4 Generador II: Un generador de CD y la fuerza contraelectromotriz en un motor



El alternador del ejemplo 29.3 produce una fem que varía de modo sinusoidal y por ello genera una corriente alterna. La figura 29.10*a* muestra un *generador de corriente directa* (cd) que produce una fem que tiene siempre el mismo signo. El arreglo de anillos conectores se llama *conmutador*; revierte las conexiones del circuito externo en posiciones angulares donde se invierte la fem. La fem resultante se muestra en la figura 29.10*b*. Los generadores de cd comerciales tienen un gran número de segmentos con bobinas y conmutadores; este arreglo suaviza las fluctuaciones en la fem, por lo que el voltaje terminal no solo es unidireccional, sino prácticamente constante. Este arreglo de escobillas y conmutador es el mismo que el del motor de corriente directa que se examinó en la sección 27.8. La *fuerza contraelectromotriz* del motor es justamente la fem inducida por el flujo magnético variable a través de su bobina giratoria. Considere un motor con una bobina cuadrada de 10.0 cm por lado y 500 espiras. Si el campo magnético tiene una magnitud de 0.200 T, ¿a qué rapidez de rotación la fuerza contraelectromotriz *media* del motor es igual a 112 V?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Por lo a la espira giratoria se refiere, la situación es la misma que la del ejemplo 29.3, excepto que ahora hay N espiras de alambre. Sin el conmutador, la fem alternaría entre valores

positivos y negativos, y tendría un valor medio de cero (figura 29.8*b*). Pero con el conmutador, la fem nunca es negativa y su valor medio es positivo (figura 29.10*b*). Usaremos el resultado del ejemplo 29.3 para obtener una expresión para este valor medio y se despejará la rapidez de rotación ω.

EJECUTAR: La comparación de las figuras 29.8*b* y 29.10*b* muestra que la fuerza contraelectromotriz del motor es exactamente N veces el valor absoluto de la fem calculada para el alternador del ejemplo 29.3, como en la ecuación (29.4): $|\mathcal{E}| = N\omega BA|\operatorname{sen}\omega t|$. Para obtener la fuerza contraelectromotriz *media* se sustituye $|\operatorname{sen}\omega t|$ por su valor medio. Esto se logra integrando $|\operatorname{sen}\omega t|$ durante medio ciclo, de $t = 0$ a $t = T/2 = \pi/\omega$, para luego dividir el resultado entre el tiempo transcurrido π/ω. Durante este medio ciclo, la función seno es positiva, por lo que $|\operatorname{sen}\omega t| = \operatorname{sen}\omega t$, y se tiene

$$(|\operatorname{sen}\omega t|)_{\text{med}} = \frac{\int_0^{\pi/\omega} \operatorname{sen}\omega t \, dt}{\pi/\omega} = \frac{2}{\pi}$$

Entonces, la fuerza contraelectromotriz media es

$$\mathcal{E}_{\text{med}} = \frac{2N\omega BA}{\pi}$$

Esto confirma que la fuerza contraelectromotriz es proporcional a la rapidez de rotación ω, como se afirmó sin demostrarlo en la sección 27.8. Al despejar ω se obtiene

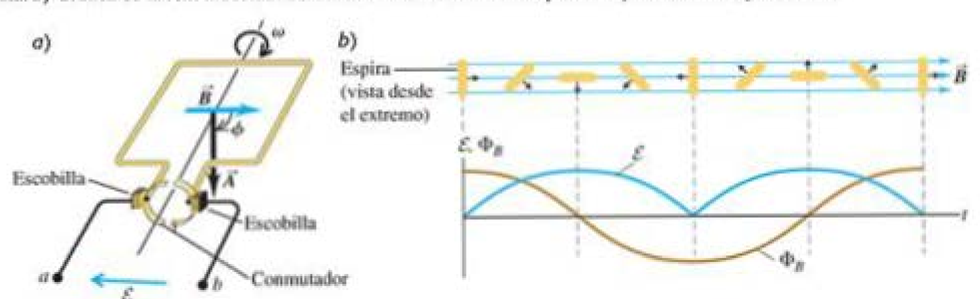
$$\omega = \frac{\pi\mathcal{E}_{\text{med}}}{2NBA} = \frac{\pi(112\text{ V})}{2(500)(0.200\text{ T})(0.100\text{ m})^2} = 176\text{ rad/s}$$

(Se usaron las relaciones de unidades $1\text{ V} = 1\text{ Wb/s} = 1\text{ T}\cdot\text{m}^2/\text{s}$, del ejemplo 29.1).

EVALUAR: La fuerza contraelectromotriz media es directamente proporcional a ω. De esta forma, cuanto menor sea la rapidez de rotación, menor será la fuerza contraelectromotriz y mayor será la posibilidad de quemar el motor, como se indicó en el ejemplo 27.11 (sección 27.8).

29.10 *a*) Diagrama de un generador de cd que utiliza un conmutador de anillo partido. Las mitades del anillo están unidas a la espira y giran con esta. *b*) Gráfica de la fem inducida resultante entre las terminales *a* y *b*. Compárela con la figura 29.8*b*.





Ejemplo 29.5 Generador III: El generador de conductor deslizante

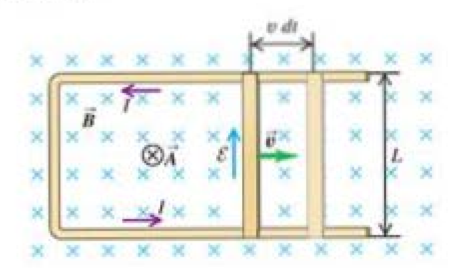


La figura 29.11 muestra un conductor con forma de U en un campo magnético uniforme $\vec{B}$ perpendicular al plano de la figura, dirigido *hacia* la página. Se coloca una varilla de metal con longitud L (el "conductor deslizante"), entre los dos brazos del conductor para formar un circuito, y se mueve la varilla hacia la derecha con velocidad $\vec{v}$, constante. Esto induce una fem y una corriente, que es la causa por la que este dispositivo se llama *generador de conductor deslizante*. Determine la magnitud y dirección de la fem inducida resultante.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: El flujo magnético cambia porque aumenta el área de la espira, limitada a la derecha por la varilla móvil. La incógnita es la fem inducida $\mathcal{E}$ en esta espira con área en expansión. El campo magnético es uniforme en toda el área de la espira, por lo que se calcula el flujo magnético empleando $\Phi_B = BA\cos\phi$. Se elige que el vector área $\vec{A}$ apunte directo hacia la página, en la misma dirección que $\vec{B}$. Con esta elección, una fem positiva será aquella que esté dirigida en el sentido horario alrededor de la espira. (El lector puede comprobar esto con la regla de la mano derecha: apunte el pulgar de su mano derecha hacia la página y doble los dedos como en la figura 29.6).

29.11 Generador de conductor deslizante. Tanto el campo magnético $\vec{B}$ como el área vectorial $\vec{A}$ están dirigidos hacia la figura. El aumento en el flujo magnético (causado por un incremento del área) induce la fem y la corriente.



EJECUTAR: Como $\vec{B}$ y $\vec{A}$ apuntan en la misma dirección, el ángulo $\phi = 0$ y $\Phi_B = BA$. La magnitud B del campo magnético es constante, por lo que la fem inducida es

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -B\frac{dA}{dt}$$

Para calcular dA/dt se observa que en el momento dt la varilla deslizante se desplaza una distancia $v\,dt$ (figura 29.11), y el área de la espira se incrementa en una cantidad $dA = Lv\,dt$. Por lo tanto, la fem inducida es

$$\mathcal{E} = -B\frac{Lv\,dt}{dt} = -BLv$$

El signo negativo nos indica que la fem está dirigida en el *sentido antihorario* alrededor de la espira, al igual que la corriente inducida, como se muestra en la figura.

Continúa

EVALUAR: La fem de un generador de conductor deslizante es constante si $\vec{v}$ es constante. En este caso, el generador de conductor deslizante actúa como un generador de *corriente directa*. No es un dispositivo muy práctico, ya que la varilla en cierto momento se mueve más allá del conductor con forma de U y el contacto se pierde, con lo que la corriente se detiene.



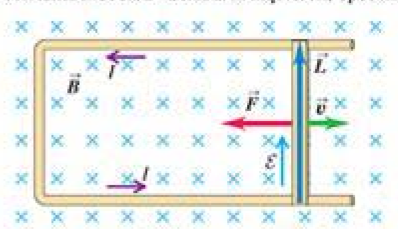
Ejemplo 29.6 Trabajo y potencia en un generador de conductor deslizante

En el generador de conductor deslizante del ejemplo 29.5, la energía se disipa en el circuito debido a su resistencia. Sea R la resistencia del circuito (formado por el conductor deslizante que se mueve y el conductor con forma de U que conecta los extremos del conductor deslizante) en un momento dado del movimiento del conductor deslizante. Determine la razón a la que se disipa energía en el circuito y la razón a la que se debe efectuar trabajo para desplazar la varilla a través del campo magnético.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Las incógnitas son las *razones* a las que se disipa energía y se realiza trabajo. La energía se disipa en el circuito a una razón $P_{\text{disipada}} = I^2R$. La corriente I en el circuito es igual a $|\mathcal{E}|/R$; en el ejemplo 29.5 se obtuvo una expresión para la fem inducida $\mathcal{E}$ en este circuito. Hay una fuerza magnética $\vec{F} = I\vec{L} \times \vec{B}$ sobre la varilla, donde $\vec{L}$ apunta a lo largo de la varilla en la dirección de la corriente. La figura 29.12 muestra que esta fuerza es opuesta a la velocidad $\vec{v}$; de la varilla; para mantener el movimiento, quien sea que empuje la varilla debe aplicar una fuerza de igual magnitud en la dirección de $\vec{v}$. Esta fuerza hace trabajo a una razón $P_{\text{aplicada}} = Fv$.

29.12 La fuerza magnética $\vec{F} = I\vec{L} \times \vec{B}$ que actúa sobre la varilla debido a la corriente inducida va hacia la izquierda, opuesta a $\vec{v}$.



EJECUTAR: Primero se calcula P_{disipada}. De acuerdo con el ejemplo 29.5, $\mathcal{E} = -BLv$, de modo que la corriente en la varilla es $I = |\mathcal{E}|/R = Blv/R$. Por lo que

$$P_{\text{disipada}} = I^2R = \left(\frac{BLv}{R}\right)^2 R = \frac{B^2L^2v^2}{R}$$

Para calcular P_{aplicada} primero se determina la magnitud de $\vec{F} = I\vec{L} \times \vec{B}$. Como $\vec{L}$ y $\vec{B}$ son perpendiculares, esta magnitud es

$$F = ILB = \frac{BLv}{R}LB = \frac{B^2L^2v}{R}$$

La fuerza aplicada tiene la misma magnitud y hace trabajo a una razón de

$$P_{\text{aplicada}} = Fv = \frac{B^2L^2v^2}{R}$$

EVALUAR: La razón a la que se realiza trabajo es exactamente *igual* a la razón a la que la energía se disipa en la resistencia.

CUIDADO **No se puede violar la conservación de la energía** Tal vez piense que si se invirtiera la dirección de $\vec{B}$ o de $\vec{v}$ sería posible que la fuerza magnética $\vec{F} = I\vec{L} \times \vec{B}$ estuviera en la *misma* dirección que $\vec{v}$. Este sería un gran truco. Una vez que la varilla está en movimiento, el flujo magnético variable induciría una fem y una corriente, y la fuerza magnética sobre la varilla haría que esta se moviera aún más rápido, lo cual incrementaría la fem y la corriente; esto continuaría así hasta que la varilla alcanzara una gran rapidez y generara una fuerza eléctrica a una razón enorme. Si cree que esto parece demasiado bueno para ser cierto, por no mencionar la violación de la conservación de la energía, tiene razón. Al invertirse $\vec{B}$ también se invierte el signo de la fem inducida y de la corriente y, con ello, la dirección de $\vec{L}$, por lo que la fuerza magnética aún se opone al movimiento de la varilla; un resultado similar se obtendría si se invirtiera $\vec{v}$.

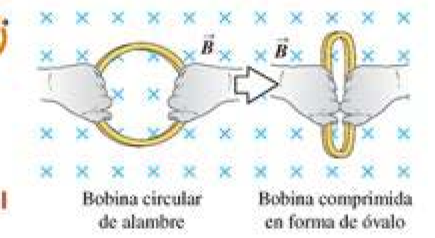
Generadores como convertidores de energía

El ejemplo 29.6 demuestra que el generador de conductor deslizante no produce energía eléctrica de la nada; la energía la suministra cualquier cuerpo que ejerza la fuerza para mantener la varilla en movimiento. Todo lo que hace el generador es *convertir* esa energía a una forma diferente. La igualdad entre la razón con que se suministra energía *mecánica* al generador y la razón con que se produce energía *eléctrica* se cumple para todas las clases de generadores. Esto es cierto en particular para el alternador descrito en el ejemplo 29.3. (Se están ignorando los efectos de la fricción en los cojinetes de un alternador o entre la varilla y el conductor con forma de U de un generador de conductor deslizante. Si se incluyeran tales efectos, la conservación de la energía requeriría que la energía perdida por la fricción no estuviera disponible para convertirse en energía eléctrica. En los generadores reales, la fricción se mantiene en el mínimo para que el proceso de conversión de energía sea lo más eficiente posible).

En el capítulo 27 se señaló que la fuerza magnética sobre cargas en movimiento nunca realiza trabajo. Pero tal vez usted piense que la fuerza magnética $\vec{F} = I\vec{L} \times \vec{B}$ en el ejemplo 29.6 *efectúa* trabajo (negativo), sobre la varilla conductora de corriente conforme esta se desplaza, lo cual contradice nuestro enunciado anterior. En realidad, el trabajo efectuado por la fuerza magnética es igual a cero. Las cargas en movimiento que constituyen la corriente en la varilla de la figura 29.12 tienen una componente vertical de velocidad, lo que ocasiona una componente horizontal de fuerza sobre

estas cargas. Como resultado, hay un desplazamiento horizontal de la carga dentro de la varilla, el lado izquierdo adquiere una carga neta positiva, y el lado derecho una carga neta negativa. El resultado es una componente horizontal del campo eléctrico, perpendicular a la longitud de la varilla (similar al efecto Hall que se describió en la sección 27.9). Es este campo, en la dirección del movimiento de la varilla, el que realiza trabajo sobre las cargas en movimiento de la varilla y, por lo tanto, indirectamente, sobre los átomos que la forman.

Evalúe su comprensión de la sección 29.2 La figura de la derecha muestra una bobina de alambre que se comprime en un campo magnético uniforme. *a*) Mientras la bobina se comprime, ¿la fem inducida en la bobina **i.** va en sentido horario, **ii.** va en sentido antihorario o **iii.** es igual a cero? *b*) Una vez que la bobina haya alcanzado su forma final comprimida, ¿la fem inducida en ella **i.** va en sentido horario, **ii.** va en sentido antihorario o **iii.** es igual a cero?



29.3 Ley de Lenz

La ley de Lenz es un método alternativo conveniente para determinar la dirección de una corriente o una fem inducidas. La ley de Lenz no es un principio independiente; se puede obtener de la ley de Faraday. Siempre da los mismos resultados que las reglas de los signos que presentamos en relación con la ley de Faraday, pero a menudo es más fácil de usar. La ley de Lenz también ayuda a entender de manera intuitiva los distintos efectos de la inducción y el papel de la conservación de la energía. H. F. E. Lenz (1804-1865) fue un científico ruso que reprodujo de forma independiente muchos de los descubrimientos de Faraday y Henry. La **ley de Lenz** establece lo siguiente:

La dirección de cualquier efecto de inducción magnética es tal que se opone a la causa del efecto.

La "causa" puede ser un flujo variable debido a un campo magnético variable a través de un circuito fijo, un flujo variable debido al movimiento de los conductores que constituyen el circuito, o cualquier combinación de los anteriores. Si el flujo en un circuito fijo cambia, como en los ejemplos 29.1 y 29.2, la corriente inducida genera un campo magnético por sí misma. Dentro del área limitada por el circuito, este campo es *opuesto* al campo original si se *incrementa*; pero tiene la *misma* dirección que el campo original si *disminuye*. Es decir, la corriente inducida se opone al *cambio en el flujo* a través del circuito (*no* al flujo en sí).

Si el cambio del flujo se debe al movimiento de los conductores, como en los ejemplos 29.3 a 29.6, la dirección de la corriente inducida en el conductor en movimiento es tal, que la dirección de la fuerza magnética sobre el conductor es opuesta a la dirección de su movimiento. Así, el movimiento del conductor, que provocó la corriente inducida, encuentra oposición. Esto se vio de manera explícita en el caso del generador de conductor deslizante del ejemplo 29.6. En todos estos casos, la corriente inducida trata de preservar el *statu quo* oponiéndose al movimiento o al cambio del flujo.

La ley de Lenz también se relaciona directamente con la conservación de la energía. Si la corriente inducida en el ejemplo 29.6 fuera en dirección opuesta a la que indica la ley de Lenz, la fuerza magnética sobre la varilla la aceleraría hacia una rapidez siempre creciente, sin una fuente externa de energía, aun cuando la energía eléctrica se disipara en el circuito. Esto sería una clara violación de la conservación de la energía y no ocurre en la naturaleza.

Ejemplo conceptual 29.7 La ley de Lenz y el generador de conductor deslizante



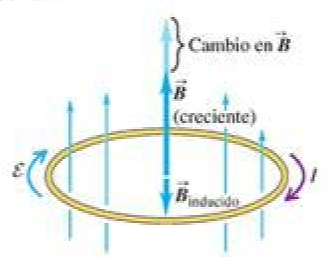
En la figura 29.11, la corriente inducida en la espira provoca un campo magnético adicional en el área limitada por la espira. La dirección de la corriente inducida va en sentido antihorario, entonces, de acuerdo con el análisis de la sección 28.2, este campo magnético adicional está dirigido *hacia afuera* del plano de la figura. Esa dirección es opuesta a la del campo magnético original, de modo que tiende a cancelar el efecto de ese campo. Esto es exactamente lo que predice la ley de Lenz.



Ejemplo conceptual 29.8 La ley de Lenz y la dirección de la corriente inducida

En la figura 29.13 hay un campo magnético uniforme $\vec{B}$ a través de la bobina. La magnitud del campo va en aumento de modo que hay una fem inducida. Con base en la ley de Lenz, determine la dirección de la corriente inducida resultante.

29.13 La corriente inducida debida al cambio en $\vec{B}$ fluye en sentido horario, vista desde arriba de la espira. El campo adicional $\vec{B}_{inducido}$ de esta corriente es hacia abajo, en oposición al cambio en el campo $\vec{B}$, hacia arriba.



SOLUCIÓN

Esta situación es la misma que la del ejemplo 29.1 (sección 29.2). Según la ley de Lenz, la corriente inducida debe producir un campo magnético $\vec{B}_{inducido}$ dentro de la bobina cuya dirección es hacia abajo, en oposición al cambio en el flujo. Con la regla de la mano derecha descrita en la sección 28.5 para la dirección del campo magnético generado por una espira circular, $\vec{B}_{inducido}$ tendrá la dirección mencionada, si la corriente inducida fluye como se indica en la figura 29.13.

La figura 29.14 muestra varias aplicaciones de la ley de Lenz para la situación similar de un imán que se mueve cerca de una espira conductora. En cada caso, la corriente inducida produce un campo magnético cuya dirección se opone al cambio del flujo a través de la espira debido al movimiento del imán.

29.14 Direcciones de las corrientes inducidas conforme el imán de barra se mueve a lo largo del eje de una espira conductora. Si el imán de barra está fijo, no hay corriente inducida.

a) El movimiento del imán ocasiona un flujo *creciente hacia abajo* a través de la espira.

b) El movimiento del imán ocasiona un flujo *decreciente hacia arriba* a través de la espira.

c) El movimiento del imán produce un flujo *decreciente hacia abajo* a través de la espira.

d) El movimiento del imán ocasiona un flujo *creciente hacia arriba* a través de la espira.



El campo magnético inducido es *hacia arriba*, opuesto al cambio del flujo. Para producir el campo inducido, la corriente inducida debe ir en *sentido antihorario*, vista desde arriba de la espira.

El campo magnético inducido es *hacia abajo*, opuesto al cambio del flujo. Para producir este campo inducido, la corriente inducida debe ir en *sentido horario*, vista desde arriba de la espira.

Ley de Lenz y respuesta a los cambios de flujo

Como una corriente inducida siempre se opone a cualquier cambio en el flujo magnético a través de un circuito, ¿cómo es posible entonces que el flujo cambie? La respuesta es que la ley de Lenz solo da la *dirección* de una corriente inducida; la *magnitud* de la corriente depende de la resistencia del circuito. Cuanto mayor sea la resistencia del circuito, menor será la corriente inducida que parece oponerse a cualquier cambio en el flujo y más fácil será que tenga lugar el cambio de flujo. Si la espira de la figura 29.14 fuera de madera (un aislante), casi no habría corriente inducida en respuesta a los cambios en el flujo a través de la espira.

A la inversa, cuanto menor sea la resistencia del circuito, mayor será la corriente inducida y más difícil será el cambio del flujo a través del circuito. Si la espira en la figura 29.14 es un buen conductor, una corriente inducida fluye mientras el imán se mueve en relación con la espira. Una vez que el imán y la espira ya no están en movimiento relativo, la corriente inducida cae a cero con mucha rapidez debido a la resistencia distinta de cero en la espira.

El caso extremo se presenta cuando la resistencia del circuito es igual a *cero*. Entonces, la corriente inducida en la figura 29.14 continuará fluyendo aun después de que la fem inducida haya desaparecido, es decir, después de que el imán haya cesado su movimiento en relación con la espira. Gracias a esta *corriente persistente*, resulta que el flujo a través de la espira es exactamente el mismo que había antes de que el imán comenzara a moverse, por lo que *nunca* cambia el flujo a través de la espira de resistencia nula. Ciertos materiales especiales llamados *superconductores* en realidad tienen una resistencia nula; los estudiaremos en la sección 29.8.

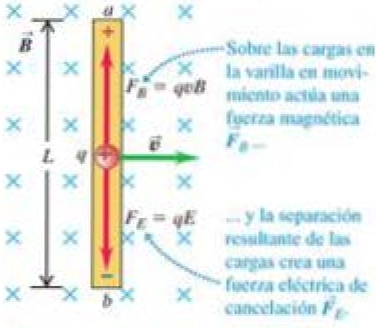
Evalúe su comprensión de la sección 29.3 *a*) Suponga que el imán de la figura 29.14*a* estuviera fijo y que la espira de alambre se moviera hacia arriba. ¿La corriente inducida en la espira **i.** tendría la misma dirección que la que se ilustra en la figura 29.14*a*, **ii.** tendría la dirección opuesta a la que se muestra en la figura 29.14*a* o **iii.** sería cero? *b*) Suponga que tanto el imán como la espira de alambre en la figura 29.14*a* se movieran hacia abajo a la misma velocidad. La corriente inducida en la espira, **i.** ¿tendría la misma dirección que la que se ilustra en la figura 29.14*a*, **ii.** tendría la dirección opuesta a la que se observa en la figura 29.14*a* o **iii.** sería cero?

29.4 Fuerza electromotriz de movimiento

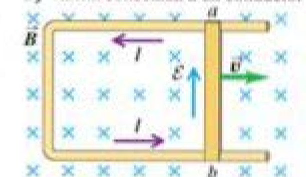
Hemos visto varias situaciones donde un conductor se mueve en un campo magnético, como en los generadores que se analizaron en los ejemplos 29.3 a 29.6. Podemos obtener una mejor comprensión sobre el origen de la fem inducida en estas situaciones, si se consideran las fuerzas magnéticas sobre las cargas móviles en el conductor. La figura 29.15*a* muestra la misma varilla móvil que se analizó en el ejemplo 29.5, separada, por el momento, del conductor con forma de U. El campo magnético $\vec{B}$ es uniforme y está dirigido hacia la página, y movemos la varilla hacia la derecha a velocidad constante $\vec{v}$. Entonces, una partícula cargada q en la varilla experimenta una fuerza magnética $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$ de magnitud $F = |q|vB$. En el análisis que sigue supondremos que q es positiva; en ese caso, la dirección de esta fuerza es hacia arriba a lo largo de la varilla, desde b hacia a.

29.15 Una varilla conductora que se mueve en un campo magnético uniforme. *a*) La varilla, la velocidad y el campo son perpendiculares entre sí. *b*) Dirección de la corriente inducida en el circuito.

a) Varilla aislada en movimiento



b) Varilla conectada a un conductor fijo



La fem $\mathcal{E}$ en movimiento en la varilla móvil genera un campo eléctrico en el conductor fijo.

Esta fuerza magnética hace que las cargas libres en la varilla se muevan, lo que crea un exceso de carga positiva en el extremo superior a y de carga negativa en el extremo inferior b. Esto, a la vez, crea un campo eléctrico $\vec{E}$ en el interior de la varilla, en el sentido de a hacia b (opuesto a la fuerza magnética). La carga continúa acumulándose en los extremos de la varilla hasta que $\vec{E}$ se vuelve lo suficientemente grande como para que la fuerza eléctrica hacia abajo (con magnitud qE) cancele exactamente la fuerza magnética *hacia arriba* (con magnitud qvB). De esta forma, $qE = qvB$, y las cargas están en equilibrio.

La magnitud de la diferencia de potencial $V_{ab} = V_a - V_b$ es igual a la magnitud del campo eléctrico E multiplicada por la longitud L de la varilla. De acuerdo con el análisis anterior, $E = vB$, por lo que

$$V_{ab} = EL = vBL \qquad (29.5)$$

con el punto a en un potencial mayor que el b.

Ahora suponga que la varilla móvil se desliza a lo largo del conductor fijo con forma de U y crea un circuito completo (figura 29.15*b*). Ninguna fuerza *magnética* actúa sobre las cargas en el conductor fijo con forma de U, pero la carga que estaba cerca de los puntos a y b se redistribuye a lo largo del conductor fijo, y crea un campo *eléctrico* dentro de este último. Este campo genera una corriente en la dirección que se indica. La varilla móvil se ha vuelto una fuente de fuerza electromotriz; dentro de ella, la carga se mueve del potencial menor al mayor, y en el resto del circuito se mueve del potencial mayor al menor. Esta fem se denomina **fuerza electromotriz de movimiento**, y se denota con $\mathcal{E}$. Del análisis anterior, la magnitud de esta fem es

$$\mathcal{E} = vBL \quad \text{(fem de movimiento; longitud y velocidad perpendiculares a } \vec{B} \text{ uniforme)} \qquad (29.6)$$



ActivPhysics 13.10: Motional EMF

correspondiente a una fuerza por unidad de carga de magnitud vB, que actúa en una distancia L a lo largo de la varilla móvil. Si R es la resistencia total del circuito del conductor con forma de U y la varilla deslizante, la corriente inducida I en el circuito está dada por $vBL = IR$. Este es el mismo resultado que se obtuvo en la sección 29.2 empleando la ley de Faraday, por lo que la fem de movimiento es un caso particular de la ley de Faraday, uno de los varios ejemplos descritos en la sección 29.2.

La fem asociada con la varilla móvil en la figura 29.15 es similar a la de una batería con su terminal positiva en a y negativa en b, aunque los orígenes de las dos fem son muy diferentes. En cada caso, una fuerza no electrostática actúa sobre las cargas en el dispositivo, en el sentido de b hacia a, y la fem es el trabajo por unidad de carga realizado por esta fuerza cuando una carga se mueve desde b hacia a en el dispositivo. Cuando este se halla conectado a un circuito externo, la dirección de la corriente es de b a a en el dispo-

sitivo, y de a a b en el circuito externo. Aunque hemos estudiado la fem de movimiento en términos de un circuito cerrado como el de la figura 29.15*b*, una fem de movimiento también se presenta en la varilla móvil aislada de la figura 29.15*a*, de la misma forma en que una batería tiene una fem aun cuando no forma parte de un circuito.

La dirección de la fem inducida en la figura 29.15 se deduce mediante la ley de Lenz, aun si el conductor no forma un circuito completo (como en la figura 29.15*a*). En este caso, podemos completar el circuito mentalmente entre los extremos del conductor y aplicar la ley de Lenz para determinar la dirección de la corriente. A partir de esto, se deduce la polaridad de los extremos del conductor en un circuito abierto. El sentido del extremo negativo (−) al extremo positivo (+) dentro del conductor es el que tendría la corriente si el circuito estuviera completo.

El lector debe comprobar que si v se expresa en metros por segundo, B en teslas y L en metros, entonces $\mathcal{E}$ está en volts. (Recuerde que 1 V = 1 J/C).

Forma general de la fem de movimiento

Podemos generalizar el concepto de fem de movimiento para un conductor de *cualquier* forma que se mueva en un campo magnético, uniforme o no (suponiendo que el campo magnético en cada punto no varía con el tiempo). Para un elemento $d\vec{l}$ del conductor, la contribución $d\mathcal{E}$ a la fem es la magnitud dl multiplicada por la componente de $\vec{v} \times \vec{B}$ (la fuerza magnética por unidad de carga) paralela a $d\vec{l}$; es decir,

$$d\mathcal{E} = (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l}$$

Para cualquier espira conductora cerrada, la fem total es

$$\mathcal{E} = \oint (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} \quad \text{(fem de movimiento; espira conductora cerrada)} \quad (29.7)$$

Esta expresión parece muy diferente de nuestro enunciado original de la ley de Faraday, ecuación (29.3), según la cual $\mathcal{E} = -d\Phi_B/dt$. No obstante, las dos formas sí son equivalentes. Se puede demostrar que la razón de cambio del flujo magnético a través de una espira conductora en movimiento siempre está dada por el negativo de la expresión en la ecuación (29.7). Así, esta ecuación representa una formulación alternativa de la ley de Faraday, que con frecuencia es más conveniente que la forma original para resolver problemas de conductores en *movimiento*. Pero cuando se tienen conductores *fijos* en campos magnéticos variables, *no es posible* utilizar la ecuación (29.7); en este caso, la expresión $\mathcal{E} = -d\Phi_B/dt$ es la única forma correcta de expresar la ley de Faraday.



Ejemplo 29.9 Fem de movimiento en un generador de conductor deslizante

Suponga que la varilla móvil de la figura 29.15*b* tiene 0.10 m de longitud, su velocidad v es de 2.5 m/s, la resistencia total de la espira es de 0.030 Ω, y B es de 0.60 T. Calcule la fem de movimiento, la corriente inducida y la fuerza que actúa sobre la varilla.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: La primera incógnita es la fem de movimiento $\mathcal{E}$ debida al desplazamiento de la varilla, la cual calcularemos usando la ecuación (29.6). Determinaremos la corriente a partir de los valores de $\mathcal{E}$ y la resistencia R. La fuerza sobre la varilla es la fuerza *magnética* ejercida por $\vec{B}$ sobre la corriente en la varilla: calcularemos esta fuerza usando $\vec{F} = I\vec{L} \times \vec{B}$.

EJECUTAR: De acuerdo con la ecuación (29.6), la fem de movimiento es

$$\mathcal{E} = vBL = (2.5\text{ m/s})(0.60\text{ T})(0.10\text{ m}) = 0.15\text{ V}$$

La corriente inducida en la espira es

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{0.15\text{ V}}{0.030\ \Omega} = 5.0\text{ A}$$

En la expresión de la fuerza magnética $\vec{F} = I\vec{L} \times \vec{B}$, el vector $\vec{L}$ apunta en el mismo sentido que la corriente inducida en la varilla (desde b hacia a en la figura 29.15). La aplicación de la regla de la mano derecha para productos vectoriales muestra que esta fuerza está en dirección *opuesta* al movimiento de la varilla. Como $\vec{L}$ y $\vec{B}$ son perpendiculares, la fuerza magnética tiene una magnitud

$$F = ILB = (5.0\text{ A})(0.10\text{ m})(0.60\text{ T}) = 0.30\text{ N}$$

EVALUAR: La respuesta sobre la dirección de $\vec{F}$ se comprueba mediante la ley de Lenz. Si tomamos el vector área $\vec{A}$ de manera que apunte hacia el plano de la espira, el flujo magnético es positivo y creciente conforme la varilla se mueve hacia la derecha y aumenta el área de la espira. La ley de Lenz nos indica que una fuerza parece oponerse a este incremento en el flujo. De esta forma, la fuerza sobre la varilla es hacia la izquierda, opuesta a su movimiento.

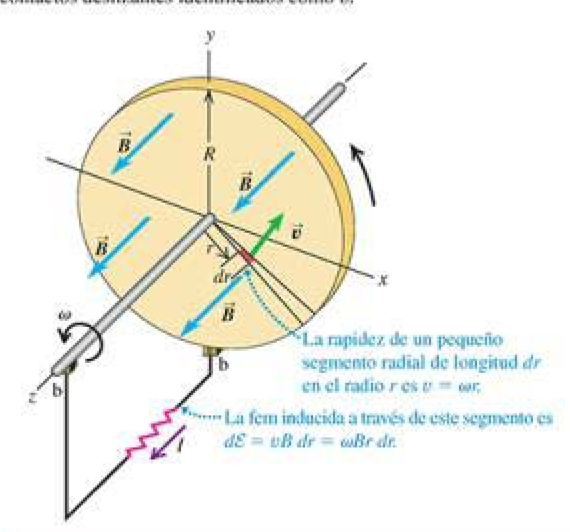
Ejemplo 29.10 Dinamo de disco de Faraday

La figura 29.16 muestra un disco conductor con radio R que se encuentra en el plano xy y gira con velocidad angular constante ω alrededor del eje z. El disco está en un campo $\vec{B}$ constante, uniforme, en dirección del eje z. Calcule la fem inducida entre el centro y el borde del disco.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Se genera una fem de movimiento porque el disco conductor se mueve con respecto al campo $\vec{B}$. La complicación es que distintas partes del disco se mueven con diferente rapidez v dependiendo de su distancia al eje de rotación. Trataremos esto considerando pequeños segmentos del disco e integrando sus contribuciones para determinar la incógnita, la fem entre el centro y el borde. Considere el pequeño segmento del disco mostrado en rojo en la figura 29.16 e identificado con su vector velocidad $\vec{v}$. La fuerza magnética por unidad de carga sobre este segmento es $\vec{v} \times \vec{B}$, que apunta radialmente hacia afuera desde el centro del disco. Entonces, la fem inducida tiende a hacer que la corriente fluya radialmente hacia afuera, lo cual nos indica que la trayectoria de conducción en la cual debemos pensar en este caso es una recta que va del centro al borde. La fem de cada pequeño segmento del disco a lo largo de esta línea se obtiene usando $d\mathcal{E} = (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l}$ y, luego, se integra para determinar la fem total.

29.16 Disco conductor de radio R que gira con rapidez angular ω en un campo magnético $\vec{B}$. La fem se induce a lo largo de líneas radiales del disco y se aplica a un circuito externo a través de dos contactos deslizantes identificados como b.



EJECUTAR: El vector longitud $d\vec{l}$ (de longitud dr) asociado con el segmento apunta radialmente hacia afuera, en la misma dirección que $\vec{v} \times \vec{B}$. Los vectores $\vec{v}$ y $\vec{B}$ son perpendiculares y la magnitud de $\vec{v}$ es $v = \omega r$. Entonces, la fem del segmento es $d\mathcal{E} = \omega Br\,dr$. Por lo tanto, la fem total es la integral de $d\mathcal{E}$ entre el centro ($r = 0$) y el borde ($r = R$):

$$\mathcal{E} = \int_0^R \omega Br\,dr = \tfrac{1}{2}\omega BR^2$$

EVALUAR: Este dispositivo puede usarse como fuente de fem en un circuito completando el circuito con dos escobillas fijas (identificadas con b en la figura) que hagan contacto con el disco y su eje de conducción, como se ilustra. Este disco se conoce como *dinamo de disco de Faraday* o *generador homopolar*. A diferencia del alternador del ejemplo 29.3, el dinamo de disco de Faraday es un generador de corriente directa, que produce una fem constante en el tiempo. ¿Puede demostrar, con base en la ley de Lenz, que con el sentido de rotación en la figura 29.16, la corriente en el circuito externo debe fluir en el sentido que se muestra?

Evalúe su comprensión de la sección 29.4 El campo magnético de la Tierra apunta hacia el norte (magnético). Por sencillez, suponga que el campo no tiene componente vertical (como es el caso cerca del ecuador). *a*) Si usted sostiene una varilla metálica en su mano y camina hacia el este, ¿cómo debería orientar la varilla para obtener la fem de movimiento máxima entre sus extremos? **i.** este-oeste; **ii.** norte-sur; **iii.** arriba-abajo; **iv.** se obtiene la misma fem de movimiento con todas estas orientaciones. *b*) ¿Cómo debería sostener la varilla para lograr una fem igual a *cero* conforme camina hacia el este? **i.** este-oeste; **ii.** norte-sur; **iii.** arriba-abajo; **iv.** ninguna de las anteriores. *c*) ¿En qué dirección debería viajar para que la fem de movimiento a través de la varilla sea igual a cero, sin importar hacia dónde esté orientada? **i.** oeste; **ii.** norte; **iii.** sur; **iv.** hacia arriba; **v.** hacia abajo.

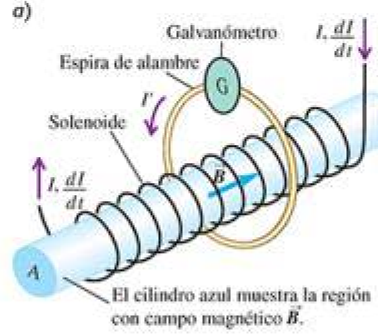
29.5 Campos eléctricos inducidos

Cuando un conductor se mueve en un campo magnético, la fem inducida se entiende en términos de las fuerzas magnéticas que actúan sobre las cargas del conductor, como se describió en la sección 29.4. No obstante, una fem inducida también se presenta cuando hay un flujo variable a través de un conductor fijo. En esta situación, ¿qué es lo que empuja a las cargas alrededor del circuito?

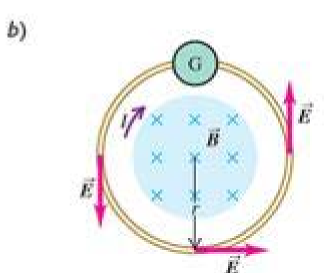
Como ejemplo, consideremos la situación que se ilustra en la figura 29.17. Un solenoide largo y delgado, con área de sección transversal A y n espiras por unidad de longitud, cuyo centro está rodeado por una espira conductora circular. El galvanómetro G mide la corriente en la espira. Una corriente I en el embobinado (o devanado) del solenoide genera un campo magnético $\vec{B}$ a lo largo de su eje, como se indica, con magnitud B según se calculó en el ejemplo 28.9 (sección 28.7): $B = \mu_0 nI$, donde n es el número de espiras por unidad de longitud. Si se ignora el pequeño

29.17 *a*) El embobinado de un solenoide largo lleva una corriente I que se incrementa a una razón dI/dt. El flujo magnético en el solenoide aumenta a una razón $d\Phi_B/dt$, y este flujo variable pasa a través de una espira de alambre. En la espira se induce una fem $\mathcal{E} = -d\Phi_B/dt$, la cual induce a la vez una corriente I' que se mide con el galvanómetro G. *b*) Vista transversal.

a)



b)



campo afuera del solenoide y suponemos que el vector área $\vec{A}$ apunta en la misma dirección que $\vec{B}$, entonces el flujo magnético Φ_B a través de la espira es

$$\Phi_B = BA = \mu_0 nIA$$

Cuando la corriente I en el solenoide cambia con el tiempo, el flujo magnético Φ_B también cambia y, de acuerdo con la ley de Faraday, la fem inducida en la espira está dada por

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\mu_0 nA\frac{dI}{dt} \qquad (29.8)$$

Si la resistencia total de la espira es R, la corriente inducida en la espira, que llamaremos I', es $I' = \mathcal{E}/R$.

Pero, ¿qué *fuerza* hace que las cargas se muevan alrededor de la espira de alambre? No puede ser una fuerza magnética porque el conductor ni siquiera está *en* un campo magnético. Nos vemos obligados a concluir que tiene que haber un **campo eléctrico inducido** en el conductor *causado por el flujo magnético variable*. Esto quizá suene un poco discordante; estamos acostumbrados a pensar en un campo eléctrico como algo causado por cargas eléctricas y, ahora, decimos que un campo magnético variable actúa de algún modo como fuente de campo eléctrico. Asimismo, es un campo eléctrico un tanto extraño. Cuando una carga q completa una vuelta alrededor de la espira, el trabajo total realizado sobre ella por el campo eléctrico debe ser igual al producto de q por la fem $\mathcal{E}$. Es decir, el campo eléctrico en la espira *no es conservativo*, en la forma en que se usó este término en el capítulo 23, ya que la integral de línea de $\vec{E}$ alrededor de la trayectoria cerrada no es igual a cero. En cambio, esta integral de línea, que representa el trabajo realizado por el campo inducido $\vec{E}$ por unidad de carga, es igual a la fem inducida $\mathcal{E}$:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = \mathcal{E} \qquad (29.9)$$

De acuerdo con la ley de Faraday, la fem $\mathcal{E}$ también es el negativo de la razón de cambio del flujo magnético a través de la espira. Así, para este caso, la ley de Faraday se puede volver a plantear como

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi_B}{dt} \quad \text{(trayectoria de integración fija)} \qquad (29.10)$$

Observe que la ley de Faraday *siempre* se cumple en la forma $\mathcal{E} = -d\Phi_B/dt$; la forma dada en la ecuación (29.10) *únicamente* es válida si la trayectoria alrededor de la cual se integra es *fija*.

Como ejemplo de una situación donde puede aplicarse la ecuación (29.10), considere la espira circular fija de la figura 29.17*b*, cuyo radio es r. Debido a la simetría cilíndrica, el campo eléctrico $\vec{E}$ tiene la misma magnitud en todos los puntos del círculo y es tangente a este en cada uno de ellos. (La simetría también permitiría que el campo fuera *radial* pero, entonces, la ley de Gauss requeriría la presencia de una carga neta dentro del círculo, y no hay ninguna). La integral de línea de la ecuación (29.10) se vuelve tan solo la magnitud E multiplicada por la circunferencia $2\pi r$ de la espira, $\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 2\pi rE$, y la ecuación (29.10) da

$$E = \frac{1}{2\pi r}\left|\frac{d\Phi_B}{dt}\right| \qquad (29.11)$$

Las direcciones de $\vec{E}$ en los puntos de la espira se indican en la figura 29.17*b*. Sabemos que $\vec{E}$ debe tener la dirección indicada cuando $\vec{B}$ aumenta en el solenoide, porque $\oint \vec{E} \cdot d\vec{l}$ tiene que ser negativa cuando $d\Phi_B/dt$ es positiva. El mismo enfoque se utiliza para obtener el campo eléctrico inducido *dentro* del solenoide, cuando el campo $\vec{B}$ del solenoide está cambiando; los detalles se dejan para el lector (véase el ejercicio 29.35).

Campos eléctricos no electrostáticos

Hagamos el resumen de lo que hemos aprendido. La ley de Faraday, ecuación (29.3), es válida para dos situaciones muy diferentes. En una, la fem es inducida por fuerzas magnéticas sobre cargas, cuando un conductor se mueve a través de un campo mag-

nético. En la otra, un campo magnético que varía con el tiempo induce un campo eléctrico en un conductor fijo y, con ello, induce una fem; de hecho, el campo $\vec{E}$ es inducido aun cuando ningún conductor esté presente. Este campo $\vec{E}$ difiere de un campo eletro*stático* en un aspecto importante. Es *no conservativo*; la integral de línea $\oint \vec{E} \cdot d\vec{l}$ alrededor de una trayectoria cerrada es diferente de cero y, cuando una carga se mueve alrededor de la trayectoria cerrada, el campo realiza sobre ella una cantidad de trabajo distinta de cero. De ello se deduce que para un campo como ese el concepto de *potencial* carece de significado. Un campo de esa clase recibe el nombre de **campo no electrostático**. En contraste, un campo *electrostático* "siempre" es conservativo, como se vio en la sección 23.1, y siempre tiene asociada una función de potencial. A pesar de esta diferencia, el efecto fundamental de *cualquier* campo eléctrico es ejercer una fuerza $\vec{F} = q\vec{E}$ sobre una carga q. Esta relación es válida tanto si $\vec{E}$ es un campo conservativo generado por una distribución de carga, como si es un campo no conservativo ocasionado por un flujo magnético variable.

Entonces, un campo magnético variable actúa como fuente de campo eléctrico de una clase que *no podemos* producir con ninguna distribución de carga estática. Esto tal vez parezca extraño, pero es la forma en que se comporta la naturaleza. Es más, en la sección 29.7 veremos que un campo *eléctrico* variable actúa como fuente de campo *magnético*. Exploraremos con mucho detalle esta simetría entre los dos campos cuando estudiemos las ondas electromagnéticas en el capítulo 32.

Por si aún quedara alguna duda sobre la realidad de los campos eléctricos inducidos magnéticamente, considere algunas de sus diversas aplicaciones prácticas (figura 29.18). Las pastillas de las guitarras eléctricas usan corrientes inducidas, en bobinas fijas, por la vibración de cuerdas ferromagnéticas cercanas. Los alternadores de la mayoría de automóviles utilizan imanes giratorios para inducir corriente en bobinas fijas. Nos demos cuenta o no, los campos eléctricos inducidos magnéticamente desempeñan un rol importante en la vida cotidiana.

29.18 Aplicaciones de campos eléctricos inducidos. *a*) Los datos se almacenan en el disco duro de una computadora, con un patrón de áreas magnetizadas sobre su superficie. Para leer los datos, se coloca una bobina sobre un brazo móvil cerca del disco giratorio. La bobina experimenta un flujo magnético variable, lo cual induce una corriente cuyas características dependen del patrón codificado en el disco. *b*) Este automóvil híbrido tiene un motor de gasolina y un motor eléctrico. Cuando el vehículo se detiene, las ruedas giratorias impulsan en reversa el motor para que actúe como generador. La corriente inducida resultante sirve para recargar las baterías del vehículo. *c*) El cigüeñal giratorio de un avión con motor de pistones hace girar un imán, lo que induce una fem en una bobina adyacente y genera la chispa que enciende el combustible en los cilindros del motor. Esto mantiene en marcha al motor incluso en el caso de que llegaran a fallar otros sistemas eléctricos de la aeronave.







Ejemplo 29.11 Campos eléctricos inducidos

Suponga que el solenoide largo de la figura 29.17*a* tiene 500 espiras por metro y 4.0 cm^2 de área de sección transversal. La corriente en su embobinado crece a razón de 100 A/s. *a*) Obtenga la magnitud de la fem inducida en la espira de alambre afuera del solenoide. *b*) Calcule la magnitud del campo eléctrico inducido dentro de la espira, si su radio es de 2.0 cm.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Como se ilustra en la figura 29.17*b*, el campo magnético creciente en el interior del solenoide provoca un cambio en el flujo magnético a través de la espira de alambre e induce así un campo eléctrico $\vec{E}$ alrededor de la espira. Las incógnitas son la fem inducida $\mathcal{E}$ y la magnitud E del campo eléctrico. Utilizamos la ecuación (29.8) para determinar la fem. El cálculo de la magnitud E del campo se simplifica porque la espira y el solenoide comparten el mismo eje central. Entonces, por simetría, el campo eléctrico es tangente a la espira y tiene la misma magnitud en toda su circunferencia. Por lo tanto, podemos usar la ecuación (29.9) para calcular E.

EJECUTAR: *a*) De acuerdo con la ecuación (29.8), la fem inducida es

$$\begin{aligned}\mathcal{E} &= -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\mu_0 n A \frac{dI}{dt} \\ &= -(4\pi \times 10^{-7}\,\text{Wb/A}\cdot\text{m})(500\ \text{espiras/m}) \\ &\quad \times (4.0 \times 10^{-4}\,\text{m}^2)(100\ \text{A/s}) \\ &= -25 \times 10^{-6}\,\text{Wb/s} = -25 \times 10^{-6}\,\text{V} = -25\ \mu\text{V}\end{aligned}$$

Continúa

b) Por simetría, la integral de línea $\oint \vec{E} \cdot d\vec{l}$ tiene un valor absoluto de $2\pi rE$, sin importar la dirección en que se integre alrededor de la espira. Esto es igual al valor absoluto de la fem, por lo que

$$E = \frac{|\mathcal{E}|}{2\pi r} = \frac{25 \times 10^{-6}\,\text{V}}{2\pi(2.0 \times 10^{-2}\,\text{m})} = 2.0 \times 10^{-4}\,\text{V/m}$$

EVALUAR: En la figura 29.17*b*, el flujo magnético *hacia* el plano de la figura va en aumento. De acuerdo con la regla de la mano derecha para la fem inducida (que se ilustra en la figura 29.6), una fem positiva iría en el sentido horario alrededor de la espira; el signo negativo de $\mathcal{E}$ indica que la fem va en sentido antihorario. ¿Puede demostrar esto con base en la ley de Lenz?

Evalúe su comprensión de la sección 29.5 Si usted balancea un imán hacia adelante y hacia atrás con su mano, ¿está generando un campo eléctrico? Si es así, ¿el campo eléctrico es conservativo?

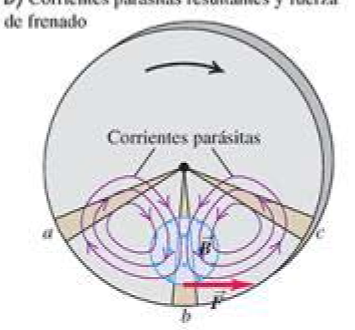
29.6 Corrientes parásitas

29.19 Corrientes parásitas inducidas en un disco metálico giratorio.

a) Disco metálico que gira a través de un campo magnético



b) Corrientes parásitas resultantes y fuerza de frenado



En los ejemplos de los efectos de la inducción que hemos estudiado, las corrientes inducidas han estado confinadas a trayectorias bien definidas en conductores y otros componentes que forman un circuito. Sin embargo, muchos dispositivos eléctricos contienen masas de metal que se mueven en campos magnéticos, o están ubicadas en campos magnéticos variables. En situaciones como estas hay corrientes inducidas que circulan por todo el volumen del material. Sus patrones de flujo recuerdan los remolinos en un río y reciben el nombre de **corrientes parásitas**.

Como ejemplo, considere un disco metálico que gira en un campo magnético perpendicular al plano del disco, pero está confinado a una porción limitada del área del disco, como se muestra en la figura 29.19*a*. El sector *Ob* se desplaza a través del campo y tiene una fem inducida en él. Los sectores *Oa* y *Oc* no están en el campo, pero proporcionan trayectorias conductoras de retorno para que las cargas desplazadas a lo largo de *Ob* regresen de *b* a *O*. El resultado es una circulación de corrientes parásitas en el disco en forma parecida a la que se indica en la figura 29.19*b*.

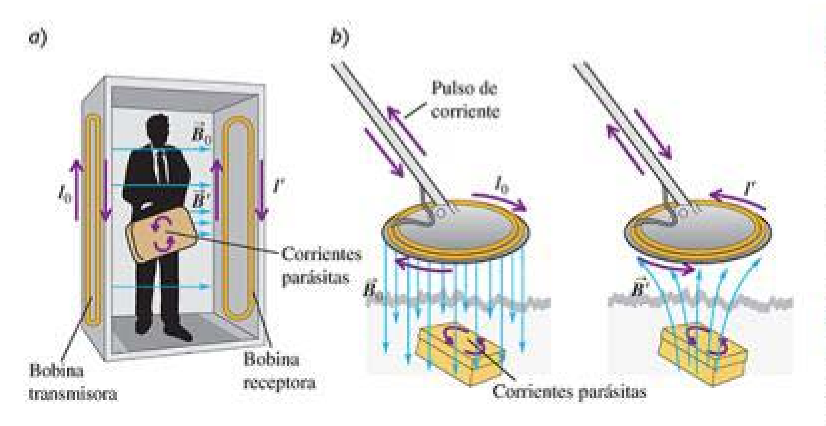
La ley de Lenz nos ayuda a identificar la dirección de la corriente inducida en las inmediaciones del sector *Ob*. Esta corriente debe experimentar una fuerza magnética $\vec{F} = I\vec{L} \times \vec{B}$ que se *opone* a la rotación del disco, por lo que esta fuerza debe ir hacia la derecha en la figura 29.19*b*. Como $\vec{B}$ está dirigido hacia el plano del disco, la corriente y, en consecuencia, $\vec{L}$ tienen componentes hacia abajo. Las corrientes de retorno quedan fuera del campo, por lo que no experimentan fuerzas magnéticas. La interacción entre las corrientes parásitas y el campo ocasionan una acción de frenado sobre el disco. Tales efectos se pueden utilizar para detener con rapidez la rotación de una sierra circular cuando se interrumpe el suministro de energía eléctrica. Algunas balanzas muy sensibles emplean este efecto para amortiguar las vibraciones. En ciertos vehículos para tránsito veloz impulsados con electricidad, se usan corrientes parásitas para frenar. En los vagones hay electroimanes que inducen corrientes parásitas en los rieles: los campos magnéticos resultantes originan fuerzas de frenado que actúan sobre los electroimanes y, por lo tanto, sobre los vagones.

Las corrientes parásitas tienen mucho más usos prácticos. El disco metálico brillante que tiene en su interior el medidor de la compañía de electricidad colocado afuera de su casa gira como resultado de las corrientes parásitas. Dichas corrientes son inducidas en el disco por campos magnéticos causados por corrientes que varían en forma sinusoidal en una bobina. En los hornos de inducción se utilizan corrientes parásitas para calentar materiales en contenedores herméticamente sellados, en procedimientos donde es esencial evitar la mínima contaminación de los materiales. Los detectores de metales que se emplean en los puntos de revisión de los aeropuertos (figura 29.20*a*) detectan corrientes parásitas inducidas en los objetos metálicos. Dispositivos similares (figura 29.20*b*) se utilizan para encontrar tesoros enterrados, al detectar tapas de botellas y moneditas perdidas.



Video Tutor Demo

Las corrientes parásitas también tienen efectos indeseables. En un transformador de corriente alterna, las bobinas enrolladas alrededor de un núcleo de hierro conducen corriente que varía en forma sinusoidal. Las corrientes parásitas resultantes en el núcleo desperdician una energía por calentamiento igual a I^2R y establecen, por sí mismas, una fem opuesta indeseable en las bobinas. Para minimizar estos efectos, se diseña el núcleo de manera que las trayectorias de las corrientes parásitas sean tan angostas como sea posible. En la sección 31.6 describiremos el modo de hacer esto, cuando estudiemos con detalle los transformadores.



29.20 *a*) Un detector de metales en un punto de revisión en un aeropuerto genera un campo magnético alternante $\vec{B}_0$. Esto induce corrientes parásitas en un objeto conductor que pase por el detector. A la vez, las corrientes parásitas producen un campo magnético alternante, $\vec{B}'$, el cual induce una corriente en la bobina receptora del detector. *b*) Los detectores de metal portátiles funcionan con el mismo principio.

Aplicación Las corrientes parásitas aumentan la potencia de los volcanes
La luna Io de Júpiter es ligeramente más grande que la de la Tierra. Se mueve a más de 60,000 km/h a través del intenso campo magnético de Júpiter (alrededor de 10 veces más fuerte que el campo de la Tierra), lo cual induce intensas corrientes parásitas en el interior de Io que disipa energía a una razón de 10^{12} W. Esta disipación de energía ayuda al calentamiento interior de Io y causa erupciones volcánicas en su superficie, como se muestra en la imagen inferior. (Los efectos gravitacionales de Júpiter provocan aún más calentamiento).



Evalúe su comprensión de la sección 29.6 Suponga que el campo magnético en la figura 29.19 estuviera dirigido hacia afuera del plano de la figura y que el disco girara en sentido antihorario. Comparando las direcciones de la fuerza $\vec{F}$ y de las corrientes parásitas que se muestran en la figura 29.19*b*, ¿cuáles serían las nuevas direcciones? **i.** La fuerza $\vec{F}$ y las corrientes parásitas tendrían la misma dirección; **ii.** la fuerza $\vec{F}$ tendría la misma dirección, pero las corrientes parásitas estarían en el sentido opuesto; **iii.** la fuerza $\vec{F}$ tendría dirección opuesta, pero las corrientes parásitas tendrían la misma dirección; **iv.** la fuerza $\vec{F}$ y las corrientes parásitas irían en direcciones opuestas.

29.7 Corriente de desplazamiento y ecuaciones de Maxwell

Hemos visto que un campo magnético que varía da lugar a un campo eléctrico inducido. Uno de los ejemplos más notables de la simetría de la naturaleza es que un campo *eléctrico* variable da origen a un campo *magnético*. Este efecto tiene una enorme importancia, ya que explica la existencia de las ondas de radio, los rayos gamma y la luz visible, así como de todas las demás formas de ondas electromagnéticas.

Generalización de la ley de Ampère

Para ver el origen de la relación entre los campos eléctricos variables y los campos magnéticos, volvamos a la ley de Ampère, como se expuso en la sección 28.6, ecuación (28.20):

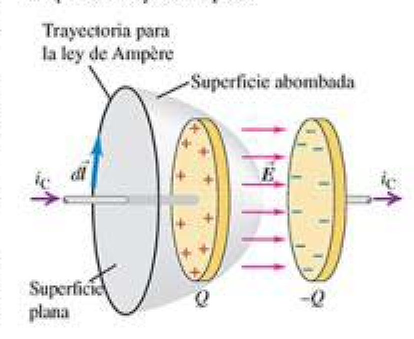
$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{enc}$$

El problema con la ley de Ampère expresada en esta forma es que está *incompleta*. Para saber por qué, consideremos el proceso de cargar un capacitor (figura 29.21). Los alambres conductores llevan la corriente i_C hacia una placa y la alejan de la otra; la carga Q se incrementa, y el campo eléctrico $\vec{E}$ entre las placas aumenta. La notación i_C indica corriente de *conducción* para diferenciarla de otra clase de corriente que vamos a estudiar y que se llama corriente de *desplazamiento*, i_D. Se usan minúsculas para i y v con la finalidad de denotar valores instantáneos de corrientes y diferencias de potencial, respectivamente, que pueden variar con el tiempo.

Apliquemos la ley de Ampère a la trayectoria circular que se muestra. La integral $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l}$ alrededor de esta trayectoria es igual a $\mu_0 I_{enc}$. Para el área circular plana limitada por el círculo, I_{enc} es justamente la corriente i_C en el conductor de la izquierda. Pero la superficie que se abomba hacia la derecha está delimitada por el mismo círculo, y la corriente a través de esa superficie es igual a cero. Por lo tanto, $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l}$ es igual a $\mu_0 i_C$ y ¡al mismo tiempo es igual a cero! Esta es una contradicción evidente.

Pero algo más ocurre en la superficie curvada. A medida que el capacitor se carga, el campo eléctrico $\vec{E}$ y el *flujo* eléctrico Φ_E a través de la superficie aumentan. Sus razones de cambio se pueden determinar en términos de la carga y de la corriente.

29.21 Capacitor de placas paralelas en proceso de carga. La corriente de conducción a través de la superficie plana es i_C, pero no hay corriente de conducción a través de la superficie que se arquea para pasar entre las placas. Las dos superficies tienen una frontera común, de manera que esta diferencia en I_{enc} lleva a una contradicción aparente al aplicar la ley de Ampère.



La carga instantánea es $q = Cv$, donde C es la capacitancia y v es la diferencia de potencial instantánea. Para un capacitor de placas paralelas, $C = \epsilon_0 A/d$, donde A es el área de las placas y d es la separación. La diferencia de potencial v entre las placas es $v = Ed$, donde E es la magnitud del campo eléctrico entre las placas. (Se ignora el efecto de borde y se supone que $\vec{E}$ es uniforme en la región comprendida entre las placas). Si esta región se llena con un material con permitividad ϵ, se reemplaza ϵ_0 por ϵ en todos los lugares; en el análisis que sigue se empleará ϵ.

Al sustituir estas expresiones para C y v en $q = Cv$, la carga q en el capacitor se expresa como

$$q = Cv = \frac{\epsilon A}{d}(Ed) = \epsilon EA = \epsilon \Phi_E \qquad (29.12)$$

donde $\Phi_E = EA$ es el flujo eléctrico a través de la superficie.

A medida que el capacitor se carga, la razón de cambio de q es la corriente de conducción, $i_C = dq/dt$. Tomando la derivada de la ecuación (29.12) con respecto al tiempo,

$$i_C = \frac{dq}{dt} = \epsilon \frac{d\Phi_E}{dt} \qquad (29.13)$$

Ahora, con un pequeño esfuerzo de imaginación, inventamos una **corriente de desplazamiento** ficticia, i_D, en la región entre las placas, definida como

$$i_D = \epsilon \frac{d\Phi_E}{dt} \quad \text{(corriente de desplazamiento)} \qquad (29.14)$$

Es decir, imaginamos que el flujo variable a través de la superficie curva en la figura 29.21 es en cierto modo equivalente, en la ley de Ampère, a una corriente de conducción a través de esa superficie. Incluimos esta corriente ficticia, junto con la corriente real de conducción, i_C, en la ley de Ampère:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 (i_C + i_D)_{enc} \quad \text{(ley de Ampère generalizada)} \qquad (29.15)$$

La ley de Ampère planteada así se cumple sin importar cuál superficie se utilice en la figura 29.21. Para la superficie plana, i_D es igual a cero; para la superficie curva, i_C es cero, e i_C para la superficie plana es igual a i_D para la superficie curva. La ecuación (29.15) sigue siendo válida en un material magnético, siempre que la magnetización sea proporcional al campo externo y se sustituya μ_0 por μ.

La corriente ficticia i_D fue inventada en 1865 por el físico escocés James Clerk Maxwell (1831-1879), quien la llamó corriente de desplazamiento. Hay una *densidad de corriente de desplazamiento* correspondiente $j_D = i_D/A$; a partir de $\Phi_E = EA$ y dividiendo la ecuación (29.14) entre A, se obtiene

$$j_D = \epsilon \frac{dE}{dt} \qquad (29.16)$$

Hemos sacado el concepto prácticamente de la nada, tal como hizo Maxwell, pero vemos que esto nos permite salvar la ley de Ampère en situaciones como las de la figura 29.21.

Otro beneficio de la corriente de desplazamiento es que permite generalizar la regla de Kirchhoff de los nodos, que se estudió en la sección 26.2. Si se considera la placa izquierda del capacitor, se tiene una corriente de conducción que entra en ella, pero ninguna que salga. Sin embargo, cuando incluimos la corriente de desplazamiento, se tiene corriente de conducción que entra por un lado y una corriente de desplazamiento igual que sale por el otro lado. Con este significado general del término "corriente", podemos hablar de corriente que pasa *a través* del capacitor.

Realidad de la corriente de desplazamiento

En este momento, tal vez el lector se pregunte si la corriente de desplazamiento tiene un significado físico real, o si únicamente es un truco para satisfacer la ley de Ampère y la regla de Kirchhoff de los nodos. A continuación se describe un experimento fun-

damental que ayuda a responder esta pregunta. Se toma un área plana circular entre las placas del capacitor (figura 29.22). Si la corriente de desplazamiento realmente desempeña el papel que afirmamos en la ley de Ampère, entonces, debe haber un campo magnético en la región comprendida entre las placas mientras el capacitor se esté cargando. Podemos usar la ley de Ampère generalizada, incluyendo la corriente de desplazamiento, para predecir cuál debería ser este campo.

Para ser específicos, pensemos en un capacitor de placas circulares con radio R. Para obtener el campo magnético en un punto en la región comprendida entre las placas a una distancia r del eje, se aplica la ley de Ampère a un círculo de radio r que pase por el punto en cuestión, con $r < R$. Este círculo pasa por los puntos a y b en la figura 29.22. La corriente total encerrada por el círculo es j_D veces su área, o $(i_D/\pi R^2)(\pi r^2)$. La integral $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l}$ en la ley de Ampère es exactamente el producto de B por la circunferencia $2\pi r$ del círculo, y como $i_D = i_C$ en el capacitor en proceso de carga, la ley de Ampère se convierte en:

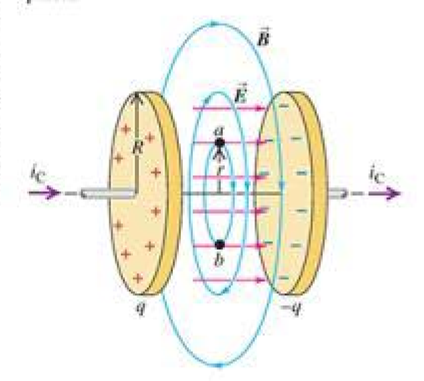
$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = 2\pi r B = \mu_0 \frac{r^2}{R^2} i_C \qquad \text{o bien,}$$

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{r}{R^2} i_C \tag{29.17}$$

Este resultado predice que en la región comprendida entre las placas, $\vec{B}$ es igual a cero en el eje y se incrementa en forma lineal con la distancia desde el eje. Un cálculo similar demuestra que *afuera* de la región entre las placas (es decir, para $r > R$), $\vec{B}$ sería el mismo si el alambre fuera continuo y no hubiera placas.

Cuando *medimos* el campo magnético en esta región, encontramos que realmente está ahí y se comporta tal como predice la ecuación (29.17). Esto confirma directamente el papel que tiene la corriente de desplazamiento como fuente del campo magnético. Con esto queda establecido, más allá de toda duda razonable, que la corriente de desplazamiento, lejos de ser un simple artificio, es un hecho fundamental de la naturaleza. El descubrimiento de Maxwell fue un paso audaz de un genio extraordinario.

29.22 Un capacitor cargándose con una corriente i_C tiene una corriente de desplazamiento igual a i_C entre las placas, con una densidad de corriente de desplazamiento $j_D = \epsilon\, dE/dt$. Esta se puede considerar como la fuente del campo magnético entre las placas.



Ecuaciones de Maxwell del electromagnetismo

Ahora estamos en posición de reunir en un solo paquete *todas* las relaciones entre los campos eléctricos y magnéticos y sus fuentes. Este paquete consiste en cuatro ecuaciones, las llamadas **ecuaciones de Maxwell**. Maxwell no descubrió todas las ecuaciones por sí solo (aunque sí desarrolló el concepto de corriente de desplazamiento), pero las reunió y reconoció su importancia, sobre todo para predecir la existencia de las ondas electromagnéticas.

Por ahora, enunciaremos las ecuaciones de Maxwell en su forma más sencilla, para el caso donde hay cargas y corrientes en un espacio en que, por lo demás, está vacío. En el capítulo 32 estudiaremos cómo modificar estas ecuaciones, si está presente un material dieléctrico o magnético.

Dos de las ecuaciones de Maxwell implican una integral de $\vec{E}$ o $\vec{B}$ sobre una superficie cerrada. La primera es sencillamente la ley de Gauss para campos eléctricos, ecuación (22.8), la cual afirma que la integral de superficie de $E_\perp$ sobre cualquier superficie cerrada es igual a $1/\epsilon_0$ multiplicado por la carga total Q_{enc} encerrada dentro de la superficie:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0} \qquad \text{(ley de Gauss para } \vec{E}\text{)} \tag{29.18}$$

La segunda es la relación análoga para campos *magnéticos*, ecuación (27.8), la cual establece que la integral de superficie de $B_\perp$ sobre cualquier superficie cerrada siempre es igual a cero:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0 \qquad \text{(ley de Gauss para } \vec{B}\text{)} \tag{29.19}$$

Este enunciado significa, entre otras cuestiones, que no existen monopolos magnéticos (cargas magnéticas individuales) que actúen como fuentes de campo magnético.

La tercera ecuación es la ley de Ampère con la corriente de desplazamiento incluida. Esta ley establece que tanto la corriente de conducción i_C como la corriente de desplazamiento $\epsilon_0 d\Phi_E/dt$, donde Φ_E es el flujo eléctrico, actúan como fuentes del campo magnético:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0\left(i_C + \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}\right)_{\text{enc}} \quad \text{(ley de Ampère)} \qquad (29.20)$$

La cuarta y última ecuación es la ley de Faraday; establece que un campo magnético variable o un flujo magnético induce un campo eléctrico:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi_B}{dt} \quad \text{(ley de Faraday)} \qquad (29.21)$$

Si hay un flujo magnético variable, la integral de línea en la ecuación (29.21) es diferente de cero, lo cual demuestra que el campo $\vec{E}$ producido por un flujo magnético variable no es conservativo. Recuerde que esta integral de línea debe resolverse para una trayectoria cerrada *fija*.

Es importante examinar con más detenimiento el campo eléctrico $\vec{E}$ y el papel que desempeña en las ecuaciones de Maxwell. En general, el campo total $\vec{E}$ en un punto en el espacio puede ser la superposición de un campo electrostático $\vec{E}_c$ provocado por una distribución de cargas en reposo y un campo $\vec{E}_n$ no electrostático inducido magnéticamente. (El subíndice c significa Coulomb o conservativo; el subíndice n indica no Coulomb, no electrostático o no conservativo). Es decir,

$$\vec{E} = \vec{E}_c + \vec{E}_n$$

La parte electrostática $\vec{E}_c$ *siempre* es conservativa, por lo que $\oint \vec{E}_c \cdot d\vec{l} = 0$. Esta parte conservativa del campo no contribuye a la integral en la ley de Faraday, de modo que en la ecuación (29.21) se puede tomar $\vec{E}$ como el campo eléctrico *total* $\vec{E}$, que incluye tanto la parte de $\vec{E}_c$ debida a las cargas como la parte inducida magnéticamente $\vec{E}_n$. De manera similar, la parte no conservativa $\vec{E}_n$ del campo $\vec{E}$ no contribuye a la integral en la ley de Gauss, porque esta parte del campo no es causada por cargas estáticas. De aquí que $\oint \vec{E}_n \cdot d\vec{A}$ siempre es igual a cero. Se concluye que en todas las ecuaciones de Maxwell, $\vec{E}$ es el campo eléctrico total; estas ecuaciones no hacen distinción entre campos conservativos y no conservativos.

Simetría en las ecuaciones de Maxwell

En las cuatro ecuaciones de Maxwell hay una simetría notable. En el espacio vacío, donde no hay carga, las dos primeras ecuaciones, (29.18) y (29.19), tienen forma idéntica, una contiene $\vec{E}$ y la otra $\vec{B}$. Cuando se comparan las otras dos ecuaciones, la ecuación (29.20) indica que un flujo eléctrico variable origina un campo magnético, y la ecuación (29.21) afirma que un flujo magnético variable origina un campo eléctrico. En el espacio vacío, donde no hay corriente de conducción, $i_C = 0$ y las dos ecuaciones tienen la misma forma, aparte de una constante numérica y un signo negativo, con los papeles de $\vec{E}$ y $\vec{B}$ intercambiados en las dos ecuaciones.

Las ecuaciones (29.20) y (29.21) se pueden volver a escribir en forma distinta pero equivalente incluyendo las definiciones de flujo eléctrico y flujo magnético, $\Phi_E = \int \vec{E} \cdot d\vec{A}$ y $\Phi_B = \int \vec{B} \cdot d\vec{A}$, respectivamente. En el espacio vacío, donde no hay carga ni corriente de conducción, $i_C = 0$ y $Q_{\text{enc}} = 0$, y tenemos

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{d}{dt} \int \vec{E} \cdot d\vec{A} \qquad (29.22)$$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int \vec{B} \cdot d\vec{A} \qquad (29.23)$$

De nuevo, se observa la simetría entre los papeles que tienen $\vec{E}$ y $\vec{B}$ en dichas expresiones.

La característica más notable de esas ecuaciones es que un campo de *cualquier* tipo que varíe con respecto al tiempo induce un campo del otro tipo en las regiones circundantes del espacio. Maxwell reconoció que tales relaciones predecían la existencia de perturbaciones electromagnéticas consistentes en campos eléctricos y magnéticos que

varían con el tiempo, y que viajan o se *propagan* de una región del espacio a otra, aunque no haya materia presente en el espacio intermedio. Tales perturbaciones, llamadas *ondas electromagnéticas*, constituyen la base física de las ondas luminosas, de radio y televisión, la radiación infrarroja y ultravioleta, los rayos x y el resto del espectro electromagnético. En el capítulo 32 volveremos a este tema de importancia fundamental.

Aunque tal vez no sea evidente, *todas* las relaciones básicas entre campos y sus fuentes están contenidas en las ecuaciones de Maxwell. La ley de Coulomb se deduce de la ley de Gauss, la de Biot y Savart se deduce de la de Ampère, y así sucesivamente. Cuando se agrega la ecuación que define los campos $\vec{E}$ y $\vec{B}$ en términos de las fuerzas que ejercen sobre una carga q; a saber,

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \tag{29.24}$$

¡se tienen *todas* las relaciones fundamentales del electromagnetismo!

Por último, se observa que las ecuaciones de Maxwell tendrían mucho más simetría entre los campos $\vec{E}$ y $\vec{B}$ si existieran cargas magnéticas individuales (monopolos magnéticos). El lado derecho de la ecuación (29.19) contendría la carga *magnética* total encerrada por la superficie, y el lado derecho de la ecuación (29.21) incluiría un término de corriente de monopolos magnéticos. Quizás ahora tengamos una idea de por qué algunos físicos desearían que existieran los monopolos magnéticos, pues ayudarían a perfeccionar la belleza matemática de las ecuaciones de Maxwell.

El descubrimiento de que el electromagnetismo puede condensarse en una forma tan limpia y elegante es muy satisfactorio. En cuanto a brevedad y generalidad, las ecuaciones de Maxwell pertenecen a la misma categoría que las leyes de Newton del movimiento y las leyes de la termodinámica. En realidad, el mayor objetivo de la ciencia es expresar relaciones muy amplias y generales en forma concisa y compacta. La síntesis de Maxwell del electromagnetismo es un formidable logro intelectual, comparable con la síntesis newtoniana que describimos al final de la sección 13.5 y al desarrollo de la relatividad y la mecánica cuántica en el siglo XX.

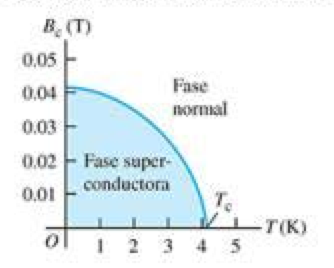
Evalúe su comprensión de la sección 29.7 *a*) ¿Cuál de las ecuaciones de Maxwell explica el funcionamiento de un lector de tarjetas de crédito? *b*) ¿Cuál de ellas describe la forma en que un alambre que conduce una corriente constante genera un campo magnético? ❙

29.8 Superconductividad

La propiedad más conocida de un superconductor es la desaparición súbita de cualquier resistencia eléctrica cuando el material se enfría por debajo de la llamada *temperatura crítica*, que se denota con T_c. En la sección 25.2 se analizó este comportamiento y las circunstancias que rodearon su descubrimiento. No obstante, la superconductividad es mucho más que la simple ausencia de resistencia medible. Como veremos en esta sección, los superconductores también tienen propiedades *magnéticas* extraordinarias.

El primer indicio de propiedades magnéticas inusuales fue el descubrimiento de que para cualquier material superconductor la temperatura crítica T_c cambia cuando el material se coloca en un campo magnético $\vec{B}_0$ producido externamente. La figura 29.23 muestra esta dependencia en el caso del mercurio, el primer elemento donde se observó superconductividad. Conforme aumenta la magnitud B_0 del campo externo, la transición superconductora se presenta a temperatura cada vez menor. Cuando B_0 es mayor que 0.0412 T, *no* hay transición superconductora. La magnitud mínima del campo magnético que se necesita para eliminar la superconductividad a una temperatura por debajo de T_c se llama *campo crítico*, y se denota con B_c.

29.23 Diagrama de fases del mercurio puro, donde se observa el campo magnético crítico B_c y su dependencia de la temperatura. La superconductividad es imposible por arriba de la temperatura crítica T_c. Las curvas para otros materiales superconductores son similares pero con valores numéricos distintos.

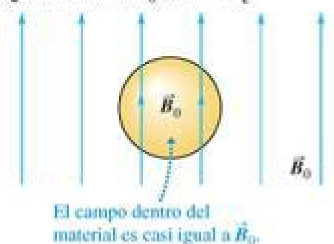


Efecto Meissner

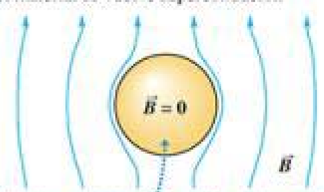
Otro aspecto del comportamiento magnético de los superconductores surge si se coloca una esfera homogénea de un material superconductor en un campo magnético uniforme aplicado $\vec{B}_0$ a una temperatura T mayor que T_c. Entonces, el material está en su fase normal, no en la superconductora (figura 29.24*a*). A continuación se baja la temperatura hasta que ocurre la transición superconductora. (Se supone que la magnitud de $\vec{B}_0$ no es suficientemente grande para evitar la transición de fase). ¿Qué le ocurre al campo?

29.24 Material superconductor *a*) por encima de la temperatura crítica, y *b*) y *c*) por debajo de la temperatura crítica.

a) Material superconductor en un campo magnético externo $\vec{B}_0$ con $T > T_c$.



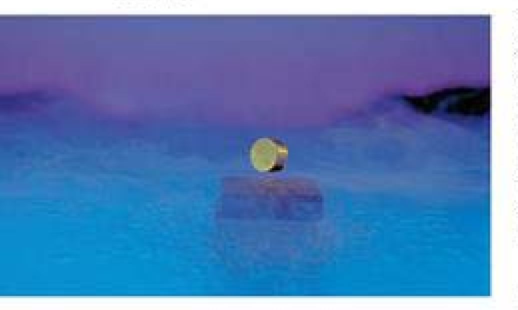
b) La temperatura baja a $T < T_c$, por lo que el material se vuelve superconductor.



c) Cuando el campo externo se elimina con $T < T_c$, campo es igual a cero en cualquier parte.



29.25 Un superconductor (la placa negra) ejerce una fuerza de repulsión sobre un imán (el cilindro metálico), lo que sostiene a este en el aire.



Las mediciones del campo afuera de la esfera indican que las líneas de campo se distorsionan como en la figura 29.24*b*. En el interior del material ya no hay ningún campo, excepto tal vez en una capa superficial muy delgada con espesor aproximado de 100 átomos. Si se enrolla una bobina alrededor de la esfera, la fem inducida en la bobina muestra que durante la transición superconductora el flujo magnético a través de la bobina disminuye de su valor inicial a cero; esto es congruente con la ausencia de campo dentro del material. Por último, si el campo cesa mientras el material aún se encuentra en fase superconductora, no se induce ninguna fem en la bobina, y las mediciones revelan que no hay campo afuera de la esfera (figura 29.24*c*).

La conclusión es que durante la transición superconductora en presencia del campo $\vec{B}_0$, todo el flujo magnético es expelido del volumen de la esfera, y el flujo magnético Φ_B a través de la bobina se reduce a cero. Esta expulsión de flujo magnético se llama *efecto Meissner*. Como se aprecia en la figura 29.24*b*, la expulsión aglomera las líneas de campo magnético en los lados de la esfera, lo cual incrementa $\vec{B}$ en esa región.

Levitación con superconductores y otras aplicaciones

La naturaleza diamagnética de un superconductor tiene algunas consecuencias *mecánicas* interesantes. Un material paramagnético o ferromagnético es atraído por un imán permanente debido a que los dipolos magnéticos en el material se alinean con el campo magnético no uniforme del imán permanente. (En la sección 27.7 se estudió esto). En el caso de un material diamagnético la magnetización ocurre en el sentido opuesto, y estos materiales son *repelidos* por un imán permanente. De acuerdo con la tercera ley de Newton, el imán también es repelido por el material diamagnético. La figura 29.25 muestra la repulsión entre un espécimen de un superconductor de alta temperatura y un imán; esa fuerza magnética repulsiva sostiene ("hace levitar") al imán.

El comportamiento que hemos descrito es característico de los llamados *superconductores tipo I*, para diferenciarlos de la otra clase de materiales, los *superconductores tipo II*. Cuando un material de estos en la fase superconductora se coloca en un campo magnético, el volumen del material sigue siendo superconductor, pero unos filamentos finos del material, paralelos al campo, pueden regresar a la fase normal. Alrededor de los bordes de estos filamentos circulan corrientes, y en su interior *hay* un flujo magnético. Los superconductores tipo II se utilizan para fabricar electroimanes, ya que por lo general tienen valores mucho mayores de B_c que los del tipo I, lo cual permite campos magnéticos mucho mayores sin destruir el estado superconductor. Los superconductores tipo II tienen *dos* campos magnéticos críticos: el primero, B_{c1}, es el campo donde comienza a entrar flujo magnético en el material y forma los filamentos que acabamos de describir; y el segundo, B_{c2}, es el campo donde el material vuelve a la normalidad.

Están en desarrollo muchas aplicaciones importantes y emocionantes de los superconductores. En los laboratorios de investigación se han usado durante varios años electroimanes superconductores. Sus ventajas, en comparación con los electroimanes convencionales, incluyen mayor eficiencia, volúmenes más compactos y mayores magnitudes de campo. Una vez que se establece una corriente en la bobina de un electroimán superconductor, no se requiere más suministro de energía porque no hay pérdida de energía por resistencia. Las bobinas también son más compactas porque no se requiere proveer canales para la circulación de fluidos de enfriamiento. Los imanes superconductores alcanzan rutinariamente campos estables del orden de 10 T, mucho mayores que los campos máximos disponibles con los electroimanes ordinarios.

Los superconductores son atractivos para la transmisión de energía eléctrica a grandes distancias, así como para dispositivos de conversión de energía, como generadores, motores y transformadores. Es posible hacer mediciones muy exactas de campos magnéticos con dispositivos superconductores de interferencia cuántica (SQUID, por las siglas de *superconducting quantum interference devices*), pues detectan cambios en el flujo magnético menores a 10^{-14} Wb; estos dispositivos tienen aplicaciones en medicina, geología y otros campos. El número de usos potenciales de los superconductores se ha incrementado considerablemente desde el descubrimiento de los superconductores de alta temperatura en 1987. Estos materiales tienen temperaturas críticas por arriba de la temperatura del nitrógeno líquido (alrededor de 77 K), las cuales son relativamente fáciles de alcanzar. El desarrollo de aplicaciones prácticas de la ciencia de los superconductores promete ser un capítulo emocionante de la tecnología contemporánea.

RESUMEN



Ley de Faraday: La ley de Faraday establece que la fem inducida en un circuito cerrado es igual al negativo de la razón de cambio del flujo magnético con respecto al tiempo a través de la espira. Esta relación es válida ya sea que el cambio de flujo se deba a un campo magnético variable, al movimiento de la espira, o a ambos factores. (Véase los ejemplos 29.1 a 29.6).

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt} \tag{29.3}$$



Ley de Lenz: La ley de Lenz afirma que una corriente o fem inducida siempre tiende a oponerse al cambio que la generó, o a cancelarlo. La ley de Lenz se deduce de la de Faraday y a menudo es más fácil de usar. (Véase los ejemplos 29.7 y 29.8).



Fem de movimiento: Si un conductor se mueve en un campo magnético, se induce una fem de movimiento. (Véase los ejemplos 29.9 y 29.10).

$$\mathcal{E} = vBL \tag{29.6}$$

(un conductor con longitud L se mueve en un campo $\vec{B}$ uniforme, $\vec{L}$ y $\vec{v}$ son perpendiculares a $\vec{B}$ entre sí)





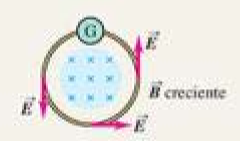
$$\mathcal{E} = \oint (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} \tag{29.7}$$

(la totalidad o parte de un circuito cerrado se mueve en un campo $\vec{B}$)



Campos eléctricos inducidos: Cuando un flujo magnético variable induce una fem a través de un conductor fijo, hay un campo eléctrico inducido $\vec{E}$ de origen no electrostático. Este campo es no conservativo y no está asociado con un potencial. (Véase el ejemplo 29.11).

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi_B}{dt} \tag{29.10}$$



Corriente de desplazamiento y ecuaciones de Maxwell: Un campo eléctrico que varía en el tiempo genera una corriente de desplazamiento i_D, que actúa como fuente de campo magnético exactamente de la misma forma que una corriente de conducción. La relación entre los campos eléctricos y magnéticos y sus fuentes se enuncia en forma compacta en las cuatro ecuaciones de Maxwell. En conjunto, forman una base completa para la relación de los campos $\vec{E}$ y $\vec{B}$ con sus fuentes.

$$i_D = \epsilon \frac{d\Phi_E}{dt} \tag{29.14}$$

(corriente de desplazamiento)

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0} \tag{29.18}$$

(ley de Gauss para campos $\vec{E}$)

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0 \tag{29.19}$$

(ley de Gauss para campos $\vec{B}$)

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \left(i_C + \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} \right)_{enc} \tag{29.20}$$

(ley de Ampère que incluye la corriente de desplazamiento)

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi_B}{dt} \tag{29.21}$$

(ley de Faraday)



PROBLEMA PRÁCTICO Caída de una espira cuadrada

Una espira cuadrada de cobre, orientada verticalmente, cae del reposo desde una región donde el campo $\vec{B}$ es horizontal, uniforme y perpendicular al plano de la espira, hacia una región donde el campo es igual a cero. La longitud de un lado de la espira es s, y el diámetro del alambre es d. La resistividad del cobre es ρ_R y su densidad de masa es ρ_m. Si la espira alcanza su rapidez terminal mientras su segmento superior está aún en la región del campo magnético, obtenga una expresión para la rapidez terminal.

GUÍA DE SOLUCIÓN

Véase el área de estudio MasteringPhysics® para consultar una solución con Video Tutor.



IDENTIFICAR y PLANTEAR

1. El movimiento de la espira a través del campo magnético induce una fem y una corriente en la espira. Entonces, el campo produce una fuerza magnética sobre esta corriente que se opone a la fuerza hacia abajo de la gravedad.
2. Considere el caso donde toda la espira se encuentra en la región del campo magnético. ¿Hay una fem inducida en este caso? Si es así, ¿cuál es su dirección?
3. Considere el caso donde únicamente el segmento superior de la espira se encuentra en la región del campo magnético. ¿Hay una fem inducida en este caso? Si es así, ¿cuál es su dirección?
4. Para el caso donde hay una fem inducida y por lo tanto una corriente inducida, ¿cuál es la dirección de la fuerza magnética sobre cada uno de los cuatro lados de la espira? ¿Cuál es la dirección de la fuerza magnética *neta* sobre la espira?

EJECUTAR

5. Para el caso donde la espira cae a una rapidez v y hay una fem inducida, determine **i.** la fem, **ii.** la corriente inducida y **iii.** la fuerza magnética sobre la espira en términos de su resistencia R.
6. Calcule R y la masa de la espira en términos de la información dada en relación con la espira.
7. Use los resultados de los pasos 5 y 6 para obtener una expresión para la rapidez terminal.

EVALUAR

8. ¿De qué manera la rapidez terminal depende de la magnitud B del campo magnético? Explique por qué esto es lógico.

Problemas

Para tareas asignadas por el profesor, visite www.masteringphysics.com

•, ••, •••: Problemas de dificultad creciente. **PA**: Problemas acumulativos que incorporan material de capítulos anteriores. **CALC**: Problemas que requieren cálculo. **BIO**: Problemas de ciencias biológicas.

PREGUNTAS PARA ANÁLISIS

P29.1 Se coloca una lámina de cobre entre los polos de un electroimán con el campo magnético perpendicular a la lámina. Cuando se tira de la lámina hacia afuera, se requiere una fuerza considerable, la cual aumenta con la rapidez. Explique este fenómeno.

P29.2 En la figura 29.8, si la rapidez angular ω de la espira se duplica, entonces la frecuencia con la que la corriente inducida cambia de sentido también se duplica, al igual que la fem máxima. ¿Por qué? ¿Cambia la torca requerida para hacer girar la espira? Explique su respuesta.

P29.3 Dos espiras circulares se encuentran lado a lado en el mismo plano. Una está conectada a una fuente que suministra una corriente creciente; la otra es un anillo cerrado simple. ¿La corriente inducida en el anillo tiene la misma dirección que la corriente en la espira conectada con la fuente? ¿O es opuesto? ¿Qué sucede si disminuye la corriente en la primera espira? Explique su respuesta.

P29.4 Para la ecuación (29.6) demuestre que si v se expresa en metros por segundo, B en teslas y L en metros, entonces las unidades del lado derecho de la ecuación son joules por coulomb o volts (las unidades correctas del SI para $\mathcal{E}$).

P29.5 Un conductor largo y recto pasa por el centro de un anillo metálico, perpendicular a su plano. Si la corriente en el conductor aumenta, ¿se induce una corriente en el anillo? Explique su respuesta.

P29.6 Un estudiante asegura que si se deja caer en forma vertical un imán permanente por un tubo de cobre, finalmente el imán alcanza una velocidad terminal aunque no haya resistencia del aire. ¿Por qué tendría que ser así?

P29.7 Un avión vuela horizontalmente sobre la Antártida, donde el campo magnético terrestre está dirigido mayormente hacia arriba alejándose del suelo. Vista por un pasajero que mira hacia el frente del avión, ¿el extremo del ala izquierda está a un potencial mayor que el del ala derecha? ¿La respuesta depende de la dirección en que vuela el avión?

P29.8 Considere la situación del ejercicio 29.19. En el inciso *a*), obtenga la dirección de la fuerza que ejerce el circuito grande sobre el pequeño. Explique el modo en que este resultado es congruente con la ley de Lenz.

P29.9 Un rectángulo de metal está cerca de un alambre largo, recto y que conduce corriente, con dos de sus lados paralelos al alambre. Si la corriente en el alambre está disminuyendo, ¿el rectángulo es repelido o atraído por el alambre? Explique por qué este resultado es congruente con la ley de Lenz.

P29.10 Una espira conductora cuadrada está en una región de campo magnético constante y uniforme. ¿La espira puede hacerse girar alrededor de un eje a lo largo de un lado sin que se induzca alguna fem en la espira? Explique lo que sucede en términos de la orientación del eje de rotación con respecto a la dirección del campo magnético.

P29.11 En el ejemplo 29.6 se analiza la fuerza externa que debe aplicarse al conductor deslizante para que se mueva con rapidez constante. Si hubiera un freno en el extremo izquierdo del conductor con forma de U, ¿cuánta fuerza sería necesaria para mover el conductor deslizante con rapidez constante? Igual que en el ejemplo, ignore la fricción.

P29.12 En la situación que se muestra en la figura 29.17, ¿sería adecuado preguntar cuánta *energía* gana un electrón durante un recorrido completo alrededor de la espira de alambre con corriente I'? ¿Sería adecuado preguntar a través de qué *diferencia de potencial* se mueve el electrón durante ese recorrido completo? Explique sus respuestas.

P29.13 Un anillo metálico está orientado con el plano de su área perpendicular a un campo magnético espacialmente uniforme que se incrementa a una razón constante. Si el radio del anillo se duplica, ¿en

qué factor cambian *a*) la fem inducida en el anillo y *b*) el campo eléctrico inducido en el anillo?

P29.14 • Un superconductor tipo II en un campo externo entre B_{c1} y B_{c2} posee regiones que contienen flujo magnético y presentan resistencia, y también tiene regiones superconductoras. ¿Cuál es la resistencia de un cilindro largo y delgado hecho de tal material?

P29.15 ¿Se puede tener una corriente de desplazamiento además de una corriente de conducción dentro de un conductor? Explique su respuesta.

P29.16 Un compañero con quien estudia física le pide que considere un capacitor de placas paralelas que tiene un dieléctrico que llena por completo el volumen entre sus placas. Él afirma que las ecuaciones (29.13) y (29.14) demuestran que la corriente de conducción en el dieléctrico es igual a la corriente de desplazamiento en el dieléctrico. ¿Está de acuerdo? Explique su respuesta.

P29.17 Relacione los enunciados matemáticos de las ecuaciones de Maxwell, tal como aparecen en la sección 29.7, con las siguientes expresiones: *a*) Las líneas de campo eléctrico cerradas evidentemente son producidas únicamente por un flujo magnético variable. *b*) Las líneas de campo magnético cerradas son producidas tanto por el movimiento de la carga eléctrica como por un flujo eléctrico variable. *c*) Las líneas de campo eléctrico comienzan en cargas positivas y terminan en cargas negativas. *d*) Es evidente que no hay monopolos magnéticos donde comiencen y terminen líneas de campo magnético.

P29.18 Si existieran los monopolos magnéticos, el lado derecho de la ecuación (29.21) incluiría un término proporcional a la corriente de los monopolos magnéticos. Suponga que una corriente constante de monopolo se desplaza por un alambre recto y largo. Trace las líneas de campo *eléctrico* que esa corriente produciría.

EJERCICIOS

Sección 29.2 Ley de Faraday

29.1 • Una espira de alambre con un área de 0.0900 m^2 se encuentra en un campo magnético uniforme que tiene un valor inicial de 3.80 T, es perpendicular al plano de la espira y está disminuyendo a una razón constante de 0.190 T/s. *a*) ¿Cuál es la fem que se induce en esta espira? *b*) Si la espira tiene una resistencia de 0.600 Ω, calcule la corriente inducida en la espira.

29.2 •• En un experimento en un laboratorio de física, una bobina con 200 espiras que encierra un área de 12 cm^2 se hace girar en 0.040 s, desde una posición donde su plano es perpendicular al campo magnético de la Tierra, hasta otra donde el plano queda paralelo al campo. El campo magnético terrestre en la ubicación del laboratorio es 6.0×10^{-5} T. *a*) ¿Cuál es el flujo magnético total a través de la bobina antes de hacerla girar? ¿Y después del giro? *b*) ¿Cuál es la fem inducida media en la bobina?

29.3 •• **Bobinas exploradoras y tarjetas de crédito.** Una forma práctica de medir la intensidad de un campo magnético usa una bobina pequeña, con embobinado compacto, llamada *bobina exploradora*. Inicialmente, la bobina se mantiene con su plano perpendicular al campo magnético. Luego, la bobina se hace girar con rapidez un cuarto de vuelta en torno a su diámetro, o bien, se saca la bobina del campo rápidamente. *a*) Obtenga la ecuación que relacione la carga total Q que fluye a través de una bobina exploradora con la magnitud B del campo magnético. La bobina exploradora tiene N espiras, cada una con área A, y el flujo a través de la bobina disminuye desde su valor máximo inicial hasta cero, en un tiempo Δt. La resistencia de la bobina es R, y la carga total es $Q = I\Delta t$, donde I es la corriente media inducida por el cambio en el flujo. *b*) En un lector de tarjetas de crédito, se "inserta" la banda magnética del reverso por una bobina. Con las mismas ideas que sustentan la operación de una bobina exploradora, explique cómo el lector decodifica la información almacenada en el patrón de magnetización de la banda. *c*) ¿Es necesario "insertar" la tarjeta de crédito a través del lector exactamente con la rapidez correcta? ¿Por qué?

29.4 • Una bobina exploradora con embobinado compacto (véase el ejercicio 29.3), tiene un área de 3.20 cm^2, 120 espiras y una resistencia de 60.0 Ω. Está conectada a un instrumento que mide la carga y cuya resistencia es de 45.0 Ω. Cuando la bobina se hace girar con rapidez desde una posición paralela a un campo magnético uniforme hasta otra perpendicular al campo, el instrumento indica una carga de 3.56×10^{-5} C. ¿Cuál es la magnitud del campo?

29.5 • Una espira circular de alambre, con radio de 12.0 cm y orientada en el plano xy horizontal, se localiza en una región de campo magnético uniforme. Un campo de 1.5 T está dirigido a lo largo de la dirección z positiva, que es hacia arriba. *a*) Si se retira la espira de la región del campo en un intervalo de tiempo de 2.0 ms, calcule la fem media que se inducirá en la espira de alambre durante el proceso de extracción. *b*) Si la bobina se observa desde arriba, ¿la corriente inducida en la espira va en sentido horario o antihorario?

29.6 • **CALC** Una bobina de 4.00 cm de radio tiene 500 espiras, y está colocada en un campo magnético uniforme que varía con el tiempo de acuerdo con $B = (0.0120\ \text{T/s})t + (3.00 \times 10^{-5}\ \text{T/s}^4)t^4$. La bobina está conectada a un resistor de 600 Ω, y su plano es perpendicular al campo magnético. Se puede ignorar la resistencia de la bobina. *a*) Obtenga la magnitud de la fem inducida en la bobina en función del tiempo. *b*) ¿Cuál es la corriente en el resistor en el momento $t = 5.00$ s?

29.7 • **CALC** La corriente en el alambre largo y recto AB que se muestra en la figura E29.7 va hacia arriba y se incrementa de forma constante a una razón di/dt. *a*) En el instante en que la corriente es i, ¿cuáles son la magnitud y la dirección del campo $\vec{B}$ a una distancia r a la derecha del alambre? *b*) ¿Cuál es el flujo $d\Phi_B$ a través de la banda angosta sombreada? *c*) ¿Cuál es el flujo total a través de la espira? *d*) ¿Cuál es la fem inducida en la espira? *e*) Determine el valor numérico de la fem inducida, si a = 12.0 cm, b = 36.0 cm, L = 24.0 cm y di/dt = 9.60 A/s.

Figura **E29.7**

29.8 • **CALC** Una espira de acero, plana y circular, de radio igual a 75 cm se encuentra en reposo en un campo magnético uniforme, cuya vista de canto se muestra en la figura E29.8. El campo cambia con el tiempo, de acuerdo con $B(t) = (1.4\ \text{T})e^{-(0.057\ \text{s}^{-1})t}$. *a*) Calcule la fem inducida en la espira en función del tiempo. *b*) ¿Cuándo la fem inducida es igual a $\frac{1}{10}$ de su valor inicial? *c*) Determine la dirección de la corriente inducida en la espira, viendo esta última desde arriba.

Figura **E29.8**



29.9 • **Espira que se encoge.** Una espira circular de alambre de hierro flexible tiene una circunferencia inicial de 165.0 cm, pero su circunferencia disminuye con una rapidez constante de 12.0 cm/s debido a un tirón tangencial sobre el alambre. La espira se encuentra en un campo magnético uniforme y constante, orientado perpendicularmente al plano de la espira y con magnitud de 0.500 T. *a*) Determine la fem inducida en la espira en el instante en que han transcurrido 9.0 s. *b*) Determine la dirección de la corriente inducida en la espira, vista a lo largo de la dirección del campo magnético.

29.10 • Una bobina rectangular con embobinado compacto de 80 espiras mide 25.0×40.0 cm. El plano de la bobina gira desde una posición donde forma un ángulo de 37.0° con el campo magnético de 1.10 T, hasta una posición perpendicular al campo. La rotación se efectúa en 0.0600 s. ¿Cuál es la fem media inducida en la bobina?

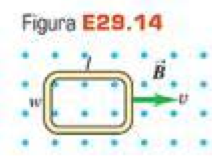
29.11 • **CALC** En una región del espacio, un campo magnético apunta en la dirección $+x$ (hacia la derecha). Su magnitud varía con la posición de acuerdo con la fórmula $B_x = B_0 + bx$, donde B_0 y b son constantes positivas, para $x \geq 0$. Una bobina plana de área A se desplaza con rapidez uniforme v de derecha a izquierda, con el plano de su área siempre perpendicular a este campo. *a*) ¿Cuál es la fem inducida en esta bobina mientras está a la derecha del origen? *b*) Vista desde el origen, ¿cuál es la dirección (horaria o antihoraria) de la corriente inducida en la bobina? *c*) Si la bobina se moviera de izquierda a derecha, ¿cuáles serían las respuestas para los incisos *a*) y *b*)?

29.12 • **Fuerza contraelectromotriz.** Un motor con una configuración de escobillas y conmutador, como la que se describe en el ejemplo 29.4, tiene una bobina circular con radio de 2.5 cm y 150 espiras de alambre. El campo magnético tiene una magnitud de 0.060 T, y la bobina gira a 440 rev/min. *a*) ¿Cuál es la fem inducida máxima en la bobina? *b*) ¿Cuál es la fuerza contraelectromotriz media?

29.13 •• La armadura de un pequeño generador consiste en una bobina plana y cuadrada con 120 espiras y cuyos lados tienen una longitud de 1.60 cm. La bobina gira en un campo magnético de 0.0750 T. ¿Cuál es la rapidez angular de la bobina si la fem producida máxima es de 24.0 mV?

29.14 • Se tira de una bobina plana y rectangular con dimensiones l y w, con rapidez uniforme v a través de un campo magnético uniforme B y con el plano de su área perpendicular al campo (figura E29.14). *a*) Determine la fem inducida en esta bobina. *b*) Si la rapidez y el campo magnético se triplican, ¿cuál será la fem inducida?

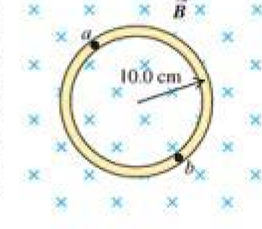
Figura **E29.14**



Sección 29.3 Ley de Lenz

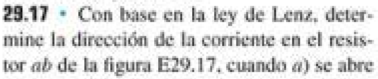
29.15 • Una espira circular de alambre está en una región de campo magnético espacialmente uniforme, como se muestra en la figura E29.15. El campo magnético está dirigido hacia el plano de la figura. Determine el sentido (horario o antihorario) de la corriente inducida en la espira, cuando *a*) B aumenta; *b*) B disminuye; *c*) B tiene un valor constante B_0. Explique su razonamiento.

Figura **E29.15**



29.16 • La corriente en la figura E29.16 cumple con la ecuación $I(t) = I_0e^{-bt}$, donde $b > 0$. Determine el sentido (horario o antihorario) de la corriente inducida en la bobina circular para $t > 0$.

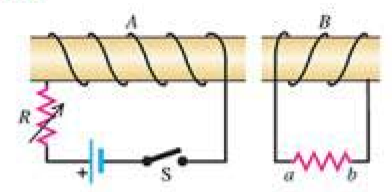
Figura **E29.16**





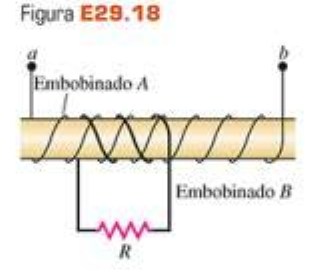
29.17 • Con base en la ley de Lenz, determine la dirección de la corriente en el resistor ab de la figura E29.17, cuando *a*) se abre el interruptor S después de haber estado cerrado durante varios minutos; *b*) la bobina B se acerca a la bobina A con el interruptor cerrado; *c*) se reduce la resistencia de R mientras el interruptor permanece cerrado.

Figura **E29.17**



29.18 • Se envuelve un tubo de cartón con dos embobinados de alambre aislado enrollados en sentidos opuestos, como se muestra en la figura E29.18. Las terminales a y b del embobinado A se conectan a una batería mediante un interruptor reversible. Indique si la corriente inducida en el resistor R fluye de izquierda a derecha o de derecha a izquierda en las siguientes circunstancias: *a*) la corriente en el embobinado A fluye de a hacia b y está aumentando; *b*) la corriente en el embobinado A fluye de b hacia a y está disminuyendo; *c*) la corriente en el embobinado A fluye de b hacia a y está aumentando.

Figura **E29.18**



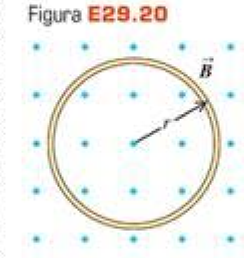
29.19 • Un pequeño anillo circular está dentro de una espira más grande que se encuentra conectada a una batería y un interruptor, como se observa en la figura E29.19. Con base en la ley de Lenz, determine la dirección de la corriente inducida en el anillo pequeño *a*) inmediatamente después de cerrar el interruptor S; *b*) después de que S ha estado cerrado mucho tiempo; *c*) inmediatamente después de abrir S luego de que estuvo cerrado mucho tiempo.

Figura **E29.19**



29.20 • Una espira circular de alambre con radio $r = 0.0480$ m y resistencia $R = 0.160\ \Omega$ está en una región de un campo magnético espacialmente uniforme, como se ilustra en la figura E29.20. El campo magnético está dirigido hacia afuera del plano de la figura, tiene un valor inicial de 8.00 T y disminuye a una razón $dB/dt = -0.680$ T/s. *a*) ¿La corriente inducida en la espira tiene sentido horario o antihorario? *b*) ¿Cuál es la razón a la cual se disipa la energía eléctrica por la resistencia de la espira?

Figura **E29.20**



29.21 • **CALC** Una espira circular de alambre con radio $r = 0.0250$ m y resistencia $R = 0.390\ \Omega$ está en una región de un campo magnético espacialmente uniforme, como se indica en la figura E29.21. El campo magnético está dirigido hacia el plano de la figura. En $t = 0$, $B = 0$. Entonces, el campo magnético comienza a crecer, con $B(t) = (0.380\ \text{T/s}^3)t^3$. ¿Cuál es la corriente en la espira (magnitud y dirección) en el instante en que $B = 1.33$ T?

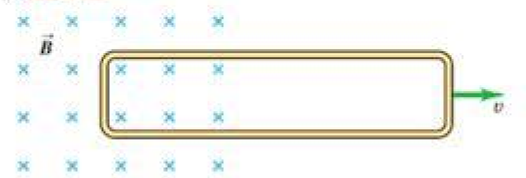
Figura **E29.21**



Sección 29.4 Fuerza electromotriz de movimiento

29.22 • Se tira de una espira rectangular de alambre con dimensiones de 1.50 × 8.00 cm y resistencia $R = 0.600\ \Omega$ hacia la derecha, afuera de un campo magnético uniforme. El campo magnético tiene

Figura **E29.22**



una magnitud $B = 3.50$ T y está dirigido hacia el plano de la figura E29.22. En el instante en que la rapidez de la espira es de 3.00 m/s y se encuentra todavía parcialmente en la región del campo, ¿qué fuerza (magnitud y dirección) ejerce el campo magnético sobre la espira?

29.23 • En la figura E29.23, una varilla conductora con longitud $L = 30.0$ cm se mueve en un campo magnético $\vec{B}$ de magnitud 0.450 T dirigido hacia el plano de la figura. La varilla se desplaza con rapidez $v = 5.00$ m/s en la dirección que se ilustra. *a*) ¿Cuál es la diferencia de potencial entre los extremos de la varilla? *b*) ¿Cuál punto, *a* o *b*, está a mayor potencial? *c*) Cuando las cargas en la varilla están en equilibrio, ¿cuáles son la magnitud y dirección del campo eléctrico dentro de la varilla? *d*) Cuando las cargas en la varilla están en equilibrio, ¿cuál punto, *a* o *b*, tiene un exceso de carga positiva? *e*) ¿Cuál es la diferencia de potencial a través de la varilla, si se desplaza **i.** en forma paralela a *ab*, y **ii.** directamente hacia afuera de la página?

Figura **E29.23**



29.24 • Un rectángulo que mide 30.0 × 40.0 cm está localizado en el interior de una región de campo magnético espacialmente uniforme de 1.25 T, con el campo perpendicular al plano de la bobina (figura E29.24). Se tira de la bobina, hacia afuera, con rapidez constante de 2.00 cm/s en una trayectoria perpendicular a las líneas de campo. La región del campo termina en forma abrupta, como se indica. Obtenga la fem inducida en esta bobina cuando está *a*) completamente adentro del campo; *b*) parcialmente dentro del campo; *c*) totalmente afuera del campo.

Figura **E29.24**



29.25 • **¿Las fem de movimiento son fuentes prácticas de electricidad?** ¿Qué tan rápido (en m/s y mph) tendría que moverse una barra de cobre de 5.00 cm, en ángulo recto con un campo magnético de 0.650 T para que genere 1.50 V (lo mismo que una batería AA) a través de sus extremos? ¿Parece una forma práctica de generar electricidad?

29.26 • **Fem de movimiento en el transporte.** Los aviones y trenes se desplazan a través del campo magnético terrestre a grandes rapideces, por lo que es razonable preguntarse si este campo tiene un efecto sustancial sobre ellos. El valor de uso común para el campo terrestre es de 0.50 G. *a*) El tren francés TGV y el "tren bala" japonés alcanzan una rapidez de hasta 180 mph cuando se desplazan sobre sus rieles separados por una distancia de 1.5 m. Cuando se desplazan a su máxima rapidez en forma perpendicular al campo magnético terrestre, ¿qué diferencia de potencial se induce a través de los rieles mientras las ruedas giran? ¿Esto parece suficientemente grande para producir un efecto notable? *b*) El avión Boeing 747-400 tiene una envergadura de 64.4 m y rapidez de crucero de 565 mph. Si no hay viento que sople (por lo que la rapidez de crucero sería también su rapidez con respecto al suelo), ¿cuál es la diferencia de potencial máxima que podría inducirse entre los extremos opuestos de las alas? ¿Esto parece suficientemente grande para causar problemas al avión?

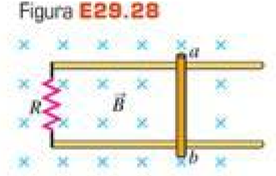
29.27 • La varilla conductora *ab* que se ilustra en la figura E29.27 hace contacto con los rieles metálicos *ca* y *db*. El aparato está en un campo magnético uniforme de 0.800 T, perpendicular al plano de la figura. *a*) Calcule la magnitud de la fem inducida en la varilla, cuando esta se mueve hacia la derecha con una rapidez de 7.50 m/s. *b*) ¿En qué sentido fluye la corriente en la varilla? *c*) Si la resistencia del circuito *abdc* es de 1.50 Ω (que se supone constante), calcule la fuerza (magnitud y dirección) requerida para mantener la varilla moviéndose hacia la derecha con rapidez constante de 7.50 m/s. Ignore la fricción. *d*) Compare la razón (*Fv*) con que la fuerza efectúa trabajo mecánico, con la razón a la que se desarrolla energía térmica (I^2R) en el circuito.

Figura **E29.27**



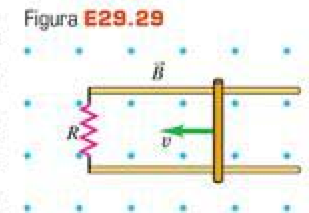
29.28 • Se tira hacia la derecha de una barra metálica de 1.50 m de longitud con rapidez uniforme de 5.0 m/s en dirección perpendicular a un campo magnético uniforme de 0.750 T. La barra corre sobre rieles metálicos paralelos conectados por medio de un resistor de 25.0 Ω, como se muestra en la figura E29.28, de manera que el aparato forma un circuito completo. Se puede ignorar la resistencia de la barra y los rieles. *a*) Calcule la magnitud de la fem inducida en el circuito. *b*) Determine el sentido de la corriente inducida en el circuito **i.** con base en la fuerza magnética sobre las cargas en la barra móvil; **ii.** con base en la ley de Faraday; **iii.** con base en la ley de Lenz. *c*) Calcule la corriente a través del resistor.

Figura **E29.28**



29.29 • Se tira hacia la izquierda de una barra metálica de 0.360 m de longitud con una fuerza aplicada *F*. La barra desliza sobre rieles metálicos paralelos conectados por medio de un resistor de 45.0 Ω, como se muestra en la figura E29.29, de manera que el aparato forma un circuito completo. Se puede ignorar la resistencia de la barra y los rieles. El circuito está en un campo magnético uniforme de 0.650 T dirigido hacia afuera del plano de la figura. En el instante en que la barra se mueve a la izquierda a 5.90 m/s, *a*) ¿la corriente inducida en el circuito tiene sentido horario o antihorario? y *b*) ¿cuál es la razón a la cual la fuerza aplicada realiza trabajo sobre la barra?

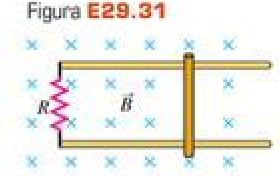
Figura **E29.29**



29.30 • Considere el circuito mostrado en la figura E29.29, pero con la barra moviéndose hacia la derecha con una rapidez *v*. Igual que en el ejercicio 29.29, la barra tiene una longitud de 0.360 m, $R = 45.0$ Ω y $B = 0.650$ T. *a*) ¿La corriente inducida en el circuito tiene sentido horario o antihorario? *b*) En el instante en que el resistor de 45.0 Ω está disipando energía eléctrica a una tasa de 0.840 J/s, ¿cuál es la rapidez de la barra?

29.31 • Una barra de 0.250 m de longitud se mueve sobre rieles paralelos conectados por medio de un resistor de 6.00 Ω, como se indica en la figura E29.31, de manera que el aparato forma un circuito completo. Se puede ignorar la resistencia de la barra y los rieles. El circuito está en un campo magnético uniforme $B =$ 1.20 T dirigido hacia el plano de la figura. En el instante en que la corriente inducida en el circuito viaja en sentido antihoriario y es igual a 1.75 A, ¿cuál es la velocidad (magnitud y dirección) de la barra?

Figura **E29.31**



29.32 •• BIO **Medición del flujo sanguíneo.** La sangre contiene iones positivos y negativos y, por lo tanto, es un conductor. Entonces, un vaso sanguíneo puede visualizarse como si fuera un alambre eléctrico. Incluso podemos imaginar el flujo sanguíneo como una serie de placas conductoras paralelas (cuyo grosor es el diámetro *d* del vaso), que se mueven con rapidez *v*. (Véase la figura E29.32). *a*) Si el vaso sanguíneo se coloca en un campo magnético *B* perpendicular al vaso, como en la figura, demuestre que la diferencia de potencial de movimiento inducida a través de él es $\mathcal{E} = vBd$. *b*) Si se espera que la sangre fluya a 15 cm/s en un vaso de 5.0 mm de diámetro, ¿qué intensidad de campo magnético

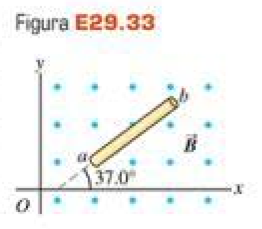
Figura **E29.32**



se necesitaría para generar una diferencia de potencial de 1.0 mV? *c*) Demuestre que la razón volumétrica de flujo (R) de sangre es igual a $R = \mathcal{E}\pi d/4B$. (*Nota*: Aun cuando el método desarrollado aquí es útil para medir el flujo de sangre en un vaso sanguíneo, su aplicación está limitada en cirugía porque la medición del potencial $\mathcal{E}$ se debe hacer directamente a través del vaso).

29.33 • Una barra de 1.41 m se mueve a través de un campo magnético uniforme de 1.20 T con una rapidez de 2.50 m/s (figura E29.33). En cada caso, calcule la fem inducida entre los extremos de esta barra e identifique cuál extremo (a o b, si acaso alguno) está a mayor potencial. La barra se mueve en la dirección de *a*) el eje $+x$; *b*) el eje $-y$; *c*) el eje $+z$. *d*) ¿Cómo debería moverse esta barra para que la fem a través de sus extremos tenga el mayor valor posible con b a un potencial más alto que a, y cuál sería esa fem máxima?

Figura **E29.33**



29.34 •• Un circuito rectangular se mueve a una velocidad constante de 3.0 m/s, hacia, a través de y luego hacia afuera de un campo magnético uniforme de 1.25 T, como se muestra en la figura E29.34. La región del campo magnético es considerablemente más ancha que 50.0 cm. Calcule la magnitud y dirección (sentido horario o antihorario) de la corriente inducida en el circuito conforme está *a*) entrando al campo magnético; *b*) totalmente dentro del campo magnético, pero moviéndose aún, y *c*) saliendo del campo. *d*) Elabore una gráfica de la corriente en este circuito en función del tiempo, incluyendo los tres casos anteriores.

Figura **E29.34**



Sección 29.5 Campos eléctricos inducidos

29.35 • El campo magnético dentro de un solenoide largo y recto con sección transversal circular y radio R se incrementa a razón dB/dt. *a*) ¿Cuál es la razón de cambio del flujo a través de un círculo con radio r_1 dentro del solenoide, normal al eje del solenoide, y con centro en el eje de este? *b*) Determine la magnitud del campo eléctrico inducido dentro del solenoide, a una distancia r_1 desde su eje. Indique en un diagrama la dirección de este campo. *c*) ¿Cuál es la magnitud del campo eléctrico inducido *afuera* del solenoide, a una distancia r_2 del eje? *d*) Elabore una gráfica de la magnitud del campo eléctrico inducido en función de la distancia r a partir del eje, de $r = 0$ a $r = 2R$. *e*) ¿Cuál es la magnitud de la fem inducida en una espira circular de radio $R/2$ con centro en el eje del solenoide? *f*) ¿Cuál es la magnitud de la fem inducida, si el radio en el inciso *e*) es R? *g*) ¿Cuál es la fem inducida si el radio en el inciso *e*) es $2R$?

29.36 •• Un solenoide largo y delgado tiene 900 espiras por metro y radio de 2.50 cm. La corriente en el solenoide está aumentando a una razón uniforme de 60.0 A/s. ¿Cuál es la magnitud del campo eléctrico inducido en un punto cerca del centro del solenoide y *a*) a 0.500 cm del eje del solenoide; *b*) a 1.00 cm del eje del solenoide?

29.37 •• Un solenoide largo y delgado tiene 400 espiras por metro y radio de 1.10 cm. La corriente en el solenoide aumenta con una razón uniforme de di/dt. El campo eléctrico inducido en un punto cerca del centro del solenoide y a 3.50 cm de su eje es de 8.00×10^{-6} V/m. Calcule di/dt.

29.38 • Un anillo metálico de 4.50 cm de diámetro está colocado entre los polos norte y sur de dos imanes grandes, con el plano de su área perpendicular al campo magnético. Estos imanes producen un campo inicial uniforme de 1.12 T entre ellos, pero se separan gradualmente, de manera que el campo sigue siendo uniforme aunque disminuye en forma constante a 0.250 T/s. *a*) ¿Cuál es la magnitud del campo eléctrico inducido en el anillo? *b*) ¿En qué sentido (horario o antihorario) fluye la corriente de acuerdo con la perspectiva de alguien que esté en el polo sur del imán?

29.39 • Un solenoide largo y recto, con área de sección transversal de 8.00 cm^2, tiene un embobinado de 90 espiras de alambre por centímetro, las cuales conducen una corriente de 0.350 A. Un segundo embobinado de 12 espiras envuelve al solenoide en su centro. La corriente en el solenoide se desactiva de manera que su campo magnético se hace igual a cero en 0.0400 s. ¿Cuál es la fem inducida media en el segundo embobinado?

29.40 • El campo magnético $\vec{B}$ en todos los puntos del círculo coloreado que se muestra en la figura E29.15 tiene una magnitud inicial de 0.750 T. (El círculo podría representar aproximadamente el espacio dentro de un solenoide largo y delgado). El campo magnético está dirigido hacia el plano del diagrama y disminuye a razón de -0.0350 T/s. *a*) ¿Cuál es la forma de las líneas del campo eléctrico inducido que se ilustra en la figura E29.15, dentro del círculo coloreado? *b*) ¿Cuáles son la magnitud y dirección de este campo en cualquier punto del anillo conductor circular con radio de 0.100 m? *c*) ¿Cuál es la corriente en el anillo, si su resistencia es de 4.00 Ω? *d*) ¿Cuál es la fem entre los puntos a y b del anillo? *e*) Si el anillo se cortara en algún punto y los extremos se separaran ligeramente, ¿cuál sería la fem entre los extremos?

Sección 29.7 Corriente de desplazamiento y ecuaciones de Maxwell

29.41 • **CALC** El flujo eléctrico a través de cierta área de un dieléctrico es $(8.76 \times 10^3\ \text{V}\cdot\text{m/s}^4)t^4$. La corriente de desplazamiento a través de esa área es de 12.9 pA en el instante $t = 26.1$ ms. Calcule la constante dieléctrica del material.

29.42 • Un capacitor de placas paralelas, lleno de aire, se carga como en la figura 29.22. Las placas circulares tienen un radio de 4.00 cm, y en un instante particular la corriente de conducción en los alambres es de 0.280 A. *a*) ¿Cuál es la densidad de corriente de desplazamiento j_D en el espacio de aire entre las placas? *b*) ¿Cuál es la razón con la que cambia el campo eléctrico entre las placas? *c*) ¿Cuál es el campo magnético inducido entre las placas a una distancia de 2.00 cm del eje? *d*) ¿Y a 1.00 cm del eje?

29.43 • **Corriente de desplazamiento en un dieléctrico.** Suponga que las placas paralelas en la figura 29.22 tienen un área de 3.00 cm^2 y están separadas por una lámina de dieléctrico de 2.50 mm de espesor, que llena por completo el volumen entre las placas. El dieléctrico tiene una constante dieléctrica de 4.70. (Se pueden ignorar los efectos de borde). En cierto momento, la diferencia de potencial entre las placas es de 120 V y la corriente de conducción i_C es igual a 6.00 mA. En este instante, ¿cuáles son *a*) la carga q en cada placa; *b*) la razón de cambio de la carga en las placas; *c*) la corriente de desplazamiento en el dieléctrico?

29.44 • **CALC** En la figura 29.22 las placas del capacitor tienen un área de 5.00 cm^2 y una separación de 2.00 mm. Las placas están en vacío. La corriente de carga i_C tiene un valor *constante* de 1.80 mA. En $t = 0$ la carga en las placas es cero. *a*) Calcule la carga en las placas, el campo eléctrico entre ellas y la diferencia de potencial entre las placas cuando $t = 0.500\ \mu$s. *b*) Calcule dE/dt, la razón de cambio con respecto al tiempo, del campo eléctrico entre las placas. ¿Varía dE/dt con el tiempo? *c*) Calcule la densidad de corriente de desplazamiento j_D entre las placas y, a partir de este dato, la corriente total de desplazamiento i_D. ¿Cómo son comparativamente i_C e i_D?

29.45 • CALC **Corriente de desplazamiento en un alambre.** Un alambre de cobre, largo y recto, con área de sección transversal de 2.1 mm^2, transporta una corriente de 16 A. La resistividad del material es $2.0 \times 10^{-8}\ \Omega \cdot$m. *a*) ¿Cuál es el campo eléctrico uniforme en el material? *b*) Si la corriente cambia a razón de 4000 A/s, ¿a qué razón cambia el campo eléctrico en el material? *c*) En el inciso *b*), ¿cuál es la densidad de corriente de desplazamiento en el material? (*Sugerencia:* Como K para el cobre está muy cerca de 1, use $\epsilon = \epsilon_0$). *d*) Si la corriente cambia como en el inciso *b*), ¿cuál es la magnitud del campo magnético a 6.0 cm del centro del alambre? Advierta que tanto la corriente de conducción como la de desplazamiento deberían incluirse en el cálculo de B. ¿Es significativa la contribución de la corriente de desplazamiento.

Sección 29.8 Superconductividad

29.46 • A temperaturas cercanas al cero absoluto, B_c se aproxima a 0.142 T en el caso del vanadio, un superconductor del tipo I. La fase normal del vanadio tiene susceptibilidad magnética cercana al cero. Considere un cilindro largo y delgado de vanadio, con su eje paralelo a un campo magnético externo $\vec{B}_0$ en la dirección $+x$. En puntos alejados de los extremos del cilindro, por simetría, todos los vectores magnéticos son paralelos al eje x. A temperaturas cercanas al cero absoluto, ¿cuáles son el campo magnético resultante $\vec{B}$ y la magnetización $\vec{M}$ dentro y fuera del cilindro (lejos de los extremos) cuando *a*) $\vec{B}_0 = (0.130\ \text{T})\hat{\imath}$ y *b*) $\vec{B}_0 = (0.260\ \text{T})\hat{\imath}$?

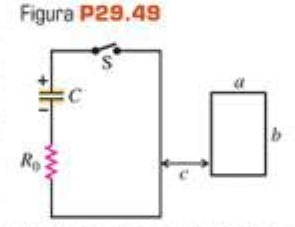
29.47 • El compuesto SiV_3 es un superconductor del tipo II. A temperaturas cercanas al cero absoluto, los dos campos críticos son $B_{c1} =$ 55.0 mT y $B_{c2} = 15.0$ T. La fase normal del SiV_3 tiene una susceptibilidad magnética cercana a cero. Un cilindro largo y delgado de Si V_3 tiene su eje paralelo a un campo magnético externo $\vec{B}_0$ en la dirección $+x$. En puntos alejados de los extremos del cilindro, por simetría, todos los vectores magnéticos son paralelos al eje x. A una temperatura cercana al cero absoluto, el campo magnético externo aumenta lentamente desde cero. ¿Cuáles son el campo magnético resultante $\vec{B}$ y la magnetización $\vec{M}$ dentro del cilindro, en puntos alejados de sus extremos *a*) justo antes de que el flujo magnético comience a penetrar en el material y *b*) inmediatamente después de que el material se vuelva completamente normal?

PROBLEMAS

29.48 ••• CALC **Campo magnético variable.** Usted está probando un nuevo sistema de adquisición de datos, el cual permite registrar una gráfica de la corriente en un circuito como función del tiempo. Como parte de la prueba, utiliza un circuito constituido por una bobina de alambre de cobre de 4.00 cm de radio y 500 espiras, conectada en serie a un resistor de 600 Ω. El cobre tiene una resistividad de $1.72 \times 10^{-8}\ \Omega \cdot$m, y el alambre usado para la bobina tiene un diámetro de 0.0300 mm. Usted coloca la bobina en una mesa inclinada 30.0° con respecto a la horizontal y que se encuentra entre los polos de un electroimán. El electroimán genera un campo magnético dirigido verticalmente hacia arriba, que es igual a cero cuando $t < 0$, igual a $(0.120\ \text{T}) \times (1 - \cos \pi t)$ cuando $0 \le t \le 1.00$ s, e igual a 0.240 T cuando $t > 1.00$ s. *a*) Trace la gráfica que debería generar su sistema de adquisición de datos. (Se trata de un sistema completo, por lo que la gráfica debe incluir leyendas y valores numéricos en sus ejes). *b*) Si mirara la bobina en dirección vertical hacia abajo, ¿la corriente fluiría en sentido horario o antihorario?

29.49 •• PA CALC En el circuito que se aprecia en la figura P29.49, el capacitor tiene una capacitancia $C = 20\ \mu$F e inicialmente se carga a 100 V con la polaridad que se indica. El resistor R_0 tiene una resistencia de 10 Ω. En el momento $t = 0$ se cierra el interruptor. El circuito pequeño no está conectado de ninguna forma al circuito grande. El alambre del circuito pequeño tiene una resistencia de 1.0 Ω/m y contiene 25 espiras. El circuito grande es un rectángulo de 2.0 × 4.0 m, mientras que el pequeño tiene dimensiones a = 10.0 cm y b = 20.0 cm. La distancia c es de 5.0 cm. (La figura no está a escala). Ambos circuitos están fijos. Suponga que solo el alambre más cercano al circuito pequeño produce un campo magnético apreciable a través de él. *a*) Determine la corriente en el circuito grande 200 μs después de que se cerró S. *b*) Calcule la corriente en el circuito pequeño 200 μs después de haber cerrado S. (*Sugerencia:* Véase el ejercicio 29.7). *c*) Determine la dirección de la corriente en el circuito pequeño. *d*) Justifique por qué se puede ignorar el campo magnético de todos los alambres del circuito grande, excepto el que está más cerca del circuito pequeño.

Figura **P29.49**



29.50 •• PA CALC En el circuito de la figura P29.49, se agrega una fem en serie de 90.0 V al capacitor y al resistor, y el capacitor está inicialmente descargado. La fem se coloca entre el capacitor y el interruptor, con la terminal positiva de la fem adyacente al capacitor. Por lo demás, los circuitos son iguales a los del problema 29.49. El interruptor está cerrado en $t = 0$. Cuando la corriente en el circuito grande es de 5.00 A, ¿cuáles son la magnitud y dirección de la corriente inducida en el circuito pequeño?

29.51 •• CALC Un solenoide recto, muy largo, con un área de sección transversal igual a 2.00 cm^2 tiene un embobinado de 90.0 espiras de alambre por centímetro. Iniciando en $t = 0$, la corriente en el solenoide aumenta de acuerdo con $i(t) = (0.160\ \text{A/s}^2)t^2$. Un embobinado secundario de 5 espiras encierra al solenoide en su centro, de modo que el embobinado secundario tiene la misma sección transversal que el solenoide. ¿Cuál es la magnitud de la fem inducida en el embobinado secundario en el instante en que la corriente en el solenoide es de 3.20 A?

29.52 • Una bobina plana está orientada con el plano de su área formando un ángulo recto con un campo magnético espacialmente uniforme. La magnitud de este campo varía con el tiempo de acuerdo con la gráfica de la figura P29.52. Dibuje una gráfica cualitativa (¡pero exacta!) de la fem inducida en la bobina en función del tiempo. Asegúrese de indicar en la gráfica los tiempos t_1, t_2 y t_3.

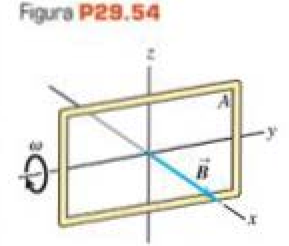
Figura **P29.52**

29.53 • En la figura P29.53, se tira de la espira hacia la derecha a rapidez constante v. Una corriente constante I fluye en el alambre largo, en el sentido que se indica. *a*) Calcule la magnitud de la fem neta $\mathcal{E}$ inducida en la espira. Haga esto de dos modos: **i.** usando la ley de Faraday de la inducción (*Sugerencia:* Véase el ejercicio 29.7) y **ii.** examinando la fem inducida en cada segmento de la espira debida al movimiento de esta. *b*) Determine el sentido (horario o antihorario) de la corriente inducida en la espira. Haga esto de dos maneras: **i.** usando la ley de Lenz y **ii.** a partir de la fuerza magnética sobre las cargas en la espira. *c*) Compruebe su respuesta para la fem del inciso *a*) en los siguientes casos especiales, para saber si es físicamente razonable: **i.** La espira está fija; **ii.** la espira es muy delgada, de manera que $a \rightarrow 0$; **iii.** la espira está muy lejos del alambre.

Figura **P29.53**

29.54 • Suponga que la espira en la figura P29.54 se hace girar *a*) en torno al eje *y*; *b*) en torno al eje *x*; *c*) en torno a un lado paralelo al eje *z*. ¿Cuál es la fem inducida máxima en cada caso, si $A = 600 \text{ cm}^2$, $\omega = 35.0 \text{ rad/s}$ y $B = 0.450 \text{ T}$?

Figura **P29.54**

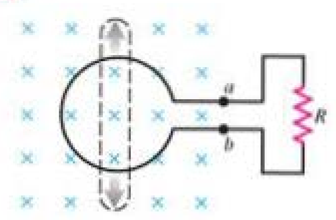


29.55 ••• Como nuevo ingeniero eléctrico en la compañía de electricidad local, le asignaron el proyecto de diseñar un generador de voltaje de ca sinusoidal con voltaje máximo de 120 V. Además de mucho alambre, dispone de dos imanes fuertes capaces de producir un campo magnético constante y uniforme de 1.5 T sobre un área cuadrada de 10.0 cm por lado cuando están separados por una distancia de 12.0 cm. El diseño básico debería consistir en una bobina cuadrada que gira en el campo magnético uniforme. Para tener una resistencia aceptable, la bobina debe tener un máximo de 400 espiras. ¿Cuál es la razón de rotación mínima (en rpm) de la bobina para generar el voltaje requerido?

29.56 • **¿Construir un generador?** Usted naufragó y se encuentra en una isla tropical desierta. Tiene algunos dispositivos eléctricos que podrían operar con un generador, pero no tiene imanes. En el lugar donde se encuentra, el campo magnético terrestre es horizontal y tiene una magnitud de 8.0×10^{-5} T, y decide intentar utilizar este campo para construir un generador haciendo girar muy rápido una gran bobina circular de alambre. Necesita producir una fem pico de 9.0 V y estima que puede hacer girar la bobina a 30 rpm dando vueltas a una manivela. También decide que para tener una resistencia aceptable en la bobina, el número máximo de espiras que la bobina puede tener es 2000. *a*) ¿Qué área debe tener la bobina? *b*) Si la bobina es circular, ¿cuál es la máxima rapidez de traslación de un punto de la bobina cuando esta gira? ¿Cree que sea factible un aparato así? Explique su respuesta.

29.57 • Una espira circular flexible de 6.50 cm de diámetro está en un campo magnético con magnitud de 1.35 T, dirigido hacia el plano de la página, como se ilustra en la figura P29.57. Se tira de la espira en los puntos indicados por las flechas, para formar una espira de área igual a cero en 0.250 s. *a*) Calcule la fem inducida media en el circuito. *b*) ¿Cuál es el sentido de la corriente en *R*: de *a* a *b* o de *b* a *a*? Explique su razonamiento.

Figura **P29.57**



29.58 ••• CALC Una varilla conductora con longitud $L = 0.200$ m, masa $m = 0.120$ kg y resistencia $R = 80.0\ \Omega$ se mueve sin fricción sobre rieles metálicos, como se indica en la figura 29.11. Un campo magnético uniforme de magnitud $B = 1.50$ T está dirigido hacia el plano de la figura. La varilla parte del reposo y luego actúa sobre ella una fuerza constante de magnitud $F = 1.90$ N dirigida hacia la derecha. ¿Cuántos segundos después de que se aplica la fuerza, alcanza la barra una rapidez de 25.0 m/s?

29.59 ••• **Rapidez terminal.** Una varilla conductora con longitud *L*, masa *m* y resistencia *R* se mueve sin fricción sobre rieles metálicos, como se indica en la figura 29.11. Un campo magnético uniforme $\vec{B}$ está dirigido hacia el plano de la figura. La varilla parte del reposo y sobre ella actúa una fuerza constante $\vec{F}$ dirigida hacia la derecha. Los rieles tienen longitud infinita y resistencia despreciable. *a*) Elabore una gráfica de la rapidez de la varilla en función del tiempo. *b*) Encuentre una expresión para la rapidez terminal (la rapidez cuando la aceleración de la varilla es igual a cero).

29.60 •• PA CALC **Rapidez terminal.** Una barra de longitud $L = 0.36$ m tiene libertad para deslizarse sin fricción sobre rieles horizontales, como se muestra en la figura P29.60. Hay un campo magnético uniforme $B = 1.5$ T dirigido hacia el plano de la figura. En un extremo de los rieles hay una batería con fem $\mathcal{E} = 12$ V y un interruptor. La barra tiene una masa de 0.90 kg y resistencia de 5.0 Ω, y pueden ignorarse todas las demás resistencias en el circuito. Se cierra el interruptor en el momento $t = 0$. *a*) Elabore una gráfica de la rapidez de la barra en función del tiempo. *b*) ¿Cuál es la aceleración de la barra inmediatamente después de haber cerrado el interruptor? *c*) ¿Cuál es la aceleración de la barra cuando su rapidez es de 2.0 m/s? *d*) ¿Cuál es la rapidez terminal de la barra?

Figura **P29.60**



29.61 • PA **Fem de una antena.** Un satélite que orbita la Tierra sobre el ecuador a una altitud de 400 km, tiene una antena que puede modelarse como una varilla de 2.0 m de largo. La antena está orientada de manera perpendicular a la superficie terrestre. En el ecuador, el campo magnético de nuestro planeta es esencialmente horizontal y tiene un valor de 8.0×10^{-5} T; ignore cualquier cambio en *B* debido a la altitud. Si la órbita es circular, determine la fem inducida entre los extremos de la antena.

29.62 • **Fem en una bala.** En el ecuador, el campo magnético terrestre es aproximadamente horizontal, está dirigido hacia el norte y tiene un valor de 8×10^{-5} T. *a*) Estime la fem inducida entre las partes superior e inferior de una bala disparada horizontalmente a un objetivo en el ecuador, si la bala se dispara hacia el este. Suponga que la bala tiene longitud de 1 cm, diámetro de 0.4 cm y se desplaza a 300 m/s. ¿Cuál está a mayor potencial: la parte superior o la parte inferior de la bala? *b*) ¿Cuál es la fem si la bala viaja hacia el sur? *c*) ¿Cuál es la fem inducida entre las partes delantera y trasera de la bala para cualquier velocidad horizontal?

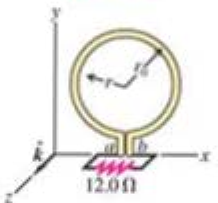
29.63 •• CALC Un alambre cilíndrico muy largo de radio *R* conduce una corriente I_0 distribuida de manera uniforme a través de la sección transversal del alambre. Calcule el flujo magnético a través de un rectángulo que tiene un lado de longitud *W* que se extiende a lo largo del centro del alambre, y otro lado de longitud *R*, como se indica en la figura P29.63 (véase el ejercicio 29.7).

Figura **P29.63**



29.64 • CALC Un anillo conductor circular con radio $r_0 = 0.0420$ m está en el plano *xy* en una región de campo magnético uniforme $\vec{B} = B_0[1 - 3(t/t_0)^2 + 2(t/t_0)^3]\hat{k}$. En esta expresión, $t_0 = 0.0100$ s y es constante, *t* es el tiempo, es el vector unitario en la dirección $+z$ y $B_0 = 0.0800$ T y es constante. En los puntos *a* y *b* (figura P29.64) hay una pequeña abertura en el anillo con alambres que van a un circuito externo de resistencia $R = 12.0\ \Omega$. No hay campo magnético en la ubicación del circuito externo. *a*) Obtenga una expresión, como función del tiempo, para el flujo magnético total Φ_B a través del anillo. *b*) Determine la fem inducida en el anillo en el momento $t = 5.00 \times 10^{-3}$ s. ¿Cuál es la polaridad de la fem?

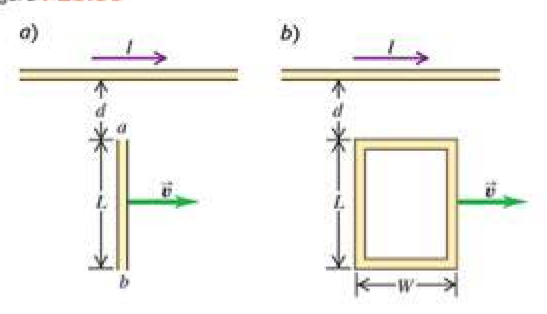




c) Debido a la resistencia interna del anillo, la corriente a través de R en el momento dado en el inciso *b*) es de solo 3.00 mA. Determine la resistencia interna del anillo. *d*) Calcule la fem en el anillo en el momento $t = 1.21 \times 10^{-2}$ s. ¿Cuál es la polaridad de la fem? *e*) Determine el instante en que se invierte el sentido de la corriente que fluye a través de R.

29.65 • **CALC** El alambre largo y recto que se muestra en la figura P29.65*a* conduce una corriente constante I. Una barra metálica con longitud L se mueve a velocidad constante $\vec{v}$, como se indica en la figura. El punto a está a una distancia d del alambre. *a*) Calcule la fem inducida en la barra. *b*) ¿Cuál punto, a o b, está a mayor potencial? *c*) Si se reemplaza la barra por una espira rectangular de alambre de resistencia R (figura P29.65*b*), ¿cuál sería la magnitud de la corriente inducida en la espira?

Figura **P29.65**



29.66 • El cubo de la figura P29.66 mide 50.0 cm por lado y está en un campo magnético uniforme de 0.120 T, dirigido a lo largo del eje y positivo. Los alambres A, C y D se mueven en las direcciones indicadas, cada uno con rapidez de 0.350 m/s. (El alambre A se mueve paralelo al plano xy, C se mueve a un ángulo de 45.0° por debajo del plano xy y D se mueve paralelo al plano xz). ¿Cuál es la diferencia de potencial entre los extremos de cada alambre?

Figura **P29.66**

29.67 • **CALC** Una varilla delgada, de 0.240 m de largo, gira con rapidez angular de 8.80 rad/s en torno a un eje que pasa por un extremo y es perpendicular a la varilla. El plano de rotación de la varilla es perpendicular a un campo magnético uniforme con magnitud de 0.650 T. *a*) ¿Cuál es la fem inducida en la varilla? *b*) ¿Cuál es la diferencia de potencial entre sus extremos? *c*) Suponga que en vez de lo anterior, la varilla gira a 8.80 rad/s en torno a un eje que pasa por su centro y es perpendicular a la varilla. En este caso, ¿cuál es la diferencia de potencial entre los extremos de la varilla? ¿Y entre el centro de la varilla y un extremo?

29.68 • **Máquina magnética para hacer ejercicio.** Usted ha diseñado una nueva máquina para hacer ejercicio con un mecanismo muy sencillo (figura E29.28). Una barra vertical de plata (elegida por su escasa resistividad y porque hace que la máquina se vea bonita) con longitud $L = 3.0$ m tiene libertad para moverse hacia la izquierda o hacia la derecha, sin fricción, sobre rieles de plata. Todo el aparato se coloca en un campo magnético uniforme, horizontal, con intensidad de 0.25 T. Cuando se empuja la barra hacia la izquierda o hacia la derecha, su movimiento origina una corriente en el circuito que incluye a la barra. La resistencia de esta y la de los rieles es despreciable. El campo magnético ejerce una fuerza sobre la barra conductora de corriente, que se opone al movimiento de la barra. El beneficio para la salud se deriva del ejercicio que el usuario realiza al trabajar contra esta fuerza. *a*) El objetivo del diseño es que la persona que haga ejercicio efectúe trabajo a razón de 25 watts al mover la barra con una rapidez constante de 2.0 m/s. ¿Cuál debería ser la resistencia R? *b*) Usted decide que quiere tener la capacidad de variar la potencia requerida por la persona, de manera que la máquina se adapte a la fuerza y condición de cada usuario. Si la potencia se incrementa a 50 W modificando R mientras se dejan constantes los demás parámetros del diseño, ¿R debería aumentar o disminuir? Calcule el valor de R para 50 W. *c*) Cuando usted comienza a construir el prototipo de máquina, descubre que es difícil producir un campo magnético de 0.25 T en un área tan grande. Si reduce la longitud de la barra a 0.20 m mientras B, v y R valen lo mismo que en el inciso *a*), ¿cuál será la potencia que se demande de la persona que use el aparato?

29.69 •• **PA CALC** En la figura P29.69 se muestra una espira rectangular con ancho L y un alambre deslizante con masa m. Un campo magnético uniforme $\vec{B}$ está dirigido en forma perpendicular al plano de la espira hacia el plano de la figura. Se da al alambre deslizante una rapidez inicial v_0 y, luego, se libera. No hay fricción entre el alambre deslizante y la espira, y la resistencia de la espira es despreciable en comparación con la resistencia R del alambre deslizante. *a*) Obtenga una expresión para F, la magnitud de la fuerza ejercida sobre el alambre mientras se mueve a rapidez v; *b*) Demuestre que la distancia x que el alambre se mueve antes de llegar al reposo es $x = mv_0R/a^2B^2$.

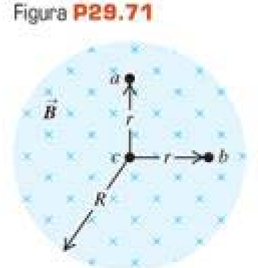
Figura **P29.69**



29.70 •• Una varilla metálica de 25.0 cm de largo está en el plano xy y forma un ángulo de 36.9° con el eje x positivo, y un ángulo de 53.1° con el eje y positivo. La varilla se mueve en la dirección $+x$ con una rapidez de 6.80 m/s, y está en un campo magnético uniforme $\vec{B} = (0.120\text{ T})\hat{\imath} - (0.220\text{ T})\hat{\jmath} - (0.0900\text{ T})\hat{k}$. *a*) ¿Cuál es la magnitud de la fem inducida en la varilla? *b*) Indique en un diagrama cuál extremo de la varilla está a un potencial mayor.

29.71 • El campo magnético $\vec{B}$, en todos los puntos dentro de una región circular de radio R, es uniforme en el espacio y está dirigido hacia el plano de la página, como se muestra en la figura P29.71. (La región podría ser una sección transversal dentro de los embobinados de un solenoide largo y recto). Si el campo magnético se incrementa a una tasa dB/dt, ¿cuáles son la magnitud y dirección de la fuerza sobre una carga puntual q, positiva y fija, ubicada en los puntos a, b y c? (El punto a se encuentra a una distancia r por arriba del centro de la región, el punto b está a una distancia r a la derecha del centro, y el punto c se halla en el centro de la región).

Figura **P29.71**



29.72 • **CALC** La hélice de un avión con longitud total L gira alrededor de su centro con rapidez angular ω en un campo magnético perpendicular al plano de rotación. Modelando la hélice como una barra delgada y uniforme, determine la diferencia de potencial entre *a*) el centro y cualquiera de los extremos de la hélice, y *b*) los dos extremos. *c*) Si el campo es el de la Tierra, de 0.50 G, y la hélice gira a 220 rpm y mide 2.0 m de largo, ¿cuál es la diferencia de potencial entre el punto medio y cada extremo? ¿Es suficientemente grande como para preocuparse?

29.73 ••• **CALC** Un dieléctrico de permitividad 3.5×10^{-11} F/m llena por completo el volumen entre las dos placas de un capacitor. Para $t > 0$ el flujo eléctrico a través del dieléctrico es $(8.0 \times 10^3\ \text{V}\cdot\text{m/s}^3)t^3$. El dieléctrico es ideal y no magnético; la corriente de conducción en el dieléctrico es igual a cero. ¿En qué momento la corriente de desplazamiento en el dieléctrico es igual a 21 μA?

29.74 •• **PA CALC** Un capacitor tiene dos placas paralelas con área A separadas por una distancia d. El espacio entre las placas está lleno con un material con constante dieléctrica K. El material no es un aislante perfecto, sino que tiene resistividad ρ. El capacitor está inicialmente cargado con carga de magnitud Q_0 en cada placa que gradualmente se descarga por conducción a través del dieléctrico. *a*) Calcule la densidad de corriente de conducción $j_C(t)$ en el dieléctrico. *b*) Demuestre que en cualquier instante la densidad de corriente de desplazamiento en el dieléctrico es igual en magnitud a la densidad de corriente de conducción, pero con sentido opuesto, por lo que la densidad de corriente total es igual a cero en cualquier instante.

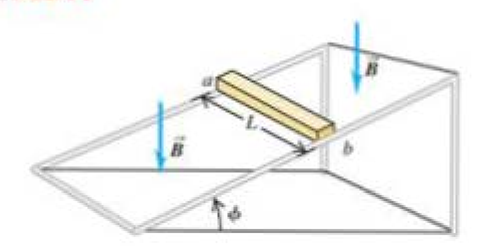
29.75 •• **CALC** Una varilla de silicio puro (resistividad $\rho = 2300\ \Omega \cdot \text{m}$) conduce una corriente. El campo eléctrico varía con el tiempo en forma sinusoidal, de acuerdo con la expresión $E = E_0 \operatorname{sen} \omega t$, donde $E_0 = 0.450$ V/m, $\omega = 2\pi f$, y la frecuencia es $f = 120$ Hz. *a*) Determine la magnitud de la máxima densidad de corriente de conducción en el alambre. *b*) Suponga que $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0$, y calcule la máxima densidad de la corriente de desplazamiento en el alambre, y compárela con el resultado del inciso *a*). *c*) ¿A qué frecuencia f las densidades máximas de conducción y de desplazamiento se hacen iguales si $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0$ (que en realidad no es el caso)? *d*) Con la frecuencia determinada en el inciso *c*), ¿cuál es la *fase* relativa de las corrientes de conducción y desplazamiento?

PROBLEMAS DE DESAFÍO

29.76 ••• **PA CALC** Una espira de alambre conductora cuadrada, con lado L, masa total m y resistencia total R, inicialmente está en el plano xy horizontal, con vértices en $(x, y, z) = (0, 0, 0)$, $(0, L, 0)$, $(L, 0, 0)$ y $(L, L, 0)$. Hay un campo magnético uniforme dirigido hacia arriba $\vec{B} = B\hat{k}$ en el espacio del interior y alrededor de la espira. El lado de la espira que va de $(0, 0, 0)$ a $(L, 0, 0)$ está fijo en el eje x; el resto de la espira tiene libertad para girar alrededor de este eje. Cuando se libera la espira, comienza a girar debido a la torca gravitacional. *a*) Determine la torca *neta* (magnitud y dirección) que actúa sobre la espira cuando esta haya girado un ángulo ϕ a partir de su orientación original y esté girando hacia abajo con una rapidez angular ω. *b*) Calcule la aceleración angular de la espira en el instante descrito en el inciso *a*). *c*) En comparación con el caso donde el campo magnético es igual a cero, ¿a la espira le toma más o menos tiempo describir un giro de 90°? Explique su respuesta. *d*) ¿Se conserva la energía mecánica cuando la espira gira hacia abajo? Explique su respuesta.

29.77 ••• Una barra metálica con longitud L, masa m y resistencia R está colocada sobre rieles metálicos sin fricción, que están inclinados a un ángulo ϕ por encima de la horizontal. Los rieles tienen una resistencia despreciable. Como se indica en la figura P29.77, hay un campo magnético uniforme de magnitud B dirigido hacia abajo. La barra se libera desde el reposo y se desliza hacia abajo por los rieles. *a*) ¿El sentido de la corriente inducida en la barra es de a a b, o de b a a? *b*) ¿Cuál es la rapidez terminal de la barra? *c*) ¿Cuál es la corriente inducida en la barra cuando se ha alcanzado la rapidez terminal? *d*) Después de haber alcanzado la rapidez terminal, ¿a qué razón la energía eléctrica se convierte en energía térmica en la resistencia de la barra? *e*) Una vez que se llegó a la rapidez terminal, ¿a qué razón la gravedad realiza trabajo sobre la barra? Compare su respuesta con la del inciso *d*).

Figura **P29.77**



Respuestas

Pregunta inicial del capítulo



Conforme la banda magnética de la tarjeta de crédito se mueve por el lector, el patrón codificado magnetizado en la banda provoca un flujo magnético variable y con ello una corriente inducida en los circuitos del lector. Si la tarjeta no se mueve, no hay una fem, o corriente inducida, y no se lee la información de la tarjeta de crédito.

Preguntas de las secciones
Evalúe su comprensión

29.2 Respuestas: *a*) i, *b*) iii. *a*) Al principio hay un flujo magnético hacia el plano de la página, que llamamos positivo. Mientras se comprime la espira, el flujo se vuelve menos positivo ($d\Phi_B/dt < 0$), por lo que la fem inducida es positiva, como en la figura 29.6*b* ($\mathcal{E} = -d\Phi_B/dt > 0$). Si usted apunta el pulgar de su mano derecha hacia la página, sus dedos se doblan en el sentido horario, así que esta es la dirección de la fem inducida positiva. *b*) Como la forma de la bobina ya no está cambiando, el flujo magnético tampoco cambia, y no hay fem inducida.

29.3 Respuestas: *a*) i, *b*) iii. En el inciso *a*), como en la situación original, el imán y la espira se acercan entre sí y se incrementa el flujo hacia abajo a través de la espira. De ese modo, la fem y la corriente inducidas son las mismas. En el inciso *b*), como el imán y la espira se mueven juntos, el flujo a través de la espira no cambia y no hay fem inducida.

29.4 Respuestas: *a*) iii; *b*) i o ii; *c*) ii o iii. Se obtendrá la máxima fem de movimiento si se sostiene la varilla verticalmente, de manera que su longitud sea perpendicular tanto al campo magnético como a la dirección del movimiento. Con esta orientación, $\vec{L}$ es paralela a $\vec{v} \times \vec{B}$. Si sostiene la varilla en cualquier orientación horizontal, $\vec{L}$ será perpendicular a $\vec{v} \times \vec{B}$ y no se inducirá ninguna fem. Si se camina hacia el norte o sur, $\vec{v} \times \vec{B} = \mathbf{0}$ y no habrá fem inducida para ninguna orientación de la varilla.

29.5 Respuestas: sí, no El campo magnético en una posición fija cambia a medida que el imán se mueve. Estos campos eléctricos inducidos son *no* conservativos.

29.6 Respuesta: iii. Según la ley de Lenz, la fuerza debe oponerse al movimiento del disco a través del campo magnético. Como ahora el material del disco se mueve hacia la derecha a través de la región del campo, la fuerza $\vec{F}$ va hacia la izquierda; es decir, en sentido opuesto al que se ilustra en la figura 29.19*b*. Para producir una fuerza magnética dirigida hacia la izquierda $\vec{F} = I\vec{L} \times \vec{B}$ sobre corrientes que se muevan a través de un campo magnético $\vec{B}$ dirigido hacia afuera del plano de la figura, las corrientes parásitas deben moverse hacia abajo en la figura; es decir, en el mismo sentido que se indica en la figura 29.19*b*.

29.7 Respuestas: *a*) ley de Faraday, *b*) ley de Ampère Un lector de tarjetas de crédito funciona induciendo corrientes en sus bobinas cuando se desliza la banda magnética de la tarjeta (véase la respuesta a la pregunta de inicio del capítulo). La ley de Ampère describe cómo las corrientes de todas clases (tanto de conducción como de desplazamiento) originan campos magnéticos.

Problema práctico

Respuesta: $v_t = 16\rho_m \rho_R g/B^2$

INDUCTANCIA





? Muchos semáforos cambian las luces cuando un automóvil se acerca a la intersección. ¿Cómo detecta el aparato la presencia del vehículo?

OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

Al estudiar este capítulo, usted aprenderá:

- Cómo una corriente que varía con el tiempo y que circula por una bobina puede inducir una fem en otra bobina no conectada.
- Cómo relacionar la fem inducida en un circuito con la razón de cambio de la corriente en el mismo circuito.
- Cómo calcular la energía almacenada en un campo magnético.
- Cómo analizar circuitos que incluyen tanto un resistor como un inductor (bobina).
- Por qué ocurren oscilaciones eléctricas en circuitos que incluyen tanto un inductor como un capacitor.
- Por qué las oscilaciones decaen en circuitos con un inductor, un resistor y un capacitor.

Tome un tramo de alambre de cobre y enróllelo alrededor de un lápiz para que forme una bobina. Si coloca esa bobina en un circuito, ¿se comporta en forma diferente que un trozo recto de alambre? Es sorprendente, pero la respuesta es *sí*. En un automóvil común impulsado con gasolina, una bobina de esta clase es la que hace posible que una batería de 12 volts proporcione miles de volts a las bujías, lo que a la vez posibilita que estas se enciendan y pongan en marcha al motor. Otras bobinas de este tipo se usan para mantener encendidas las lámparas de luz fluorescente. En ciertas ciudades se colocan grandes bobinas bajo las calles para controlar la operación de los semáforos. En todas estas aplicaciones, y muchas más, intervienen los efectos de la *inducción* que estudiamos en el capítulo 29.

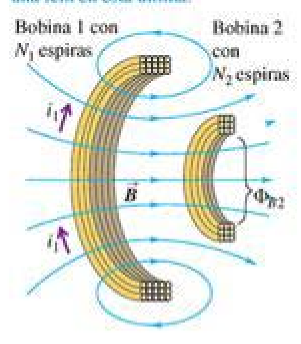
Una corriente cambiante en una bobina induce una fem en otra bobina adyacente. El acoplamiento entre ellas queda descrito por su *inductancia mutua*. Una corriente cambiante en una bobina también induce una fem en esa misma bobina, la cual recibe el nombre de *inductor*, y la relación de la corriente con la fem está descrita por la *inductancia* (también llamada *autoinductancia*) de la bobina. Si una bobina inicialmente conduce corriente, cuando esta disminuye, hay una liberación de energía; este principio se utiliza en los sistemas de encendido de los automóviles. Veremos que esta energía liberada estaba almacenada en el campo magnético generado por la corriente que inicialmente estaba en la bobina, y estudiaremos ciertas aplicaciones prácticas de la energía del campo magnético.

También analizaremos en forma somera lo que ocurre cuando un inductor forma parte de un circuito. En el capítulo 31 proseguiremos con el estudio de cómo se comportan los inductores en los circuitos de corriente alterna; en ese capítulo aprenderemos por qué los inductores tienen un papel esencial en la electrónica moderna, lo que incluye sistemas de comunicación, fuentes de suministro de energía y muchos otros dispositivos.

30.1 Inductancia mutua

En la sección 28.4 estudiamos la interacción magnética entre dos alambres que transportan corrientes *estables*; la corriente en uno de los alambres genera un campo magnético que ejerce una fuerza sobre la corriente en el otro alambre. Pero cuando hay

30.1 Una corriente i_1 en la bobina 1 da origen a un flujo magnético a través de la bobina 2.



una corriente *cambiante* en uno de los circuitos, surge una interacción adicional. Considere dos bobinas de alambre cerca una de la otra, como se ilustra en la figura 30.1. Una corriente que fluye en la bobina 1 produce un campo magnético $\vec{B}$ y, por lo tanto, un flujo magnético a través de la bobina 2. Si la corriente en la bobina 1 cambia, el flujo a través de la bobina 2 también cambia; de acuerdo con la ley de Faraday, esto induce una fem en la bobina 2. De este modo, un cambio en la corriente de un circuito puede inducir otra corriente en un segundo circuito.

Analicemos con más detalle la situación que aparece en la figura 30.1. Para representar las cantidades que varían con el tiempo, usaremos letras minúsculas; por ejemplo, una corriente variable en el tiempo se representa con i, a menudo con un subíndice para identificar el circuito. En la figura 30.1, una corriente i_1 en la bobina 1 establece un campo magnético (indicado por las líneas de color azul), y algunas de estas líneas de campo pasan a través de la bobina 2. Denotaremos con Φ_{B2} el flujo magnético a través de *cada* espira de la bobina 2, causado por la corriente i_1 en la bobina 1. (Si el flujo es diferente a través de las distintas espiras de la bobina, entonces Φ_{B2} denota el flujo *medio*). El campo magnético es proporcional a i_1, de manera que Φ_{B2} también es proporcional a i_1. Cuando i_1 cambia, Φ_{B2} cambia; este flujo cambiante induce una fem $\mathcal{E}_2$ en la bobina 2, dada por

$$\mathcal{E}_2 = -N_2\frac{d\Phi_{B2}}{dt} \qquad (30.1)$$

Podríamos representar la proporcionalidad entre Φ_{B2} e i_1 en la forma $\Phi_{B2} =$ (constante)i_1, pero, en vez de ello, es más conveniente incluir el número de espiras N_2 en la relación. Al introducir una constante de proporcionalidad M_{21}, llamada **inductancia mutua** de las dos bobinas, escribimos

$$N_2\Phi_{B2} = M_{21}i_1 \qquad (30.2)$$

donde Φ_{B2} es el flujo a través de *una sola* espira de la bobina 2. De ahí que,

$$N_2\frac{d\Phi_{B2}}{dt} = M_{21}\frac{di_1}{dt}$$

y la ecuación (30.1) se reescribe como

$$\mathcal{E}_2 = -M_{21}\frac{di_1}{dt} \qquad (30.3)$$

Es decir, un cambio en la corriente i_1 en la bobina 1 induce una fem en la bobina 2, que es directamente proporcional a la razón de cambio de i_1 (figura 30.2).

También se podría escribir la definición de la inductancia mutua, ecuación (30.2), como

$$M_{21} = \frac{N_2\Phi_{B2}}{i_1}$$

Si las bobinas están en el vacío, el flujo Φ_{B2} a través de cada espira de la bobina 2 es directamente proporcional a la corriente i_1. Entonces, la inductancia mutua M_{21} es una constante que solo depende de la geometría de las dos bobinas (el tamaño, la forma, el número de espiras y la orientación de cada una, así como la separación entre ellas). Si está presente un material magnético, M_{21} también depende de las propiedades magnéticas del material. Si el material tiene propiedades magnéticas no lineales, es decir, si la permeabilidad relativa K_m (definida en la sección 28.8) no es constante y la magnetización no es proporcional al campo magnético, entonces Φ_{B2} deja de ser directamente proporcional a i_1. En ese caso, la inductancia mutua también depende del valor de i_1. En este análisis supondremos que cualquier material magnético que esté presente tiene una K_m constante, por lo que el flujo *es* directamente proporcional a la corriente y M_{21} solo depende de la geometría.

30.2 Este cepillo dental eléctrico usa la inductancia mutua. La base contiene una bobina a la que se suministra corriente alterna desde una toma de pared. Esta corriente variable induce una fem en una bobina en el interior del cuerpo del cepillo, la cual se utiliza para recargar la batería del cepillo dental.



Podría volverse a hacer el análisis para el caso opuesto, en el que una corriente cambiante i_2 en la bobina 2 causa un flujo cambiante Φ_{B1} y una fem $\mathcal{E}_1$ en la bobina 1. Esperaríamos que la constante correspondiente M_{12} fuera diferente de M_{21} porque, en general, las dos bobinas no son idénticas y el flujo a través de ellas no es el mismo. Sin embargo, M_{12} *siempre* es igual a M_{21}, aun cuando las dos bobinas no sean simétricas. A este valor común lo llamamos simplemente inductancia mutua, y lo denotamos con

el símbolo M, sin subíndices; este valor caracteriza por completo la interacción de la fem inducida de las dos bobinas. Entonces, podemos escribir

$$\mathcal{E}_2 = -M\frac{di_1}{dt} \quad \text{y} \quad \mathcal{E}_1 = -M\frac{di_2}{dt} \qquad \text{(fems mutuamente inducidas)} \qquad (30.4)$$

donde la inductancia mutua M es

$$M = \frac{N_2\Phi_{B2}}{i_1} = \frac{N_1\Phi_{B1}}{i_2} \qquad \text{(inductancia mutua)} \qquad (30.5)$$

Los signos negativos en la ecuación (30.4) son un reflejo de la ley de Lenz. La primera ecuación dice que un cambio en la corriente en la bobina 1 provoca un cambio en el flujo magnético a través de la bobina 2, lo que induce una fem en esta última que se opone al cambio del flujo; en la segunda ecuación las dos bobinas intercambian su papel.

CUIDADO **Solo una corriente variable en el tiempo induce una fem** Observe que solo una corriente *variable en el tiempo* en una bobina puede inducir una fem y, por lo tanto, una corriente en una segunda bobina. Las ecuaciones (30.4) demuestran que la fem inducida en cada bobina es directamente proporcional a la *razón de cambio* de la corriente en la otra bobina, no al valor de la corriente. Una corriente estable en una bobina, sin importar su intensidad, no puede inducir una corriente en una bobina cercana. **!**

La unidad del SI para la inductancia mutua se llama **henry** (1 H), en honor del físico estadounidense Joseph Henry (1797-1878), uno de los descubridores de la inducción electromagnética. Según la ecuación (30.5), un henry es igual a *un weber por ampere*. Otras unidades equivalentes obtenidas con la ecuación (30.4) son *un volt-segundo por ampere*, *un ohm-segundo* o *un joule por ampere al cuadrado*:

$$1\ \text{H} = 1\ \text{Wb/A} = 1\ \text{V}\cdot\text{s/A} = 1\ \Omega\cdot\text{s} = 1\ \text{J/A}^2$$

Así como el farad es una unidad muy grande de capacitancia (véase la sección 24.1), el henry es una unidad muy grande de inductancia mutua. Como se ilustra en el ejemplo 30.1, los valores comunes de la inductancia mutua son del orden del milihenry (mH) o microhenry (μH).

Desventajas y usos de la inductancia mutua

La inductancia mutua puede ser inconveniente en los circuitos eléctricos, pues las variaciones de corriente en un circuito inducen fem no deseadas en otros circuitos cercanos. Para minimizar estos efectos, los sistemas de circuitos múltiples deben diseñarse de manera que M sea tan pequeña como sea posible; por ejemplo, dos bobinas podrían colocarse muy alejadas o con sus planos perpendiculares.

Felizmente, la inductancia mutua también tiene muchas aplicaciones útiles. Un *transformador*, usado en los circuitos de corriente alterna para subir o bajar voltajes, no tiene diferencias fundamentales con las dos bobinas que se muestran en la figura 30.1. Una corriente alterna variable en el tiempo en una bobina del transformador produce una fem variable en la otra bobina; el valor de M, que depende de la geometría de las bobinas, determina la amplitud de la fem inducida en la segunda bobina y, por lo tanto, la amplitud del voltaje de salida. (En el capítulo 31 describiremos con más detalle los transformadores, una vez que hayamos estudiado con mayor profundidad la corriente alterna).

Ejemplo 30.1 Cálculo de la inductancia mutua



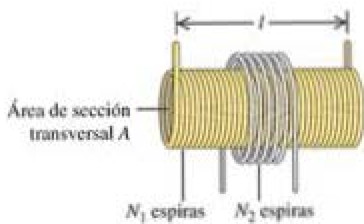
En una forma de bobina de Tesla (un generador de alto voltaje que tal vez haya visto en algún museo de ciencia), un solenoide largo con longitud l y área de sección transversal A, tiene un embobinado (o devanado) muy compacto con N_1 espiras de alambre. Una bobina con N_2 espiras lo rodea a la altura de su centro (figura 30.3). Calcule la inductancia mutua.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: En esta situación, la inductancia mutua ocurre porque la corriente en una de las bobinas establece un campo magnético que ocasiona un flujo a través de la otra. Del ejemplo 28.9

Continúa

30.3 Un solenoide largo con área de sección transversal A y N_1 espiras está rodeado a la altura de su centro por una bobina con N_2 espiras.



(sección 28.7) tenemos una expresión [ecuación (28.23)] para el campo B_1 en el centro de un solenoide (bobina 1) en términos de la corriente i_1. Esto nos permite determinar el flujo a través de la sección transversal del solenoide. Ya que no hay campo magnético fuera de un solenoide muy largo, este también es igual al flujo Φ_{B2} que pasa por cada espira de la bobina *exterior* (2). Entonces se utiliza la ecuación (30.5) en la forma $M = N_2\,\Phi_{B2}/i_1$, para determinar M.

EJECUTAR: La ecuación (28.23) se expresa en función del número de espiras por unidad de longitud, la cual para el solenoide (1) es $n_1 = N_1/L$. Entonces tenemos

$$B_1 = \mu_0 n_1 i_1 = \frac{\mu_0 N_1 i_1}{l}$$

El flujo a través de una sección transversal del solenoide es igual a $B_1 A$. Como hemos mencionado, este flujo también es igual al flujo Φ_{B2} a través de cada espira de la bobina circundante exterior, sin importar cuál sea el área de la sección transversal de la bobina exterior. De acuerdo con la ecuación (30.5), la inductancia mutua M es

$$M = \frac{N_2\Phi_{B2}}{i_1} = \frac{N_2 B_1 A}{i_1} = \frac{N_2}{i_1}\frac{\mu_0 N_1 i_1}{l}A = \frac{\mu_0 A N_1 N_2}{l}$$

EVALUAR: La inductancia mutua M de dos bobinas cualesquiera siempre es proporcional al producto N_1N_2 de sus números de espiras. Observe que la inductancia mutua M solo depende de la geometría de las dos bobinas, no de la corriente.

A continuación se presenta un ejemplo numérico para dar idea de las magnitudes. Suponga que $l = 0.50$ m, $A = 10\ \text{cm}^2 = 1.0 \times 10^{-3}\ \text{m}^2$, $N_1 = 1000$ espiras y $N_2 = 10$ espiras. Entonces,

$$M = \frac{(4\pi \times 10^{-7}\ \text{Wb/A}\cdot\text{m})(1.0 \times 10^{-3}\ \text{m}^2)(1000)(10)}{0.50\ \text{m}}$$
$$= 25 \times 10^{-6}\ \text{Wb/A} = 25 \times 10^{-6}\ \text{H} = 25\ \mu\text{H}$$

Ejemplo 30.2 Fem debida a la inductancia mutua



En el ejemplo 30.1, suponga que la corriente i_2 en la bobina circundante exterior está dada por $i_2 = (2.0 \times 10^6\ \text{A/s})t$. (Las corrientes en alambres pueden intensificarse con esta rapidez durante periodos breves). *a*) En el momento $t = 3.0\ \mu\text{s}$, ¿qué flujo magnético medio que pasa por cada espira del solenoide es causado por la corriente en la bobina exterior circundante? *b*) ¿Cuál es la fem inducida en el solenoide?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: En el ejemplo 30.1 se encontró la inductancia mutua relacionando la corriente en el solenoide con el flujo producido en la bobina exterior; para ello, se utilizó la ecuación (30.5) en la forma $M = N_2\Phi_{B2}/i_1$. En este ejemplo se da la corriente i_2 en la bobina exterior y se desea encontrar el flujo resultante Φ_1 en el solenoide. La inductancia mutua es la *misma* en cualquier caso y tenemos $M = 25\ \mu\text{H}$, del ejemplo 30.1. Se aplica la ecuación (30.5) en la forma $M = N_1\Phi_{B1}/i_2$ para determinar el flujo medio Φ_{B1} en cada espira del solenoide causado por la corriente i_2 en la bobina exterior. Después, se emplea la ecuación (30.4) para determinar la fem inducida en el solenoide por la variación con respecto al tiempo de la corriente i_2.

EJECUTAR: *a*) En el momento $t = 3.0\ \mu\text{s} = 3.0 \times 10^{-6}$ s, la corriente en la bobina exterior es $i_2 = (2.0 \times 10^6\ \text{A/s})(3.0 \times 10^{-6}\ \text{s}) = 6.0$ A. De la ecuación (30.5) se despeja el flujo Φ_{B1} que pasa a través de cada espira del solenoide (bobina 1):

$$\Phi_{B1} = \frac{Mi_2}{N_1} = \frac{(25 \times 10^{-6}\ \text{H})(6.0\ \text{A})}{1000} = 1.5 \times 10^{-7}\ \text{Wb}$$

Se hace énfasis en que este es un valor *medio*; el flujo puede variar en forma considerable entre el centro y los extremos del solenoide.

b) Se nos da $i_2 = (2.0 \times 10^6\ \text{A/s})t$, así que $di_2/dt = 2.0 \times 10^6$ A/s; entonces, a partir de la ecuación (30.4), la fem inducida en el solenoide es

$$\mathcal{E}_1 = -M\frac{di_2}{dt} = -(25 \times 10^{-6}\ \text{H})(2.0 \times 10^6\ \text{A/s}) = -50\ \text{V}$$

EVALUAR: Esta es una fem inducida sustancial, en respuesta a una razón de cambio muy rápida de la corriente. Al operar una bobina de Tesla, hay una corriente alterna de alta frecuencia y no una corriente continua en aumento como la del ejemplo; también di_2/dt y $\mathcal{E}_1$ alternan, con amplitudes que llegan a ser miles de veces más grandes que las de este ejemplo.

Evalúe su comprensión de la sección 30.1 Considere la bobina de Tesla descrita en el ejemplo 30.1. Si se construyera el solenoide con el doble de alambre, de manera que tuviera dos veces más espiras y fuera dos veces más largo, ¿qué tan grande sería la inductancia mutua? **i.** M sería cuatro veces mayor; **ii.** M sería el doble; **iii.** M permanecería sin cambio; **iv.** M sería de grande; **v.** M sería de grande. ❙



30.2 Autoinductancia e inductores

En nuestro análisis de la inductancia mutua consideramos dos circuitos separados e independientes: una corriente en un circuito crea un campo magnético que da origen a un flujo que pasa por el segundo circuito. Si cambia la corriente en el primer circuito, el flujo que pasa por el segundo circuito cambia y se induce una fem en este último.

Ocurre un efecto importante relacionado incluso cuando se considera un *solo* circuito aislado. Cuando en el circuito está presente una corriente, se establece un campo magnético que crea un flujo magnético a través del *mismo* circuito; este flujo se altera cuando la corriente cambia. Así, cualquier circuito que conduzca una corriente variable tiene una fem inducida en él por la variación en *su propio* campo magnético. Esa clase de fem se denomina **fem autoinducida**. Según la ley de Lenz, una fem autoinducida siempre se opone al cambio en la corriente que causó la fem, y de ese modo hace más difícil que haya variaciones en la corriente. Por esta razón, las fem autoinducidas son de gran importancia siempre que hay una corriente variable.

Puede haber fem autoinducidas en *cualquier* circuito, ya que siempre hay algún flujo magnético a través de la espira cerrada de un circuito que conduce corriente. Pero el efecto se intensifica considerablemente si el circuito incluye una bobina con N espiras de alambre (figura 30.4). Como resultado de la corriente i, hay un flujo magnético medio Φ_B a través de cada espira de la bobina. En analogía con la ecuación (30.5), definimos la **autoinductancia** L del circuito como

$$L = \frac{N\Phi_B}{i} \qquad \text{(autoinductancia)} \qquad (30.6)$$

30.4 La corriente i en el circuito crea un campo magnético $\vec{B}$ en la bobina y, por lo tanto, un flujo a través de esta.



Cuando no hay riesgo de confusión con la inductancia mutua, la autoinductancia se llama simplemente **inductancia**. Al comparar las ecuaciones (30.5) y (30.6), se observa que las unidades de autoinductancia son las mismas que las de la inductancia mutua; la unidad del SI para la autoinductancia es el henry.

Si la corriente i en el circuito cambia, también lo hace el flujo Φ_B; al reacomodar la ecuación (30.6) y obtener la derivada con respecto al tiempo, la relación entre las razones de cambio es

$$N\frac{d\Phi_B}{dt} = L\frac{di}{dt}$$

De acuerdo con la ley de Faraday para una bobina con N espiras, ecuación (29.4), la fem autoinducida es $\mathcal{E} = -N\, d\Phi_B/dt$, por lo que se deduce que

$$\mathcal{E} = -L\frac{di}{dt} \qquad \text{(fem autoinducida)} \qquad (30.7)$$

El signo menos en la ecuación (30.7) es un reflejo de la ley de Lenz; nos dice que la fem autoinducida en un circuito se opone a cualquier cambio en la corriente en ese circuito. (Más adelante, en esta sección, estudiaremos con más profundidad el significado de este signo menos).

La ecuación (30.7) también establece que la autoinductancia de un circuito es la magnitud de la fem autoinducida por unidad de razón de cambio de la corriente. Esta relación hace posible medir una autoinductancia desconocida en forma relativamente sencilla: cambie la corriente en el circuito con una razón di/dt conocida, mida la fem inducida y obtenga la razón para determinar el valor de L.

Inductores como elementos de un circuito

Un elemento de circuito diseñado para tener una inductancia particular se llama **inductor**, o *bobina de autoinducción*. El símbolo habitual para un inductor en un circuito es

Al igual que los resistores y capacitores, los inductores se encuentran entre los elementos indispensables de los circuitos electrónicos modernos. Su finalidad es oponerse a cualquier variación en la corriente a través del circuito. Un inductor en un circuito de corriente directa ayuda a mantener una corriente estable a pesar de las fluctuaciones en la fem aplicada; en un circuito de corriente alterna, un inductor tiende a suprimir las variaciones de la corriente que ocurran más rápido de lo deseado. En este capítulo y en el siguiente estudiaremos con más detalle el comportamiento y las aplicaciones de los inductores en los circuitos.

Para entender el comportamiento de los circuitos que contienen inductores, es necesario desarrollar un principio general análogo a la regla de Kirchhoff de las mallas

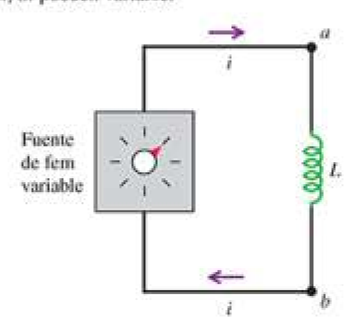
Aplicación Inductores, transmisión de energía y relámpagos
Si un relámpago impacta parte de un sistema de transmisión de energía eléctrica, se produce un aumento repentino del voltaje que puede dañar los componentes del sistema, así como cualquier elemento conectado a dicho sistema (por ejemplo, aparatos electrodomésticos). Para minimizar estos efectos, se han incorporado grandes inductores en el sistema de transmisión. Estos utilizan el principio de que un inductor se opone y suprime cualquier cambio rápido en la corriente.



(que estudiamos en la sección 26.2). Para aplicar esa regla se recorre una espira conductora midiendo las diferencias de potencial a través de elementos sucesivos del circuito conforme se avanza. La suma algebraica de estas diferencias alrededor de cualquier espira cerrada debe ser igual a cero porque el campo eléctrico producido por las cargas distribuidas alrededor del circuito es *conservativo*. En la sección 29.7 denotamos un campo conservativo con $\vec{E}_c$.

Cuando en el circuito hay un inductor, la situación cambia. El campo eléctrico inducido magnéticamente dentro de las bobinas del inductor *no* es conservativo; igual que en la sección 29.7, lo denotaremos con $\vec{E}_n$. Necesitamos pensar con mucho cuidado sobre los papeles que tienen los diferentes campos. Supongamos que tratamos con un inductor cuyas bobinas tienen resistencia insignificante. Entonces, para hacer que una carga se desplace a través de las bobinas, se requiere un campo eléctrico tan pequeño que sea despreciable, por lo que el campo eléctrico *total* $\vec{E}_c + \vec{E}_n$ dentro de las bobinas debe ser igual a cero, aun cuando ninguno de los campos individuales valga cero. Como $\vec{E}_c$ es diferente de cero, sabemos que debe haber acumulaciones de carga en las terminales del inductor y las superficies de sus conductores para que se produzca este campo.

30.5 Circuito que contiene una fuente de fem y un inductor. La fuente es variable, por lo que la corriente i y su razón de cambio di/dt pueden variarse.



Considere el circuito que se ilustra en la figura 30.5; la caja contiene una combinación de baterías y resistores variables que nos permiten controlar la corriente i en el circuito. De acuerdo con la ley de Faraday, ecuación (29.10), la integral de línea de $\vec{E}_n$ alrededor del circuito es el negativo de la razón de cambio del flujo a través del circuito, que a la vez está dada por la ecuación (30.7). Al combinar estas dos relaciones, se obtiene

$$\oint \vec{E}_n \cdot d\vec{l} = -L\frac{di}{dt}$$

donde se integra en el sentido horario alrededor de la espira (el sentido supuesto para la corriente). Pero $\vec{E}_n$ es diferente de cero solo dentro del inductor. Por lo tanto, la integral de $\vec{E}_n$ alrededor de toda la espira se reemplaza por su integral solo de a a b a través del inductor; es decir,

$$\int_a^b \vec{E}_n \cdot d\vec{l} = -L\frac{di}{dt}$$

A continuación, como $\vec{E}_c + \vec{E}_n = \mathbf{0}$ en cada punto dentro de las bobinas del inductor, esta ecuación se rescribe como

$$\int_a^b \vec{E}_c \cdot d\vec{l} = L\frac{di}{dt}$$

Pero esta integral es simplemente el potencial V_{ab} del punto a con respecto a b, por lo que al final se obtiene

$$V_{ab} = V_a - V_b = L\frac{di}{dt} \qquad (30.8)$$

Se concluye que hay una genuina diferencia de potencial entre las terminales del inductor, asociada con las fuerzas conservativas electrostáticas, a pesar del hecho de que el campo eléctrico asociado con el efecto de inducción magnética es no conservativo. Así, está justificado usar la regla de Kirchhoff de las mallas para analizar circuitos que incluyan inductores. La ecuación (30.8) da la diferencia de potencial a través de un inductor en un circuito.

CUIDADO **La fem autoinducida se opone a los cambios en la corriente** Observe que la fem autoinducida no se opone a la corriente i en sí, sino a cualquier *cambio* (di/dt) en la corriente. Así, el comportamiento de un inductor en un circuito es muy diferente del de un resistor. En la figura 30.6 se comparan los comportamientos de un resistor y un inductor, y se resumen las relaciones de signos.

30.6 *a*) La diferencia de potencial a través de un resistor depende de la corriente. *b*), *c*) y *d*) La diferencia de potencial a través de un inductor depende de la razón de cambio de la corriente.

a) Resistor con corriente i que fluye de a a b: el potencial disminuye de a a b.



b) Inductor con corriente *constante* i que fluye de a a b: no hay diferencia de potencial.

i constante: $di/dt = 0$

$V_{ab} = L\frac{di}{dt} = 0$

$\mathcal{E} = 0$

c) Inductor con corriente i *creciente* que fluye de a a b: el potencial disminuye de a a b.

i creciente: $di/dt > 0$

$V_{ab} = L\frac{di}{dt} > 0$

d) Inductor con corriente i *decreciente* que fluye de a a b: el potencial se incrementa a a b.

i decreciente: $di/dt < 0$

$V_{ab} = L\frac{di}{dt} < 0$

Aplicaciones de los inductores

Como un inductor se opone a los cambios en la corriente, desempeña un papel importante en los equipos que emplean luz fluorescente (figura 30.7). En estos dispositivos,

la corriente fluye de los conductores al gas que llena el tubo, con lo que el gas se ioniza y brilla. Sin embargo, un gas ionizado o *plasma* es un conductor marcadamente no óhmico: cuanto mayor es la corriente, tanto más alto es el grado de ionización que alcanza el plasma y menor su resistencia. Si se aplicara al plasma un voltaje suficientemente grande, la corriente aumentaría tanto que dañaría los circuitos afuera del tubo fluorescente. Para evitar este problema, se conecta un inductor o una *balastra* o un *balastro* (término que es muy conocido en electricidad) en serie con el tubo fluorescente, con la finalidad de impedir que la corriente aumente más de lo debido.

La balastra también hace posible que el tubo fluorescente funcione con el voltaje alterno provisto por el cableado de una vivienda. Este voltaje oscila en forma sinusoidal con una frecuencia de 60 Hz, por lo que vale cero momentáneamente 120 veces por segundo. Si no hubiera una balastra, el plasma en el tubo fluorescente se desionizaría con rapidez cuando el voltaje se redujera a cero, y el tubo se apagaría. Con la balastra, una fem autoinducida sostiene la corriente y mantiene encendido el tubo. Las balastras también se emplean con este propósito en el alumbrado público (las luminarias obtienen su luz de un vapor brillante de mercurio o átomos de sodio) y en las luces de neón. (En las lámparas fluorescentes compactas, la balastra se sustituye por un esquema más complicado de regulación de corriente, que utiliza transistores, los cuales se estudiarán en el capítulo 42).

30.7 Estos tubos de luz fluorescente están conectados en serie con un inductor, o balastra, que ayuda a mantener el flujo de corriente a través de los tubos.



La autoinductancia de un circuito depende de su tamaño, forma y número de espiras. Para N espiras muy cercanas, siempre es proporcional a N^2. También depende de las propiedades magnéticas del material encerrado por el circuito. En los ejemplos que siguen se supondrá que el circuito solo encierra vacío (o aire, el cual, desde el punto de vista del magnetismo es en esencia un vacío). Sin embargo, si el flujo está concentrado en una región que contenga un material magnético con permeabilidad μ, en la expresión para B hay que sustituir μ_0 (la permeabilidad del vacío) por $\mu = K_m\mu_0$, como se vio en la sección 28.8. Si el material es diamagnético o paramagnético, esta sustitución hace muy poca diferencia, puesto que K_m tiene un valor muy cercano a 1. Sin embargo, si el material es *ferromagnético*, la diferencia tiene importancia crucial. Un solenoide embobinado en torno a un núcleo de hierro forjado con $K_m = 5000$ tiene una inductancia aproximadamente 5000 veces más grande que la del mismo solenoide con un núcleo de aire. Los inductores de núcleo ferromagnético se usan mucho en varias aplicaciones de electrónica y generación de electricidad.

Una complicación más es que con los materiales ferromagnéticos, la magnetización en general no es una función lineal de la corriente magnetizadora, en especial cuando está próxima la saturación. Como resultado, la inductancia no es constante, sino que depende de la corriente en forma bastante complicada. En nuestro análisis ignoraremos esta dificultad y supondremos siempre que la inductancia es constante. Esta es una suposición razonable aun para un material ferromagnético si la magnetización permanece muy por debajo del nivel de saturación.

Como los automóviles contienen acero, un material ferromagnético, conducir un vehículo sobre una bobina causa un incremento apreciable en la inductancia de esta. Tal efecto se aprovecha en los sensores de los semáforos, que usan una bobina grande portadora de corriente, la cual está enterrada bajo la superficie del pavimento cerca de una intersección de avenidas. Los circuitos conectados a la bobina detectan el cambio de inductancia cuando un vehículo pasa por encima, y cuando un número programado de autos ha pasado sobre la bobina, la luz del semáforo cambia a verde para permitir que crucen la intersección.

Ejemplo 30.3 Cálculo de la autoinductancia

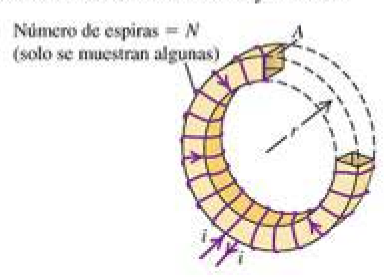


Un solenoide toroidal con área de sección transversal A y radio medio r tiene un embobinado compacto con N espiras de alambre alrededor de un núcleo no magnético (figura 30.8). Determine su autoinductancia. Suponga que B es uniforme en toda la sección transversal (es decir, ignore la variación de B con la distancia a partir del eje del toroide).

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: La variable que buscamos es la autoinductancia L del solenoide toroidal. Podemos determinar L usando la ecuación (30.6), que requiere conocer el flujo Φ_B a través de cada espira y

Continúa



30.8 Determinación de la autoinductancia de un solenoide toroidal con embobinado compacto. Por claridad, solo se ilustran algunas espiras del embobinado. Se ha hecho un corte en el toroide para mostrar el área de la sección transversal A y el radio r.

la corriente i en la bobina. Para esto, se usan los resultados del ejemplo 28.10 (sección 28.7) en el que se determinó el campo magnético en el interior de un solenoide toroidal como una función de la corriente.

EJECUTAR: De acuerdo con la ecuación (30.6), la autoinductancia es $L = N\Phi_B/i$. Del ejemplo 28.10, la magnitud del campo a una distancia r del eje del toroide es $B = \mu_0 Ni/2\pi r$. Si suponemos que el campo tiene esta magnitud en toda el área A de la sección transversal, entonces

$$\Phi_B = BA = \frac{\mu_0 NiA}{2\pi r}$$

El flujo magnético Φ_B es el mismo a través de cada espira, y la autoinductancia L es

$$L = \frac{N\Phi_B}{i} = \frac{\mu_0 N^2 A}{2\pi r} \quad \text{(autoinductancia de un solenoide toroidal)}$$

EVALUAR: Suponga que $N = 200$ espiras, $A = 5.0\text{ cm}^2 = 5.0 \times 10^{-4}\text{m}^2$, y $r = 0.10$ m; entonces

$$L = \frac{(4\pi \times 10^{-7}\text{ Wb/A}\cdot\text{m})(200)^2(5.0 \times 10^{-4}\text{ m}^2)}{2\pi(0.10\text{ m})}$$
$$= 40 \times 10^{-6}\text{ H} = 40\ \mu\text{H}$$

Ejemplo 30.4 Cálculo de la fem autoinducida



Si la corriente en el solenoide toroidal del ejemplo 30.3 se incrementa de manera uniforme de 0 a 6.0 A en 3.0 μs, calcule la magnitud y el sentido de la fem autoinducida.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Se conocen el valor de L, la autoinductancia y di/dt, la razón de cambio de la corriente del solenoide. Se encuentra la magnitud de la fem autoinducida $\mathcal{E}$ mediante la ecuación (30.7) y su dirección usando la ley de Lenz.

EJECUTAR: Tenemos $di/dt = (6.0\text{ A})/(3.0 \times 10^{-6}\text{ s}) = 2.0 \times 10^6\text{ A/s}$. De acuerdo con la ecuación (30.7), la magnitud de la fem inducida es

$$|\mathcal{E}| = L\left|\frac{di}{dt}\right| = (40 \times 10^{-6}\text{ H})(2.0 \times 10^6\text{ A/s}) = 80\text{ V}$$

La corriente va en aumento por lo que, de acuerdo con la ley de Lenz, el sentido de la fem es opuesto al de la corriente. Esto corresponde a la situación de la figura 30.6*c*; el sentido de la fem es de b a a, como una batería con a en la terminal + y b en la terminal −, y tiende a oponerse al incremento de la corriente que proviene del circuito externo.

EVALUAR: Este ejemplo demuestra que incluso una inductancia pequeña L puede dar lugar a una fem inducida sustancial si la corriente cambia con rapidez.

Evalúe su comprensión de la sección 30.2 Ordene los siguientes inductores según la diferencia de potencial v_{ab}, del más positivo al más negativo. En cada caso, el inductor tiene una resistencia igual a cero y la corriente fluye a través del inductor del punto a al b. **i.** La corriente a través de un inductor de 2.0 μH se incrementa de 1.0 a 2.0 A en 0.50 s; **ii.** la corriente a través de un inductor de 4.0 μH disminuye de 3.0 A a 0 en 2.0 s; **iii.** la corriente a través de un inductor de 1.0 μH permanece constante e igual a 4.0 A; **iv.** la corriente a través de un inductor de 1.0 μH se incrementa de 0 a 4.0 A en 0.25 s. MP

30.3 Energía del campo magnético

El establecimiento de una corriente en un inductor requiere una aportación de energía, y un inductor que conduce corriente contiene energía almacenada. Veamos cómo sucede esto. En la figura 30.5, una corriente creciente i en el inductor causa una fem $\mathcal{E}$ entre sus terminales, y una diferencia de potencial correspondiente V_{ab} entre las terminales de la fuente, con el punto a a mayor potencial que el b. Así, la fuente debe estar agregando energía al inductor, y la potencia instantánea P (la razón de transferencia de energía al inductor) es $P = V_{ab}i$.

Energía almacenada en un inductor

Podemos calcular la entrada total de energía U necesaria para establecer una corriente final I en un inductor con inductancia L si la corriente inicial es igual a cero. Suponemos que el inductor tiene una resistencia igual a cero, por lo que dentro del induc-

tor no se disipa energía. Sea i la corriente en cierto instante y su razón de cambio di/dt; la corriente va en aumento, de manera que $di/dt > 0$. El voltaje entre las terminales a y b del inductor en ese instante es $V_{ab} = L\,di/dt$, y la razón P a la que se entrega energía al inductor (igual a la potencia instantánea suministrada por la fuente externa) es

$$P = V_{ab}i = Li\frac{di}{dt}$$

La energía dU suministrada al inductor durante un intervalo de tiempo infinitesimal dt es $dU = P\,dt$, por lo que

$$dU = Li\,di$$

La energía total U suministrada mientras la corriente aumenta de cero a un valor final I es

$$U = L\int_0^I i\,di = \tfrac{1}{2}LI^2 \qquad \text{(energía almacenada en un inductor)} \qquad (30.9)$$

Una vez que la corriente ha alcanzado su valor final estable I, $di/dt = 0$, y no se alimenta más energía al inductor. Cuando no hay corriente, la energía almacenada U es igual a cero; cuando la corriente es I, la energía es $\frac{1}{2}LI^2$.

Cuando la corriente disminuye de I a cero, el inductor actúa como fuente que suministra una cantidad total de energía igual a $\frac{1}{2}LI^2$ al circuito externo. Si interrumpimos bruscamente el circuito abriendo un interruptor o desconectando violentamente una clavija de una toma de corriente de pared, la corriente disminuye con mucha rapidez, la fem inducida es muy grande y la energía podría disiparse en forma de un arco entre los contactos del interruptor. Esta fem elevada es la analogía eléctrica de la gran fuerza que ejerce un automóvil en movimiento que se estrella contra un muro sólido y se detiene en forma súbita.

CUIDADO **Energía, resistores e inductores** Es importante no confundir el comportamiento de resistores e inductores en lo que respecta a la energía (figura 30.9). La energía fluye hacia un resistor siempre que una corriente, ya sea estable o variable, pasa a través de él; esta energía se disipa en forma de calor. En contraste, la energía fluye hacia un inductor ideal con resistencia igual a cero, solo cuando la corriente en este último se *incrementa*. Esta energía no se disipa, sino que se almacena en el inductor y se libera cuando la corriente *disminuye*. Cuando una corriente estable fluye a través de un inductor, no entra ni sale energía. **!**

30.9 Resistor en un dispositivo en el que se disipa energía de manera irreversible. En contraste, en un inductor portador de corriente, la energía almacenada se recupera cuando la corriente disminuye a cero.

Resistor con corriente i: la energía se *disipa*.



Inductor con corriente i: la energía se *almacena*.



Densidad de la energía magnética

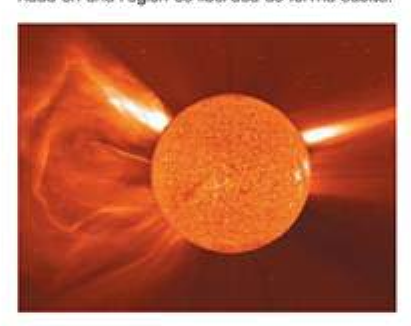
La energía en un inductor en realidad se almacena en el campo magnético dentro de la bobina, al igual que la energía de un capacitor lo hace en el campo eléctrico entre sus placas. Es posible deducir relaciones para la energía del campo magnético análogas a las que obtuvimos para la energía del campo eléctrico en la sección 24.3 [ecuaciones (24.9) y (24.11)]. Nos centraremos en un caso sencillo: el del solenoide toroidal ideal. Este sistema tiene la ventaja de que su campo magnético se encuentra confinado por completo en una región finita del espacio en el interior de su núcleo. Como en el ejemplo 30.3, suponemos que el área de la sección transversal A es suficientemente pequeña como para suponer que el campo magnético es uniforme en toda el área. El volumen V encerrado por el solenoide toroidal es aproximadamente igual a la circunferencia $2\pi r$ multiplicada por el área A: $V = 2\pi rA$. Según el ejemplo 30.3, la autoinductancia del solenoide toroidal con vacío dentro de sus bobinas es:

$$L = \frac{\mu_0 N^2 A}{2\pi r}$$

De acuerdo con la ecuación (30.9), la energía U almacenada en el solenoide toroidal cuando la corriente es I se obtiene así:

$$U = \tfrac{1}{2}LI^2 = \tfrac{1}{2}\frac{\mu_0 N^2 A}{2\pi r}I^2$$

Aplicación Una erupción magnética en el Sol
Esta composición de dos imágenes del Sol muestra una eyección de masa coronal, un acontecimiento impresionante en el que unos 10^{12} kg (mil millones de toneladas) de material de la atmósfera exterior del Sol es expulsado hacia el espacio a una velocidad de 500 km/s o más rápido. Estas expulsiones ocurren a intervalos de unas cuantas horas o algunos días. Las erupciones inmensas son alimentadas por la energía almacenada en el campo magnético del Sol. A diferencia del campo magnético de la Tierra relativamente estable, el campo solar está cambiando de manera constante, y lo forman con frecuencia regiones de campo inusualmente fuerte (por lo tanto, la densidad de energía magnética es inusualmente alta). Una eyección de masa coronal se produce cuando la energía almacenada en una región es liberada de forma súbita.



El campo magnético y, por lo tanto, esta energía se localizan en el volumen $V = 2\pi rA$ encerrado por los embobinados. La energía *por unidad de volumen*, o *densidad de energía magnética*, es $u = U/V$:

$$u = \frac{U}{2\pi rA} = \tfrac{1}{2}\mu_0 \frac{N^2I^2}{(2\pi r)^2}$$

Esto se puede expresar en términos de la magnitud B del campo magnético dentro del solenoide toroidal. De acuerdo con la ecuación (28.24) en el ejemplo 28.10 (sección 28.7), esto es

$$B = \frac{\mu_0 NI}{2\pi r}$$

por lo tanto,

$$\frac{N^2I^2}{(2\pi r)^2} = \frac{B^2}{\mu_0^2}$$

Cuando se sustituye esto en la ecuación anterior de u, se encuentra finalmente la expresión para la **densidad de energía magnética** en el vacío:

$$u = \frac{B^2}{2\mu_0} \quad \text{(densidad de energía magnética en el vacío)} \qquad (30.10)$$

Esta es la analogía magnética de la energía por unidad de volumen en un campo *eléctrico* en el vacío, $u = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2$, que se obtuvo en la sección 24.3. Como un ejemplo, la densidad de energía en el campo magnético de 1.5 T de un escáner de IRM (véase la sección 27.7) es $u = B^2/2\mu_0 = (1.5\text{ T})^2/(2 \times 4\pi \times 10^{-7}\text{ T}\cdot\text{m/A}) = 9.0 \times 10^5\text{ J/m}^3$.

Cuando el material dentro del toroide no es un vacío, sino un material con permeabilidad magnética (constante) $\mu = K_m\mu_0$, se sustituye μ_0 por μ en la ecuación (30.10). Así, la energía por unidad de volumen en el campo magnético es

$$u = \frac{B^2}{2\mu} \quad \text{(densidad de energía magnética en un material)} \qquad (30.11)$$

Aunque hemos obtenido la ecuación (30.11) solo para una situación especial, resulta ser la expresión correcta para la energía por unidad de volumen asociada con *cualquier* configuración de campo magnético en un material con permeabilidad constante. Para el vacío, la ecuación (30.11) se reduce a la (30.10). En el capítulo 32 usaremos las expresiones para la energía de los campos eléctricos y magnéticos, cuando estudiemos la energía asociada con las ondas electromagnéticas.

La energía de campo magnético desempeña un papel importante en los sistemas de encendido de los automóviles de gasolina. Una bobina primaria de alrededor de 250 espiras está conectada a la batería del vehículo y produce un campo magnético intenso. Esta bobina está rodeada por una bobina secundaria con cerca de 25,000 espiras de alambre muy delgado. Cuando es el momento de encender la bujía (véase la figura 20.5 en la sección 20.3), la corriente hacia la bobina primaria se interrumpe, el campo magnético disminuye a cero con rapidez y en la bobina secundaria se induce una fem de decenas de miles de volts. La energía almacenada en el campo magnético se convierte en una potente pulsación de corriente que recorre la bobina secundaria hacia la bujía, donde genera la chispa que enciende la mezcla de combustible con aire en los cilindros del motor (figura 30.10).

30.10 La energía requerida para encender la bujía de un automóvil proviene de la energía del campo magnético almacenada en la bobina de encendido.



Ejemplo 30.5 Almacenamiento de energía en un inductor



A la industria de generación de energía eléctrica le agradaría encontrar formas eficientes de almacenar los sobrantes de energía producida durante las horas de escasa demanda, para satisfacer con más facilidad los requerimientos de consumo de sus clientes en los momentos de mucha demanda. ¿Se podría utilizar un enorme inductor? ¿Qué inductancia se necesitaría para almacenar 1.00 kW · h de energía en una bobina que conduzca una corriente de 200 A?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Se conoce la cantidad requerida de energía almacenada, U, y la corriente, $I = 200$ A. Se despeja la autoinductancia L en la ecuación (30.9).

EJECUTAR: Se tiene $I = 200$ A y $U = 1.00$ kW·h $= (1.00 \times 10^3$ W) (3600 s) $= 3.60 \times 10^6$ J. Se despeja L en la ecuación (30.9) y se obtiene:

$$L = \frac{2U}{I^2} = \frac{2(3.60 \times 10^6 \text{ J})}{(200 \text{ A})^2} = 180 \text{ H}$$

EVALUAR: La inductancia requerida es más de un millón de veces mayor que la autoinductancia del solenoide toroidal del ejemplo 30.3. Los alambres convencionales que tendrían que conducir 200 A tendrían que ser de un diámetro grande para mantener baja la resistencia y evitar pérdidas inaceptables de energía debidas al calentamiento I^2R. Como resultado, un inductor de 180 H que usara alambre convencional sería muy grande (del tamaño de una habitación). Un inductor superconductor sería mucho más pequeño, ya que la resistencia de un superconductor es igual a cero y podrían usarse alambres mucho más delgados; una desventaja sería que estos tendrían que mantenerse a baja temperatura para que fueran superconductores, y habría que usar energía para conservar la baja temperatura. Este esquema es impráctico con la tecnología existente.

Evalúe su comprensión de la sección 30.3 La corriente en un solenoide invierte su sentido al tiempo que conserva su magnitud. *a)* ¿Esto modifica el campo magnético dentro del solenoide? *b)* ¿Esto modifica la densidad de energía magnética en el solenoide? ❙

30.4 Circuito *R-L*



ActivPhysics 14.1: The *RL* Circuit

Veamos algunos ejemplos del comportamiento de los circuitos de un inductor. Algo ya está claro: un inductor en un circuito hace difícil que ocurran cambios rápidos en la corriente, en virtud de los efectos de la fem autoinducida. La ecuación (30.7) revela que cuanto mayor es la razón de cambio de la corriente, di/dt, mayor es la fem autoinducida y mayor la diferencia de potencial entre las terminales del inductor. Esta ecuación, junto con las reglas de Kirchhoff (véase la sección 26.2), nos da los principios necesarios para analizar los circuitos que contienen inductores.

Estrategia para resolver problemas 30.1 Inductores en circuitos



IDENTIFICAR *los conceptos relevantes:* Un inductor tan solo es otro elemento de circuito, al igual que una fuente de fem, un resistor o un capacitor. Una diferencia clave es que cuando en un circuito se incluye un inductor, todos los voltajes, las corrientes y las cargas del capacitor son, por lo general, funciones del tiempo, no constantes como lo han sido en la mayoría de los análisis de circuitos anteriores. Pero las reglas de Kirchhoff (véase la sección 26.2) siguen siendo válidas. Cuando los voltajes y las corrientes varían con el tiempo, las leyes de Kirchhoff se cumplen en cada instante del tiempo.

PLANTEAR *el problema* de acuerdo con los siguientes pasos:

1. Siga el mismo procedimiento descrito en la Estrategia para resolver problemas 26.2 (sección 26.2). Dibuje un diagrama grande del circuito e indique todas las cantidades, tanto las conocidas como las desconocidas. Aplique a continuación la regla de los nodos para expresar las corrientes en términos del menor número de cantidades posible.
2. Determine cuáles son las incógnitas.

EJECUTAR *la solución* como sigue:

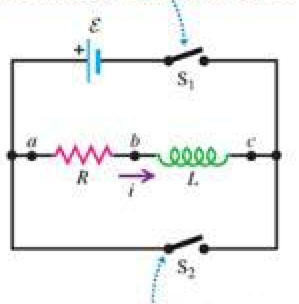
1. Al igual que en la Estrategia para resolver problemas 26.2, aplique la regla de Kirchhoff de las mallas a cada espira presente en el circuito.
2. Repase las reglas expuestas en la Estrategia para resolver problemas 26.2. Para obtener el signo correcto de una diferencia de potencial entre las terminales de un inductor, recuerde la ley de Lenz y la regla de los signos descrita en la sección 30.2 junto con la ecuación (30.7) y la figura 30.6. En la regla de Kirchhoff de las mallas, cuando se pasa a través de un inductor en el *mismo* sentido que se supuso para la corriente, se encuentra una *caída* de voltaje igual a $L\,di/dt$, por lo que el término correspondiente en la ecuación de las espiras es $-L\,di/dt$. Cuando se va a través de un inductor en el sentido *opuesto* al que se supuso para la corriente, la diferencia de potencial se invierte y el término por usar en la ecuación de las mallas $+L\,di/dt$.
3. Se despejan las incógnitas.

EVALUAR *la respuesta:* Compruebe que su respuesta sea congruente con el comportamiento normal de los inductores. De acuerdo con la ley de Lenz, si la corriente a través de un inductor está cambiando, su respuesta debe indicar que la diferencia de potencial entre las terminales del inductor se opone al cambio.

Crecimiento de la corriente en un circuito *R-L*

A partir del análisis del circuito que se ilustra en la figura 30.11, podemos aprender varias cosas fundamentales acerca del comportamiento de un inductor. Un circuito que incluye tanto un resistor como un inductor, y tal vez una fuente de fem, se llama **circuito *R-L***. El inductor ayuda a impedir los cambios rápidos en una corriente, lo que puede ser útil si se requiere una corriente estable y la fuente externa tiene una fem fluctuante.

30.11 Un circuito *R-L*.



El resistor *R* puede ser un elemento de circuito individual, o ser la resistencia de los embobinados del inductor; todo inductor de la vida real tiene cierta resistencia a menos que esté hecho de alambre superconductor. Al cerrar el interruptor S_1, se conecta la combinación *R-L* a una fuente con fem constante $\mathcal{E}$. (Suponemos que la fuente tiene resistencia interna igual a cero, por lo que el voltaje terminal es igual a la fem).

Suponga que, en un principio, ambos interruptores están abiertos, y luego, en cierto momento inicial $t = 0$ se cierra el interruptor S_1. La corriente no puede cambiar súbitamente de cero a algún valor final porque di/dt y la fem inducida en el inductor serían infinitas. En vez de ello, la corriente comienza a crecer con una razón que solo depende del valor de *L* en el circuito.

Sea *i* la corriente en cierto momento *t* después de que se cerró el interruptor S_1, y sea di/dt su razón de cambio en ese instante. La diferencia de potencial v_{ab} a través del resistor en ese momento es

$$v_{ab} = iR$$

y la diferencia de potencial v_{bc} a través del inductor es

$$v_{bc} = L\frac{di}{dt}$$

Observe que si la corriente va en el sentido que se indica en la figura 30.11 y en aumento, entonces tanto v_{ab} como v_{bc} son positivas; *a* está a un potencial mayor que *b*, que a la vez está a un potencial más elevado que *c*. (Compare las figuras 30.6*a* y 30.6*c*). Aplicamos la regla de Kirchhoff de las mallas, comenzando en la terminal negativa y avanzando en sentido antihorario alrededor de la espira:

$$\mathcal{E} - iR - L\frac{di}{dt} = 0 \tag{30.12}$$

Se despeja di/dt y se encuentra que la razón de aumento de la corriente es

$$\frac{di}{dt} = \frac{\mathcal{E} - iR}{L} = \frac{\mathcal{E}}{L} - \frac{R}{L}i \tag{30.13}$$

En el instante en que el interruptor S_1 se cierra por primera vez, $i = 0$ y la caída del potencial a través de *R* es igual a cero. La razón de cambio inicial de la corriente es

$$\left(\frac{di}{dt}\right)_{\text{inicial}} = \frac{\mathcal{E}}{L}$$

Como se esperaba, cuanto mayor es la inductancia *L*, con más lentitud aumenta la corriente.

Conforme aumenta la corriente, el término $(R/L)i$ en la ecuación (30.13) también aumenta, y la *razón* de incremento de la corriente dada por la ecuación (30.13) se hace cada vez más pequeña. Esto significa que la corriente se acerca a un valor final *I* de estado estable. Cuando la corriente alcanza ese valor, su razón de incremento es igual a cero. Entonces, la ecuación (30.13) se convierte en:

$$\left(\frac{di}{dt}\right)_{\text{final}} = 0 = \frac{\mathcal{E}}{L} - \frac{R}{L}I \quad \text{e}$$

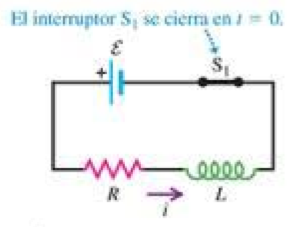
$$I = \frac{\mathcal{E}}{R}$$

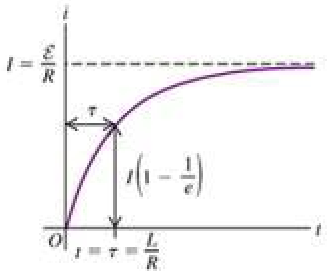
La corriente *final I* no depende de la inductancia *L*; es la misma que se tendría si solo se conectara la resistencia *R* a la fuente con fem $\mathcal{E}$.

La figura 30.12 muestra el comportamiento de la corriente como función del tiempo. Para obtener la ecuación de esta curva (es decir, una expresión para la corriente como función del tiempo), se procede igual que para el capacitor en proceso de carga, en la sección 26.4. En primer lugar, se reordena la ecuación (30.13) para que adopte la forma:

$$\frac{di}{i - (\mathcal{E}/R)} = -\frac{R}{L}dt$$

30.12 Gráfica de *i* contra *t* para el crecimiento de la corriente en un circuito *R-L* con una fem conectada en serie. La corriente final es $I = \mathcal{E}/R$; después de una constante de tiempo τ, la corriente es $1 - 1/e$ de este valor.





Esto separa las variables, con i en el lado izquierdo y t en el derecho. Después se integran ambos lados, cambiando el nombre de las variables de integración a i' y t' para utilizar i y t como límites superiores. (El límite inferior para cada integral es cero, lo que corresponde a una corriente igual a cero en el momento inicial $t = 0$). Se obtiene:

$$\int_0^i \frac{di'}{i' - (\mathcal{E}/R)} = -\int_0^t \frac{R}{L}dt'$$

$$\ln\left(\frac{i - (\mathcal{E}/R)}{-\mathcal{E}/R}\right) = -\frac{R}{L}t$$

A continuación se aplica la función exponencial a ambos lados y se despeja i. Se dejan al lector los detalles de la solución; el resultado final es

$$i = \frac{\mathcal{E}}{R}(1 - e^{-(R/L)t}) \qquad \text{(corriente en un circuito } R\text{-}L \text{ con fem)} \qquad (30.14)$$

Esta es la ecuación de la curva de la figura 30.12. Derivando la ecuación (30.14), se obtiene:

$$\frac{di}{dt} = \frac{\mathcal{E}}{L}e^{-(R/L)t} \qquad (30.15)$$

En el momento $t = 0$, $i = 0$ y $di/dt = \mathcal{E}/L$. Conforme $t \rightarrow \infty$, $i \rightarrow \mathcal{E}/R$ y $di/dt \rightarrow 0$, como se había pronosticado.

Como se muestra en la figura 30.12, la corriente instantánea i primero aumenta con rapidez, luego con más lentitud, y se acerca al valor final $I = \mathcal{E}/R$ en forma asintótica. En un tiempo igual a L/R, la corriente ha subido a $(1 - 1/e)$, o el 63% de su valor final. De esta forma, la cantidad L/R es una medida de la rapidez con que la corriente se aproxima a su valor final; esta cantidad se llama **constante de tiempo** del circuito, y se denota con τ:

$$\tau = \frac{L}{R} \qquad \text{(constante de tiempo para un circuito } R\text{-}L) \qquad (30.16)$$

En un tiempo igual a 2τ, la corriente alcanza el 86% de su valor final; en el tiempo 5τ llega al 99.3% y en $10t$ llega al 99.995%. (Compare esto con el análisis realizado en la sección 26.4 para la carga de un capacitor con capacitancia C conectado en serie con un resistor de resistencia R; la constante de tiempo para esa situación fue el producto RC).

Las gráficas de i contra t tienen la misma forma general para todos los valores de L. Para un valor dado de R, la constante de tiempo τ es mayor para valores más grandes de L. Cuando L es pequeña, la corriente aumenta con rapidez hasta su valor final; cuando L es grande, crece con más lentitud. Por ejemplo, si $R = 100\ \Omega$ y $L = 10$ H,

$$\tau = \frac{L}{R} = \frac{10\text{ H}}{100\ \Omega} = 0.10\text{ s}$$

y la corriente se incrementa al 63%, aproximadamente, de su valor final en 0.10 s. (Recuerde que $1\text{ H} = 1\ \Omega\cdot\text{s}$). Pero si $L = 0.010$ H, $\tau = 1.0 \times 10^{-4}$ s $= 0.10$ ms, y el crecimiento es mucho más rápido.

Las consideraciones acerca de la energía brindan una perspectiva adicional sobre el comportamiento de un circuito *R-L*. La rapidez instantánea con la que la fuente entrega energía al circuito es $P = \mathcal{E}i$. La rapidez instantánea con que se disipa energía en el resistor es i^2R, y la rapidez con que se almacena energía en el inductor es $iv_{bc} = Li\,di/dt$ [o, en forma equivalente, $(d/dt)\left(\frac{1}{2}Li^2\right) = Li\,di/dt$]. Cuando se multiplica la ecuación (30.12) por i y se reordena, se encuentra que

$$\mathcal{E}i = i^2R + Li\frac{di}{dt} \qquad (30.17)$$

De la potencia $\mathcal{E}i$ suministrada por la fuente, la parte (i^2R) se disipa en el resistor, y la parte ($Li\,di/dt$) se emplea en almacenar energía en el inductor. Este análisis es análogo por completo al análisis de la potencia para un capacitor en proceso de carga, que se hizo al final de la sección 26.4.



Ejemplo 30.6 Análisis de un circuito *R-L*

Un sensible dispositivo electrónico con resistencia $R = 175\ \Omega$ va a conectarse a una fuente de fem (de resistencia interna despreciable) por medio de un interruptor. El dispositivo está diseñado para que opere con una corriente de 36 mA, pero, para evitar que sufra daños, la corriente no debe exceder de 4.9 mA en los primeros 58 μs después de cerrado el interruptor. Por lo tanto, un inductor se conecta en serie con el dispositivo, como se muestra en la figura 30.11; el interruptor en cuestión es el S_1. *a*) ¿Cuál es la fem $\mathcal{E}$ que debe tener la fuente? Suponga que la resistencia interna es despreciable. *b*) ¿Qué inductancia L se requiere? *c*) ¿Cuál es la constante de tiempo τ de este circuito?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Este problema tiene que ver con el aumento de la corriente en un circuito *R-L*, por lo que aplicaremos las ideas de esta sección. La figura 30.12 indica que la corriente final es $I = \mathcal{E}/R$. Se nos da $R = 175\ \Omega$, así que la fem está determinada por el requisito de que la corriente final sea $I = 36$ mA. El otro requerimiento es que la corriente no exceda de $i = 4.9$ mA en $t = 58\ \mu$s; para satisfacer esto, se emplea la ecuación (30.14) para la corriente como función del tiempo, y se despeja la inductancia, que es la única incógnita. Después, la ecuación (30.16) da la constante de tiempo.

EJECUTAR: *a*) Al despejar $\mathcal{E}$ de $I = \mathcal{E}/R$:

$$\mathcal{E} = IR = (0.036\ \text{A})(175\ \Omega) = 6.3\ \text{V}$$

b) Para encontrar la inductancia requerida, se despeja L en la ecuación (30.14). En primer lugar, se multiplica por $(-R/\mathcal{E})$ y luego se suma 1 en ambos lados, con lo que se obtiene:

$$1 - \frac{iR}{\mathcal{E}} = e^{-(R/L)t}$$

Entonces se toman los logaritmos naturales en ambos lados, se despeja L y se sustituyen los valores:

$$L = \frac{-Rt}{\ln(1 - iR/\mathcal{E})}$$

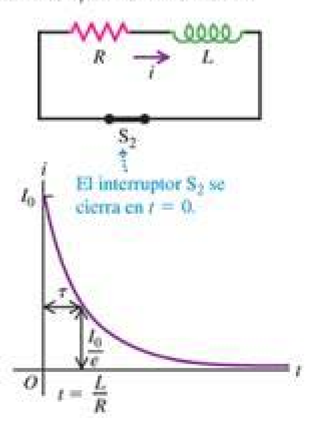
$$= \frac{-(175\ \Omega)(58 \times 10^{-6}\ \text{s})}{\ln[1 - (4.9 \times 10^{-3}\ \text{A})(175\ \Omega)/(6.3\ \text{V})]} = 69\ \text{mH}$$

c) De acuerdo con la ecuación (30.16),

$$\tau = \frac{L}{R} = \frac{69 \times 10^{-3}\ \text{H}}{175\ \Omega} = 3.9 \times 10^{-4}\ \text{s} = 390\ \mu\text{s}$$

EVALUAR: Observe que 58 μs es mucho menos que la constante de tiempo. En 58 μs la corriente crece de cero a 4.9 mA, una fracción pequeña de su valor final de 36 mA; después de 390 μs, la corriente es $(1 - 1/e)$ de su valor final, es decir, alrededor de (0.63)(36 mA) = 23 mA.

Decaimiento de la corriente en un circuito *R-L*



30.13 Gráfica de i contra t para el decaimiento de la corriente en un circuito *R-L*. Después de una constante de tiempo t, la corriente es $1/e$ de su valor inicial.

Ahora supongamos que el interruptor S_1 en el circuito de la figura 30.11 ha permanecido cerrado por un tiempo y la corriente ha alcanzado el valor I_0. Se reinicia el cronómetro para redefinir el tiempo inicial, se cierra el interruptor S_2 en el momento $t = 0$, con la batería puesta en derivación. (Al mismo tiempo, se debe abrir S_1 para que no se arruine la batería). La corriente a través de R y L no se reduce a cero de manera instantánea, sino que decae con lentitud, como se ilustra en la figura 30.13. La ecuación de la regla de Kirchhoff de las mallas se obtiene de la ecuación (30.12), con solo omitir el término $\mathcal{E}$. Invitamos al lector a que siga los pasos del análisis anterior y demuestre que la corriente i varía con el tiempo de acuerdo con

$$i = I_0 e^{-(R/L)t} \tag{30.18}$$

donde I_0 es la corriente inicial en el momento $t = 0$. La constante de tiempo, $\tau = L/R$, es el tiempo para que la corriente disminuya a $1/e$, alrededor del 37%, de su valor original. En el tiempo 2τ ha disminuido al 13.5%, en el tiempo 5τ al 0.67%, y en 10τ al 0.0045%.

La energía necesaria para mantener la corriente durante este decaimiento proviene de la energía almacenada en el campo magnético del inductor. En esta ocasión, el análisis detallado de la energía es más sencillo. En vez de la ecuación (30.17) tenemos

$$0 = i^2R + Li\frac{di}{dt} \tag{30.19}$$

En este caso, $Li\,di/dt$ es negativo; la ecuación (30.19) demuestra que la energía almacenada en el inductor *disminuye* con una rapidez igual a la rapidez de disipación de la energía i^2R en el resistor.

Toda esta exposición debe parecer familiar al lector, pues la situación es muy parecida a la de un capacitor que se carga y descarga, lo que se estudió en la sección 26.4. Sería buena idea comparar esa sección con nuestro análisis del circuito *R-L*.



Ejemplo 30.7 Energía en un circuito *R-L*

Cuando la corriente decae en un circuito *R-L*, ¿qué fracción de la energía almacenada en el inductor se ha disipado después de 2.3 constantes de tiempo?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Este problema concierne al decaimiento de la corriente en un circuito *R-L*, así como a la relación entre la corriente en un inductor y la cantidad de energía almacenada. La corriente i en cualquier momento t está dada por la ecuación (30.18); la energía almacenada que se asocia con esta corriente está dada por la ecuación (30.9), $U = \frac{1}{2}Li^2$.

EJECUTAR: De acuerdo con la ecuación (30.18), la corriente i en cualquier momento t es

$$i = I_0 e^{-(R/L)t}$$

La energía almacenada en cualquier momento se obtiene sustituyendo esta expresión en $U = \frac{1}{2}Li^2$:

$$U = \tfrac{1}{2}LI_0^2 e^{-2(R/L)t} = U_0 e^{-2(R/L)t}$$

donde , $U_0 = \frac{1}{2}LI_0^2$ es la energía en el momento inicial $t = 0$. Cuando $t = 2.3\tau = 2.3L/R$, se tiene

$$U = U_0 e^{-2(2.3)} = U_0 e^{-4.6} = 0.010U_0$$

Es decir, permanece solo el 0.010, o 1.0%, de la energía almacenada inicialmente en el inductor; el 99.0% restante se ha disipado en el resistor.

EVALUAR: Para tener una idea de lo que significa este resultado, considere el circuito *R-L* que se analizó en el ejemplo 30.6, para el que la constante de tiempo τ es 390 μs. Con $L = 69$ mH e $I_0 = 36$ mA, tenemos $U_0 = \frac{1}{2}LI_0^2 = \frac{1}{2}(0.069\text{ H})(0.036\text{ A})^2 = 4.5 \times 10^{-5}$ J. De esta, el 99.0%, o 4.4×10^{-5} J, se disipa en $2.3(390\ \mu\text{s}) = 9.0 \times 10^{-4}$ s = 0.90 ms. En otras palabras, este circuito puede perder casi toda su energía en 0.90 ms; por lo tanto, el tiempo mínimo para un ciclo completo de encendido y apagado es de 1.8 ms. Para muchos fines, se requiere un ciclo de tiempo aún más corto, por ejemplo, en las redes de conmutación rápida para telecomunicaciones. En esos casos se necesita una constante de tiempo $\tau = L/R$.

Evalúe su comprensión de la sección 30.4 *a*) En la figura 30.11, ¿cuáles son los signos algebraicos de las diferencias de potencial v_{ab} y v_{bc} cuando está cerrado el interruptor S_1 y abierto el S_2? **i.** $v_{ab} > 0$, $v_{bc} > 0$; **ii.** $v_{ab} > 0$, $v_{bc} < 0$; **iii.** $v_{ab} < 0$, $v_{bc} > 0$; **iv.** $v_{ab} < 0$, $v_{bc} < 0$. *b*) ¿Cuáles son los signos de v_{ab} y v_{bc} cuando S_1 está abierto, S_2 está cerrado, y la corriente fluye en el sentido que se indica? **i.** $v_{ab} > 0$, $v_{bc} > 0$; **ii.** $v_{ab} > 0$, $v_{bc} < 0$; **iii.** $v_{ab} < 0$, $v_{bc} > 0$; **iv.** $v_{ab} < 0$, $v_{bc} < 0$. |

30.5 Circuito *L-C*

Un circuito que contiene un inductor y un capacitor muestra un modo completamente nuevo de comportamiento, caracterizado por una corriente y una carga *oscilantes*. Esto está en claro contraste con el método *exponencial* de la situación de estado estable que vimos para circuitos tanto *R-C* como *R-L*. En el **circuito *L-C*** de la figura 30.14*a* se carga el capacitor con una diferencia de potencial V_m y una carga inicial $Q = CV_m$ en su placa izquierda y luego se cierra el interruptor. ¿Qué es lo que pasa?

MasteringPHYSICS

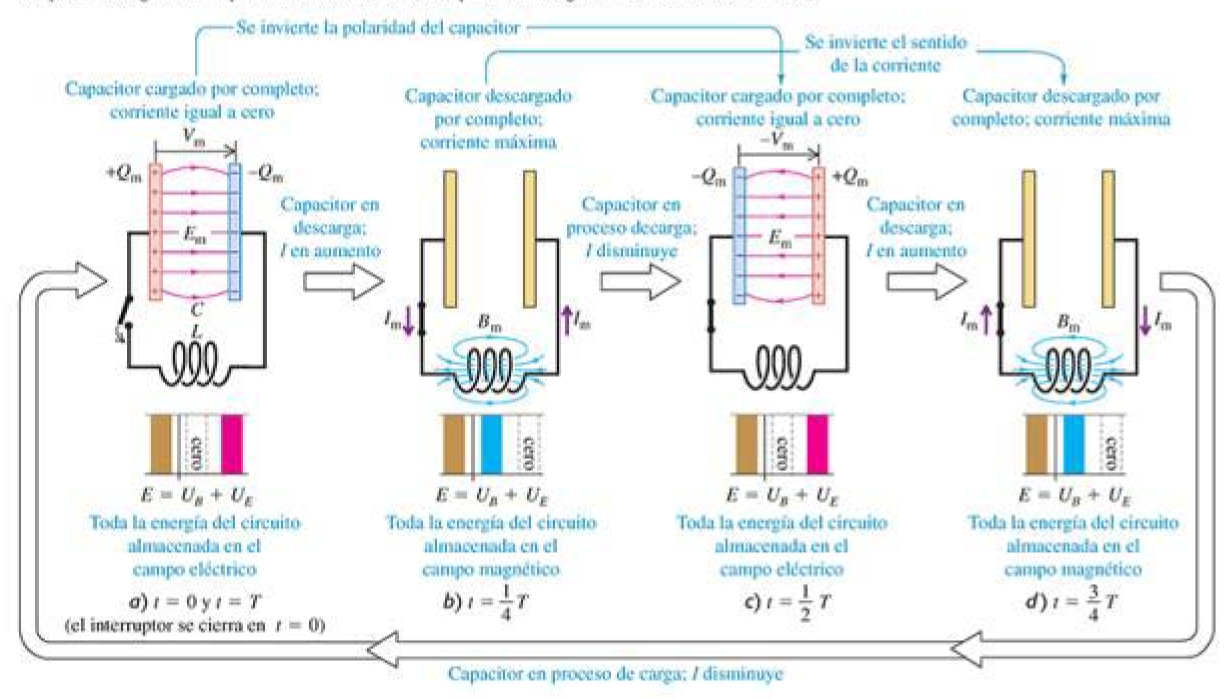
ActivPhysics 14.2: AC Circuits: The *RLC* Oscillator (Questions 1–6)

El capacitor comienza a descargarse a través del inductor. A causa de la fem inducida en el inductor, la corriente no puede cambiar en forma instantánea; comienza en cero y finalmente alcanza un valor máximo I_m. Durante esta intensificación, el capacitor se está descargando. En cada instante el potencial del capacitor es igual a la fem inducida, por lo que a medida que el capacitor se descarga, la *razón de cambio* de la corriente disminuye. Cuando el potencial del capacitor se reduce a cero, la fem inducida también es igual a cero, y la corriente se ha estabilizado en su valor máximo I_m. La figura 30.14*b* muestra esta situación; el capacitor se ha descargado por completo. La diferencia de potencial entre sus terminales (y las del inductor) ha disminuido hasta cero, y la corriente alcanzó su valor máximo I_m.

Durante la descarga del capacitor, la corriente en aumento en el inductor ha establecido un campo magnético en el espacio que lo rodea, y la energía que inicialmente estaba almacenada en el campo eléctrico del capacitor ahora lo está en el campo magnético del inductor.

Aunque en la figura 30.14*b* el capacitor está completamente descargado, la corriente persiste (no puede cambiar de forma instantánea), y el capacitor comienza a cargarse con polaridad opuesta a la de su estado inicial. Conforme disminuye la corriente, la magnitud del campo magnético también lo hace, lo que induce una fem en el inductor en el *mismo* sentido que el de la corriente; esto retarda la disminución de la corriente.

30.14 En un circuito oscilante *L-C*, la carga en el capacitor y la corriente a través del inductor varían en forma sinusoidal con el tiempo. Se transfiere energía entre la energía magnética en el inductor (U_B) y la energía eléctrica en el capacitor (U_E). Como en el movimiento armónico simple, la energía total *E* permanece constante. (Compare con la figura 14.14 en la sección 14.3).



Con el tiempo, la corriente y el campo magnético disminuyen a cero y el capacitor queda cargado en el sentido *opuesto* al de su polaridad inicial (figura 30.14*c*), con una diferencia de potencial $-V_m$ y carga $-Q$ en su placa izquierda.

El proceso se repite ahora en sentido opuesto; un poco después, el capacitor se ha descargado una vez más y en el inductor hay una corriente en el sentido opuesto (figura 30.14*d*). Más tarde, la carga del capacitor recupera su valor original (figura 30.14*a*), y todo el proceso se repite. Si no hay pérdidas de energía, las cargas en el capacitor siguen oscilando hacia atrás y adelante indefinidamente. Este proceso se llama **oscilación eléctrica**.

Desde el punto de vista de la energía, las oscilaciones de un circuito eléctrico transfieren energía del campo eléctrico del capacitor al campo magnético del inductor, y viceversa. La energía *total* asociada con el circuito es constante. Esto es análogo a la transferencia de energía en un sistema mecánico que oscila de la energía potencial a la cinética y viceversa, con la energía total constante. Como veremos, esta analogía va mucho más lejos.

30.15 Aplicación de la regla de Kirchhoff de las mallas al circuito *L-C*. Se indica el sentido del recorrido alrededor de la malla, para obtener la ecuación de la malla. Tan pronto como se ha completado el circuito y el capacitor comienza a descargarse por primera vez, como en la figura 30.14*a*, la corriente es negativa (opuesta al sentido que se indica).



Oscilaciones eléctricas en un circuito *L-C*

Para estudiar con detalle el flujo de la carga, procedemos igual que para el circuito *R-L*. La figura 30.15 muestra nuestras definiciones de q e i.

CUIDADO **Corriente positiva en un circuito *L-C*** Después de estudiar la figura 30.14, quizá parezca que el sentido positivo de la corriente en la figura 30.15 va hacia atrás. En realidad, hemos elegido este sentido para simplificar la relación entre la corriente y la carga del capacitor. Se define la corriente en cada instante como $i = dq/dt$, la razón de cambio de la carga en la placa izquierda del capacitor. De ahí que si al principio el capacitor está cargado y comienza a descargarse como en las figuras 30.14*a* y 30.14*b*, entonces $dq/dt < 0$ y la corriente inicial i es negativa; el sentido de la corriente es, por lo tanto, opuesto al sentido (positivo) que se muestra en la figura 30.15.

Se aplica la regla de Kirchhoff de las mallas al circuito de la figura 30.15. Partiendo de la esquina inferior derecha del circuito y sumando los voltajes conforme se recorre la malla en el sentido horario, se obtiene lo siguiente:

$$-L\frac{di}{dt} - \frac{q}{C} = 0$$

Como $i = dq/dt$, se deduce que $di/dt = d^2q/dt^2$. Sustituimos esta expresión en la ecuación anterior y se divide entre $-L$ para obtener

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{1}{LC}q = 0 \qquad \text{(circuito } L\text{-}C\text{)} \tag{30.20}$$

La ecuación (30.20) tiene exactamente la misma forma que la ecuación que se obtuvo para el movimiento armónico simple, en la sección 14.2, ecuación (14.4). Esa ecuación es $d^2x/dt^2 = -(k/m)x$, o

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$$

(Antes de continuar con este análisis, es recomendable repasar la sección 14.2). En el circuito *L-C* la carga q del capacitor desempeña el papel del desplazamiento x, y la corriente $i = dq/dt$ es análoga a la velocidad de la partícula $v_x = dx/dt$. La inductancia L es análoga a la masa m, y el recíproco de la capacitancia, $1/C$, es análogo a la constante de fuerza k.

Al continuar con esta analogía, recordemos que la frecuencia angular $\omega = 2\pi f$ del oscilador armónico es igual a $(k/m)^{1/2}$, y la posición está dada como función del tiempo por la ecuación (14.13),

$$x = A\cos(\omega t + \phi)$$

donde la amplitud A y el ángulo de fase ϕ dependen de las condiciones iniciales. En la situación eléctrica análoga, la carga q del capacitor está dada por

$$q = Q\cos(\omega t + \phi) \tag{30.21}$$

y la frecuencia angular ω de la oscilación está dada por

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC}} \qquad \text{(frecuencia angular de la oscilación en un circuito } L\text{-}C\text{)} \tag{30.22}$$

Verifique que la ecuación (30.21) satisfaga la ecuación de las mallas, ecuación (30.20), cuando ω tiene el valor dado por la ecuación (30.22). Al hacer esto, encontrará que la corriente instantánea $i = dq/dt$ está dada por

$$i = -\omega Q\,\text{sen}(\omega t + \phi) \tag{30.23}$$

Así, en un circuito *L-C* la carga y la corriente oscilan en forma sinusoidal con el tiempo, con una frecuencia angular determinada por los valores de L y C. La frecuencia ordinaria f, el número de ciclos por segundo, es igual a $\omega/2\pi$, como siempre. En las ecuaciones (30.21) y (30.23), las constantes Q y ϕ están determinadas por las condiciones iniciales. Si en el instante $t = 0$ la placa izquierda del capacitor de la figura 30.15 tiene su carga máxima Q, y la corriente i es igual a cero, entonces $\phi = 0$. Si $q = 0$ en el momento $t = 0$, entonces $\phi = \pm\pi/2$ rad.

Energía en un circuito *L-C*

También se puede analizar el circuito *L-C* desde la perspectiva de la energía. La analogía con el movimiento armónico simple es igualmente útil en este caso. En el problema mecánico, un cuerpo con masa m está sujeto a un resorte con constante de fuerza k. Suponga que el cuerpo se desplaza una distancia A desde su posición de equilibrio y se le libera desde el reposo en el momento $t = 0$. La energía cinética del sistema en un instante posterior es $\frac{1}{2}mv_x^2$, y su energía potencial elástica es $\frac{1}{2}kx^2$. Como el sistema es conservativo, la suma de estas energías es igual a la energía inicial del

sistema, $\frac{1}{2}kA^2$. La velocidad v_x en cualquier posición x se calcula como se hizo en la sección 14.3, ecuación (14.22):

$$v_x = \pm\sqrt{\frac{k}{m}}\sqrt{A^2 - x^2} \qquad (30.24)$$

El circuito *L-C* también es un sistema conservativo. Otra vez, sea Q la carga máxima del capacitor. La energía del campo magnético, $\frac{1}{2}Li^2$ en el inductor en cualquier momento corresponde a la energía cinética $\frac{1}{2}mv^2$ del cuerpo oscilante, y la energía del campo eléctrico $q^2/2C$ en el capacitor corresponde a la energía potencial elástica $\frac{1}{2}kx^2$ del resorte. La suma de estas energías es igual a la energía total $Q^2/2C$ del sistema:

$$\frac{1}{2}Li^2 + \frac{q^2}{2C} = \frac{Q^2}{2C} \qquad (30.25)$$

La energía total en el circuito *L-C* es *constante*; oscila entre las formas magnética y eléctrica, del mismo modo que la energía mecánica total en el movimiento armónico simple es constante y oscila entre las formas cinética y potencial.

Al despejar i en la ecuación (30.25), se encuentra que cuando la carga en el capacitor es q, la corriente i es

$$i = \pm\sqrt{\frac{1}{LC}}\sqrt{Q^2 - q^2} \qquad (30.26)$$

Podemos comprobar esta ecuación si sustituimos q de la ecuación (30.21) e i de la (30.23). Al comparar las ecuaciones (30.24) y (30.26), se observa que la corriente $i = dq/dt$ y la carga q están relacionadas en la misma forma que la velocidad $v_x = dx/dt$ y la posición x en el problema mecánico.

En la tabla 30.1 se resumen las analogías entre el movimiento armónico simple y las oscilaciones del circuito *L-C*. Este paralelismo es tan cercano que es posible resolver problemas complicados de mecánica y acústica si se establecen circuitos eléctricos análogos y se miden las corrientes y los voltajes que correspondan a las cantidades mecánicas y acústicas por determinar. Este es el principio básico de muchas computadoras analógicas. Tal analogía se puede extender a las oscilaciones *amortiguadas*, que estudiaremos en la siguiente sección. En el capítulo 31 se extenderá la analogía aún más para que incluya las oscilaciones eléctricas *forzadas*, las cuales se presentan en todos los circuitos de corriente alterna.

Tabla 30.1 Oscilación de un sistema de masa y resorte comparado con oscilaciones eléctricas en un circuito *L-C*

Sistema de masa y resorte
Energía cinética $= \frac{1}{2}mv_x^2$
Energía potencial $= \frac{1}{2}kx^2$
$\frac{1}{2}mv_x^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2$
$v_x = \pm\sqrt{k/m}\sqrt{A^2 - x^2}$
$v_x = dx/dt$
$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$
$x = A\cos(\omega t + \phi)$
Circuito de inductor y capacitor
Energía magnética $= \frac{1}{2}Li^2$
Energía eléctrica $= q^2/2C$
$\frac{1}{2}Li^2 + q^2/2C = Q^2/2C$
$i = \pm\sqrt{1/LC}\sqrt{Q^2 - q^2}$
$i = dq/dt$
$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC}}$
$q = Q\cos(\omega t + \phi)$

Ejemplo 30.8 Circuito oscilante



Una fuente de energía de 300 V se utiliza para cargar un capacitor de 25 μF. Una vez que el capacitor está cargado por completo, se desconecta de la fuente y se conecta a través de un inductor de 10 mH. La resistencia en el circuito es despreciable. *a*) Determine la frecuencia y el periodo de oscilación en el circuito. *b*) Obtenga la carga del capacitor y la corriente en el circuito 1.2 ms después de haber conectado el inductor y el capacitor.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Las variables buscadas son la frecuencia f y el periodo T, así como los valores de la carga q y la corriente i en un tiempo dado t. Se nos da la capacitancia C y la inductancia L, con las que se calculan la frecuencia y el periodo por medio de la ecuación (30.22). La carga y la corriente se obtienen con las ecuaciones (30.21) y (30.23). Inicialmente, el capacitor está cargado por completo y la corriente es igual a cero, como se ilustra en la figura 30.14*a*, por lo que el ángulo de fase es $\phi = 0$ [véase el análisis que sigue a la ecuación (30.23)].

EJECUTAR: *a*) La frecuencia angular natural es

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC}} = \sqrt{\frac{1}{(10 \times 10^{-3}\ \text{H})(25 \times 10^{-6}\ \text{F})}}$$
$$= 2.0 \times 10^3\ \text{rad/s}$$

La frecuencia f y el periodo T son entonces:

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{2.0 \times 10^3\ \text{rad/s}}{2\pi\ \text{rad/ciclo}} = 320\ \text{Hz}$$
$$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{320\ \text{Hz}} = 3.1 \times 10^{-3}\ \text{s} = 3.1\ \text{ms}$$

b) Como el periodo de la oscilación es $T = 3.1$ ms, $t = 1.2$ ms es igual a $0.38T$; esto corresponde a una situación intermedia entre la figura 30.14*b* ($t = T/4$) y la figura 30.14*c* ($t = T/2$). Al comparar estas figuras con la 30.15, se esperaría que la carga del capacitor q fuera negativa (es decir, habría carga negativa en la placa izquierda del

capacitor) y que la corriente i también tuviera un valor negativo (es decir, la corriente circularía en sentido antihorario).

Para encontrar el valor de q, se usa la ecuación (30.21), $q = Q\cos(\omega t + \phi)$. La carga es máxima en $t = 0$, por lo que $\phi = 0$ y $Q = C\mathcal{E} = (25 \times 10^{-6}\ \text{F})(300\ \text{V}) = 7.5 \times 10^{-3}\ \text{C}$. Por lo tanto, la ecuación (30.21) será

$$q = (7.5 \times 10^{-3}\ \text{C})\cos\omega t$$

En el momento $t = 1.2 \times 10^{-3}$ s,

$$\omega t = (2.0 \times 10^3\ \text{rad/s})(1.2 \times 10^{-3}\ \text{s}) = 2.4\ \text{rad}$$
$$q = (7.5 \times 10^{-3}\ \text{C})\cos(2.4\ \text{rad}) = -5.5 \times 10^{-3}\ \text{C}$$

De acuerdo con la ecuación (30.23), la corriente i en cualquier momento es $i = -\omega Q$ sen ωt. En $t = 1.2 \times 10^{-3}$ s,

$$i = -(2.0 \times 10^3\ \text{rad/s})(7.5 \times 10^{-3}\ \text{C})\,\text{sen}(2.4\ \text{rad}) = -10\ \text{A}$$

EVALUAR: Los signos de q e i son negativos, como se había pronosticado.

Ejemplo 30.9 La energía en un circuito oscilante



Considere otra vez el circuito *L-C* del ejemplo 30.8, determine las energías magnética y eléctrica en *a*) $t = 0$ y en *b*) $t = 1.2$ ms.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Este problema pide calcular la energía magnética U_B (almacenada en el inductor) y la energía eléctrica U_E (almacenada en el capacitor) en dos tiempos diferentes durante la oscilación del circuito *L-C*. Del ejemplo 30.8, se conocen los valores de la carga q en el capacitor y la corriente i en el circuito en dos tiempos. Usaremos esos valores para calcular $U_B = \frac{1}{2}Li^2$ y $U_E = q^2/2C$.

EJECUTAR: *a*) En $t = 0$ no hay corriente y $q = Q$. Por lo que no hay energía magnética, y toda la energía en el circuito está en forma de energía eléctrica en el capacitor:

$$U_B = \tfrac{1}{2}Li^2 = 0 \qquad U_E = \frac{Q^2}{2C} = \frac{(7.5 \times 10^{-3}\ \text{C})^2}{2(25 \times 10^{-6}\ \text{F})} = 1.1\ \text{J}$$

b) Del ejemplo 30.8, en $t = 1.2$ ms tenemos $i = -10$ A y $q = -5.5 \times 10^{-3}$ C. Por lo tanto,

$$U_B = \tfrac{1}{2}Li^2 = \tfrac{1}{2}(10 \times 10^{-3}\ \text{H})(-10\ \text{A})^2 = 0.5\ \text{J}$$
$$U_E = \frac{q^2}{2C} = \frac{(-5.5 \times 10^{-3}\ \text{C})^2}{2(25 \times 10^{-6}\ \text{F})} = 0.6\ \text{J}$$

EVALUAR: Las energías magnética y eléctrica son iguales en $t = 3T/8 = 0.375T$, exactamente a la mitad entre las situaciones que se muestran en las figuras 30.14*b* y 30.14*c*. Vimos en el ejemplo 30.8 que el tiempo considerado en el inciso *b*), $t = 1.2$ ms, es igual a $0.38T$; que es un poco posterior que $0.375T$ así que U_B es un poco menor que U_E, como se esperaba. En *todo* momento la energía *total* $E = U_B + U_E$ tiene el mismo valor, 1.1 J. Un circuito *L-C* sin resistencia es un sistema conservativo; no se disipa energía.

Evalúe su comprensión de la sección 30.5 Una forma de pensar en la energía almacenada en un circuito *L-C* consiste en afirmar que los elementos de circuito efectúan trabajo positivo o negativo sobre las cargas que se mueven hacia atrás y adelante a través del circuito. *a*) En la figura 30.14, entre las etapas *a*) y *b*), ¿el capacitor realiza trabajo positivo o negativo sobre las cargas? *b*) ¿Qué clase de fuerza (eléctrica o magnética) ejerce el capacitor sobre las cargas para efectuar este trabajo? *c*) Durante este proceso, ¿el inductor realiza trabajo positivo o negativo sobre las cargas? *d*) ¿Qué clase de fuerza (eléctrica o magnética) ejerce el inductor sobre las cargas?

30.6 Circuito *L-R-C* en serie

MasteringPHYSICS

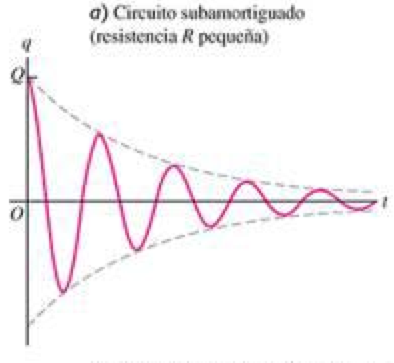
ActivPhysics 14.2: AC Circuits: The *RLC* Oscillator (Questions 7–10)

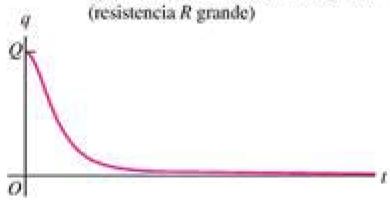
En nuestro análisis del circuito *L-C* se supuso que no hay *resistencia* en el circuito. Desde luego, esta es una idealización; todo inductor real tiene resistencia en sus embobinados, y también puede haber resistencia en los alambres de conexión. En virtud de la resistencia, la energía electromagnética en el circuito se disipa y se convierte en otras formas, como energía interna de los materiales del circuito. La resistencia en un circuito eléctrico es análoga a la fricción en un sistema mecánico.

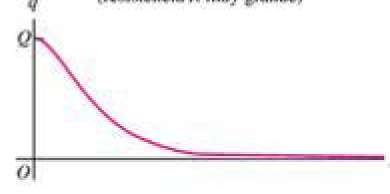
Suponga que un inductor con inductancia L y un resistor de resistencia R están conectados en serie entre las terminales de un capacitor cargado, para formar un **circuito en serie *L-R-C***. Como antes, el capacitor comienza a descargarse tan pronto como el circuito está completo. Pero en virtud de las pérdidas i^2R en el resistor, la energía del campo magnético adquirida por el inductor cuando el capacitor está descargado por completo es *menor* que la energía del campo eléctrico original del capacitor. De igual forma, la energía del capacitor cuando el campo magnético ha disminuido a cero es aún más pequeña, y así sucesivamente.

Si la resistencia R es relativamente pequeña, el circuito aún oscila, pero con un **movimiento armónico amortiguado** (figura 30.16*a*), y se dice que el circuito está

30.16 Gráficas de la carga en el capacitor como función del tiempo en un circuito en serie *L-R-C* con carga inicial *Q*.







subamortiguado. Si R se incrementa, las oscilaciones cesan con más rapidez. Cuando R alcanza cierto valor, el circuito deja de oscilar; entonces, está **críticamente amortiguado** (figura 30.16*b*). Para valores aún mayores de R, el circuito está **sobreamortiguado** (figura 30.16*c*), y la carga del capacitor se acerca a cero aún más lentamente. Se usaron estos mismos términos para describir el comportamiento del sistema mecánico análogo, el oscilador armónico amortiguado en la sección 14.7.

Análisis del circuito *L-R-C*

Para analizar con detalle el comportamiento del circuito *L-R-C*, consideremos el circuito que aparece en la figura 30.17. Es como el circuito *L-C* de la figura 30.15, excepto por el resistor R que se agregó; también se ilustra la fuente que carga al capacitor al inicio. Las indicaciones de los sentidos positivos de q e i son las mismas que para el circuito *L-C*.

Primero se cierra el interruptor en la posición hacia arriba, para conectar al capacitor con una fuente de fem $\mathcal{E}$ durante un tiempo suficientemente largo para asegurar que el capacitor adquiera su carga final $Q = C\mathcal{E}$ y que toda oscilación inicial haya cesado. Entonces, en el momento $t = 0$ se coloca al interruptor en la posición hacia abajo, con lo que se elimina la fuente del circuito y se pone al capacitor en serie con el resistor y el inductor. Observe que la corriente inicial es negativa y con sentido opuesto al de i que se ilustra en la figura 30.17.

Para determinar cómo varían q e i con el tiempo, se aplica la regla de Kirchhoff de las mallas. Partiendo del punto a y recorriendo la malla en el sentido *abcda*, se obtiene la ecuación

$$-iR - L\frac{di}{dt} - \frac{q}{C} = 0$$

Al sustituir i con dq/dt y reordenar, se obtiene

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC}q = 0 \qquad (30.27)$$

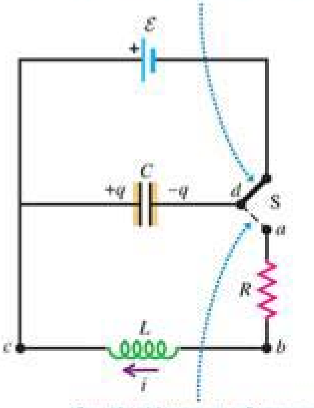
Observe que cuando $R = 0$, esto se reduce a la ecuación (30.20) para un circuito *L-C*.

Hay métodos generales para obtener soluciones de la ecuación (30.27). La forma de la solución es diferente para los casos del circuito subamortiguado (R pequeña) y sobreamortiguado (R grande). Cuando R^2 es menor que $4L/C$, la solución tiene la forma

$$q = Ae^{-(R/2L)t}\cos\left(\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}\,t + \phi\right) \qquad (30.28)$$

donde A y ϕ son constantes. Se invita al lector a que obtenga la primera y segunda derivadas de esta función, y demuestre por sustitución directa que satisface la ecuación (30.27).

30.17 Circuito *L-R-C* en serie.



Esta solución corresponde al comportamiento *subamortiguado* que se ilustra en la figura 30.16*a*; la función representa una oscilación sinusoidal con una amplitud que decae exponencialmente. (Observe que el factor exponencial $e^{-(R/2L)t}$ *no* es el mismo que el factor $e^{-(R/L)t}$ que encontramos al describir el circuito *R-L* en la sección 30.4). Cuando $R = 0$, la ecuación (30.28) se reduce a la (30.21) para las oscilaciones en un circuito *L-C*. Si R no es igual a cero, la frecuencia angular de la oscilación es *menor* que $1/(LC)^{1/2}$ a causa del término que contiene a R. La frecuencia angular ω' de las oscilaciones amortiguadas está dada por

$$\omega' = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} \qquad \text{(circuito en serie } L\text{-}R\text{-}C \text{ subamortiguado)} \qquad (30.29)$$

Cuando $R = 0$, esto se reduce a la ecuación (30.22), $\omega = (1/LC)^{1/2}$. A medida que R se incrementa, ω' se hace cada vez más pequeña. Cuando $R^2 = 4L/C$, la cantidad bajo el radical se vuelve cero; el sistema ya no oscila y se ha llegado al caso del *amortiguamiento crítico* (figura 30.16*b*). Para valores de R aún más grandes, el sistema se comporta como el de la figura 30.16*c*. En este caso el circuito es *sobreamortiguado*, y q está dada como función del tiempo por la suma de dos funciones exponenciales decrecientes.

En el caso *subamortiguado*, la constante de fase *f* en la función coseno de la ecuación (30.28) ofrece la posibilidad de una carga inicial y una corriente inicial en $t = 0$, en forma análoga a la asignación de un desplazamiento inicial y de una velocidad inicial a un oscilador armónico subamortiguado (véase el ejercicio 30.40).

Una vez más se hace énfasis en que el comportamiento del circuito *L-R-C* en serie es completamente análogo al del oscilador armónico amortiguado que se estudió en la sección 14.7. Se invita al lector a verificar, por ejemplo, que si se comienza con la ecuación (14.41) y se sustituye x por q, m por L, k por $1/C$ y la constante de amortiguamiento b por R, el resultado es la ecuación (30.27). En forma similar, el punto de transición entre el subamortiguamiento y el sobreamortiguamiento ocurre en $b^2 = 4km$ para el sistema mecánico y en $R^2 = 4L/C$ para el eléctrico. ¿Puede usted encontrar otros aspectos de esta analogía?

Las aplicaciones prácticas del circuito *L-R-C* en serie surgen cuando se incluye una fuente de fem con variación sinusoidal en el circuito. Esto es análogo a las *oscilaciones forzadas* que se estudiaron en la sección 14.7, y hay efectos de *resonancia* análogos. Un circuito como el descrito se llama de *corriente alterna (ca)*, que será el tema principal del siguiente capítulo.



Ejemplo 30.10 Circuito *L-R-C* en serie subamortiguado

¿Qué resistencia se requiere (en términos de L y C) para impartir a un circuito *L-R-C* una frecuencia equivalente a la mitad de la frecuencia no amortiguada?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Este problema tiene que ver con un circuito subamortiguado *L-R-C* en serie (figura 30.16*a*). Queremos que la resistencia sea suficientemente grande como para que se reduzca la frecuencia de oscilación a la mitad del valor subamortiguado. La ecuación (30.29) da la frecuencia angular ω' de un circuito *L-R-C* en serie subamortiguado; la ecuación (30.22) da la frecuencia angular ω de un circuito *L-C* no amortiguado. Utilizamos estas dos ecuaciones para despejar la incógnita R.

EJECUTAR: De acuerdo con las ecuaciones (30.29) y (30.22), el requisito $\omega' = \omega/2$ produce

$$\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{LC}}$$

Después de elevar al cuadrado ambos lados y despejar R:

$$R = \sqrt{\frac{3L}{C}}$$

Por ejemplo, al agregar 35 Ω al circuito del ejemplo 30.8 ($L = 10$ mH, $C = 25\ \mu$F), la frecuencia se reduciría de 320 a 160 Hz.

EVALUAR: El circuito alcanza la amortiguación crítica sin oscilaciones cuando $R = \sqrt{4L/C}$. Nuestro resultado para R es menor que eso, como debe ser; queremos que el circuito sea *sub*amortiguado.

Evalúe su comprensión de la sección 30.6 Un circuito *L-R-C* en serie incluye un resistor de 2.0 Ω. En $t = 0$ la carga del capacitor es de 2.0 μC. ¿Para cuáles de los siguientes valores de inductancia y capacitancia la carga en el capacitor *no* oscilará? **i.** $L = 3.0\ \mu$H, $C = 6.0\ \mu$F; **ii.** $L = 6.0\ \mu$H, $C = 3.0\ \mu$F; **iii.** $L = 3.0\ \mu$H, $C = 3.0\ \mu$F. ❙

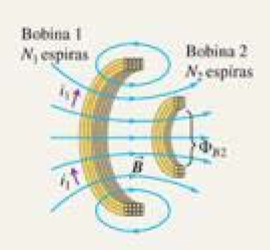


Inductancia mutua: Cuando una corriente variable i_1 en un circuito ocasiona un flujo magnético cambiante en un segundo circuito, en este último se induce una fem $\mathcal{E}_2$. Del mismo modo, una corriente cambiante i_2 en el segundo circuito induce una fem $\mathcal{E}_1$ en el primero. Si los circuitos son bobinas de alambre con N_1 y N_2 espiras, la inductancia mutua M se expresa en términos del flujo medio Φ_{B2} a través de cada espira de la bobina 2 que es ocasionado por la corriente i_1 en la bobina 1, o en términos del flujo medio Φ_{B1} a través de cada espira de la bobina 1 ocasionado por la corriente i_2 en la bobina 2. La unidad del SI de la inductancia mutua es el henry, que se abrevia con H. (Véase los ejemplos 30.1 y 30.2).

$$\mathcal{E}_2 = -M\frac{di_1}{dt} \quad \text{y}$$

$$\mathcal{E}_1 = -M\frac{di_2}{dt} \qquad (30.4)$$

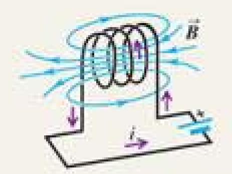
$$M = \frac{N_2\Phi_{B2}}{i_1} = \frac{N_1\Phi_{B1}}{i_2} \qquad (30.5)$$



Autoinductancia: Una corriente i variable en cualquier circuito ocasiona una fem $\mathcal{E}$ autoinducida. La inductancia (o autoinductancia) L depende de la geometría del circuito y del material que lo rodea. La inductancia de una bobina de N espiras se relaciona con el flujo medio Φ_B a través de cada espira creado por la corriente i en la bobina. Un inductor es un elemento de circuito, que por lo general incluye una bobina de alambre, cuya finalidad es tener una inductancia sustancial. (Véase los ejemplos 30.3 y 30.4).

$$\mathcal{E} = -L\frac{di}{dt} \qquad (30.7)$$

$$L = \frac{N\Phi_B}{i} \qquad (30.6)$$

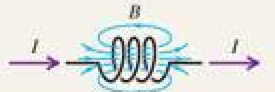


Energía del campo magnético: Un inductor con inductancia L que lleve corriente I tiene energía U asociada con el campo magnético del inductor. La densidad de energía magnética u (energía por unidad de volumen) es proporcional al cuadrado de la magnitud del campo magnético. (Véase el ejemplo 30.5).

$$U = \tfrac{1}{2}LI^2 \qquad (30.9)$$

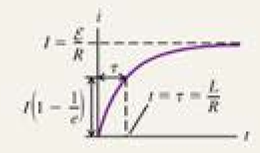
$$u = \frac{B^2}{2\mu_0} \quad \text{(en el vacío)} \qquad (30.10)$$

$$u = \frac{B^2}{2\mu} \quad \text{(en un material con permeabilidad magnética } \mu\text{)} \qquad (30.11)$$



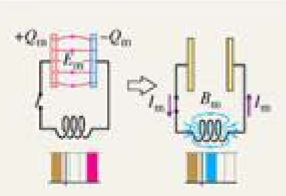
Circuitos *R-L*: En un circuito que contiene un resistor R, un inductor L y una fuente de fem, el crecimiento y el decaimiento de la corriente son exponenciales. La constante de tiempo τ es el tiempo requerido para que la corriente se aproxime a una fracción $1/e$ de su valor final. (Véase los ejemplos 30.6 y 30.7).

$$\tau = \frac{L}{R} \qquad (30.16)$$



Circuitos *L-C*: Un circuito que contiene inductancia L y capacitancia C experimenta oscilaciones eléctricas con frecuencia angular ω que depende de L y C. Tal circuito es análogo a un oscilador armónico mecánico, con inductancia L análoga a la masa m, el recíproco de la capacitancia $1/C$ a la constante de fuerza k, la carga q al desplazamiento x y la corriente i a la velocidad v_x. (Véase los ejemplos 30.8 y 30.9).

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC}} \qquad (30.22)$$



Circuitos *L-R-C* en serie: Un circuito que contiene inductancia, resistencia y capacitancia experimenta oscilaciones amortiguadas para una resistencia suficientemente pequeña. La frecuencia ω' de las oscilaciones amortiguadas depende de los valores de L, R y C. Conforme R aumenta, el amortiguamiento se incrementa; si R es mayor que cierto valor, el comportamiento se vuelve sobreamortiguado y deja de haber grandes oscilaciones. (Véase el ejemplo 30.10).

$$\omega' = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} \qquad (30.29)$$

Circuito subamortiguado (R pequeña)



PROBLEMA PRÁCTICO **Análisis de un circuito *L-C***

Un circuito *L-C* consiste en un inductor de 60.0 mH y un capacitor de 250 μF. La carga inicial en el capacitor es 6.00 μC y la corriente inicial en el inductor es 0.400 mA. *a*) ¿Cuál es la máxima energía almacenada en el inductor? *b*) ¿Cuál es la corriente máxima en el inductor? *c*) ¿Cuál es el máximo voltaje a través del capacitor? *d*) Cuando la corriente en el inductor tiene la mitad de su valor máximo, ¿cuál es la energía almacenada en el inductor y el voltaje a través del capacitor?

GUÍA DE SOLUCIÓN

Véase el área de estudio MasteringPhysics® para conocer una solución con Video Tutor.



IDENTIFICAR y PLANTEAR

1. Un circuito *L-C* es un sistema conservativo porque no hay resistencia para disipar la energía. La energía oscila entre la energía eléctrica en el capacitor y la energía magnética almacenada en el inductor.
2. ¿Cuáles son las ecuaciones clave necesarias para describir el capacitor? ¿Y para describir el inductor?

EJECUTAR

3. Encuentre la energía inicial total en el circuito *L-C*. Utilice esto para determinar la energía máxima almacenada en el inductor durante la oscilación.
4. Utilice el resultado del paso 3 para encontrar el máximo de corriente en el inductor.
5. Utilice el resultado del paso 3 para encontrar la energía máxima almacenada en el capacitor durante la oscilación. A continuación, utilice esto para encontrar el voltaje máximo del capacitor.
6. Determine la energía en el inductor y la carga del capacitor cuando la corriente tiene la mitad del valor que se encuentra en el paso 4.

EVALUAR

7. Inicialmente, ¿qué fracción de la energía total está en el inductor? ¿Es posible decir si esto inicialmente aumenta o disminuye?

Problemas

Para tareas asignadas por el profesor, visite www.masteringphysics.com MP

•, ••, •••: Problemas de dificultad creciente. **PA**: Problemas acumulativos que incorporan material de capítulos anteriores. **CALC**: Problemas que requieren cálculo. **BIO**: Problemas de ciencias biológicas.

PREGUNTAS PARA ANÁLISIS

P30.1 En un trolebús (autobús eléctrico), el motor del vehículo toma corriente de un alambre que corre por arriba por medio de un brazo largo con un dispositivo en su extremo que se desliza a lo largo del alambre. Con frecuencia se observa una chispa eléctrica brillante cuando el dispositivo cruza las uniones de los alambres, donde el contacto se pierde momentáneamente. Explique este fenómeno.

P30.2 De acuerdo con la ecuación (30.5), 1 H = 1 Wb/A, y según la ecuación (30.4), 1 H = 1 $\Omega \cdot$s. Demuestre que estas dos definiciones son equivalentes.

P30.3 En la figura 30.1, si la bobina 2 se hace girar 90° de manera que su eje sea vertical, ¿aumenta o disminuye la inductancia mutua? Explique su respuesta.

P30.4 El solenoide toroidal con embobinado muy compacto es una de las pocas configuraciones para las que es fácil calcular la autoinductancia. ¿Cuáles son las características que le dan esta sencillez?

P30.5 Dos bobinas circulares con devanados muy compactos son idénticas y cada una tiene inductancia *L*; se colocan muy cerca una de la otra, de manera que son coaxiales y casi se tocan. Si se conectan en serie, ¿cuál es la autoinductancia de la combinación? ¿Y cuál si se conectan en paralelo? ¿Se pueden conectar de manera que la inductancia total sea igual a cero? Explique su respuesta.

P30.6 Dos bobinas circulares con devanados muy compactos tienen el mismo número de espiras, pero una tiene un radio que mide el doble del radio de la otra. ¿Cómo se relacionan las autoinductancias de las dos bobinas? Explique su razonamiento.

P30.7 Usted va a construir un resistor devanando un alambre alrededor de un cilindro. Para hacer la inductancia tan pequeña como sea posible, le proponen que enrolle la mitad del alambre en un sentido, y la otra mitad en sentido contrario. ¿Esto daría el resultado que busca? ¿Por qué?

P30.8 Para la misma intensidad de campo magnético *B*, ¿la densidad de energía es mayor en el vacío o en un material magnético? Explique su respuesta. ¿La ecuación (30.11) implica que para un solenoide largo en el que la corriente es *I*, la energía almacenada es proporcional a $1/\mu$? ¿Y esto significa que para la misma corriente se almacena menos energía cuando el solenoide está lleno con un material ferromagnético que cuando contiene aire? Explique.

P30.9 En la sección 30.5, la regla de Kirchhoff de las mallas se aplica a un circuito *L-C* donde el capacitor está inicialmente cargado por completo y se obtiene la ecuación $-L\,di/dt - q/C = 0$. Pero conforme el capacitor comienza a descargarse, la corriente se incrementa desde cero. La ecuación nos dice que $L\,di/dt = -q/C$; por lo tanto, afirma que $L\,di/dt$ es negativo. Explique cómo puede ser negativo $L\,di/dt$ si la corriente va en aumento.

P30.10 En la sección 30.5 se usó la relación $i = dq/dt$ para obtener la ecuación (30.20). Pero un flujo de corriente corresponde a una disminución de la carga del capacitor. Entonces, explique por qué esta es la ecuación correcta para hacer la deducción, y no $i = -dq/dt$.

P30.11 En el circuito *R-L* que se ilustra en la figura 30.11, cuando se cierra el interruptor S_1, el potencial v_{ab} cambia súbitamente y en forma discontinua, a diferencia de la corriente. Explique por qué el voltaje puede cambiar de pronto pero la corriente no.

P30.12 En el circuito *R-L* que se ilustra en la figura 30.11, ¿la corriente en el resistor siempre es la misma que la corriente en el inductor? ¿Cómo se sabe?

P30.13 Suponga que hay una corriente estable en un inductor. Si trata de reducir la corriente a cero en forma instantánea abriendo rápidamente un interruptor, puede aparecer un arco donde el interruptor hace contacto. ¿Por qué? ¿Es físicamente posible detener la corriente de forma instantánea? Explique su respuesta.

P30.14 En un circuito *R-L-C*, ¿qué criterios podrían emplearse para decidir si el sistema está sobreamortiguado o subamortiguado? Por ejemplo, ¿podríamos comparar la energía máxima almacenada durante un ciclo con la energía disipada durante un ciclo? Explique.

EJERCICIOS

Sección 30.1 Inductancia mutua

30.1 • Dos bobinas tienen inductancia mutua $M = 3.25 \times 10^{-4}$ H. La corriente i_1 en la primera bobina aumenta con una razón uniforme de 830 A/s. *a*) ¿Cuál es la magnitud de la fem inducida en la segunda bobina? ¿Es constante? *b*) Suponga que la corriente descrita está en la segunda bobina y no en la primera. ¿Cuál es la magnitud de la fem inducida en la primera bobina?

30.2 • Dos bobinas están devanadas alrededor de la misma forma cilíndrica, como las del ejemplo 30.1. Cuando la corriente en la primera bobina disminuye a una razón de −0.242 A/s, la fem inducida en la segunda tiene una magnitud de 1.65×10^{-3} V. *a*) ¿Cuál es la inductancia mutua del par de bobinas? *b*) Si la segunda bobina tiene 25 espiras, ¿cuál es el flujo a través de cada espira cuando la corriente en la primera bobina es igual a 1.20 A? *c*) Si la corriente en la segunda bobina aumenta a razón de 0.360 A/s, ¿cuál es la magnitud de la fem inducida en la primera bobina?

30.3 • Un solenoide de 10.0 cm de largo y 0.400 cm de diámetro se enrolla uniformemente con 800 espiras. Una segunda bobina con 50 espiras se enrolla alrededor del solenoide en su centro. ¿Cuál es la inductancia mutua de la combinación de las dos bobinas?

30.4 • Una bobina en forma de solenoide con 25 espiras de alambre está devanada en forma compacta alrededor de otra bobina con 300 espiras (véase el ejemplo 30.1). El solenoide interior tiene 25.0 cm de longitud y 2.00 cm de diámetro. En cierto momento, la corriente en el solenoide interior es de 0.120 A y aumenta a una razón de 1.75×10^3 A/s. Para este momento, calcule *a*) el flujo magnético medio a través de cada espira del solenoide interno; *b*) la inductancia mutua de los dos solenoides; *c*) la fem inducida en el solenoide exterior al modificar la corriente en el solenoide interior.

30.5 • Dos solenoides toroidales están embobinados alrededor de la misma forma de manera que el campo magnético de uno pasa a través de las espiras del otro. El solenoide 1 tiene 700 espiras, y el solenoide 2 tiene 400. Cuando la corriente en el solenoide 1 es de 6.52 A, el flujo medio a través de cada espira del solenoide 2 es de 0.0320 Wb. *a*) ¿Cuál es la inductancia mutua del par de solenoides? *b*) Cuando la corriente en el solenoide 2 es de 2.54 A, ¿cuál es el flujo medio a través de cada espira del solenoide 1?

30.6 •• Un solenoide toroidal con un radio r medio y área de sección transversal A se enrolla uniformemente con N_1 espiras. Un segundo solenoide toroidal con N_2 espiras se enrolla uniformemente sobre el primero, de modo que los dos solenoides tienen la misma área de sección transversal y radio medio. *a*) ¿Cuál es la inductancia mutua de los dos solenoides? Suponga que el campo magnético del primer solenoide es uniforme en toda la sección transversal de los dos solenoides. *b*) Si $N_1 = 500$ espiras, $N_2 = 300$ espiras, $r = 10.0$ cm y $A = 0.800$ cm^2, ¿cuál es el valor de la inductancia mutua?

Sección 30.2 Autoinductancia e inductores

30.7 • Un solenoide toroidal de 2.50 mH tiene un radio medio de 6.00 cm y área de sección transversal de 2.00 cm^2. *a*) ¿Cuántas espiras tiene? (Haga la misma suposición que en el ejemplo 30.3). *b*) ¿A qué razón debe cambiar la corriente a través de este, de forma que se desarrolle una diferencia de potencial de 2.00 V a través de sus extremos?

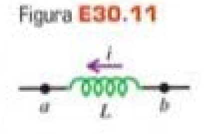
30.8 • Un solenoide toroidal tiene 500 espiras, área de sección transversal de 6.25 cm^2, y radio medio de 4.00 cm. *a*) Calcule la autoinductancia de la bobina. *b*) Si la corriente disminuye de manera uniforme de 5.00 a 2.00 A en 3.00 ms, calcule la fem autoinducida en la bobina. *c*) La corriente se dirige de la terminal a de la bobina a la b. El sentido de la fem inducida, ¿es de a a b, o de b a a?

30.9 • En el instante en que la corriente en un inductor aumenta a razón de 0.0640 A/s, la magnitud de la fem autoinducida es 0.0160 V. *a*) ¿Cuál es la inductancia del inductor? *b*) Si el inductor es un solenoide con 400 espiras, ¿cuál es el flujo magnético medio a través de cada espira, cuando la corriente es de 0.720 A?

30.10 •• Cuando la corriente en un solenoide toroidal cambia a razón de 0.0260 A/s, la magnitud de la fem inducida es de 12.6 mV. Cuando la corriente es igual a 1.40 A, el flujo medio a través de cada espira del solenoide es de 0.00285 Wb. ¿Cuántas espiras tiene el solenoide?

30.11 • El inductor de la figura E30.11 tiene una inductancia de 0.260 H y conduce una corriente en el sentido que se ilustra y que disminuye a una razón uniforme $di/dt = -0.0180$ A/s. *a*) Calcule la fem autoinducida. *b*) ¿Cuál extremo del inductor, a o b, está a un mayor potencial?

Figura **E30.11**



30.12 • El inductor que se ilustra en la figura E30.11 tiene una inductancia de 0.260 H y conduce una corriente en el sentido indicado. La corriente cambia a una razón constante. *a*) El potencial entre los puntos a y b es $V_{ab} = 1.04$ V, con el punto a con un mayor potencial. ¿La corriente aumenta o disminuye? *b*) Si la corriente en $t = 0$ es de 12.0 A, ¿cuál es la corriente en $t = 2.00$ s?

30.13 •• Un solenoide toroidal tiene un radio medio de 12.0 cm y área de sección transversal de 0.600 cm^2. *a*) ¿Cuántas espiras tiene el solenoide si su inductancia es de 0.100 mH? *b*) ¿Cuál es la resistencia del solenoide si el alambre del que se enrolla tiene una resistencia por unidad de longitud de 0.0760 Ω/m?

30.14 • Un solenoide largo y recto tiene 800 espiras. Cuando la corriente en el solenoide es 2.90 A, el flujo medio a través de cada espira del solenoide es 3.25×10^{-3} Wb. ¿Cuál debe ser la magnitud de la razón de cambio de la corriente para que la fem autoinducida sea igual a 7.50 mV?

30.15 •• **Inductancia de un solenoide.** *a*) Un solenoide largo y recto tiene N espiras, área de sección transversal uniforme A y longitud l. Demuestre que la inductancia de este solenoide está dada por la ecuación $L = \mu_0 A N^2/l$. Suponga que el campo magnético es uniforme dentro del solenoide e igual a cero en su exterior. (La respuesta será aproximada porque en realidad B es menor en los extremos que en el centro. Por esta razón, la respuesta es en realidad un límite superior de la inductancia). *b*) Un resorte metálico de laboratorio es típicamente de 5.00 cm de longitud y 0.150 cm de diámetro y tiene 50 espiras. Si este resorte se conecta en un circuito eléctrico, ¿cuánta autoinductancia debe considerársele a este, si se modela como un solenoide ideal?

Sección 30.3 Energía del campo magnético

30.16 • Un inductor que se utiliza en una fuente de energía eléctrica de cd tiene una inductancia de 12.0 H y resistencia de 180 Ω. Conduce una corriente de 0.300 A. *a*) ¿Cuál es la energía almacenada en el campo magnético? *b*) ¿A qué razón se desarrolla energía térmica en el inductor? *c*) ¿La respuesta del inciso *b*) significa que la energía del campo magnético disminuye con el tiempo? Explique su razonamiento.

30.17 • Un solenoide toroidal lleno de aire tiene un radio medio de 15.0 cm y área de sección transversal de 5.00 cm^2. Cuando la corriente es de 12.0 A, la energía almacenada es de 0.390 J. ¿Cuántas espiras tiene el embobinado?

30.18 • Un solenoide toroidal lleno de aire tiene 300 espiras de alambre, 12.0 cm de radio medio y 4.00 cm^2 de área de sección transversal. Si la corriente es de 5.00 A, calcule: *a*) el campo magnético en el solenoide; *b*) la autoinductancia del solenoide; *c*) la energía almacenada en el campo magnético; *d*) la densidad de energía en el campo magnético. *e*) Compruebe la respuesta para el inciso *d*) dividiendo la respuesta al inciso *c*) entre el volumen del solenoide.

30.19 •• Un solenoide, de 25.0 cm de longitud y área de sección transversal de 0.500 cm^2, contiene 400 espiras de alambre y conduce una corriente de 80.0 A. Calcule: *a*) el campo magnético en el solenoide; *b*) la densidad de energía en el campo magnético si el solenoide está lleno de aire; *c*) la energía total contenida en el campo magnético

de la bobina (suponga que el campo es uniforme); *d*) la inductancia del solenoide.

30.20 • Existe la propuesta de usar grandes inductores como dispositivos para almacenar energía. *a*) ¿Cuánta energía eléctrica convierte en luz y energía térmica una bombilla eléctrica de 200 W durante un día? *b*) Si la cantidad de energía calculada en el inciso *a*) se almacena en un inductor en el que la corriente es de 80.0 A, ¿cuál es la inductancia?

30.21 •• En un acelerador de protones utilizado en experimentos de física de partículas elementales, las trayectorias de los protones son controladas por imanes de flexión que producen un campo magnético de 4.80 T. ¿Cuál es la energía de campo magnético en un volumen de espacio de 10.0 cm^3 donde $B = 4.80$ *T*?

30.22 • Se ha propuesto almacenar $1.00 \text{ kW} \cdot \text{h} = 3.60 \times 10^6$ J de energía eléctrica en un campo magnético uniforme con magnitud de 0.600 T. *a*) ¿Qué volumen (en el vacío) debe ocupar el campo magnético para almacenar esa cantidad de energía? *b*) Si en vez de lo anterior, esa cantidad de energía fuera a almacenarse en un volumen (en el vacío) equivalente a un cubo de 40.0 cm por lado, ¿cuál sería el campo magnético que se requiere?

Sección 30.4 Circuito *R-L*

30.23 • Un inductor con inductancia de 2.50 H y resistencia de 8.00 Ω está conectado a las terminales de una batería con una fem de 6.00 V y resistencia interna despreciable. Determine *a*) la razón inicial de incremento de la corriente en el circuito; *b*) la razón de aumento de la corriente en el instante en que esta última es de 0.500 A; *c*) la corriente 0.250 s después de haber cerrado el circuito; *d*) la corriente en el estado estable final.

30.24 • En la figura 30.11, $R = 15.0$ Ω y la fem de la batería es de 6.30 V. Con el interruptor S_2 abierto, el interruptor S_1 se encuentra cerrado. Después de varios minutos se abre S_1 y se cierra S_2. *a*) 2.00 ms después de abrir el interruptor, la corriente ha disminuido a 0.320 A. Calcule la inductancia de la bobina. *b*) ¿Cuánto tiempo después de haber abierto S_1 la corriente alcanzará el 1.00% de su valor original?

30.25 • Una batería de 35.0 V con resistencia interna insignificante, un resistor de 50.0 Ω y un inductor de 1.25 mH con resistencia despreciable están conectados en serie con un interruptor abierto. El interruptor se cierra de forma súbita. *a*) ¿Cuánto tiempo después de cerrar el interruptor la corriente a través del inductor alcanzará la mitad de su valor máximo? *b*) ¿Cuánto tiempo después de cerrar el interruptor la energía almacenada en el inductor será la mitad de su máximo valor?

30.26 • En la figura 30.11, el interruptor S_1 está cerrado mientras el interruptor S_2 se encuentra abierto. La inductancia es $L = 0.115$ H y la resistencia es $R = 120$ Ω. *a*) Cuando la corriente ha alcanzado su valor final, la energía almacenada en el inductor es de 0.260 J. ¿Cuál es la fem $\mathcal{E}$ de la batería? *b*) Después de que la corriente ha alcanzado su valor final, se abre S_1 y se cierra S_2. ¿Cuánto tiempo se requiere para que la energía almacenada en el inductor disminuya a 0.130 J, la mitad de su valor original?

30.27 • En la figura 30.11, suponga que $\mathcal{E} = 60.0$ V, $R = 240$ Ω y $L = 0.160$ H. Con el interruptor S_2 abierto, se deja cerrado el S_1 hasta que se establece una corriente constante. Luego, S_2 se cierra y S_1 se abre, sacando la batería del circuito. *a*) ¿Cuál es la corriente inicial en el resistor justo después de que S_2 se cierra y S_1 se abre? *b*) ¿Cuál es la corriente en el resistor en $t = 4.00 \times 10^{-4}$ s? ¿Cuál es la diferencia de potencial entre los puntos *b* y *c* en $t = 4.00 \times 10^{-4}$ s? ¿Qué punto se encuentra a mayor potencial? *d*) ¿Cuánto tarda la corriente en disminuir a la mitad de su valor inicial?

30.28 • En la figura 30.11, suponga que $\mathcal{E} = 60.0$ V, $R = 240$ Ω y $L = 0.160$ H. Inicialmente, no hay corriente en el circuito. El interruptor S_2 se deja abierto, y el interruptor S_1 se cierra. *a*) Justo después de haber cerrado S_1, ¿cuáles son las diferencias de potencial v_{ab} y v_{bc}? *b*) Mucho tiempo (esto es, muchas constantes de tiempo) después de que S_1 se cierra, ¿cuáles son v_{ab} y v_{bc}? ¿Cuáles son v_{ab} y v_{bc} en un tiempo intermedio cuando $i = 0.150$ A?

30.29 • Remítase al circuito del ejercicio 30.23. *a*) ¿Cuál es la potencia de alimentación al inductor desde la batería como función del tiempo, si el circuito se completa en $t = 0$? *b*) ¿Cuál es la razón de disipación de energía en la resistencia del inductor como función del tiempo? *c*) ¿Cuál es la razón a la que aumenta la energía del campo magnético en el inductor, como función del tiempo? *d*) Compare los resultados de los incisos *a*), *b*) y *c*).

30.30 • En la figura 30.11 el interruptor S_1 está cerrado mientras el in-terruptor S_2 se mantiene abierto. La inductancia es $L = 0.380$ H, la resistencia es $R = 48.0$ Ω, y la fem de la batería es de 18.0 V. Un tiempo *t* después de que se cierra S_1, la corriente en el circuito está aumentando a razón de $di/dt = 7.20$ A/s. En este instante, ¿cuál es v_{ab}, el voltaje en el resistor?

Sección 30.5 Circuito *L-C*

30.31 • CALC Demuestre que la ecuación diferencial de la ecuación (30.20) se satisface por la función $q = Q \cos(\omega t + \phi)$, con ω dada por $1/\sqrt{LC}$.

30.32 •• Un capacitor de 20.0 μF se carga mediante una fuente de energía de 150.0 V, después se desconecta de la fuente y se conecta en serie con un inductor de 0.280 mH. Calcule: *a*) la frecuencia de oscilación del circuito; *b*) la energía almacenada en el capacitor en el momento $t = 0$ ms (cuando se conecta con el inductor); *c*) la energía almacenada en el inductor en $t = 1.30$ ms.

30.33 • Un capacitor de 7.50 nF se carga a 12.0 V, luego se desconecta de la fuente de energía y se conecta en serie con una bobina. Después se mide el periodo de oscilación del circuito, el cual resulta ser de 8.60×10^{-5} s. Calcule *a*) la inductancia de la bobina; *b*) la carga máxima en el capacitor; *c*) la energía total del circuito, y *d*) la corriente máxima en el circuito.

30.34 •• Se coloca un capacitor de 18.0 μF entre las terminales de una batería de 22.5 V durante varios segundos y luego se conecta entre los extremos de un inductor de 12.0 mH que no tiene resistencia apreciable. *a*) Determine la corriente máxima en el circuito después de conectar entre sí el capacitor y el inductor. Cuando la corriente alcanza su valor máximo, ¿cuál es la carga en el capacitor? *b*) Después de conectar entre sí el capacitor y el inductor, ¿cuánto tiempo tarda el capacitor en descargarse totalmente por primera vez? ¿Y por segunda vez? *c*) Dibuje gráficas de la carga en las placas del capacitor y de la corriente a través del inductor, como funciones del tiempo.

30.35 • **Oscilaciones de *L-C*.** Un capacitor con capacitancia de 6.00×10^{-5} F se carga conectándolo a una batería de 12.0 V. El capacitor se desconecta de la batería y se conecta entre los extremos de un inductor con $L = 1.50$ H. *a*) ¿Cuáles son la frecuencia angular ω de las oscilaciones eléctricas y el periodo de estas oscilaciones (el tiempo de una oscilación)? *b*) ¿Cuál es la carga inicial en el capacitor? *c*) ¿Cuánta energía hay almacenada inicialmente en el capacitor? *d*) ¿Cuál es la carga en el capacitor 0.0230 s después de haberlo conectado con el inductor? Interprete el signo de la respuesta. *e*) En el momento indicado en el inciso *d*), ¿cuál es la corriente en el inductor? Interprete el signo de su respuesta. *f*) En el momento citado en el inciso *d*), ¿cuánta energía eléctrica hay almacenada en el capacitor y cuánta en el inductor?

30.36 • **Circuito de sintonización de un radio.** La capacitancia mínima de un capacitor variable de un radio es de 4.18 pF. *a*) ¿Cuál es la inductancia de una bobina conectada a este capacitor si la frecuencia de oscilación del circuito *L-C* es de 1600×10^3 Hz, correspondiente a un extremo de la banda de radiodifusión de AM, cuando se ajusta el capacitor a su capacitancia mínima? *b*) La frecuencia en el otro extremo de la banda de difusión es de 540×10^3 Hz. ¿Cuál es la capacitancia máxima del capacitor si la frecuencia de oscilación es ajustable en todo el intervalo de la banda de difusión?

30.37 •• Un circuito *L-C*, que contiene un inductor de 80.0 mH y un capacitor de 1.25 nF, oscila con una corriente máxima de 0.750 A. Calcule: *a*) la carga máxima en el capacitor y *b*) la frecuencia de oscilación del circuito. *c*) Suponiendo que el capacitor tiene su carga máxima en el momento $t = 0$, calcule la energía almacenada en el inductor después de 2.50 ms de oscilación.

30.38 • En un circuito *L-C*, $L = 85.0$ mH y $C = 3.20$ μF. Durante las oscilaciones, la corriente máxima en el inductor es de 0.850 mA. *a*) ¿Cuál es la carga máxima en el capacitor? *b*) ¿Cuál es la magnitud de la carga en el capacitor en el instante en que la corriente en el inductor tiene una magnitud de 0.500 mA?

Sección 30.6 Circuito *L-R-C* en serie

30.39 • Un circuito *L-R-C* tiene $L = 0.450$ H, $C = 2.50 \times 10^{-5}$ F y resistencia *R*. *a*) ¿Cuál es la frecuencia angular del circuito cuando $R = 0$? *b*) ¿Qué valor debe tener *R* para que dé una disminución del 5.0 % en la frecuencia angular, en comparación con el valor calculado en el inciso *a*)?

30.40 • Para el circuito de la figura 30.17, sea $C = 15.0$ nF, $L = 22$ mH y $R = 75.0$ Ω. *a*) Calcule la frecuencia de oscilación del circuito una vez que el capacitor ha sido cargado y el interruptor se ha conectado al punto *a*. *b*) ¿Cuánto tiempo se requerirá para que la amplitud de las oscilaciones disminuya al 10.0% de su valor original? *c*) ¿Qué valor de *R* daría como resultado un circuito críticamente amortiguado?

30.41 • PA *a*) En la ecuación (14.41), sustituya *x* por *q*, *m* por *L*, *k* por $1/C$ y la constante de amortiguamiento *b* por *R*. Demuestre que el resultado es la ecuación (30.27). *b*) Efectúe las mismas sustituciones en la ecuación (14.43) y demuestre que resulta la ecuación (30.29). *c*) Realice las mismas sustituciones en la ecuación (14.42) y demuestre que el resultado es la ecuación (30.28).

30.42 • CALC *a*) Obtenga la primera y la segunda derivadas con respecto al tiempo de *q* dada por la ecuación (30.28), y demuestre que el resultado es una solución de la ecuación (30.27). *b*) En $t = 0$ se acciona el interruptor de la figura 30.17 en forma tal que conecta los puntos *d* y *a*; en ese instante, $q = Q$ e $i = dq/dt = 0$. Demuestre que las constantes ϕ y *A* en la ecuación (30.28) están dadas por

$$\tan\phi = -\frac{R}{2L\sqrt{(1/LC) - (R^2/4L^2)}} \quad \text{y} \quad A = \frac{Q}{\cos\phi}$$

PROBLEMAS

30.43 • Un solenoide está centrado dentro de otro. El solenoide exterior tiene una longitud de 50.0 cm y contiene 6750 espiras, mientras que el solenoide interior coaxial mide 3.0 cm de largo, 0.120 cm de diámetro y contiene 15 espiras. La corriente en el solenoide exterior cambia a 49.2 A/s. *a*) ¿Cuál es la inductancia mutua de los solenoides? *b*) Calcule la fem inducida en el solenoide interno.

30.44 •• CALC Una bobina tiene 400 espiras y una autoinductancia de 4.80 mH. La corriente en la bobina varía con el tiempo de acuerdo con $i = (680 \text{ mA})\cos(\pi t/0.0250 \text{ s})$. *a*) ¿Cuál es la fem máxima inducida en la bobina? *b*) ¿Cuál es el flujo medio máximo a través de cada espira de la bobina? *c*) En $t = 0.0180$ s, ¿cuál es la magnitud de la fem inducida?

30.45 • **Un circuito diferenciador.** Se hace variar la corriente con el tiempo en un inductor sin resistencia como se muestra en la figura P30.45. *a*) Dibuje el patrón que se observaría en la pantalla de un osciloscopio conectado a las terminales del inductor. (El osciloscopio realiza un barrido horizontal a lo ancho de la pantalla con rapidez constante, y su desviación vertical es proporcional a la diferencia de potencial entre las terminales del inductor). *b*) Explique por qué un circuito con un inductor se puede describir como un "circuito diferenciador".

Figura **P30.45**

30.46 •• CALC Un inductor de 0.250 H conduce una corriente variable en el tiempo, dada por la expresión $i = (124 \text{ mA})\cos[(240\pi/\text{s})t]$. *a*) Encuentre una expresión para la fem inducida como función del tiempo. Grafique la corriente y la fem inducida como funciones del tiempo, de $t = 0$ a $t = \frac{1}{60}$s. *b*) ¿Cuál es la fem máxima? ¿Cuál es la corriente cuando la fem inducida es máxima? *c*) ¿Cuál es la corriente máxima? ¿Cuál es la fem inducida cuando la corriente es máxima?

30.47 •• **Energía magnética solar.** Los campos magnéticos dentro de una mancha solar llegan a tener una intensidad tan grande como 0.4 T. (En comparación, el campo magnético terrestre es de alrededor de 1/10,000 de ese valor). Las manchas solares tienen hasta 25,000 km de radio. El material en una mancha solar tiene una densidad de cerca de 3×10^{-4} kg/m^3. Suponga que μ para el material de la mancha solar es μ_0. Si el 100% de la energía del campo magnético almacenada en una mancha se pudiera usar para expulsar de la superficie del Sol el material de la mancha, ¿con qué rapidez sería expulsado el material? Compare el resultado con la rapidez de escape del Sol, que es de aproximadamente 6×10^5 m/s. (*Sugerencia:* Calcule la energía cinética que podría proveer el campo magnético a 1 m^3 de material de la mancha solar).

30.48 •• PA CALC **Cable coaxial.** Un conductor sólido y pequeño, con radio *a*, está sostenido por discos aislantes no magnéticos sobre el eje de un tubo de paredes delgadas con radio interior *b*. Los conductores interior y exterior transportan corrientes iguales *i* en sentidos opuestos. *a*) Con base en la ley de Ampère, determine el campo magnético en cualquier punto del volumen comprendido entre los conductores. *b*) Escriba la expresión para el flujo $d\Phi_B$ a través de una banda angosta de longitud *l* paralela al eje, de ancho *dr*, a una distancia *r* del eje del cable, y que se encuentra en el plano que contiene al eje. *c*) Integre su expresión del inciso *b*) con respecto al volumen comprendido entre los dos conductores para determinar el flujo total producido por una corriente *i* en el conductor central. *d*) Demuestre que la inductancia de un tramo del cable de longitud *l* es

$$L = l\frac{\mu_0}{2\pi}\ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

e) Use la ecuación (30.9) para calcular la energía almacenada en el campo magnético para una longitud *l* del cable.

30.49 •• PA CALC Considere el cable coaxial del problema 30.48. Los conductores transportan corrientes iguales *i* en sentidos opuestos. *a*) Con base en la ley de Ampère, determine el campo magnético en cualquier punto del volumen comprendido entre los conductores. *b*) A partir de la densidad de energía para un campo magnético, ecuación (30.10), calcule la energía almacenada en un cascarón delgado y cilíndrico entre los dos conductores. El cascarón cilíndrico tiene un radio interior *r*, un radio exterior $r + dr$ y longitud *l*. *c*) Integre su resultado del inciso *b*) con respecto al volumen comprendido entre los dos conductores para determinar la energía total almacenada en el campo magnético correspondiente a un tramo de longitud *l* del cable. *d*) Utilice su resultado del inciso *c*) y la ecuación (30.9) para calcular la inductancia *L* de un tramo de longitud *l* del cable. Compare su resultado con el valor de *L* calculado en el inciso *d*) del problema 30.48.

30.50 •• Un solenoide toroidal tiene un radio medio *r* y área de sección transversal *A*, y está embobinado de manera uniforme con N_1 espiras. Un segundo solenoide toroidal con N_2 espiras está embobinado de manera uniforme alrededor del primero. Las dos bobinas están devanadas en el mismo sentido. *a*) Obtenga una expresión para la inductancia L_1 cuando solo se usa la primera bobina, y otra expresión para L_2 cuando solo se utiliza la segunda bobina. *b*) Demuestre que $M^2 = L_1L_2$.

30.51 • *a*) ¿Cuál tiene que ser la autoinductancia de un solenoide para que almacene 10.0 J de energía cuando a través de él circule una corriente de 2.00 A? *b*) Si el diámetro de la sección transversal de este solenoide es de 4.00 cm y se devanan sus bobinas con una densidad de 10 espiras/mm, ¿qué tan largo tendría que ser el solenoide? (Véase el ejercicio 30.15). ¿Esta es una longitud realista para su uso en un laboratorio común?

30.52 • Un inductor está conectado a las terminales de una batería que tiene una fem de 12.0 V y resistencia interna insignificante. La corriente es de 4.86 mA, 0.940 ms después de completar la conexión. Transcurrido un tiempo largo, la corriente es de 6.45 mA. ¿Cuáles son *a*) la resistencia R del inductor y *b*) la inductancia L del inductor?

30.53 •• **CALC** **Continuación de los ejercicios 30.23 y 30.29.** *a*) ¿Cuánta energía está almacenada en el campo magnético del inductor una constante de tiempo después de que se ha conectado la batería? Calcule esto tanto con la integración de la expresión en el ejercicio 30.29*c*) como con la ecuación (30.9), y compare los resultados. *b*) Integre la expresión obtenida en el ejercicio 30.29*a*) para determinar la energía *total* suministrada por la batería durante el intervalo de tiempo considerado en el inciso *a*). *c*) Integre la expresión obtenida en el ejercicio 30.29*b*) para determinar la energía *total* disipada en la resistencia del inductor durante el mismo periodo. *d*) Compare los resultados obtenidos en los incisos *a*), *b*) y *c*).

30.54 •• **CALC** **Continuación del ejercicio 30.27.** *a*) ¿Cuál es la energía total almacenada inicialmente en el inductor? *b*) En $t = 4.00 \times 10^{-4}$ s, ¿con qué razón disminuye la energía almacenada en el inductor? *c*) En $t = 4.00 \times 10^{-4}$ s, ¿con qué razón se convierte la energía eléctrica en energía térmica en el resistor? *d*) Obtenga una expresión para la razón con que la energía eléctrica se convierte en energía térmica como función del tiempo. Integre esta expresión desde $t = 0$ hasta $t = \infty$ para obtener la energía eléctrica total disipada en el resistor. Compare el resultado con el del inciso *a*).

30.55 • **CALC** La ecuación que precede a la (30.27) puede convertirse en una relación para la energía. Multiplique ambos lados de esa ecuación por $-i = -dq/dt$. El primer término se vuelve i^2R. Demuestre que el segundo se puede escribir como $d\left(\frac{1}{2}Li^2\right)/dt$, y que es posible escribir el tercero como $d(q^2/2C)/dt$. ¿Qué dice la ecuación resultante acerca de la conservación de la energía en el circuito?

30.56 • Un capacitor de 7.00 μF inicialmente está cargado a un potencial de 16.0 V. Después se conecta en serie con un inductor de 3.75 mH. *a*) ¿Cuál es la energía total almacenada en este circuito? *b*) ¿Cuál es la corriente máxima en el inductor? ¿Cuál es la carga en las placas del capacitor en el instante en que la corriente en el inductor es máxima?

30.57 • **Alarma electromagnética para automóvil.** Su invento más reciente es una alarma para automóvil que emite un sonido de una frecuencia particularmente molesta de 3500 Hz. Para lograrlo, los circuitos de la alarma deben producir una corriente eléctrica alterna de la misma frecuencia. Por eso, su diseño incluye un inductor y un capacitor en serie. El voltaje máximo entre los extremos del capacitor va a ser de 12.0 V (el mismo que la batería del vehículo). Para producir un sonido suficientemente fuerte, el capacitor debe almacenar 0.0160 J de energía. ¿Qué valores de capacitancia e inductancia se deben elegir para el circuito de la alarma?

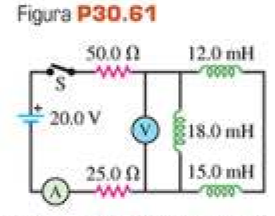
30.58 • Un circuito L-C consiste en un inductor de 60.0 mH y un capacitor de 250 μF. La carga inicial en el capacitor es de 6.00 μC, y la corriente inicial en el inductor es igual a cero. *a*) ¿Cuál es el voltaje máximo entre los extremos del capacitor? *b*) ¿Cuál es la corriente máxima en el inductor? *c*) ¿Cuál es la energía máxima almacenada en el inductor? *d*) Cuando la corriente en el inductor es la mitad de su valor máximo, ¿cuál es la carga en el capacitor y cuál la energía almacenada en el inductor?

30.59 •• Un capacitor de 84.0 nF se carga a 12.0 V, después se desconecta de la fuente de alimentación y se conecta en serie con una bobina que tiene $L = 0.0420$ H y una resistencia despreciable. En un instante cuando la carga en el capacitor es 0.650 μC, ¿cuál es la magnitud de la corriente en el inductor y cuál es la magnitud de la razón de cambio de esta corriente?

30.60 •• Un capacitor cargado con $C = 590$ μF está conectado en serie a un inductor que tiene $L = 0.330$ H y resistencia despreciable. En un instante cuando la corriente en el inductor es $i = 2.50$ A, la corriente se aumenta a una razón de $di/dt = 89.0$ A/s. Durante las oscilaciones de la corriente, ¿cuál es el máximo voltaje a través del capacitor?

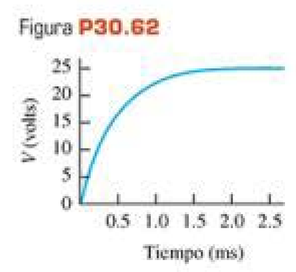
30.61 ••• **PA** En el circuito que se ilustra en la figura P30.61, el interruptor ha estado abierto durante un largo tiempo y se cierra de repente. Ni la batería ni los inductores tienen ninguna resistencia apreciable. *a*) ¿Qué leen el amperímetro y el voltímetro justo después de que se ha cerrado S? *b*) ¿Qué leen el amperímetro y el voltímetro después de que se ha cerrado S durante mucho tiempo? *c*) ¿Qué leen el amperímetro y el voltímetro después de 0.115 ms que se ha cerrado S?

Figura **P30.61**



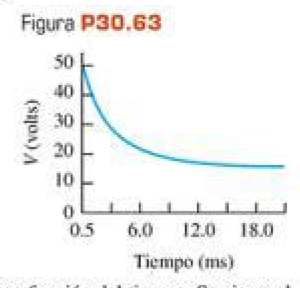
30.62 •• Al estudiar una bobina de inductancia y resistencia interna desconocidas, se le conecta en serie con una batería de 25.0 V y un resistor de 150 Ω. Después se coloca un osciloscopio entre los extremos de uno de estos elementos de circuito y se usa para medir el voltaje entre los extremos del elemento como función del tiempo. El resultado se ilustra en la figura P30.62. *a*) ¿A qué elemento de circuito (bobina o resistor) está conectado el osciloscopio? ¿Cómo se sabe esto? *b*) Calcule la inductancia y la resistencia interna de la bobina. *c*) Elabore con cuidado un diagrama cuantitativo que muestre el voltaje contra el tiempo que se observaría si se situara el osciloscopio entre los extremos del otro elemento de circuito (resistor o bobina).

Figura **P30.62**



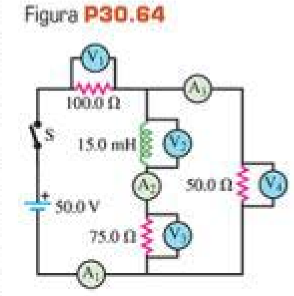
30.63 •• En el laboratorio, usted trata de determinar la inductancia y resistencia interna de un solenoide. Para ello, lo conecta en serie con una batería cuya resistencia interna es despreciable, un resistor de 10.0 Ω y un interruptor. A continuación acopla un osciloscopio entre los extremos de uno de estos elementos de circuito para medir el voltaje entre los extremos del elemento de circuito como función del tiempo. Se cierra el interruptor y el osciloscopio indica el voltaje contra el tiempo, como se aprecia en la figura P30.63. *a*) ¿A cuál elemento del circuito (solenoide o resistor) está conectado el osciloscopio? ¿Cómo lo sabe? *b*) ¿Por qué la gráfica no tiende a cero cuando $t \to \infty$? *c*) ¿Cuál es la fem de la batería? *d*) Determine la corriente máxima en el circuito. *e*) ¿Cuáles son la resistencia interna y la autoinductancia del solenoide?

Figura **P30.63**



30.64 •• **PA** En el circuito que se muestra en la figura P30.64, determine la lectura en cada amperímetro y voltímetro *a*) justo después de haber cerrado el interruptor S, y *b*) después de que S ha estado cerrado durante mucho tiempo.

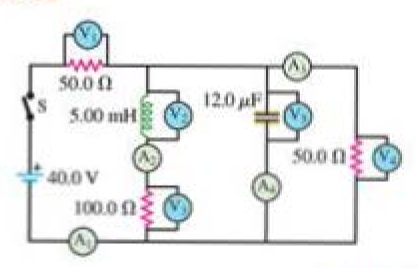
Figura **P30.64**



30.65 •• **PA** En el circuito que se ilustra en la figura P30.65, el interruptor S se cierra en el instante $t = 0$, sin carga inicial en el capacitor. *a*) Determine la lectura de cada amperímetro y voltímetro in-

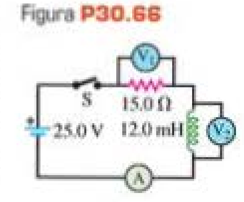
mediatamente después de cerrar S. *b*) Determine la lectura de cada instrumento de medición después de que ha transcurrido mucho tiempo. *c*) Calcule la carga máxima en el capacitor. *d*) Dibuje una gráfica cualitativa de la lectura del voltímetro V_2 como función del tiempo.

Figura **P30.65**



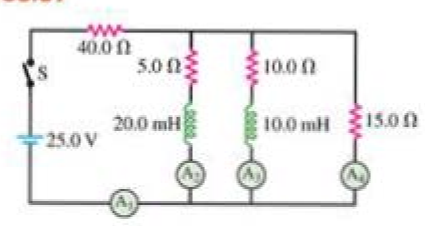
30.66 • En el circuito que se ilustra en la figura P30.66, la batería y el inductor no tienen resistencia interna apreciable y no hay corriente en el circuito. Después de cerrar el interruptor, calcule las lecturas del amperímetro (A) y los voltímetros (V_1 y V_2), *a*) en el instante después de cerrar el interruptor, y *b*) después de que el interruptor ha estado cerrado durante mucho tiempo. *c*) ¿Cuáles respuestas de los incisos *a*) y *b*) cambiarían si la inductancia fuera de 24.0 mH?

Figura **P30.66**



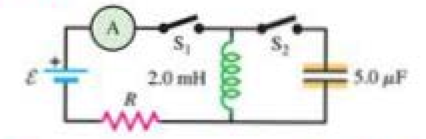
30.67 •• **PA** En el circuito que se aprecia en la figura P30.67, el interruptor S se cierra en el instante $t = 0$. *a*) Determine la lectura de cada instrumento de medición justo después de cerrar S. *b*) ¿Cuál es la lectura de cada instrumento mucho después de haber cerrado *S*?

Figura **P30.67**



30.68 •• En el circuito que se observa en la figura P30.68, el interruptor S_1 ha estado cerrado durante un tiempo prolongado, por lo que la lectura de la corriente es un valor estable de 3.50 A. De pronto, en el mismo instante se cierra el interruptor S_2 y se abre el S_1. *a*) ¿Cuál es la carga máxima que recibirá el capacitor? *b*) En ese momento, ¿cuál es la corriente en el inductor?

Figura **P30.68**



30.69 •• **PA** En el circuito que se presenta en la figura P30.69, $\mathcal{E} = 60.0$ V, $R_1 = 40.0\ \Omega$, $R_2 = 25.0\ \Omega$ y $L = 0.300$ H. El interruptor S se cierra en $t = 0$. Inmediatamente después de cerrar el interruptor, *a*) ¿cuál es la diferencia de potencial v_{ab} entre los extremos del resistor R_1?; *b*) ¿cuál punto, *a* o *b*, está a un potencial más alto?; *c*) ¿cuál es la diferencia de potencial v_{cd} entre los extremos del inductor *L*? *d*) ¿Cuál punto, *c* o *d*, está a un potencial más alto? Se deja cerrado el interruptor durante mucho tiempo y después se abre. Inmediatamente después de abrir el interruptor, *e*) ¿cuál es la diferencia de potencial v_{ab} entre los extremos del resistor R_1?; *f*) ¿cuál punto, *a* o *b*, está a un potencial más alto?; *g*) ¿cuál es la diferencia de potencial v_{cd} entre los extremos del inductor *L*?; *h*) ¿cuál punto, *c* o *d*, está a un potencial más alto?

Figura **P30.69**

30.70 •• **PA** En el circuito que se ilustra en la figura P30.69, $\mathcal{E} = 60.0$ V, $R_1 = 40.0\ \Omega$, $R_2 = 25.0\ \Omega$ y $L = 0.300$ H. *a*) El interruptor S está cerrado. En cierto momento *t* posterior, la corriente en el inductor aumenta a una razón de $di/dt = 50.0$ A/s. En ese instante, ¿cuáles son la corriente i_1 a través de R_1 y la corriente i_2 a través de R_2? (*Sugerencia:* Analice dos espiras separadas: una que contenga a $\mathcal{E}$ y R_1, y la otra a $\mathcal{E}$, R_2 y *L*). *b*) Después de que el interruptor ha estado cerrado durante mucho tiempo, se abre de nuevo. Inmediatamente después de abrirlo, ¿cuál es la corriente a través de R_1?

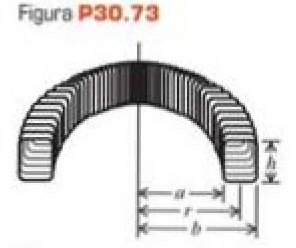
30.71 •• **CALC** Considere el circuito que se ilustra en la figura P30.71. Sea $\mathcal{E} = 36.0$ V, $R_0 = 50.0\ \Omega$, $R = 150\ \Omega$ y $L = 4.00$ H. *a*) El interruptor S_1 está cerrado y el S_2 se deja abierto. Inmediatamente después de cerrar S_1, ¿cuáles son la corriente i_0 a través de R_0 y las diferencias de potencial v_{ac} y v_{cb}? *b*) Después de que S_1 ha estado cerrado mucho tiempo (S_2 sigue abierto), de manera que la corriente ha alcanzado su valor final y estable, ¿cuáles son i_0, v_{ac} y v_{cb}? *c*) Encuentre las expresiones para i_0, v_{ac} y v_{cb} como funciones del tiempo *t* desde que S_1 fue cerrado. Los resultados deben concordar con el inciso *a*) cuando $t = 0$ y con el inciso *b*) cuando $t \rightarrow \infty$. Elabore una gráfica de i_0, v_{ac} y v_{cb} contra el tiempo.

Figura **P30.71**

30.72 •• Una vez que la corriente en el circuito de la figura P30.71 ha alcanzado su valor final y estable, con el interruptor S_1 cerrado y el S_2 abierto, se cierra este interruptor S_2, lo que hace que el inductor quede en cortocircuito. (El interruptor S_1 permanece cerrado. Véase el problema 30.71 para tener los valores numéricos de los elementos de circuito). *a*) Justo después de cerrar S_2, ¿cuáles son los valores de v_{ac} y v_{cb}, y cuáles los de las corrientes a través de R_0, *R* y S_2? *b*) Mucho tiempo después de haberse cerrado S_2, ¿cuáles son v_{ac} y v_{cb}, y cuáles son las corrientes a través de R_0, *R* y S_2? *c*) Obtenga expresiones para las corrientes a través de R_0, *R* y S_2 como funciones del tiempo *t* que ha transcurrido desde que se cerró S_2. Sus resultados deben concordar con el inciso *a*) cuando $t = 0$, y con el *b*) cuando $t \rightarrow \infty$. Grafique estas tres corrientes contra el tiempo.

30.73 ••• **PA CALC** Se han ignorado las variaciones del campo magnético en toda la sección transversal de un solenoide toroidal. Estudiemos la validez de ese método. Cierto solenoide toroidal tiene sección transversal rectangular (figura P30.73). Tiene *N* espiras espaciadas de manera uniforme, con aire en el interior. El campo magnético en un punto dentro del toroide está dado por la ecuación obtenida en el ejemplo 28.10 (sección 28.7). *No* suponga que el campo es uniforme en toda la sección transversal. *a*) Demuestre que el flujo magnético a través de una sección transversal del toroide es

Figura **P30.73**



$$\Phi_B = \frac{\mu_0 N i h}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

b) Demuestre que la inductancia del solenoide toroidal está dada por

$$L = \frac{\mu_0 N^2 h}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

c) La fracción b/a se puede escribir como

$$\frac{b}{a} = \frac{a + b - a}{a} = 1 + \frac{b - a}{a}$$

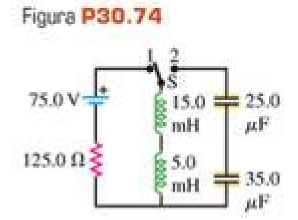
Use la expansión de series de potencias $\ln(1 + z) = z + z^2/2 + \cdots$, válida para $|z| < 1$, para demostrar que cuando $b - a$ es mucho menor que a, la inductancia es aproximadamente igual a

$$L = \frac{\mu_0 N^2 h(b - a)}{2\pi a}$$

Compare este resultado con el que se dio en el ejemplo 30.3 (sección 30.2).

30.74 ••• PA En el circuito que se ilustra en la figura P30.74, ni la batería ni los inductores tienen una resistencia apreciable, los capacitores están inicialmente descargados, y el interruptor *S* ha estado mucho tiempo en la posición 1. *a*) ¿Cuál es la corriente en el circuito? *b*) Ahora se acciona repentinamente el interruptor a la posición 2. Calcule la carga máxima que recibirá cada capacitor y cuánto tiempo se requerirá para adquirir esa carga a partir del momento en que fue accionado el interruptor.

Figura **P30.74**



30.75 ••• PA CALC **Demostración de la inductancia.** Una demostración común de la inductancia emplea un circuito como el de la figura P30.69. El interruptor S se encuentra cerrado y la bombilla eléctrica (representada por la resistencia R_1) apenas ilumina. Después de cierto tiempo, se abre el interruptor S y la bombilla se enciende con brillantez durante un breve tiempo. Para entender este efecto, piense en un inductor como un dispositivo que genera "inercia" en la corriente, lo que impide un cambio discontinuo en la corriente que pasa por él. *a*) Obtenga, como funciones explícitas del tiempo, expresiones para i_1 (la corriente a través de la bombilla) e i_2 (la corriente a través del inductor) después de cerrar el interruptor S. *b*) Después de un tiempo prolongado, las corrientes i_1 e i_2 alcanzan sus valores de estado estable. Obtenga expresiones para estas corrientes de estado estable. *c*) Ahora se abre el interruptor S. Obtenga una expresión para la corriente a través del inductor y la bombilla, como función explícita del tiempo. *d*) Se ha pedido al lector que diseñe un aparato para hacer una demostración usando el circuito que se ilustra en la figura P30.69, con un inductor de 22.0 H y una bombilla de 40.0 W. Va a conectarse en serie un resistor con el inductor, y R_2 representa la suma de esa resistencia más la resistencia interna del inductor. Cuando el interruptor S se abre, se genera una corriente momentánea que comienza en 0.600 A, la cual no debe disminuir a menos de 0.150 A antes de 0.0800 s. Para simplificar, suponga que la resistencia de la bombilla es constante e igual a la resistencia que la bombilla deberá tener para disipar 40.0 W a 120 V. Determine R_2 y $\mathcal{E}$ para las consideraciones de diseño dadas. *e*) Con los valores numéricos determinados en el inciso *d*), ¿cuál es la corriente a través de la bombilla justo antes de abrir el interruptor? ¿Este resultado confirma la descripción cualitativa de lo que se observa en la demostración?

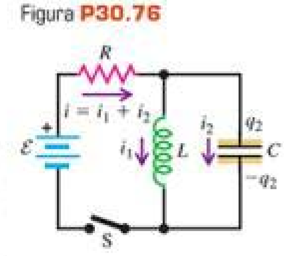
PROBLEMAS DE DESAFÍO

30.76 ••• PA CALC Considere el circuito que se ilustra en la figura P30.76. Los elementos de circuito son los siguientes: $\mathcal{E} = 32.0$ V, $L = 0.640$ H, $C = 2.00\ \mu$F y $R = 400\ \Omega$. En el instante $t = 0$, el interruptor S se cierra. La corriente a través del inductor es i_1, la corriente a través del ramal del capacitor es i_2, y la carga en el capacitor es q_2. *a*) Con base en las reglas de Kirchhoff, verifique las ecuaciones del circuito

$$R(i_1 + i_2) + L\left(\frac{di_1}{dt}\right) = \mathcal{E}$$

$$R(i_1 + i_2) + \frac{q_2}{C} = \mathcal{E}$$

Figura **P30.76**



b) ¿Cuáles son los valores iniciales de i_1, i_2 y q_2? *c*) Por sustitución directa, demuestre que las siguientes soluciones para i_1 y q_2 satisfacen las ecuaciones del circuito del inciso *a*). Asimismo, demuestre que satisfacen las condiciones iniciales

$$i_1 = \left(\frac{\mathcal{E}}{R}\right)[1 - e^{-\beta t}\{(2\omega RC)^{-1}\,\mathrm{sen}(\omega t) + \cos(\omega t)\}]$$

$$q_2 = \left(\frac{\mathcal{E}}{\omega R}\right)e^{-\beta t}\,\mathrm{sen}(\omega t)$$

donde $\beta = (2RC)^{-1}$ y $\omega = [(LC)^{-1} - (2RC)^{-2}]^{1/2}$. *d*) Determine el tiempo t_1 en el que i^2 disminuye a cero por primera vez.

30.77 ••• PA **Medidor de volumen.** Un tanque que contiene un líquido tiene espiras de alambre enrolladas, lo que hace que actúe como inductor. El contenido líquido del tanque puede medirse usando su inductancia para determinar la altura que alcanza el líquido en el interior del tanque. La inductancia del tanque cambia de un valor de L_0 correspondiente a una permeabilidad relativa de 1, cuando el tanque está vacío, a un valor de L_f que corresponde a una permeabilidad relativa de K_m (la permeabilidad relativa del líquido) cuando el tanque está lleno. Los circuitos electrónicos adecuados son capaces de determinar la inductancia con cinco cifras significativas y, por lo tanto, la permeabilidad relativa efectiva de la combinación de aire y líquido dentro de la cavidad rectangular del tanque. Los cuatro lados del tanque tienen una anchura de W y altura D (figura P30.77). La altura del líquido en el tanque es d. Pueden ignorarse los efectos de los bordes, y suponga que también se puede ignorar la permeabilidad relativa del material de que está hecho el tanque. *a*) Obtenga una expresión para d como función de L, la inductancia correspondiente a cierta altura de fluido, L_0, L_f y D. *b*) ¿Cuál es la inductancia (con cinco cifras significativas) para un tanque con su contenido a $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$ y $\frac{3}{4}$, y lleno por completo, si contiene oxígeno líquido? Tome $L_0 = 0.63000$ H. La susceptibilidad magnética del oxígeno líquido es $\chi_m = 1.52 \times 10^{-3}$. *c*) Repita el inciso *b*) para el mercurio. La susceptibilidad magnética del mercurio se da en la tabla 28.1. *d*) ¿Para cuál material es más práctico este medidor de volumen?

Figura **P30.77**



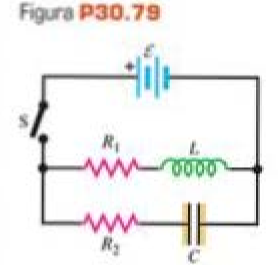
30.78 ••• Dos bobinas están enrolladas una alrededor de la otra, como se ilustra en la figura 30.3. La corriente fluye en el mismo sentido alrededor de cada bobina. Una de ellas tiene autoinductancia L_1 y la otra una autoinductancia L_2. La inductancia mutua de las dos bobinas es M. *a*) Demuestre que si las dos bobinas se conectan en serie, la inductancia equivalente de la combinación es $L_{eq} = L_1 + L_2 + 2M$. *b*) Demuestre que si las dos bobinas están conectadas en paralelo, la inductancia equivalente de la combinación es

$$L_{eq} = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 + L_2 - 2M}$$

30.79 ••• PA CALC Considere el circuito que se ilustra en la figura P30.79. El interruptor S se cierra en el instante $t = 0$, lo que ocasiona una corriente i_1 a través del ramal inductivo, y una corriente i_2 a través del ramal del capacitor. La carga inicial en el capacitor es igual a cero,

y la carga en el momento t es q_2. *a*) Obtenga expresiones para i_1, i_2 y q_2 como funciones del tiempo. Exprese sus respuestas en términos de $\mathcal{E}$, L, C, R_1, R_2 y t. Para el resto del problema, los elementos de circuito tendrán los siguientes valores: $\mathcal{E} = 48$ V, $L = 8.0$ H, $C = 20$ μF, $R_1 = 25$ Ω y $R_2 = 5000$ Ω. *b*) ¿Cuál es la corriente inicial a través del ramal inductivo? *c*) ¿Cuáles son las corrientes a través de los ramales del inductor y del capacitor mucho tiempo después de que se ha cerrado el interruptor? ¿Cuánto es "mucho tiempo"? Explique su respuesta. *d*) En qué momento t_1 (con una exactitud de dos cifras significativas) serán iguales las corrientes i_1 e i_2? (*Sugerencia:* Tal vez deba considerar el empleo de las expansiones de series en el caso de las exponenciales). *e*) Para las condiciones del inciso *d*), calcule i_1. *f*) La corriente total a través de la batería es $i = i_1 + i_2$. ¿En qué momento t_2 (con exactitud de dos cifras significativas) será i igual a la mitad de su valor final? (*Sugerencia:* El trabajo numérico se simplifica mucho si se hacen las aproximaciones adecuadas. Una gráfica de i_1 e i_2 contra t tal vez lo ayude a decidir cuáles aproximaciones son válidas).

Figura **P30.79**



Respuestas

Pregunta inicial de capítulo



Como se explicó en la sección 30.2, los sensores de los semáforos funcionan midiendo el cambio en la inductancia de una bobina enterrada bajo el pavimento cuando un automóvil pasa por encima de ella.

Preguntas de las secciones Evalúe su comprensión

30.1 Respuesta: iii. Duplicar tanto la longitud del solenoide (l) como el número de espiras de alambre en este (N_1) *no* tendría efecto en la inductancia mutua M. El ejemplo 30.1 indica que M depende de la razón de estas cantidades, las cuales permanecerían sin cambio. Esto se debe a que el campo magnético producido por el solenoide depende del número de espiras *por unidad de longitud*, y el cambio propuesto no tiene efecto sobre esta cantidad.

30.2 Respuesta: iv, i, iii, ii. De acuerdo con la ecuación (30.8), la diferencia de potencial a través del inductor es $V_{ab} = L\, di/dt$. Para los cuatro casos se encuentra que **i.** $V_{ab} = (2.0\ \mu\text{H})(2.0\ \text{A} - 1.0\ \text{A})/(0.50\ \text{s}) = 4.0\ \mu\text{V}$; **ii.** $V_{ab} = (4.0\ \mu\text{H})(0 - 3.0\ \text{A})/(2.0\ \text{s}) = -6.0\ \mu\text{V}$; **iii.** $V_{ab} = 0$ porque la razón de cambio de la corriente es igual a cero, y **iv.** $V_{ab} = (1.0\ \mu\text{H})(4.0\ \text{A} - 0)/(0.25\ \text{s}) = 16\ \mu\text{V}$.

30.3 Respuestas: *a*) sí, *b*) no La inversión del sentido de la corriente no tiene efecto sobre la magnitud del campo magnético, pero ocasiona que se invierta el sentido del campo magnético. No tiene efecto sobre la densidad de energía del campo magnético, que es proporcional al cuadrado de la *magnitud* del campo magnético.

30.4 Respuestas: *a*) i, *b*) ii. Recuerde que v_{ab} es el potencial en a menos el potencial en b, y de manera similar para v_{bc}. Para cualquier arreglo de los interruptores, la corriente fluye a través del resistor de a a b. El extremo corriente arriba del resistor siempre está en el potencial mayor, por lo que v_{ab} es positiva. Con S_1 cerrado y S_2 abierto, la corriente a través del inductor fluye de b a c y es creciente. La fem autoinducida se opone a este incremento, por lo que se dirige de c a b, lo que significa que b está a un potencial mayor. Por lo tanto, v_{bc} es positiva. Con S_1 abierto y S_2 cerrado, la corriente en el inductor otra vez fluye de b a c, pero ahora disminuye. La fem autoinducida se dirige de b a c en un esfuerzo por sostener la corriente que decae, por lo que c está a un potencial mayor y v_{bc} es negativa.

30.5 Respuestas: *a*) positivo, *b*) eléctrica, *c*) negativo, *d*) eléctrica El capacitor pierde energía entre las etapas *a*) y *b*), por lo que realiza trabajo positivo sobre las cargas. Esto lo logra ejerciendo una fuerza eléctrica que empuja la corriente lejos de la placa izquierda del capacitor con carga positiva y hacia la derecha con carga negativa. Al mismo tiempo, el inductor gana energía y efectúa trabajo negativo sobre las cargas en movimiento. Aunque el inductor almacena energía magnética, la fuerza que ejerce el inductor es *eléctrica*. Esta fuerza proviene de la fem autoinducida del inductor (véase la sección 30.2).

30.6 Respuestas: i y iii. No hay oscilaciones si $R^2 \geq 4L/C$. En cada caso, $R^2 = (2.0\ \Omega)^2 = 4.0\ \Omega^2$. En el caso **i.** $4L/C = 4(3.0\ \mu\text{H})/(6.0\ \mu\text{F}) = 2.0\ \Omega^2$, por lo que no hay oscilaciones (el sistema está sobreamortiguado); en el caso **ii.** $4L/C = 4(6.0\ \mu\text{H})/(3.0\ \mu\text{F}) = 8.0\ \text{W}^2$, de manera que hay oscilaciones (el sistema está subamortiguado), y en el caso **iii.** $4L/C = 4(3.0\ \mu\text{H})/(3.0\ \mu\text{F}) = 4.0\ \text{W}^2$, por lo que no hay oscilaciones (el sistema está críticamente amortiguado).

Problema práctico

Respuestas: ***a*)** 7.68×10^{-8} J ***b*)** 1.60 mA ***c*)** 24.8 mV
***d*)** 1.92×10^{-8} J, 21.5 mV

CORRIENTE ALTERNA





? Las ondas de una radiodifusora producen una corriente alterna en los circuitos de un receptor de radio (como el de este automóvil clásico). Si se sintoniza un radio en una estación cuya frecuencia es de 1000 kHz, ¿el receptor también detecta las transmisiones de otra estación que emite a 600 kHz?

OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

Al estudiar este capítulo, usted aprenderá:

- La forma en que los fasores facilitan la descripción de cantidades que varían en forma sinusoidal.
- Cómo usar la reactancia para describir el voltaje a través de un elemento de circuito que conduce una corriente alterna.
- Cómo analizar un circuito *L-R-C* en serie con fem sinusoidal.
- Qué determina la cantidad de energía que fluye hacia adentro o hacia afuera de un circuito de corriente alterna.
- Cómo responde un circuito *L-R-C* en serie a fuentes de fem sinusoidales de frecuencias diferentes.
- Por qué son útiles los transformadores y cómo funcionan.

Durante la década de 1880 en Estados Unidos hubo un acalorado y enconado debate entre dos inventores acerca del mejor método de distribución de energía eléctrica. Thomas Edison estaba a favor de la corriente directa (cd), es decir, la corriente constante que no varía con el tiempo. En cambio, George Westinghouse se inclinaba por la **corriente alterna (ca)**, con voltajes y corrientes que varían en forma sinusoidal. Westinghouse argumentaba que se podían usar transformadores (los cuales estudiaremos en este capítulo) para aumentar y reducir el voltaje de la ca, pero no de la cd; los voltajes bajos son más seguros de utilizar por los consumidores; no obstante, los altos voltajes y las correspondientes corrientes bajas son mejores para la transmisión de energía a grandes distancias para reducir al mínimo las pérdidas de i^2R en los cables.

A final de cuentas, prevaleció el punto de vista de Westinghouse, y en la actualidad la mayoría de los sistemas de distribución de energía para uso doméstico e industrial operan con corriente alterna. Cualquier aparato que se conecte a una toma de corriente en la pared usa ca, y muchos dispositivos cuya energía suministran baterías, como radios y teléfonos inalámbricos, emplean la cd así obtenida para crear o amplificar corrientes alternas. Los circuitos de los equipos modernos de comunicación, incluidos los radio-localizadores y la televisión, también utilizan ampliamente la ca.

En este capítulo aprenderemos cómo se comportan los resistores, inductores y capacitores en circuitos con voltajes y corrientes que cambian en forma sinusoidal. Son aplicables muchos de los principios que fueron útiles en los capítulos 25, 28 y 30, al igual que varios conceptos nuevos relacionados con el comportamiento de los inductores y capacitores en el circuito. Un concepto clave en este análisis es la *resonancia*, que estudiamos en el capítulo 14 (vol. 1) en relación con los sistemas mecánicos.

31.1 Fasores y corrientes alternas

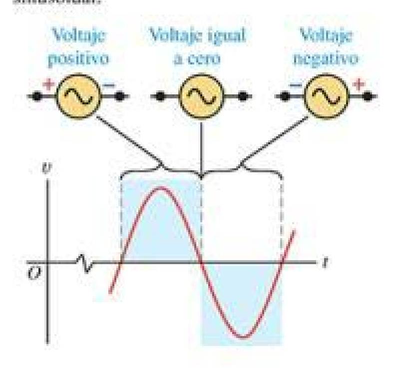
Para suministrar una corriente alterna a un circuito, se requiere una fuente de fem o de voltaje alternos. Un ejemplo de esto es una bobina de alambre que gira con velocidad angular constante en un campo magnético, lo que se estudió en el ejemplo 29.3 (sección 29.2). Así se crea una fem alterna sinusoidal y es el prototipo del generador comercial de corriente alterna o *alternador* (véase la figura 29.8).

Se aplica el término **fuente de ca** a cualquier dispositivo que suministre un voltaje (diferencia de potencial) v o una corriente i que varía en forma sinusoidal. El símbolo habitual de una fuente de ca en los diagramas de circuito es



Un voltaje sinusoidal queda descrito por una función como

$$v = V\cos\omega t \qquad (31.1)$$



31.1 Voltaje a través de una fuente de ca sinusoidal.

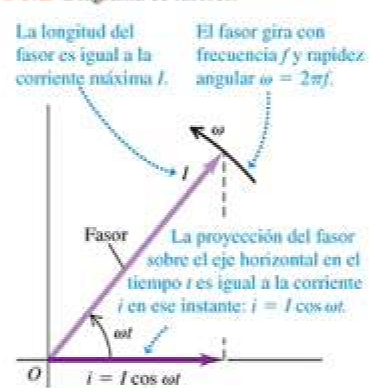
En esta expresión, v (minúscula) es la diferencia de potencial *instantánea*; V (mayúscula) es la diferencia de potencial máxima, y se llama **amplitud de voltaje**, y ω es la *frecuencia angular*, igual a 2π veces la frecuencia f (figura 31.1).

En Estados Unidos y Canadá, los sistemas comerciales de distribución de energía eléctrica siempre usan una frecuencia $f = 60$ Hz, que corresponde a $\omega = (2\pi \text{ rad})(60 \text{ s}^{-1}) = 377$ rad/s; en gran parte del resto del mundo se emplea $f = 50$ Hz ($\omega = 314$ rad/s). De manera similar, una corriente sinusoidal se describe como

$$i = I\cos\omega t \qquad (31.2)$$

donde i (minúscula) es la corriente instantánea, e I (mayúscula) es la corriente máxima o **amplitud de corriente**.

Diagramas de fasores



31.2 Diagrama de fasores.

Para representar voltajes y corrientes que varían en forma sinusoidal, usaremos diagramas de vectores giratorios similares a los empleados en el estudio del movimiento armónico simple de la sección 14.2 (véase las figuras 14.5*b* y 14.6). En estos diagramas el valor instantáneo de una cantidad que varía sinusoidalmente con respecto al tiempo se representa mediante la *proyección* sobre un eje horizontal de un vector con longitud igual a la amplitud de la cantidad. El vector gira en el sentido antihorario con rapidez angular constante ω. Estos vectores giratorios reciben el nombre de **fasores**, y los diagramas que los contienen se llaman **diagramas de fasores**. La figura 31.2 muestra un diagrama de fasores para la corriente sinusoidal descrita por la ecuación (31.2). La proyección del fasor sobre el eje horizontal en el tiempo t es $I\cos\omega t$; esta es la razón por la cual en la ecuación (31.2) elegimos utilizar la función coseno y no la de seno.

CUIDADO **Exactamente, ¿qué es un fasor?** Un fasor no es una cantidad física real con una dirección en el espacio, como la velocidad, el momento lineal o el campo eléctrico, sino que es una "entidad *geométrica*" que nos ayuda a describir y analizar cantidades físicas que varían de forma sinusoidal con el tiempo. En la sección 14.2 usamos un solo fasor para representar la posición de una masa puntual con movimiento armónico simple. En este capítulo usaremos fasores para *sumar* voltajes y corrientes sinusoidales, de manera que la combinación de cantidades sinusoidales con diferencias de fase se convierte entonces en un asunto de suma de vectores. En los capítulos 35 y 36 encontraremos un uso similar de los fasores, cuando estudiemos los efectos de interferencia de la luz. ❙

Corriente alterna rectificada

¿Cómo se mide una corriente que varía de manera sinusoidal? En la sección 26.3 usamos un galvanómetro de d'Arsonval para medir corrientes constantes. Pero si hacemos pasar una corriente *sinusoidal* a través de un medidor de d'Arsonval, la torca sobre la bobina móvil varía sinusoidalmente, en una dirección la mitad del tiempo, y con el sentido opuesto durante la otra mitad. La aguja quizá tiemble un poco si la frecuencia es suficientemente baja, pero su desviación media es igual a cero. De ahí que un galvanómetro de d'Arsonval no sea útil para medir corrientes alternas.

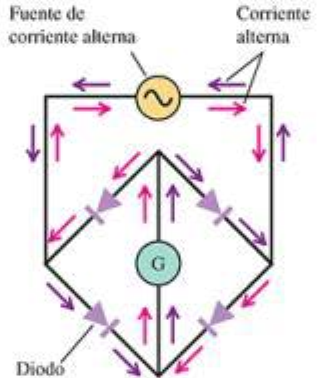
Para obtener una corriente medible en un solo sentido a través de un medidor podemos emplear *diodos*, los cuales describimos en la sección 25.3. Un diodo es un dispositivo que conduce mejor en una dirección que en la otra; un diodo ideal presenta resistencia nula en un sentido de la corriente y una resistencia infinita en el otro. En la figura 31.3*a* se presenta una configuración posible llamada *circuito rectificador de onda completa*. La corriente a través del galvanómetro G siempre va hacia arriba, sin importar la dirección de la corriente desde la fuente de ca (es decir, en qué parte del ciclo esté la fuente). La corriente a través de G es como se ilustra en la gráfica de la figura 31.3*b*: oscila, pero siempre tiene el mismo sentido por lo que la desviación media del medidor *no* es igual a cero.

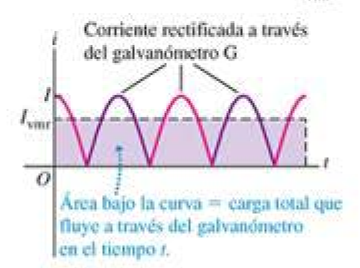
La **corriente de valor medio rectificada** I_{vmr} se define de manera que, durante cualquier número entero de ciclos, la carga total que fluye es la misma que habría si la corriente fuera constante con un valor igual a I_{vmr}. La notación I_{vmr} y el nombre corriente de *valor medio rectificada* ponen de relieve que este *no* es el promedio de la corriente sinusoidal original. En la figura 31.3*b* la carga total que fluye en el tiempo t corresponde al área bajo la curva de i en función de t (recuerde que $i = dq/dt$, por lo que q es la integral con respecto a t); esta área es igual al área rectangular con altura I_{vmr}. Se observa que I_{vmr} es menor que la corriente máxima I; las dos están relacionadas por

$$I_{vmr} = \frac{2}{\pi}I = 0.637I \quad \text{(valor medio rectificado de una corriente sinusoidal)} \quad (31.3)$$

(El factor de $2/\pi$ es el valor medio de $|\cos \omega t|$ o de $|\text{sen}\, \omega t|$; véase el ejemplo 29.4 en la sección 29.2). La desviación del galvanómetro es proporcional a I_{vmr}. La escala del galvanómetro se calibra para que lea I, I_{vmr} o, más comúnmente I_{rms} (que se estudiará a continuación).

31.3 *a*) Circuito rectificador de onda completa. *b*) Gráfica de la corriente resultante a través del galvanómetro G.





Valores cuadráticos medios (rms)

La forma más útil de describir una cantidad que puede ser positiva o negativa es el *valor cuadrático medio* (*rms*, por las siglas de *root mean square*). En la sección 18.3 usamos valores rms en relación con la rapidez de las moléculas de un gas. Se *eleva al cuadrado* la corriente instantánea i, se obtiene el valor *medio* (promedio) de i^2 y, por último, se obtiene la *raíz cuadrada* de ese valor. Este procedimiento define la **corriente cuadrática media**, que se denota con I_{rms} (figura 31.4). Aun cuando i sea negativa, i^2 siempre será positiva, por lo que I_{rms} nunca es igual a cero (a menos que i fuera cero en todo momento).

A continuación se ilustra cómo obtener I_{rms} para una corriente sinusoidal como la de la figura 31.4. Si la corriente instantánea está dada por $i = I\cos \omega t$, entonces,

$$i^2 = I^2 \cos^2 \omega t$$

Aplicando una fórmula trigonométrica para ángulos dobles,

$$\cos^2 A = \tfrac{1}{2}(1 + \cos 2A)$$

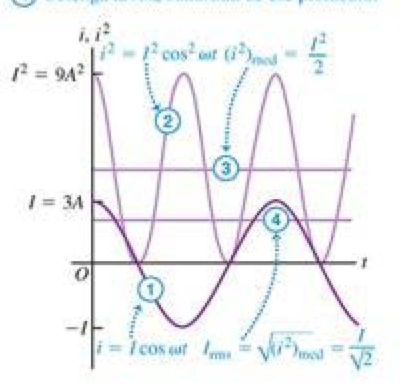
se obtiene

$$i^2 = I^2 \tfrac{1}{2}(1 + \cos 2\omega t) = \tfrac{1}{2}I^2 + \tfrac{1}{2}I^2 \cos 2\omega t$$

El promedio de $\cos 2\omega t$ es igual a cero porque la mitad del tiempo tiene un valor positivo y la otra mitad tiene un valor negativo. Así, el valor medio de i^2 es simplemente $I^2/2$. La raíz cuadrada de esto es I_{rms}.

$$I_{rms} = \frac{I}{\sqrt{2}} \quad \text{(valor cuadrático medio de una corriente sinusoidal)} \quad (31.4)$$

31.4 Cálculo del valor cuadrático medio (rms) de una corriente alterna.





31.5 Esta toma de pared entrega un voltaje rms de 120 V. Sesenta veces por segundo, el voltaje instantáneo entre sus terminales varía de $(\sqrt{2})(120\text{ V}) = 170\text{ V}$ a -170 V y viceversa.

De la misma manera, el valor cuadrático medio de un voltaje sinusoidal con amplitud (valor máximo) V es

$$V_{rms} = \frac{V}{\sqrt{2}} \quad \text{(valor cuadrático medio de un voltaje sinusoidal)} \tag{31.5}$$

Si se agrega un resistor en serie, es posible convertir un amperímetro rectificador en un voltímetro, igual que se hizo en el caso de cd analizado en la sección 26.3. Los medidores usados para medir voltajes y corrientes ca casi siempre están calibrados para leer valores rms, no el promedio máximo o rectificado. Los voltajes y las corrientes en los sistemas de distribución de energía siempre se describen en términos de sus valores rms. La línea de energía habitual de tipo doméstico, de "120 volts de ca", tiene un voltaje rms de 120 V (figura 31.5). La amplitud de voltaje es

$$V = \sqrt{2}V_{rms} = \sqrt{2}(120\text{ V}) = 170\text{ V}$$





Ejemplo 31.1 Corriente en una computadora personal

La placa en la parte posterior de una computadora personal indica que toma 2.7 A de una línea de 120 V y 60 Hz. Para esta computadora, ¿cuáles son los valores de *a*) la corriente media, *b*) la media del cuadrado de la corriente y *c*) la amplitud de la corriente?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Este ejemplo es sobre corriente alterna. En el inciso *a*) obtenemos el promedio de un ciclo completo de corriente alterna. Para el inciso *b*) identificamos que la corriente de 2.7 A requerida por la computadora es el valor rms y su I_{rms}, es decir, la *raíz cuadrada* de la *media* (promedio) del *cuadrado* de la corriente $(i^2)_{med}$. En el inciso *c*) usamos la ecuación (31.4) para relacionar I_{rms} con la amplitud de la corriente.

EJECUTAR: *a*) El promedio de *cualquier* cantidad con variación sinusoidal, en cualquier número de ciclos completos, es igual a cero.

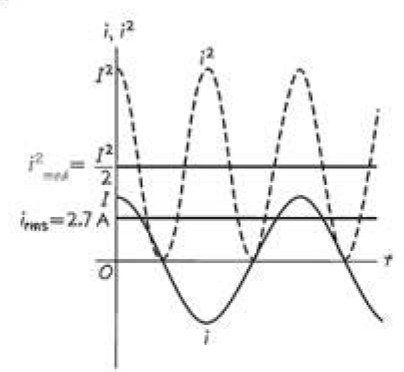
b) Se nos da $I_{rms} = 2.7$ A. Partiendo de la definición del valor rms,

$$I_{rms} = \sqrt{(i^2)_{med}} \quad \text{entonces} \quad (i^2)_{med} = (I_{rms})^2 = (2.7\text{ A})^2 = 7.3\text{ A}^2$$

c) De la ecuación (31.4), la amplitud de la corriente I es

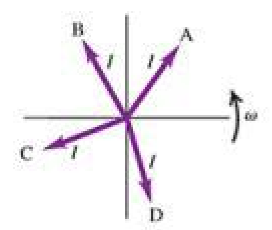
$$I = \sqrt{2}I_{rms} = \sqrt{2}(2.7\text{ A}) = 3.8\text{ A}$$

La figura 31.6 muestra las gráficas de i e i^2 en función del tiempo t.



31.6 Gráficas de la corriente i y el cuadrado de la corriente i^2 contra el tiempo t.

EVALUAR: ¿Por qué estaríamos interesados en el valor medio del cuadrado de la corriente? Recuerde que la tasa con la que se disipa energía en un resistor R es igual a i^2R. Esta tasa varía si la corriente es alterna, por lo que su valor medio la describe mejor: $(i^2)_{med}R = I_{rms}{}^2R$. En la sección 31.4 se utilizará esta idea.



Evalúe su comprensión de la sección 31.1 La figura de la izquierda muestra cuatro diferentes fasores de corriente con la misma frecuencia angular ω. En el momento ilustrado, ¿cuál fasor corresponde a *a*) una corriente positiva que se está haciendo más positiva; *b*) una corriente positiva que disminuye hacia cero; *c*) una corriente negativa que se está haciendo más negativa; *d*) una corriente negativa cuya magnitud disminuye hacia cero?

31.2 Resistencia y reactancia

En esta sección obtendremos las relaciones entre voltaje y corriente para elementos de circuito individuales que conducen una corriente sinusoidal. Consideraremos resistores, inductores y capacitores.

Resistores en un circuito de ca

En primer lugar, consideremos un resistor con resistencia R a través del cual circula una corriente sinusoidal dada por la ecuación (31.2): $i = I\cos\omega t$. El sentido positivo de la corriente es antihorario alrededor del circuito, como se indica en la figura 31.7*a*. La amplitud de la corriente (máxima corriente) es I. Según la ley de Ohm, el potencial instantáneo v_R del punto a con respecto al punto b (es decir, el voltaje instantáneo a través del resistor) es

$$v_R = iR = (IR)\cos\omega t \qquad (31.6)$$

El voltaje máximo V_R, la *amplitud del voltaje*, es el coeficiente de la función coseno:

$$V_R = IR \quad \text{(amplitud del voltaje a través de un resistor, circuito de ca)} \qquad (31.7)$$

Por lo tanto, también podemos escribir

$$v_R = V_R\cos\omega t \qquad (31.8)$$

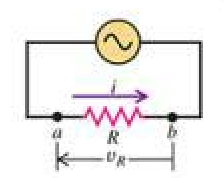
La corriente i y el voltaje v_R son proporcionales a $\cos\omega t$, así que la corriente está *en fase* con el voltaje. La ecuación (31.7) muestra que las amplitudes de corriente y de voltaje están relacionadas del mismo modo que en un circuito de cd.

La figura 31.7*b* presenta las gráficas de i y v_R, ambas como funciones del tiempo. Las escalas verticales para la corriente y el voltaje son distintas, de manera que las alturas relativas de las dos curvas no son significativas. La figura 31.7*c* muestra el diagrama de fasores correspondiente. Como i y v_R están *en fase* y tienen la misma frecuencia, los fasores de corriente y de voltaje giran juntos; son paralelos en todo instante. Sus proyecciones sobre el eje horizontal representan la corriente y el voltaje instantáneos, respectivamente.

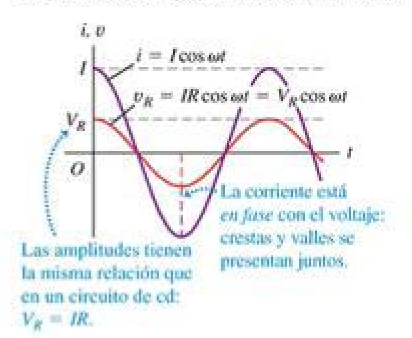
31.7 Resistencia R conectada a través de una fuente de ca.



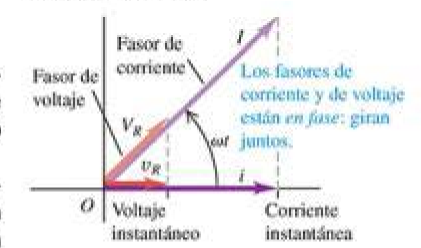
a) Circuito con una fuente de ca y un resistor



b) Gráficas de corriente y voltaje contra el tiempo



c) Diagrama de fasores



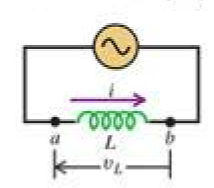
Inductor en un circuito de ca

A continuación sustituimos el resistor de la figura 31.7 por un inductor puro con autoinductancia L y resistencia igual a cero (figura 31.8*a*). Una vez más, suponemos que la corriente es $i = I\cos\omega t$, con el sentido positivo de la corriente tomada en sentido antihorario alrededor del circuito.

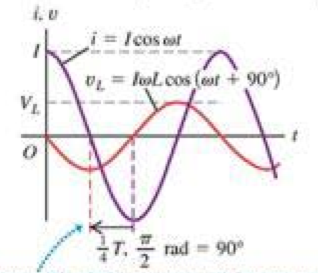
Aunque no hay resistencia, sí hay una diferencia de potencial v_L entre las terminales del inductor a y b porque la corriente varía con el tiempo, lo cual origina una fem autoinducida. Esta fem autoinducida en la dirección de i está dada por la ecuación (30.7), $\mathcal{E} = -L\,di/dt$; sin embargo, el voltaje v_L *no* es simplemente igual a $\mathcal{E}$. Para saber por qué, observe que si la corriente en el inductor fluye en sentido positivo (antihorario) de a a b y va en aumento, entonces, di/dt es positiva y la fem inducida se dirige hacia la izquierda para oponerse al aumento de la corriente; así, el punto a está a un mayor potencial que el punto b. Por lo tanto, el potencial del punto a con respecto al b es positivo y está dado por $v_L = +L\,di/dt$, el *negativo* de la fem inducida. (Compruebe por su cuenta que esta expresión da el signo correcto de v_L en *todos* los

31.8 Inductancia L conectada a través de una fuente de ca.

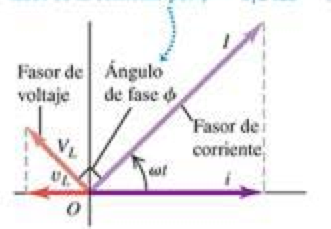
a) Circuito con fuente de ca y capacitor



b) Gráficas de corriente y voltaje contra el tiempo



c) Diagrama de fasores





ActivPhysics 14.3: AC Circuits: The Driven Oscillator (Questions 1–5)

casos, incluso cuando i va en el sentido antihorario y disminuye, cuando i va en el sentido horario y aumenta, y cuando i va en el sentido horario y disminuye; también es recomendable repasar la sección 30.2). Por lo tanto, tenemos

$$v_L = L\frac{di}{dt} = L\frac{d}{dt}(I\cos\omega t) = -I\omega L\operatorname{sen}\omega t \tag{31.9}$$

El voltaje v_L a través del inductor en cualquier instante es proporcional a la *razón de cambio* de la corriente. Los puntos de máximo voltaje en la gráfica corresponden a la inclinación máxima de la curva de corriente; en tanto que los puntos de voltaje igual a cero son aquellos donde la curva de la corriente se estabiliza por un instante en sus valores máximo y mínimo (figura 31.8*b*). El voltaje y la corriente "pierden el paso", es decir, están *fuera de fase*, por un cuarto de ciclo. Como los máximos de voltaje se presentan un cuarto de ciclo antes que los máximos de la corriente, se dice que el voltaje se *adelanta* a la corriente por 90°. El diagrama de fasores de la figura 31.8*c* también muestra esta relación; el fasor del voltaje está 90° adelante del fasor de la corriente.

Esta relación de fase también se obtiene si se rescribe la ecuación (31.9) utilizando la identidad $\cos(A + 90°) = -\operatorname{sen} A$:

$$v_L = I\omega L\cos(\omega t + 90°) \tag{31.10}$$

Este resultado indica que el voltaje puede verse como una función coseno con una "ventaja" de 90° en relación con la corriente.

Como hicimos en la ecuación (31.10), por lo general describiremos la fase del *voltaje* en relación con la *corriente*, y no a la inversa. Entonces, si la corriente i en un circuito es

$$i = I\cos\omega t$$

y el voltaje v de un punto con respecto a otro es

$$v = V\cos(\omega t + \phi)$$

se llama ϕ al **ángulo de fase**, el cual indica la fase del *voltaje* en relación con la *corriente*. Para un resistor puro, $\phi = 0$, y para un inductor puro $\phi = 90°$.

De la ecuación (31.9) o la (31.10), la amplitud V_L del voltaje inductor es

$$V_L = I\omega L \tag{31.11}$$

Se define la **reactancia inductiva** X_L de un inductor como

$$X_L = \omega L \qquad \text{(reactancia inductiva)} \tag{31.12}$$

Utilizando X_L, podemos escribir la ecuación (31.11) en una forma similar a la (31.7) para un resistor ($V_R = IR$):

$$V_L = IX_L \qquad \text{(amplitud de voltaje a través de un inductor, circuito de ca)} \tag{31.13}$$

Como X_L es la razón entre un voltaje y una corriente, su unidad en el SI es el ohm, que es la misma que la de la resistencia.

CUIDADO **El voltaje y la corriente en el inductor no están en fase** Recuerde que la ecuación (31.13) es una relación entre las *amplitudes* de voltaje y de corriente oscilantes del inductor en la figura 31.8*a*. *No* indica que el voltaje en cualquier instante sea igual a la corriente en ese instante multiplicada por X_L. Como se ilustra en la figura 31.8*b*, el voltaje y la corriente están 90° fuera de fase. El voltaje y la corriente están en fase únicamente en el caso de los resistores, como en la ecuación (31.6).

Significado de la reactancia inductiva

La reactancia inductiva X_L en realidad es una descripción de la fem autoinducida que se opone a cualquier cambio en la corriente a través del inductor. De acuerdo con la ecuación (31.13), para una amplitud de corriente I dada, el voltaje $v_L = +L\,di/dt$ a través del inductor y la fem autoinducida $\mathcal{E} = -L\,di/dt$ tienen ambos una amplitud V_L que es directamente proporcional a X_L. De acuerdo con la ecuación (31.12), la reactancia inductiva y la fem autoinducida se incrementan cuando la variación de la corriente es más rápida (es decir, con el incremento de la frecuencia angular ω) y cuando la inductancia L aumenta.

Si se aplica un voltaje oscilante de una amplitud dada V_L entre las terminales del inductor, la corriente resultante tendrá una amplitud I menor para valores mayores de X_L. Como X_L es proporcional a la frecuencia, un voltaje de alta frecuencia aplicado al inductor tan solo genera una corriente pequeña, mientras que un voltaje de baja frecuencia de la misma amplitud origina una corriente más grande. Los inductores se usan en ciertas aplicaciones de circuitos, como los sistemas de suministro de energía eléctrica y los filtros de interferencia de radio, para bloquear altas frecuencias, al mismo tiempo que se permite el paso de frecuencias bajas o de cd. El dispositivo de circuito que usa un inductor para este propósito se llama *filtro de paso bajo* (véase el problema 31.52).

Ejemplo 31.2 Inductor en un circuito de ca



La amplitud de la corriente en un inductor puro de un receptor de radio es de 250 μA cuando la amplitud del voltaje es de 3.60 V a una frecuencia de 1.60 MHz (correspondiente al extremo superior de la banda de transmisión de AM). *a*) ¿Cuál es la reactancia inductiva que se necesita? ¿Y qué inductancia? *b*) Si la amplitud del voltaje se mantiene constante, ¿cuál será la amplitud de la corriente a través de este inductor a 16.0 MHz? ¿Y a 160 kHz?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Quizás haya otros elementos de circuito, pero en este ejemplo no nos importa: todo lo que hacen es suministrar al inductor un voltaje oscilante, de ahí que todos los demás elementos de circuito estén agrupados en la fuente de ca, como se ilustra en la figura 31.8*a*. Se da la amplitud de la corriente I y la del voltaje V. Las incógnitas en el inciso *a*) son la reactancia inductiva X_L a 1.60 MHz y la inductancia L, que se obtienen con las ecuaciones (31.13) y (31.12). Conociendo L, usamos estas ecuaciones en el inciso *b*) para obtener X_L e I en cualquier frecuencia.

EJECUTAR: *a*) De acuerdo con la ecuación (31.13),

$$X_L = \frac{V_L}{I} = \frac{3.60\text{ V}}{250 \times 10^{-6}\text{ A}} = 1.44 \times 10^4\ \Omega = 14.4\text{ k}\Omega$$

A partir de la ecuación (31.12), con $\omega = 2\pi f$,

$$L = \frac{X_L}{2\pi f} = \frac{1.44 \times 10^4\ \Omega}{2\pi(1.60 \times 10^6\text{ Hz})} = 1.43 \times 10^{-3}\text{ H} = 1.43\text{ mH}$$

b) Al combinar las ecuaciones (31.12) y (31.13), se determina que $I = V_L/X_L = V_L/\omega L = V_L/2\pi f L$. Así, la amplitud de la corriente es inversamente proporcional a la frecuencia f. Como $I = 250\ \mu$A con $f = 1.60$ MHz, las amplitudes de la corriente en 16.0 MHz (10 f) y 160 kHz = 0.160 MHz (f/10) serán, respectivamente, un décimo de aquel valor (25.0 μA) y 10 veces mayor (2500 μA = 2.50 mA).

EVALUAR: En general, cuanto menor sea la frecuencia de un voltaje oscilante aplicado a través de un inductor, mayor será la amplitud de la corriente oscilante que resulta.

Capacitor en un circuito de ca

Por último, al conectar con la fuente un capacitor cuya capacitancia es C, como se observa en la figura 31.9*a*, se produce una corriente $i = I\cos\omega t$ a través del capacitor. De nuevo, el sentido positivo de la corriente es antihorario alrededor del circuito.

CUIDADO **Corriente alterna a través del capacitor** El lector tal vez objete que la carga en realidad no se puede desplazar a través del capacitor porque sus dos placas están aisladas entre sí. Eso es cierto, pero conforme el capacitor se carga y se descarga, en cada instante hay una corriente i que entra en una placa, una corriente igual que sale de la otra placa y una corriente de *desplazamiento* igual entre las placas, exactamente igual que si la carga se desplazara a través del capacitor. (Quizá desee repasar el análisis de la corriente de desplazamiento en la sección 29.7). Por eso es frecuente que hablemos de la corriente alterna *a través* de un capacitor.

Para calcular el voltaje instantáneo v_C a través del capacitor, es decir, el potencial del punto a con respecto al punto b, primero hacemos que q denote la carga en la placa izquierda del capacitor de la figura 31.9*a* (por lo que $-q$ es la carga en la placa del lado derecho). La corriente i se relaciona con q mediante $i = dq/dt$; con esta definición, la corriente positiva corresponde a una carga en aumento en la placa izquierda del capacitor. Entonces,

$$i = \frac{dq}{dt} = I\cos\omega t$$

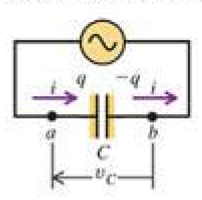
Al integrar esto,

$$q = \frac{I}{\omega}\operatorname{sen}\omega t \tag{31.14}$$

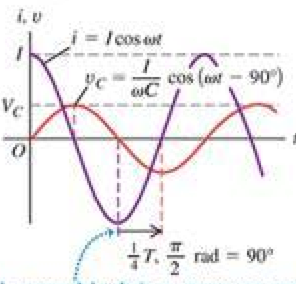
31.9 Capacitor C conectado a una fuente de ca.



a) Circuito con fuente de ca y capacitor

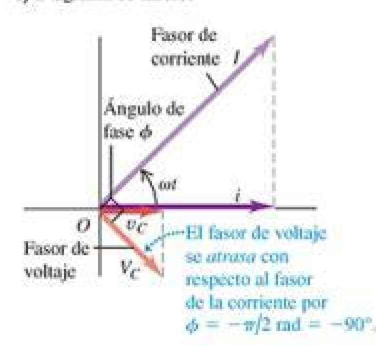


b) Gráficas de corriente y voltaje contra el tiempo



La curva del voltaje se *atrasa* con respecto a la curva de corriente por un cuarto de ciclo (correspondiente a $\phi = -\pi/2$ rad $= -90°$).

c) Diagrama de fasores



El fasor de voltaje se *atrasa* con respecto al fasor de la corriente por $\phi = -\pi/2$ rad $= -90°$.

Asimismo, de la ecuación (24.1), la carga q es igual al voltaje v_C multiplicado por la capacitancia, $q = Cv_C$. Al usar esta expresión en la ecuación (31.14), se obtiene

$$v_C = \frac{I}{\omega C}\,\mathrm{sen}\,\omega t \qquad (31.15)$$

La corriente instantánea i es igual a la razón de cambio dq/dt de la carga q en el capacitor; como $q = Cv_C$, i también es proporcional a la razón de cambio del voltaje. (Compare con un inductor, para el que la situación es la contraria y v_L es proporcional a la razón de cambio de i). La figura 31.9*b* presenta a v_C y a i como funciones de t. Como $i = dq/dt = C\,dv_C/dt$, la corriente tiene su magnitud más grande cuando la curva v_C sube o baja con mayor inclinación, y es igual a cero cuando la curva se estabiliza por un instante en sus valores máximo y mínimo.

El voltaje y la corriente del capacitor están fuera de fase por un cuarto de ciclo. Los máximos del voltaje se presentan un cuarto de ciclo *después* de los correspondientes máximos de la corriente, y se dice que el voltaje tiene un *retraso* de 90° con respecto a la corriente. El diagrama de fasores de la figura 31.9*c* muestra esta relación; el fasor de voltaje está detrás del fasor de corriente por un cuarto de ciclo, o 90°.

También se puede obtener esta diferencia de fase, si se rescribe la ecuación (31.15) empleando la identidad $\cos(A - 90°) = \mathrm{sen}\,A$:

$$v_C = \frac{I}{\omega C}\cos(\omega t - 90°) \qquad (31.16)$$

que corresponde a un ángulo de fase $\phi = -90°$. Esta función coseno tiene un "rezago" de 90° en comparación con la corriente $i = I\cos\omega t$.

Las ecuaciones (31.15) y (31.16) indican que el voltaje *máximo* V_C (la amplitud del voltaje) es

$$V_C = \frac{I}{\omega C} \qquad (13.17)$$

Para escribir esta expresión en una forma similar a la ecuación (31.7) de un resistor, $V_R = IR$, definimos una cantidad X_C, llamada **reactancia capacitiva** del capacitor, como

$$X_C = \frac{1}{\omega C} \qquad \text{(reactancia capacitiva)} \qquad (31.18)$$

Entonces,

$$V_C = IX_C \qquad \text{(amplitud del voltaje a través de un capacitor, circuito de ca)} \qquad (31.19)$$

La unidad del SI para X_C es el ohm, al igual que para la resistencia y la reactancia inductiva, ya que X_C es la razón entre un voltaje y una corriente.

CUIDADO **El voltaje y la corriente de un capacitor no están en fase** Recuerde que la ecuación (31.19) referente a un capacitor, como la ecuación (31.13) de un inductor, *no* es un enunciado acerca de los valores instantáneos del voltaje y la corriente. Los valores instantáneos en realidad están 90° fuera de fase, como se ilustra en la figura 31.9*b*. Más bien, la ecuación (31.19) relaciona las *amplitudes* del voltaje y de la corriente.

Significado de la reactancia capacitiva

La reactancia capacitiva de un capacitor es inversamente proporcional tanto a la capacitancia C como a la frecuencia angular ω; cuanto mayores sean la capacitancia y la frecuencia, *menor* será la reactancia capacitiva X_C. Los capacitores tienden a dejar pasar corriente de alta frecuencia, y a bloquear las corrientes de baja frecuencia y la cd: exactamente al contrario de los inductores. Un dispositivo que permite que pasen señales de alta frecuencia en forma preferencial se llama *filtro de paso alto* (véase el problema 31.51).



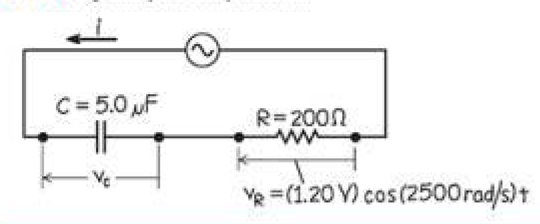
Ejemplo 31.3 Resistor y capacitor en un circuito de ca

Un resistor de 200 Ω está conectado en serie con un capacitor de 5.0 μF. El voltaje a través del resistor es $v_R = (1.20\text{ V})\cos(2500\text{ rad/s})t$ (figura 31.10). *a*) Obtenga una expresión para la corriente en el circuito. *b*) Determine la reactancia capacitiva del capacitor. *c*) Obtenga una expresión para el voltaje a través del capacitor.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Como este es un circuito en serie, la corriente es la misma a través del capacitor como a través del resistor. Las incógnitas son la corriente *i*, la reactancia capacitiva X_C y el voltaje v_C en el capacitor. Usamos la ecuación (31.6) para determinar una expresión de *i* en términos de la frecuencia angular $\omega = 2500$ rad/s, la ecuación (31.18) para obtener X_C, la ecuación (31.19) para obtener la amplitud del voltaje V_C en el capacitor, y la ecuación (31.16) para escribir una expresión para v_C.

31.10 Diagrama para este problema.



EJECUTAR: *a*) A partir de la ecuación (31.6), $v_R = iR$, se obtiene

$$i = \frac{v_R}{R} = \frac{(1.20\text{ V})\cos(2500\text{ rad/s})t}{200\ \Omega} = (6.0 \times 10^{-3}\text{ A})\cos(2500\text{ rad/s})t$$

b) De la ecuación (31.18), la reactancia capacitiva en $\omega = 2500$ rad/s es

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{(2500\text{ rad/s})(5.0 \times 10^{-6}\text{ F})} = 80\ \Omega$$

c) De la ecuación (31.19), la amplitud del voltaje en el capacitor es

$$V_C = IX_C = (6.0 \times 10^{-3}\text{ A})(80\ \Omega) = 0.48\text{ V}$$

(La reactancia de 80 Ω del capacitor es el 40% de la resistencia de 200 Ω del resistor, así que el valor de V_C es el 40% de V_R). El voltaje instantáneo del capacitor está dado por la ecuación (31.16):

$$v_C = V_C\cos(\omega t - 90°) = (0.48\text{ V})\cos[(2500\text{ rad/s})t - \pi/2\text{ rad}]$$

EVALUAR: Aunque la *corriente* a través del capacitor es la misma que a través del resistor, los *voltajes* a través de estos dos dispositivos son diferentes tanto en amplitud como en fase. Observe que en la expresión para v_C convertimos los 90° a $\pi/2$ rad, de manera que todas las cantidades angulares tengan las mismas unidades. En el análisis de un circuito de ca, es frecuente que los ángulos de fase estén dados en grados, por lo que se debe tener el cuidado de convertirlos a radianes cuando sea necesario.

Comparación de los elementos en un circuito de ca

La tabla 31.1 resume las relaciones de las amplitudes de corriente y voltaje correspondientes a los tres elementos de circuito que acabamos de estudiar. Observe de nuevo que el voltaje y la corriente *instantáneos* son proporcionales en un resistor, donde hay una diferencia de fase de cero entre v_R e *i* (véase la figura 31.7*b*). El voltaje y la corriente instantáneos *no* son proporcionales en un inductor ni en un capacitor, ya que en ambos casos hay una diferencia de fase de 90° (véase las figuras 31.8*b* y 31.9*b*).

La figura 31.11 ilustra el modo en que varían la resistencia de un resistor y las reactancias de un inductor y un capacitor con la frecuencia angular ω. La resistencia *R* es independiente de la frecuencia, mientras que las reactancias X_L y X_C no lo son. Si $\omega = 0$, que es el caso de un circuito de cd, *no* hay corriente a través de un capacitor porque $X_C \to \infty$, y no hay efecto inductivo porque $X_L = 0$. En el límite $\omega \to \infty$, X_L también tiende a infinito, y la corriente a través de un inductor disminuye hasta casi desaparecer. Recuerde que la fem autoinducida se opone a cambios rápidos de la corriente. En este mismo límite, tanto X_C como el voltaje a través del capacitor tienden a cero; la corriente cambia de dirección tan rápido que no se acumula carga en ninguna placa.

La figura 31.12 ilustra una aplicación del análisis anterior en un sistema de altavoces. Los sonidos de baja frecuencia son producidos por el *woofer*, que es un altavoz de diámetro grande; en tanto que el *tweeter*, un altavoz de diámetro pequeño, produce sonidos de alta frecuencia. Para dirigir las señales de frecuencia diferente al altavoz adecuado, el *woofer* y el *tweeter* se conectan en paralelo entre los extremos de la salida

31.11 Gráficas de R, X_L y X_C como funciones de la frecuencia angular ω.

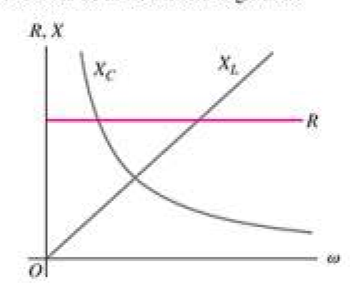
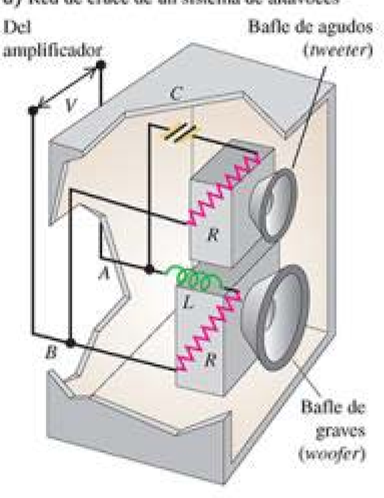


Tabla 31.1 Elementos de circuito con corriente alterna

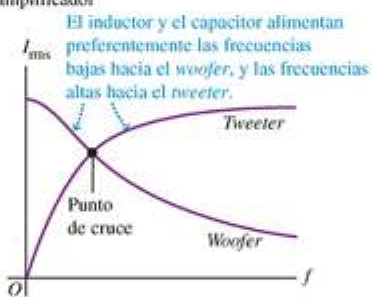
Elemento de circuito	Relación de amplitudes	Cantidad de circuito	Fase de v
Resistor	$V_R = IR$	R	En fase con i
Inductor	$V_L = IX_L$	$X_L = \omega L$	Se adelanta 90° a i
Capacitor	$V_C = IX_C$	$X_C = 1/\omega C$	Se retrasa 90° con respecto a i

31.12 *a*) Los dos bafles en este sistema de altavoz están conectados en paralelo con el amplificador. *b*) Gráficas de la amplitud de corriente en el *tweeter* y el *woofer* como funciones de la frecuencia para una amplitud de voltaje dada del amplificador.

a) Red de cruce de un sistema de altavoces



b) Gráficas de la corriente rms como funciones de la frecuencia para un voltaje dado del amplificador



del amplificador. El capacitor del ramal del *tweeter* bloquea los componentes de baja frecuencia del sonido, pero deja pasar las frecuencias más altas; el inductor del ramal del *woofer* hace lo contrario.

Evalúe su comprensión de la sección 31.2 Se aplica un voltaje oscilante de amplitud fija a través de un elemento de circuito. Si se incrementa la frecuencia de este voltaje, ¿la amplitud de la corriente a través del elemento **i.** aumentará, **ii.** disminuirá o **iii.** permanecerá igual, si se trata de *a*) un resistor, *b*) un inductor o *c*) un capacitor?



31.3 Circuito *L-R-C* en serie

Muchos de los circuitos de ca empleados en sistemas electrónicos prácticos implican resistencia, reactancia inductiva y reactancia capacitiva. La figura 31.13*a* muestra un ejemplo sencillo: un circuito en serie que contiene un resistor, un inductor, un capacitor y una fuente de ca. (En la sección 30.6 se consideró el comportamiento de la corriente en un circuito *L-R-C* en serie *sin* una fuente).

Para analizar este circuito y otros similares se empleará un diagrama de fasores que incluye los fasores de voltaje y de corriente para cada uno de los componentes. En este circuito, en virtud de la regla de Kirchhoff de las espiras, el voltaje *total* instantáneo v_{ad} a través de los tres componentes es igual al voltaje de la fuente en ese instante. Demostraremos que el fasor que representa este voltaje total es la *suma vectorial* de los fasores de los voltajes individuales.

En las figuras 31.13*b* y 31.13*c* se muestran los diagramas de fasores completos para el circuito de la figura 31.13*a*. Supongamos que la fuente suministra una corriente i dada por $i = I \cos \omega t$. Como los elementos de circuito están conectados en serie, la corriente en cualquier instante es la misma en cada punto del circuito. Así, *un solo fasor I*, con longitud proporcional a la amplitud de la corriente, representa la corriente en *todos* los elementos de circuito.

Al igual que en la sección 31.2, representaremos los voltajes instantáneos entre los extremos de R, L y C mediante los símbolos v_R, v_L y v_C; y los voltajes máximos con los símbolos V_R, V_L y V_C. Denotaremos el voltaje instantáneo y el voltaje máximo de la *fuente* con v y V. Así, en la figura 31.13a, $v = v_{ad}$, $v_R = v_{ab}$, $v_L = v_{bc}$ y $v_C = v_{cd}$.

Hemos demostrado que la diferencia de potencial entre las terminales de un resistor está *en fase* con la corriente en el resistor y que su valor máximo V_R está dado por la ecuación (31.7):

$$V_R = IR$$

31.13 Circuito *L-R-C* en serie con fuente de ca.



a) Circuito *L-R-C* en serie

a, i, d, R, $-q$, C, q, b, c, L

b) Diagrama de fasores para el caso $X_L > X_C$

El fasor de voltaje de la fuente es la suma vectorial de los fasores V_R, V_L y V_C.

El fasor de voltaje del inductor va 90° adelante del fasor de corriente.

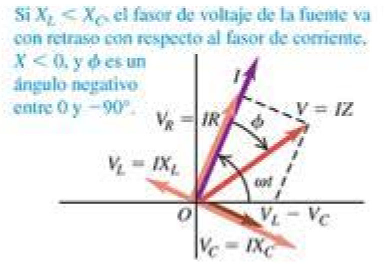
Todos los elementos del circuito tienen el mismo fasor de corriente.

$V_L = IX_L$, $V = IZ$, I, ϕ, ωt, $V_L - V_C$, $V_R = IR$, O, $V_C = IX_C$

El fasor de voltaje del capacitor lleva un retraso de 90° con respecto al fasor de corriente, por lo que siempre es antiparalelo con el fasor V_L.

El fasor de voltaje del resistor está en fase con el fasor de corriente.

c) Diagrama de fasores para el caso $X_L < X_C$



El fasor V_R en la figura 31.13*b*, en fase con el fasor de corriente *I*, representa el voltaje a través del resistor. Su proyección en el eje horizontal en cualquier instante da la diferencia de potencial instantánea v_R.

El voltaje a través de un inductor se *adelanta* 90° a la corriente y su amplitud de voltaje está dada por la ecuación (31.13):

$$V_L = IX_L$$

El fasor V_L en la figura 31.13*b* representa el voltaje a través del inductor, y su proyección sobre el eje horizontal en cualquier instante es igual a v_L.

El voltaje a través de un capacitor se *retrasa* 90° con respecto a la corriente. Su amplitud de voltaje está dada por la ecuación (31.19):

$$V_C = IX_C$$

El fasor V_C en la figura 31.13b representa el voltaje a través del capacitor y su proyección en el eje horizontal en cualquier instante es igual a v_C.

La diferencia de potencial instantánea v entre las terminales a y d es igual en cualquier instante a la suma (algebraica) de las diferencias de potencial v_R, v_L y v_C. Es decir, es igual a la suma de las *proyecciones* de los fasores V_R, V_L y V_C. Pero la suma de las proyecciones de estos fasores es igual a la *proyección* de su *suma vectorial*. Por lo tanto, la suma de vectores V debe ser el fasor que represente el voltaje de fuente v y el voltaje total instantáneo v_{ad} a través de la serie de elementos.

Para realizar esta suma vectorial primero, se resta el fasor V_C del fasor V_L. (Estos dos fasores siempre están a lo largo de la misma línea, con sentidos opuestos). Esto da el fasor $V_L - V_C$, que siempre forma un ángulo recto con el fasor V_R, de modo que, según el teorema de Pitágoras, la magnitud del fasor V es

$$V = \sqrt{V_R^2 + (V_L - V_C)^2} = \sqrt{(IR)^2 + (IX_L - IX_C)^2} \quad \text{o bien,}$$
$$V = I\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} \qquad (31.20)$$

Definimos la **impedancia** Z de un circuito de ca como la razón entre la amplitud del voltaje a través del circuito y la amplitud de la corriente en el circuito. De la ecuación (31.20), la impedancia del circuito *L-R-C* en serie es

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} \qquad (31.21)$$

así que la ecuación (31.20) se rescribe como

$$V = IZ \qquad \text{(amplitud de voltaje a través de un circuito de ca)} \qquad (31.22)$$

Si bien la ecuación (31.21) es válida solo para un circuito *L-R-C* en serie, es posible emplear la ecuación (31.22) para definir la impedancia de *cualquier* red de resistores, inductores y capacitores, como la razón de la amplitud del voltaje a través de la red y la amplitud de la corriente. La unidad del SI para la impedancia es el ohm.

Significado de la impedancia y el ángulo de fase

La ecuación (31.22) es análoga a $V = IR$, con la impedancia Z de un circuito de ca en el papel de la resistencia R en un circuito de cd. Así como la corriente directa tiende a seguir la trayectoria de menor resistencia, la corriente alterna tiende a seguir la trayectoria de mínima impedancia (figura 31.14). Sin embargo, observe que la impedancia en realidad es función de R, L y C, así como de la frecuencia angular ω. Esto lo podemos ver con claridad si en la ecuación (31.21) sustituimos X_L de la ecuación (31.12) y X_C de la ecuación (31.18), lo cual da la siguiente expresión completa para Z en un circuito en serie:

$$\begin{aligned} Z &= \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} \\ &= \sqrt{R^2 + [\omega L - (1/\omega C)]^2} \end{aligned} \qquad \text{(impedancia de un circuito } L\text{-}R\text{-}C \text{ en serie)} \qquad (31.23)$$

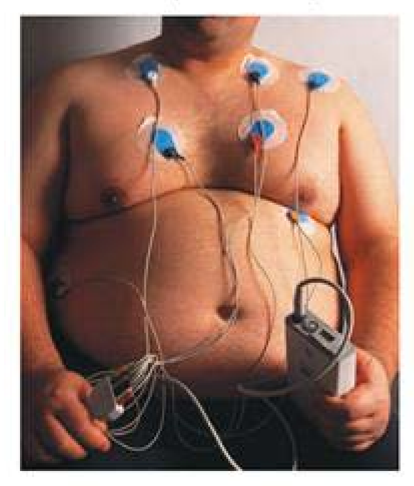
Mastering PHYSICS

PhET: Circuit Construction Kit (AC+DC)
PhET: Faraday's Electromagnetic Lab
ActivPhysics 14.3: AC Circuits: The Driven Oscillator (Questions 6, 7, and 10)

31.14 Esta esfera de vidrio llena de gas tiene un voltaje alterno entre su superficie y el electrodo en su centro. Los rayos brillantes muestran la corriente alterna resultante que pasa a través del gas. Cuando una niña toca la superficie exterior de la esfera, las puntas de los dedos y la superficie interior actúan como las placas de un capacitor; mientras que la esfera y el cuerpo, en conjunto, forman un circuito *L-R-C* en serie. La corriente (que es suficientemente baja e inofensiva) se dirige hacia los dedos porque la trayectoria a través del cuerpo tiene una impedancia baja.



Aplicación Medición de la grasa corporal mediante el análisis de la impedancia bioeléctrica
Los electrodos colocados en el pecho de este paciente con sobrepeso aplican un pequeño voltaje de ca con 50 kHz de frecuencia. Los instrumentos adheridos miden la amplitud y el ángulo de fase de la corriente resultante a través del cuerpo del paciente, los cuales dependen de las cantidades relativas de agua y grasa a lo largo de la trayectoria seguida por la corriente, proporcionando así una medida confiable de la composición del cuerpo.



De ahí que para una amplitud dada V del voltaje de fuente aplicado al circuito, la amplitud $I = V/Z$ de la corriente resultante será diferente a distintas frecuencias. Esta dependencia de la frecuencia se estudiará con más detalle en la sección 31.5.

En el diagrama de fasores que se ilustra en la figura 31.13*b*, el ángulo *f* entre los fasores de voltaje y de corriente es el ángulo de fase del voltaje de fuente v con respecto a la corriente i; es decir, es el ángulo con el que el voltaje de fuente se adelanta a la corriente. De acuerdo con el diagrama,

$$\tan\phi = \frac{V_L - V_C}{V_R} = \frac{I(X_L - X_C)}{IR} = \frac{X_L - X_C}{R}$$

$$\tan\phi = \frac{\omega L - 1/\omega C}{R} \quad \text{(ángulo de fase de un circuito } L\text{-}R\text{-}C \text{ en serie)} \tag{31.24}$$

Si la corriente es $i = I\cos\omega t$, entonces, el voltaje de fuente v es

$$v = V\cos(\omega t + \phi) \tag{31.25}$$

La figura 31.13*b* ilustra el comportamiento de un circuito donde $X_L > X_C$; y en la 31.13*c*, el caso en que $X_L < X_C$. El fasor de voltaje V está en el lado opuesto del fasor de corriente I y el voltaje va *retrasado* con respecto a la corriente. En este caso, la diferencia $X_L - X_C$ es *negativa*, la $\tan\phi$ es negativa, y ϕ es un ángulo negativo entre 0 y $-90°$. Como X_L y X_C dependen de la frecuencia, el ángulo de fase ϕ también depende de la frecuencia. Examinaremos las consecuencias de esto en la sección 31.5.

Todas las expresiones que hemos desarrollado para un circuito *L-R-C* en serie siguen siendo válidas en ausencia de uno de los elementos del circuito. Si falta el resistor, se hace $R = 0$; si falta el inductor, se hace $L = 0$. No obstante, si falta el capacitor, se hace $C = \infty$, lo que corresponde a la ausencia de cualquier diferencia de potencial ($v_C = q/C = 0$) o de cualquier reactancia capacitiva ($X_C = 1/\omega C = 0$).

En todo este análisis se han descrito las magnitudes de los voltajes y las corrientes en términos de sus valores *máximos*, que son las *amplitudes* de voltaje y de corriente. Pero al final de la sección 31.1 se recalcó que estas cantidades por lo general están descritas en términos de valores rms, no de amplitudes. Para una cantidad que varíe en forma sinusoidal, el valor rms siempre es el producto de $1/\sqrt{2}$ por la amplitud. Todas las relaciones entre el voltaje y la corriente que hemos obtenido en esta sección y las anteriores siguen siendo válidas si en ellas se utilizan cantidades rms, en vez de las amplitudes. Por ejemplo, si se divide la ecuación (31.22) entre $\sqrt{2}$, se obtiene

$$\frac{V}{\sqrt{2}} = \frac{I}{\sqrt{2}}Z$$

que se rescribe como

$$V_{rms} = I_{rms}Z \tag{31.26}$$

Las ecuaciones (31.7), (31.13) y (31.19) se traducen exactamente de la misma forma.

Únicamente hemos considerado circuitos de ca, en los cuales un inductor, un resistor y un capacitor están conectados en serie. El mismo análisis se puede efectuar para un circuito *L-R-C* conectado en *paralelo*; véase el problema 31.56.

Por último, enfatizamos que en esta sección se ha descrito la condición de *estado estable* de un circuito, que es el que existe después de que el circuito haya estado conectado a la fuente durante mucho tiempo. Cuando la fuente se conecta por primera vez, existen voltajes y corrientes adicionales que reciben el nombre de *oscilaciones momentáneas*, cuya naturaleza depende del momento del ciclo en que el circuito se completa inicialmente. El análisis detallado de las oscilaciones momentáneas va más allá de nuestros objetivos. Estas oscilaciones siempre se extinguen al cabo de un tiempo suficientemente largo y no afectan el comportamiento del estado estable del circuito. Sin embargo, pueden ocasionar oleadas peligrosas y dañinas en las líneas de conducción, razón por la que es frecuente que a los sistemas electrónicos delicados, como el de las computadoras, se les provea de protectores contra oleadas de energía eléctrica en la línea.

Estrategia para resolver problemas 31.1 Circuitos de corriente alterna



IDENTIFICAR *los conceptos relevantes:* Todos los conceptos que se usan para analizar circuitos de corriente directa también se aplican a los circuitos de corriente alterna, sobre todo en las Estrategias para resolver problemas 26.1 y 26.2. Sin embargo, debemos tener cuidado para diferenciar entre las amplitudes de corrientes y voltajes alternos y sus valores instantáneos, y entre la resistencia (de resistores), la reactancia (de inductores o capacitores) y la impedancia (de circuitos compuestos).

PLANTEAR *el problema* de acuerdo con los siguientes pasos:

1. Dibuje un diagrama del circuito e identifique todas las cantidades conocidas y desconocidas.
2. Identifique las incógnitas.

EJECUTAR *la solución* de la siguiente forma:

1. Use las relaciones obtenidas en las secciones 31.2 y 31.3 para calcular los valores de las incógnitas, aplicando las siguientes recomendaciones.
2. Casi siempre es más fácil trabajar con la frecuencia angular $\omega = 2\pi f$ en vez de la frecuencia ordinaria f.
3. Recuerde las siguientes relaciones de fase: para un resistor, el voltaje y la corriente están *en fase*, de modo que los fasores correspondientes siempre tienen el mismo sentido. En un inductor, el voltaje *se adelanta* 90° a la corriente (esto es, $\phi = +90° = \pi/2$ radianes), y el fasor de voltaje está a 90° en sentido antihorario con respecto al fasor de corriente. Para un capacitor, el voltaje se *retrasa* 90° con respecto a la corriente (es decir, $\phi = -90° = -\pi/2$ radianes), y el fasor de voltaje siempre apunta a 90° en sentido horario con respecto al fasor de corriente.
4. Las reglas de Kirchhoff se cumplen *en todo momento*. Así, en un circuito en serie, la corriente instantánea es la misma en todos los elementos de circuito; en un circuito en paralelo, la diferencia de potencial instantánea es la misma a través de todos los elementos de circuito.
5. La reactancia inductiva, la reactancia capacitiva y la impedancia son similares a la resistencia: cada una representa la razón entre la amplitud de voltaje V y la amplitud de corriente I en un elemento o combinación de elementos de circuito. Sin embargo, recuerde que las relaciones de fase desempeñan un papel esencial. En la aplicación de la regla de la espira de Kirchhoff, debe combinar los efectos de la resistencia y reactancia mediante la suma *vectorial* de los fasores de voltaje correspondientes, como se ilustra en las figuras 31.13*b* y 31.13*c*. Por ejemplo, cuando se tienen varios elementos de un circuito en serie, no se puede simplemente *sumar* todos los valores numéricos de la resistencia y la reactancia para obtener la impedancia; eso ignoraría las relaciones de fase.

EVALUAR *la respuesta:* Cuando se trabaja con un circuito *L-R-C* en *serie*, los resultados se pueden comprobar comparando los valores de la reactancia inductiva X_L y la reactancia capacitiva X_C. Si $X_L > X_C$, entonces la amplitud del voltaje a través del inductor es mayor que a través del capacitor, y el ángulo de fase ϕ es positivo (entre 0 y 90°). Si $X_L < X_C$, entonces la amplitud del voltaje a través del inductor es menor que a través del capacitor, y el ángulo de fase ϕ es negativo (entre 0 y −90°).



Ejemplo 31.4 Circuito *L-R-C* en serie I

En el circuito en serie de la figura 31.13*a*, suponga que $R = 300\ \Omega$, $L = 60$ mH, $C = 0.50\ \mu$F, $V = 50$ V y $\omega = 10{,}000$ rad/s. Determine las reactancias X_L y X_C, la impedancia Z, la amplitud de corriente I, el ángulo de fase ϕ y la amplitud de voltaje a través de cada elemento de circuito.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Este problema usa las ideas desarrolladas en la sección 31.2 y en esta sección acerca del comportamiento de los elementos de un circuito de ca. Se aplican las ecuaciones (31.12) y (31.18) para determinar X_L y X_C, y la (31.23) para calcular Z. Después se utiliza la ecuación (31.22) para determinar la amplitud de corriente, y la ecuación (31.24) para obtener el ángulo de fase. Dada esta información, las relaciones en la tabla 31.1 nos indican las amplitudes de voltaje.

EJECUTAR: Las reactancias inductiva y capacitiva son

$$X_L = \omega L = (10{,}000\ \text{rad/s})(60\ \text{mH}) = 600\ \Omega$$

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{(10{,}000\ \text{rad/s})(0.50 \times 10^{-6}\ \text{F})} = 200\ \Omega$$

La impedancia Z del circuito es

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = \sqrt{(300\ \Omega)^2 + (600\ \Omega - 200\ \Omega)^2} = 500\ \Omega$$

Con una amplitud de voltaje de fuente $V = 50$ V, la amplitud de corriente I y el ángulo de fase ϕ son

$$I = \frac{V}{Z} = \frac{50\ \text{V}}{500\ \Omega} = 0.10\ \text{A}$$

$$\phi = \arctan\frac{X_L - X_C}{R} = \arctan\frac{400\ \Omega}{300\ \Omega} = 53°$$

De acuerdo con la tabla 31.1, las amplitudes de voltaje V_R, V_L y V_C a través del resistor, inductor y capacitor, respectivamente, son

$$V_R = IR = (0.10\ \text{A})(300\ \Omega) = 30\ \text{V}$$

$$V_L = IX_L = (0.10\ \text{A})(600\ \Omega) = 60\ \text{V}$$

$$V_C = IX_C = (0.10\ \text{A})(200\ \Omega) = 20\ \text{V}$$

EVALUAR: Como en la figura 31.13*b*, $X_L > X_C$, por lo tanto, la amplitud de voltaje a través del inductor es mayor que a través del capacitor, y f es positivo. El valor $\phi = 53°$ significa que el voltaje se *adelanta* 53° a la corriente.

Observe que la amplitud de voltaje de la fuente, $V = 50$ V, *no* es igual a la suma de las amplitudes del voltaje a través de los elementos separados del circuito; es decir, $50\ \text{V} \neq 30\ \text{V} + 60\ \text{V} + 20\ \text{V}$. En lugar de esto, V es la *suma vectorial* de los fasores V_R, V_L y V_C. Si se dibuja el diagrama de fasores como en la figura 31.13*b* para esta situación específica, verá que V_R, $V_L - V_C$, y V forman un triángulo rectángulo de lados 3-4-5.



Ejemplo 31.5 Circuito *L-R-C* en serie II

Para el circuito *L-R-C* en serie del ejemplo 31.4, obtenga expresiones de la dependencia a través del tiempo, de la corriente instantánea i y los voltajes instantáneos a través del resistor (v_R), inductor (v_L), capacitor (v_C) y fuente de ca (v).

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Describiremos la corriente mediante la ecuación (31.2), la cual supone que la corriente es máxima en $t = 0$. Los voltajes están dados por la ecuación (31.8) para el resistor, por la ecuación (31.10) para el inductor, por la ecuación (31.16) para el capacitor y por la ecuación (31.25) para la fuente.

EJECUTAR: La corriente y todos los voltajes oscilan con la misma frecuencia angular, $\omega = 10{,}000$ rad/s y, por lo tanto, con el mismo periodo, $2\pi/\omega = 2\pi/(10{,}000 \text{ rad/s}) = 6.3 \times 10^{-4}$ s = 0.63 ms. Según la ecuación (31.2), la corriente es

$$i = I\cos\omega t = (0.10\text{ A})\cos(10{,}000\text{ rad/s})t$$

El voltaje del resistor se encuentra *en fase* con la corriente, así que

$$v_R = V_R\cos\omega t = (30\text{ V})\cos(10{,}000\text{ rad/s})t$$

El voltaje del inductor se *adelanta* a la corriente por 90°, de manera que

$$v_L = V_L\cos(\omega t + 90^\circ) = -V_L \operatorname{sen}\omega t$$
$$= -(60\text{ V})\operatorname{sen}(10{,}000\text{ rad/s})t$$

El voltaje del capacitor se *retrasa* 90° con respecto a la corriente, por lo que

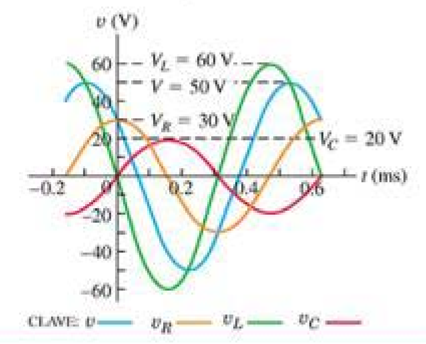
$$v_C = V_C\cos(\omega t - 90^\circ) = V_C\operatorname{sen}\omega t$$
$$= (20\text{ V})\operatorname{sen}(10{,}000\text{ rad/s})t$$

En el ejemplo 31.4 vimos que el voltaje de fuente (igual al voltaje a través de toda la combinación de resistor, inductor y capacitor) se *adelanta* a la corriente por $\phi = 53^\circ$, de manera que

$$v = V\cos(\omega t + \phi)$$
$$= (50\text{ V})\cos\left[(10{,}000\text{ rad/s})t + \left(\frac{2\pi\text{ rad}}{360^\circ}\right)(53^\circ)\right]$$
$$= (50\text{ V})\cos[(10{,}000\text{ rad/s})t + 0.93\text{ rad}]$$

EVALUAR: En la figura 31.15 aparecen las gráficas de los cuatro voltajes en función del tiempo. El voltaje del inductor tiene una amplitud mayor que el voltaje del capacitor porque $X_L > X_C$. El voltaje *instantáneo* de fuente v siempre es igual a la suma de los voltajes instantáneos v_R, v_L y v_C. Verifique esto por su cuenta midiendo los valores de los voltajes que se muestran en la gráfica para distintos valores del tiempo t.

31.15 Gráficas del voltaje de fuente v, el voltaje de resistor v_R, el voltaje de inductor v_L y el voltaje de capacitor v_C en función del tiempo, para la situación del ejemplo 31.4. La corriente, que no se ilustra, está en fase con el voltaje del resistor.



Evalúe su comprensión de la sección 31.3 Ordene los siguientes circuitos de ca según sus amplitudes de corriente, de mayor a menor. **i.** El circuito en el ejemplo 31.4; **ii.** el circuito en el ejemplo 31.4 sin el capacitor ni el inductor; **iii.** el circuito en el ejemplo 31.4 sin el resistor ni el capacitor; **iv.** el circuito en el ejemplo 31.4 sin el resistor ni el inductor.



31.4 Potencia en circuitos de corriente alterna

La corriente alterna desempeña un papel central en los sistemas de distribución, conversión y uso de energía eléctrica, por lo que resulta importante estudiar las relaciones de potencia en los circuitos de ca. Para un circuito de ca con corriente instantánea i y amplitud de corriente I, consideraremos uno de sus elementos a través del cual la diferencia de potencial instantánea es v, con amplitud de voltaje V. La potencia instantánea p entregada a este elemento de circuito es

$$p = vi$$

Primero, veamos lo que esto significa para los elementos individuales de circuito. Supondremos que en cada caso $i = I\cos\omega t$.

Potencia de un resistor

En primer lugar, suponga que el elemento de circuito es un *resistor puro R*, como en la figura 31.7*a*; así que $v = v_R$ está *en fase* con i. La gráfica que representa p se ob-

tiene multiplicando las alturas de las gráficas de v e i en la figura 31.7*b* en cada instante. Esta gráfica se indica en color negro en la figura 31.16*a*. El producto vi siempre es positivo porque los valores de v e i siempre son los dos positivos o los dos negativos. De ahí que en todo momento se suministre energía *al* resistor para ambas direcciones de i, aunque la potencia no sea constante.

La curva de potencia correspondiente a un resistor puro es simétrica con respecto a un valor igual a la mitad de su valor máximo VI, así que la *potencia media* P_{med} es

$$P_{med} = \tfrac{1}{2}VI \qquad \text{(para un resistor puro)} \tag{31.27}$$

Una expresión equivalente es

$$P_{med} = \frac{V}{\sqrt{2}}\frac{I}{\sqrt{2}} = V_{rms}I_{rms} \qquad \text{(para un resistor puro)} \tag{31.28}$$

Asimismo, $V_{rms} = I_{rms}R$, así que P_{med} se expresa mediante cualquiera de las formas equivalentes

$$P_{med} = I_{rms}{}^2R = \frac{V_{rms}{}^2}{R} = V_{rms}I_{rms} \qquad \text{(para un resistor puro)} \tag{31.29}$$

Observe que las expresiones en la ecuación (31.29) tienen la misma forma que las relaciones correspondientes para un circuito de cd, ecuación (25.18). Además, observe que únicamente son válidas para resistores puros, no para combinaciones más complicadas de elementos de circuito.

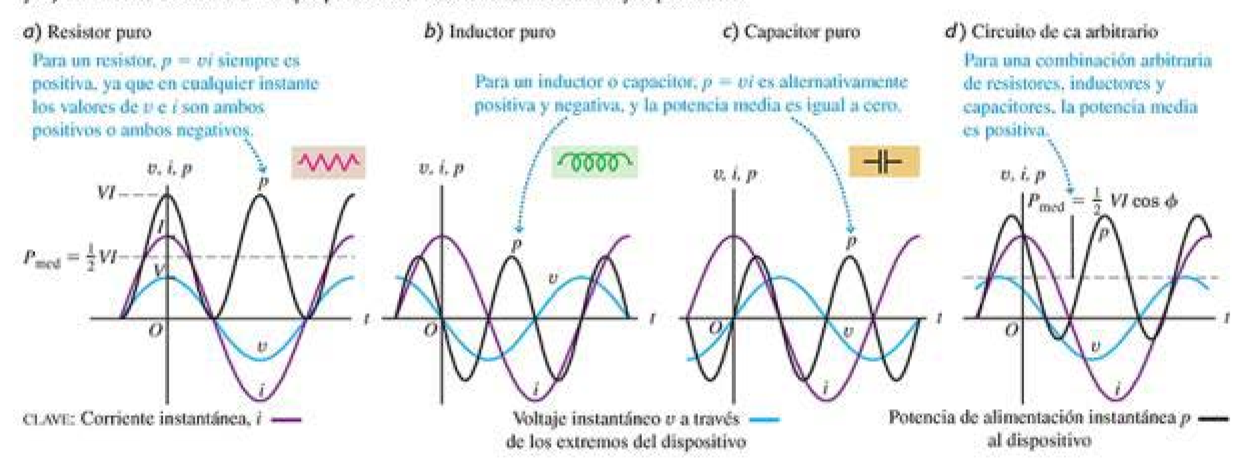
Potencia de un inductor

A continuación, conectamos la fuente a un inductor puro L, como en la figura 31.8*a*. El voltaje $v = v_L$ se adelanta 90° a la corriente i. Cuando se multiplican las curvas de v e i, el producto vi es *negativo* durante la mitad del ciclo cuando v e i tienen signos *opuestos*. La curva de potencia, que se ilustra en la figura 31.16*b*, es simétrica con respecto al eje horizontal; es positiva la mitad del tiempo y negativa la otra mitad, y la potencia media es igual a cero. Cuando p es positiva, la energía se suministra para establecer el campo magnético en el inductor; cuando p es negativa, el campo desaparece y el inductor devuelve energía a la fuente. La transferencia neta de energía en un ciclo es igual a cero.

Potencia de un capacitor

Por último, conectamos la fuente a un capacitor puro C, como en la figura 31.9*a*. El voltaje $v = v_C$ se retrasa 90° con respecto a la corriente i. La figura 31.16*c* muestra la curva de potencia; de nuevo, la potencia media es igual a cero. Se suministra energía

31.16 Gráficas de corriente, voltaje y potencia, como funciones del tiempo para *a*) un resistor puro, *b*) un inductor puro, *c*) un capacitor puro y *d*) un circuito de ca arbitrario que puede tener resistencia, inductancia y capacitancia.



para cargar el capacitor y se devuelve a la fuente cuando se descarga el capacitor. La transferencia neta de energía en un ciclo es, una vez más, igual a cero.

Potencia de un circuito general de ca

En *cualquier* circuito de ca, con cualquier combinación de resistores, capacitores e inductores, el voltaje v a través de todo el circuito tiene un ángulo de fase ϕ con respecto a la corriente i. Así, la potencia instantánea p está dada por

$$p = vi = [V\cos(\omega t + \phi)][I\cos\omega t] \qquad (31.30)$$

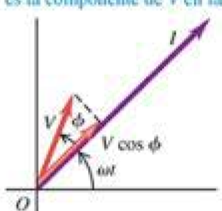
La curva de potencia instantánea tiene la forma que se presenta en la figura 31.16*d*. El área entre las espiras positivas y el eje horizontal es mayor que el área entre las espiras negativas y el eje horizontal, y la potencia media es positiva.

A partir de la ecuación (31.30) deducimos una expresión de la potencia *media* P_{med} con la ayuda de la identidad del coseno de la suma de dos ángulos:

$$\begin{aligned} p &= [V(\cos\omega t\cos\phi - \text{sen}\,\omega t\,\text{sen}\,\phi)][I\cos\omega t] \\ &= VI\cos\phi\cos^2\omega t - VI\,\text{sen}\,\phi\cos\omega t\,\text{sen}\,\omega t \end{aligned}$$

Según el análisis de la sección 31.1 que llevó a la ecuación (31.4), se observa que el valor medio de $\cos^2 \omega t$ (en un ciclo) es igual a $\frac{1}{2}$. El valor medio de $\cos \omega t$ sen ωt es cero porque este producto es igual a $\frac{1}{2}$sen $2\omega t$, cuyo promedio en un ciclo es cero. Por ende, la potencia media P_{med} es

$$P_{\text{med}} = \tfrac{1}{2}VI\cos\phi = V_{\text{rms}}I_{\text{rms}}\cos\phi \qquad \text{(potencia media en un circuito general de ca)} \qquad (31.31)$$



31.17 Uso de fasores para calcular la potencia media en un circuito de ca arbitrario.

Cuando v e i están en fase, de manera que $\phi = 0$, la potencia media es igual a $\frac{1}{2}VI = V_{\text{rms}}I_{\text{rms}}$; cuando v e i están 90° fuera de fase, la potencia media es igual a cero. En el caso general, cuando v tiene un ángulo de fase ϕ con respecto a i, la potencia media es igual al producto de $\frac{1}{2}I$ por $V\cos\phi$, la componente del fasor de voltaje que está *en fase* con el fasor de corriente. La figura 31.17 muestra la relación general de los fasores de corriente y voltaje. Para el circuito *L-R-C* en serie, las figuras 31.13*b* y 31.13*c* indican que $V\cos\phi$ es igual a la amplitud de voltaje V_R para el resistor; por lo tanto, la ecuación (31.31) es la potencia media disipada en el resistor. En promedio, no hay flujo de energía hacia adentro o hacia afuera del inductor ni del capacitor, por lo que nada de la P_{med} va hacia alguno de estos elementos de circuito.

El factor $\cos\phi$ se llama **factor de potencia** del circuito. En el caso de una resistencia pura, $\phi = 0$, $\cos\phi = 1$ y $P_{\text{med}} = V_{\text{rms}}I_{\text{rms}}$. En el caso de un inductor o capacitor puro, $\phi = \pm 90°$, $\cos\phi = 0$ y $P_{\text{med}} = 0$. En el caso de un circuito *L-R-C* en serie, el factor de potencia es igual a R/Z; la prueba de este ejercicio se deja como tarea para el lector (véase el ejercicio 31.21).

Por lo general, en los circuitos de potencia no es deseable un factor bajo de potencia (un gran ángulo ϕ de retraso o adelanto). La causa es que para una diferencia de potencial dada, se necesita una corriente grande que suministre una cantidad determinada de potencia. Esto da como resultado grandes pérdidas de i^2R en las líneas de transmisión. La compañía de energía eléctrica tal vez cobre una tarifa más alta a un cliente con un factor bajo de potencia. Muchos tipos de maquinaria de ca toman una corriente *retrasada*; es decir, la corriente en la maquinaria está retrasada con respecto al voltaje aplicado. Por consiguiente, el voltaje se adelanta a la corriente, de manera que $\phi > 0$ y $\cos\phi < 1$. El factor de potencia se puede corregir para aproximarlo al valor ideal de 1 conectando un capacitor en paralelo con la carga. La corriente que toma el capacitor se *adelanta* al voltaje (es decir, el voltaje a través del capacitor va con retraso en relación con la corriente), lo cual compensa la corriente retrasada en el otro ramal del circuito. El capacitor en sí no absorbe potencia neta de la línea.

Ejemplo 31.6 Potencia en una secadora para el cabello



Una secadora eléctrica para el cabello está especificada a 1500 W (la potencia *media*) y 120 V (el voltaje *rms*). Calcule *a*) la resistencia, *b*) la corriente rms y *c*) la potencia instantánea máxima. Suponga que la secadora es un resistor puro. (El elemento que genera calor actúa como resistor).

Continúa

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Se da $P_{med} = 1500$ W y $V_{rms} = 120$ V. Las incógnitas son la resistencia R, la corriente rms, I_{rms} y el valor $p_{máx}$ de la potencia instantánea p. Resolvemos la ecuación (31.29) para determinar R, la ecuación (31.28) para obtener I_{rms} a partir de V_{rms} y P_{med}, y la ecuación (31.30) para calcular $p_{máx}$.

EJECUTAR: *a*) De acuerdo con la ecuación (31.29), la resistencia es

$$R = \frac{V_{rms}{}^2}{P_{med}} = \frac{(120\ \text{V})^2}{1500\ \text{W}} = 9.6\ \Omega$$

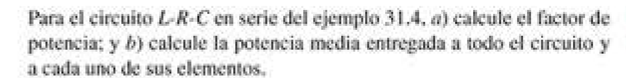
b) De la ecuación (31.28),

$$I_{rms} = \frac{P_{med}}{V_{rms}} = \frac{1500\ \text{W}}{120\ \text{V}} = 12.5\ \text{A}$$

c) Para un resistor puro, el voltaje y la corriente están en fase, y el ángulo de fase ϕ es igual a cero. Así, de acuerdo con la ecuación (31.30), la potencia instantánea es $p = VI\cos^2\omega t$, y la potencia instantánea máxima es $p_{máx} = VI$. Según la ecuación (31.27), esto es el doble de la potencia media P_{med}, de manera que

$$p_{máx} = VI = 2P_{med} = 2(1500\ \text{W}) = 3000\ \text{W}$$

EVALUAR: El resultado del inciso *b*) se confirma con la ecuación (31.7): $I_{rms} = V_{rms}/R = (120\ \text{V})/(9.6\ \Omega) = 12.5$ A. Observe que algunos fabricantes sin escrúpulos de amplificadores estereofónicos especifican las salidas de potencia en términos del valor *máximo* y no del valor medio.





Para el circuito L-R-C en serie del ejemplo 31.4, *a*) calcule el factor de potencia; y *b*) calcule la potencia media entregada a todo el circuito y a cada uno de sus elementos.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Podemos utilizar los resultados del ejemplo 31.4. El factor de potencia es el coseno del ángulo de fase ϕ, y la ecuación (31.31) permite obtener la potencia media entregada en términos de ϕ y las amplitudes de voltaje y de corriente.

EJECUTAR: *a*) El factor de potencia es $\cos\phi = \cos 53° = 0.60$. *b*) De la ecuación (31.31),

$$P_{med} = \tfrac{1}{2}VI\cos\phi = \tfrac{1}{2}(50\ \text{V})(0.10\ \text{A})(0.60) = 1.5\ \text{W}$$

EVALUAR: Si bien P_{med} es la potencia media entregada a la combinación L-R-C, toda ella se disipa en el *resistor*. Como indican las figuras 31.16*b* y 31.16*c*, la potencia media entregada a un inductor o un capacitor puro siempre es igual a cero.

Evalúe su comprensión de la sección 31.4 La figura 31.16*d* indica que durante parte de un ciclo de oscilación, la potencia instantánea entregada al circuito es negativa, lo cual significa que se está extrayendo energía del circuito. *a*) ¿De dónde se extrae esta energía? **i.** Del resistor; **ii.** del inductor; **iii.** del capacitor; **iv.** de la fuente de ca; **v.** de más de uno de estos elementos. *b*) ¿A dónde va la energía? **i.** Al resistor; **ii.** al inductor; **iii.** al capacitor; **iv.** a la fuente de ca; **v.** a más de uno de estos elementos. ❙

31.5 Resonancia en circuitos de corriente alterna

MasteringPHYSICS

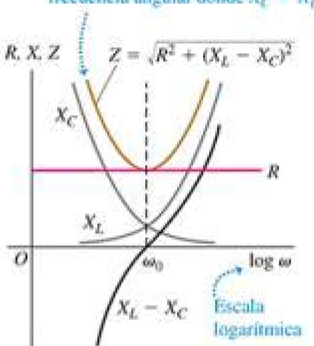
ActivPhysics 14.3: AC Circuits: The Driven Oscillator (Questions 8, 9, and 11)

Gran parte de la importancia práctica de los circuitos L-R-C en serie estriba en la forma en que tales circuitos responden a las fuentes de diferente frecuencia angular ω. Por ejemplo, un tipo de circuito sintonizador usado en los receptores de radio es simplemente un circuito L-R-C en serie. Una señal de radio de cualquier frecuencia dada produce una corriente de la misma frecuencia en el circuito receptor, pero la amplitud de la corriente es *máxima* si la frecuencia de la señal es igual a la frecuencia particular a la cual se "sintoniza" el circuito receptor. Este efecto se llama *resonancia*. El circuito está diseñado de manera que señales con frecuencias distintas de la sintonizada produzcan corrientes demasiado pequeñas para conseguir que los altavoces del radio emitan un sonido audible.

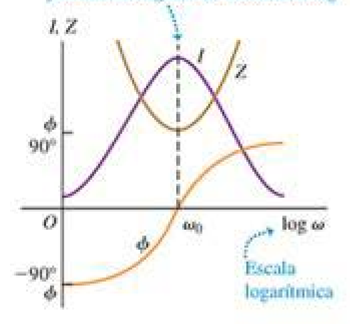
Para saber cómo se puede utilizar un circuito L-R-C en serie de ese modo, suponga que se conecta una fuente de ca con amplitud de voltaje constante V pero frecuencia angular ajustable ω a través de un circuito L-R-C en serie. La corriente que aparece en el circuito tiene la misma frecuencia angular que la fuente, y una amplitud de corriente $I = V/Z$, donde Z es la impedancia del circuito L-R-C en serie. Esta impedancia depende de la frecuencia, como lo muestra la ecuación (31.23). La figura 31.18*a* presenta gráficas de R, X_L, X_C y Z como funciones de ω. Hemos usado una escala logarítmica de frecuencias angulares para abarcar un amplio intervalo de frecuencias. A medida que aumenta la frecuencia, X_L se incrementa y X_C disminuye; por lo tanto, siempre hay una frecuencia a la cual X_L y X_C son iguales, mientras que la diferencia $X_L - X_C$

31.18 Forma en que las variaciones en la frecuencia angular de un circuito de ca afectan *a*) la reactancia, la resistencia y la impedancia; y *b*) la impedancia, la amplitud de corriente y el ángulo de fase.

a) Reactancia, resistencia e impedancia como funciones de la frecuencia angular



b) Impedancia, corriente y ángulo de fase como funciones de la frecuencia angular



es igual a cero. A tal frecuencia, la impedancia $Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$ tiene su valor *menor*, que simplemente es igual a la resistencia R.

Comportamiento de un circuito en resonancia

A medida que varía la frecuencia angular ω de la fuente, la amplitud de corriente $I = V/Z$ varía como se ilustra en la figura 31.18*b*; el valor *máximo* de I se presenta a la frecuencia donde la impedancia Z es *mínima*. Este crecimiento máximo de la amplitud de corriente a cierta frecuencia se llama **resonancia**. La frecuencia angular ω_0 a la que se presenta el máximo de resonancia se denomina **frecuencia angular de resonancia**. Esta es la frecuencia angular a la cual las reactancias inductiva y capacitiva son iguales; por lo tanto, en la resonancia,

$$X_L = X_C \qquad \omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C} \qquad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \qquad \text{(circuito } L\text{-}R\text{-}C \text{ en serie, en resonancia)} \tag{31.32}$$

Advierta que esto es igual a la frecuencia angular natural de oscilación de un circuito L-C, que se obtuvo en la sección 30.5, ecuación (30.22). La **frecuencia natural de resonancia** f_0 es $\omega_0/2\pi$. Esta es la frecuencia a la que aparece la corriente máxima en el circuito con una amplitud de voltaje de fuente determinada; en otras palabras, f_0 es la frecuencia a la que el circuito está "sintonizado".

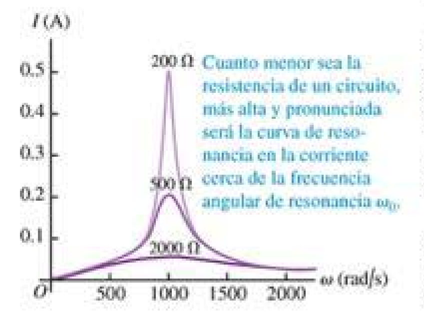
Es ilustrativo observar lo que sucede con los *voltajes* en un circuito L-R-C en serie, en resonancia. La corriente en cualquier instante es la misma en L y C. El voltaje a través del inductor siempre *se adelanta* 90° a la corriente, o $\frac{1}{4}$ de ciclo, en tanto que el voltaje a través de un capacitor siempre *se retrasa* 90° con respecto a la corriente. Por consiguiente, los voltajes instantáneos a través de L y C siempre difieren en su fase 180°, o $\frac{1}{2}$ ciclo; y siempre tienen signos opuestos. A la frecuencia de resonancia, y *solo* a la frecuencia de resonancia, $X_L = X_C$ y las amplitudes de voltaje $V_L = IX_L$ y $V_C = IX_C$ son *iguales*; en dichas condiciones, los voltajes instantáneos a través de L y C suman cero en todo momento, y el voltaje *total* v_{bd} a través de la combinación L-C en la figura 31.13*a* es exactamente cero. De esta forma, el voltaje a través del resistor es igual al voltaje de fuente. Por lo tanto, a la frecuencia de resonancia, ¡el circuito se comporta como si el inductor y el capacitor no estuvieran ahí!

La *fase* del voltaje con respecto a la corriente está dada por la ecuación (31.24). A frecuencias por debajo de la de resonancia, X_C es mayor que X_L; la reactancia capacitiva domina, el voltaje *se retrasa* en relación con la corriente, y el ángulo de fase ϕ está entre cero y −90°. Por arriba de la resonancia, domina la reactancia inductiva; el voltaje *se adelanta* a la corriente y el ángulo de fase ϕ está entre cero y +90°. Esta variación de ϕ con la frecuencia angular se ilustra en la figura 31.18*b*.

Diseño de un circuito de ca

Si podemos variar la inductancia L o la capacitancia C de un circuito, también es posible variar la frecuencia de resonancia. Esta es exactamente la forma en que un equipo receptor de radio o televisión se "sintonizan" para captar una estación específica. En los primeros días de la radio esto se hacía mediante capacitores con placas metálicas movibles, cuyo traslape podía variarse para modificar C. (Esto es lo que se logra al girar la perilla de sintonía del radio que aparece en la fotografía de inicio del capítulo). Un enfoque más moderno consiste en variar L empleando una bobina con núcleo de ferrita que se deslice hacia adentro o hacia afuera.

31.19 Gráfica de la amplitud de la corriente I como función de la frecuencia angular ω para un circuito L-R-C en serie, con $V = 100$ V, $L = 2.0$ H, $C = 0.50$ μF y tres valores diferentes de la resistencia R.



En un circuito L-R-C en serie, la impedancia alcanza su valor mínimo y la corriente su valor máximo en la frecuencia de resonancia. La curva central en la figura 31.19 es una gráfica de la corriente como función de la frecuencia para ese circuito, con amplitud de voltaje de fuente $V = 100$ V, $L = 2.0$ H, $C = 0.50$ μF y $R = 500$ Ω. Esta curva se llama *curva de respuesta* o *curva de resonancia*. La frecuencia angular de resonancia es $\omega_0 = (LC)^{-1/2} = 1000$ rad/s. Como se esperaba, la curva tiene un máximo en esta frecuencia angular.

La frecuencia de resonancia está determinada por L y C; ¿qué sucede cuando se modifica R? La figura 31.19 también muestra gráficas de I en función de ω para $R = 200$ Ω y para $R = 2000$ Ω. Las curvas son similares en el caso de frecuencias alejadas de la resonancia, donde la impedancia está dominada por X_L o X_C. No obstante, cerca

de la resonancia, donde X_L y X_C casi se cancelan entre sí, la curva es más alta y aguda para valores pequeños de R, y es más ancha y aplanada con valores más grandes de R. En la resonancia, $Z = R$ e $I = V/R$; así pues, la altura máxima de la curva es inversamente proporcional a R.

La forma de la curva de respuesta es importante en el diseño de los circuitos receptores de radio y televisión. La curva con máximo pronunciado es lo que hace posible discriminar entre dos estaciones emisoras que transmiten en bandas de frecuencia adyacentes. Sin embargo, cuando el máximo es *demasiado* pronunciado, se pierde algo de la información en la señal receptora, como los sonidos de alta frecuencia de la música. La forma de la curva de resonancia también se relaciona con las oscilaciones sobreamortiguadas y subamortiguadas que se describieron en la sección 30.6. Una curva de resonancia con un máximo pronunciado corresponde a un valor pequeño de R y a un sistema oscilante ligeramente amortiguado; una curva ancha y aplanada corresponde a un valor grande de R y a un sistema muy amortiguado.

En esta sección hemos estudiado la resonancia en un circuito *L-R-C en serie*. La resonancia también ocurre en un circuito de ca donde el inductor, el resistor y el capacitor están conectados en *paralelo*. Dejamos los detalles al lector (véase el problema 31.57).

Los fenómenos de resonancia ocurren no únicamente en los circuitos de ca, sino en todas las áreas de la física. En las secciones 13.8 y 16.5 dimos ejemplos de resonancia en sistemas *mecánicos*. La amplitud de una oscilación mecánica alcanza un máximo cuando la frecuencia de la fuerza impulsora se aproxima a una frecuencia natural del sistema; esto es similar a la aparición de máximos de corriente en un circuito *L-R-C* en serie. Sugerimos al lector que ahora repase las secciones sobre resonancia mecánica e identifique las analogías.

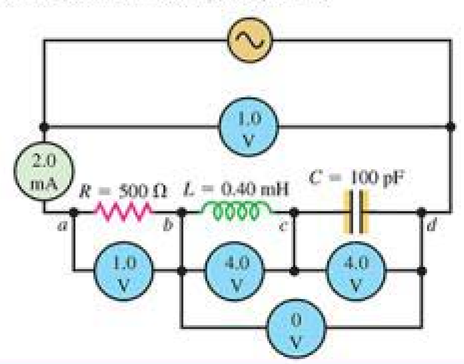
Ejemplo 31.8 Sintonización de un radio

El circuito en serie de la figura 31.20 es similar a algunos circuitos de sintonización de radios. Está conectado a una fuente de ca con voltaje terminal rms de 1.0 V y frecuencia variable. *a*) Calcule la frecuencia de resonancia. En la frecuencia de resonancia, *b*) calcule la reactancia inductiva X_L, la reactancia capacitiva X_C y la impedancia Z; *c*) la corriente rms I_{rms}, y *d*) el voltaje rms a través de cada elemento de circuito.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: El circuito en la figura 31.20 es un circuito *L-R-C* en serie, con instrumentos de medición ideales incluidos para cuantificar la corriente rms y los voltajes, que son las incógnitas. La ecuación (31.32) incluye la fórmula para la frecuencia angular de resonancia ω_0, a partir de la cual se encuentra la frecuencia de resonancia f_0. Las ecuaciones (31.12) y (31.18) sirven para obtener X_L y X_C, las cuales son iguales en resonancia. De la ecuación (31.23), en resonancia, tenemos que $Z = R$. Se usan las ecuaciones (31.7), (31.13) y (31.19) para obtener los voltajes a través de los elementos de circuito.

31.20 Circuito de sintonización de radio en la resonancia. Los círculos denotan corrientes y voltajes rms.



EJECUTAR: *a*) Los valores de ω_0 y f_0 son

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{(0.40 \times 10^{-3}\ \text{H})(100 \times 10^{-12}\ \text{F})}}$$
$$= 5.0 \times 10^6\ \text{rad/s}$$
$$f_0 = 8.0 \times 10^5\ \text{Hz} = 800\ \text{kHz}$$

Esta frecuencia corresponde a la parte inferior de la banda AM de radio.

b) A esta frecuencia,

$$X_L = \omega L = (5.0 \times 10^6\ \text{rad/s})(0.40 \times 10^{-3}\ \text{H}) = 2000\ \Omega$$
$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{(5.0 \times 10^6\ \text{rad/s})(100 \times 10^{-12}\ \text{F})} = 2000\ \Omega$$

Pero como se dijo anteriormente, $X_L = X_C$ en resonancia, y $Z = R = 500\ \Omega$.

c) De acuerdo con la ecuación (31.26), la corriente rms en la resonancia es

$$I_{rms} = \frac{V_{rms}}{Z} = \frac{V_{rms}}{R} = \frac{1.0\ \text{V}}{500\ \Omega} = 0.0020\ \text{A} = 2.0\ \text{mA}$$

d) La diferencia de potencial rms a través del resistor es

$$V_{R\text{-rms}} = I_{rms}R = (0.0020\ \text{A})(500\ \Omega) = 1.0\ \text{V}$$

Las diferencias de potencial rms a través del inductor y el capacitor son:

$$V_{L\text{-rms}} = I_{rms}X_L = (0.0020\ \text{A})(2000\ \Omega) = 4.0\ \text{V}$$
$$V_{C\text{-rms}} = I_{rms}X_C = (0.0020\ \text{A})(2000\ \Omega) = 4.0\ \text{V}$$

EVALUAR: Las diferencias de potencial a través del inductor y el capacitor tienen valores rms y amplitudes iguales, pero están 180° fuera de fase, por lo que siempre suman cero. Observe también que en la resonancia, $V_{R\text{-rms}}$ es igual al voltaje de fuente V_{rms}, mientras que en este ejemplo tanto $V_{L\text{-rms}}$ como $V_{C\text{-rms}}$ son considerablemente *mayores* que V_{rms}.

Evalúe su comprensión de la sección 31.5 ¿Cómo cambia la frecuencia de resonancia de un circuito *L-R-C* en serie, si las placas del capacitor se acercan hasta juntarse? **i.** Se incrementa; **ii.** disminuye; **iii.** se mantiene igual. ❙

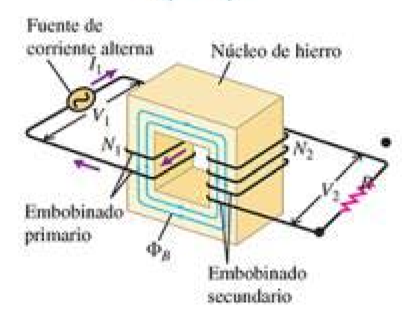
31.6 Transformadores

Una de las grandes ventajas de la ca sobre la cd en la distribución de energía eléctrica es que es mucho más fácil subir y bajar los voltajes en la ca que en la cd. Para la transmisión a grandes distancias es deseable usar un voltaje tan elevado y una corriente tan pequeña como sea posible; esto reduce las pérdidas de i^2R en las líneas de transmisión, y permite utilizar alambres más delgados, con lo cual se reducen los costos de los materiales. Las líneas de transmisión actuales operan de manera rutinaria con voltajes rms del orden de 500 kV. Por otro lado, consideraciones de seguridad y requerimientos de aislamiento imponen voltajes relativamente bajos en el equipo de generación, así como en las líneas de distribución doméstica e industrial. El voltaje estándar para el cableado doméstico es de 120 V en Estados Unidos y Canadá, y de 240 V en muchos otros países. La conversión necesaria del voltaje se lleva a cabo por medio de **transformadores**.

31.21 Diagrama de un transformador elevador idealizado. El embobinado primario está conectado a una fuente de ca; el secundario está conectado a un dispositivo con resistencia R.

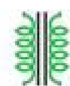
La fem inducida por *por espira* es la misma en las dos bobinas, por lo que podemos ajustar la razón de los voltajes terminales modificando la razón de las espiras:

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{N_2}{N_1}$$



Cómo funcionan los transformadores

La figura 31.21 presenta un transformador idealizado. Sus componentes clave son dos bobinas o *devanados* (embobinados), aislados eléctricamente entre sí pero enrollados en el mismo núcleo que, por lo general, está hecho de un material, como el hierro, con una permeabilidad relativa K_m muy grande. Esto mantiene las líneas del campo magnético, provocadas por una corriente en un embobinado, casi completamente dentro del núcleo. Por consiguiente, casi todas las líneas de este campo pasan a través del otro embobinado y maximizan la *inductancia mutua* de los dos embobinados (véase la sección 30.1). El embobinado al que se suministra energía se llama **primario**, y el embobinado del que se toma energía recibe el nombre de **secundario**. El símbolo de un transformador con núcleo de hierro en un circuito, como los que se usan en los sistemas de distribución de energía, es



A continuación se describe el modo en que funciona un transformador. La fuente de ca genera una corriente alterna en el primario, lo que establece un flujo alterno en el núcleo; esto induce una fem en cada embobinado, de acuerdo con la ley de Faraday. La fem inducida en el secundario da lugar a una corriente alterna en el secundario, y esto entrega energía al dispositivo al cual está conectado el secundario. Todas las corrientes y las fem tienen la misma frecuencia que la fuente de ca.

Aplicación Peligros de voltajes de ca frente a voltajes de cd
La corriente alterna de alto voltaje (arriba de 500 V) es más peligrosa que la corriente directa del mismo voltaje. Cuando una persona toca una fuente de cd de alto voltaje, normalmente provoca una sola contracción muscular que, si es lo suficientemente fuerte, puede lanzar a la persona lejos de la fuente. En cambio, el contacto con una fuente de ca de alto voltaje puede provocar una contracción muscular continua que evita que la víctima se aleje de la fuente. Al bajar el voltaje de la ca con un transformador, se reduce el riesgo de daños.



Veamos cómo se consigue que el voltaje entre los extremos del secundario tenga una amplitud mayor o menor que el voltaje entre los extremos del primario. Se ignora la resistencia de los embobinados y se supone que todas las líneas de campo magnético están confinadas al núcleo de hierro, de manera que en cualquier instante el flujo magnético Φ_B es el mismo en cada espira de los embobinados primario y secundario. El embobinado primario tiene N_1 espiras, y el secundario tiene N_2 espiras. Cuando el flujo magnético cambia como resultado de la modificación de las corrientes en las dos bobinas, las fem inducidas resultantes son

$$\mathcal{E}_1 = -N_1\frac{d\Phi_B}{dt} \quad \text{y} \quad \mathcal{E}_2 = -N_2\frac{d\Phi_B}{dt} \tag{31.33}$$

El flujo *por espira* Φ_B es el mismo tanto en el primario como en el secundario, por lo que las ecuaciones (31.33) indican que la fem inducida *por espira* es la misma en ambos. La razón entre la fem secundaria $\mathcal{E}_2$ y la fem primaria $\mathcal{E}_1$ es, por lo tanto, igual en cualquier instante a la razón entre las espiras del secundario y las espiras del primario:

$$\frac{\mathcal{E}_2}{\mathcal{E}_1} = \frac{N_2}{N_1} \tag{31.34}$$

Como $\mathcal{E}_1$ y $\mathcal{E}_2$ oscilan con la misma frecuencia que la fuente de ca, la ecuación (31.34) también da la razón de las amplitudes o de los valores rms de las fem inducidas. Si los

embobinados tienen una resistencia igual a cero, las fem inducidas $\mathcal{E}_1$ y $\mathcal{E}_2$ son iguales a los voltajes terminales a través del primario y el secundario, respectivamente; por lo tanto,

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{N_2}{N_1} \quad \text{(voltajes terminales del transformador primario y secundario)} \tag{31.35}$$

donde V_1 y V_2 son las amplitudes o los valores rms de los voltajes terminales. Al elegir la razón adecuada de las espiras N_2/N_1, se puede obtener cualquier voltaje secundario deseado, a partir de un voltaje primario dado. Si $N_2 > N_1$, como en la figura 31.21, entonces, $V_2 > V_1$ y tenemos un transformador *elevador*; si $N_2 < N_1$, entonces $V_2 < V_1$ y tenemos un transformador *reductor*. En una estación generadora de energía eléctrica se utilizan transformadores elevadores; el primario se conecta a la fuente de energía y el secundario a las líneas de transmisión, con lo cual se obtiene el alto voltaje que se requiere para la transmisión. Cerca del consumidor se usan transformadores reductores que disminuyen el voltaje a un valor apropiado para el uso doméstico o industrial (figura 31.22).

Aun el voltaje relativamente bajo provisto por una toma de pared doméstica es demasiado elevado para muchos dispositivos electrónicos, por lo que es necesario un transformador reductor adicional. Este es el papel que desempeña un "adaptador de ca", como los que se utilizan para recargar un teléfono móvil o una computadora portátil con el voltaje de la línea. Tales adaptadores contienen un transformador reductor que convierte el voltaje de línea a uno con menor valor, generalmente de 3 a 12 volts, también tienen diodos para convertir la corriente alterna en la corriente directa que requieren esos pequeños dispositivos electrónicos (figura 31.23).

31.22 La lata cilíndrica cerca del extremo superior de este poste es un transformador reductor que convierte el alto voltaje de la ca en las líneas de transmisión en un voltaje bajo (120 V) de ca, el cual luego se distribuye a los hogares y oficinas circundantes.



31.23 Los adaptadores de ca como este convierten la ca doméstica en una cd de bajo voltaje que puede utilizarse en dispositivos electrónicos. Contiene un transformador reductor para bajar el voltaje, así como diodos para rectificar la corriente de salida (véase la figura 31.3).



Consideraciones de energía para los transformadores

Si se completa el circuito secundario con una resistencia R, entonces la amplitud o el valor rms de la corriente en el circuito secundario es $I_2 = V_2/R$. Con base en consideraciones de energía, la potencia entregada al primario es igual a la que sale del secundario (puesto que no hay resistencia en los embobinados); por lo tanto,

$$V_1 I_1 = V_2 I_2 \quad \text{(corrientes en el primario y el secundario del transformador)} \tag{31.36}$$

Podemos combinar las ecuaciones (31.35) y (31.36) y la relación $I_2 = V_2/R$ para eliminar V_2 e I_2; entonces,

$$\frac{V_1}{I_1} = \frac{R}{(N_2/N_1)^2} \tag{31.37}$$

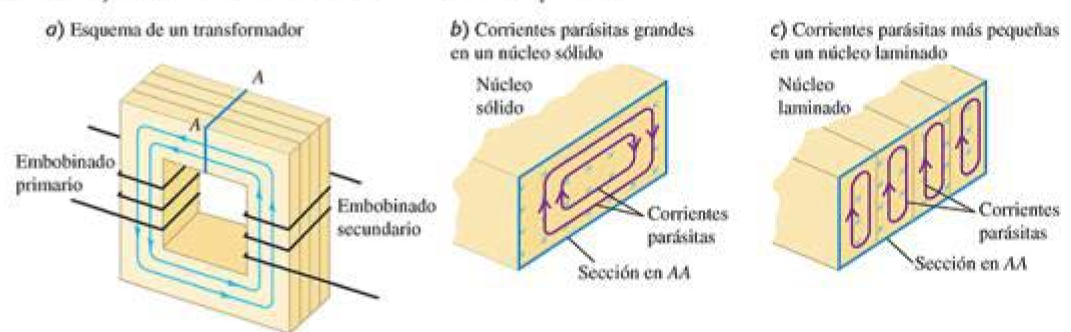
Esto demuestra que, cuando se completa el circuito secundario con una resistencia R, el resultado es el mismo que si se hubiera conectado la *fuente* directamente a una resistencia igual a R dividida entre el cuadrado de la razón de espiras: $(N_2/N_1)^2$. En otras palabras, el transformador "transforma" no únicamente voltajes y corrientes, sino también resistencias. Desde un punto de vista más general, se puede considerar que un transformador "transforma" la *impedancia* de la red a la que está acoplado el circuito del secundario.

La ecuación (31.37) tiene numerosas consecuencias prácticas. La energía suministrada por una fuente a un resistor depende de las resistencias tanto del resistor como de la fuente. Se puede demostrar que la transferencia de potencia es máxima cuando las dos resistencias son *iguales*. El mismo principio se aplica tanto a los circuitos de cd como a los de ca. Cuando una fuente de ca de impedancia elevada debe conectarse a un circuito de baja impedancia, como un amplificador de audio conectado a un altavoz, se puede *igualar* la impedancia de la fuente con la del circuito, usando un transformador con una razón adecuada de espiras N_2/N_1.

Los transformadores reales siempre tienen algunas pérdidas de energía. (Por eso, un adaptador de ca, como el que se ilustra en la figura 31.23, se siente caliente al tacto después de haberse usado durante cierto tiempo; el transformador se calienta por la energía disipada). Los embobinados tienen cierta resistencia, lo cual causa pérdidas de i^2R. También hay pérdidas de energía por histéresis en el núcleo (véase la sección 28.8). Las pérdidas por histéresis se minimizan utilizando hierro forjado con una espira de histéresis estrecha.

Otro mecanismo importante de pérdida de energía en el núcleo de un transformador tiene que ver con las corrientes parásitas (véase la sección 29.6). Considere la sección *AA* del núcleo de hierro de un transformador (figura 31.24*a*). Como el hierro es conduc-

31.24 *a*) Embobinados primario y secundario en un transformador. *b*) Corrientes parásitas en el núcleo de hierro, ilustradas en la sección transversal en *AA*. *c*) El uso de un núcleo laminado reduce las corrientes parásitas.



tor, cualquier sección como esa se puede considerar como varios circuitos conductores, uno dentro de otro (figura 31.24*b*). El flujo a través de cada uno de estos circuitos cambia continuamente; en consecuencia, hay corrientes parásitas que circulan por todo el volumen del núcleo, con líneas de flujo que forman planos perpendiculares al flujo. Estas corrientes parásitas son sumamente indeseables, ya que desperdician energía i^2R a través del calentamiento y establecen un flujo opuesto.

Los efectos de las corrientes parásitas se minimizan mediante el empleo de un núcleo *laminado*, es decir, uno hecho con láminas delgadas o laminillas. La gran resistencia eléctrica superficial de cada lámina, debida a un revestimiento natural de óxido o a un barniz aislante, confina con eficacia las corrientes parásitas a las laminillas individuales (figura 31.24*c*). Las posibles trayectorias de las corrientes parásitas son más angostas, la fem inducida en cada trayectoria es menor y las corrientes parásitas se reducen considerablemente. El campo magnético alterno ejerce fuerzas sobre las laminillas portadoras de corriente que las hace vibrar hacia un lado y otro; esta vibración es la que ocasiona el "zumbido" característico de un transformador en funcionamiento. Este mismo "zumbido" se escucha en la balastra de inductancia magnética de una lámpara fluorescente (véase la sección 30.2).

Gracias al uso de núcleos de hierro forjado y a la laminación, las eficiencias de los transformadores son por lo general superiores al 90%; en instalaciones grandes alcanza hasta el 99%.

Ejemplo 31.9 "¡Despierte y perciba el aroma (del transformador)!"

Una amiga trae de Europa una cafetera de 960 W, diseñada para operar en una línea de 240 V. *a*) ¿Qué puede hacer para utilizar la cafetera a 120 V? *b*) ¿Qué corriente tomará la cafetera de la línea de 120 V? *c*) ¿Cuál es la resistencia de la cafetera? (Los voltajes son valores rms).

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Nuestra amiga necesita un transformador elevador para convertir los 120 V de ca a los 240 V que requiere la cafetera. Se utiliza la ecuación (31.35) para determinar la razón de espiras del transformador, N_2/N_1, la relación $P_{med} = V_{rms}I_{rms}$ del resistor para obtener el consumo de corriente, y la ecuación (31.37) para calcular la resistencia.

EJECUTAR: *a*) Para obtener $V_2 = 240$ V de $V_1 = 120$ V, la razón de espiras requerida es $N_2/N_1 = V_2/V_1 = (240\text{ V})/(120\text{ V}) = 2$. Es decir, la bobina secundaria (conectada a la cafetera) debería tener el doble de espiras que la bobina primaria (conectada a la línea de 120 V).

b) La corriente rms I_1 en el primario de 120 V se obtiene mediante la relación $P_{med} = V_1I_1$, donde P_{med} es la potencia media que consume la cafetera y, por lo tanto, la potencia suministrada por la línea de 120 V. (Suponemos que en el transformador no hay pérdidas de energía). Así pues, $I_1 = P_{med}/V_1 = (960\text{ W})/(120\text{ V}) = 8.0$ A. De manera que la corriente secundaria es $I_2 = P_{med}/V_2 = (960\text{ W})/(240\text{ V}) = 4.0$ A.

c) Se tiene $V_1 = 120$ V, $I_1 = 8.0$ A y $N_2/N_1 = 2$ y, entonces,

$$\frac{V_1}{I_1} = \frac{120\text{ V}}{8.0\text{ A}} = 15\ \Omega$$

De acuerdo con la ecuación (31.37),

$$R = 2^2(15\ \Omega) = 60\ \Omega$$

EVALUAR: Como comprobación, $V_2/R = (240\text{ V})/(60\ \Omega) = 4.0\text{ A} = I_2$, el mismo valor obtenido antes. También se puede comprobar este resultado de R mediante la expresión $P_{med} = V_2^2/R$ de la potencia que consume la cafetera.

Evalúe su comprensión de la sección 31.6 Cada uno de los siguientes cuatro transformadores tiene 1000 espiras en su bobina primaria. Ordénelos según el número de espiras en la bobina secundaria, de mayor a menor. **i.** Convierte 120 V de ca en 6.0 V de ca; **ii.** convierte 120 V de ca en 240 V de ca; **iii.** convierte 240 V de ca en 6.0 V de ca; **iv.** convierte 240 V de ca en 120 V de ca.



Fasores y corriente alterna: Un alternador o una fuente de ca produce una fem que varía en forma sinusoidal con el tiempo. Un voltaje o una corriente sinusoidal se puede representar mediante un fasor, que es un vector que gira en sentido antihorario con velocidad angular constante ω igual a la frecuencia angular de la cantidad sinusoidal. Su proyección sobre el eje horizontal en cualquier instante representa el valor instantáneo de la cantidad.

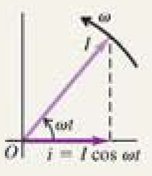
Para una corriente sinusoidal, las corrientes media rectificada y rms (rms, cuadrática media) son proporcionales a la amplitud de corriente I. De manera similar, el valor rms de un voltaje sinusoidal es proporcional a la amplitud de voltaje V (véase el ejemplo 31.1).



$$I_{vmr} = \frac{2}{\pi}I = 0.637I \qquad (31.3)$$

$$I_{rms} = \frac{I}{\sqrt{2}} \qquad (31.4)$$

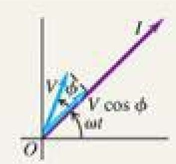
$$V_{rms} = \frac{V}{\sqrt{2}} \qquad (31.5)$$



Voltaje, corriente y ángulo de fase: En general, el voltaje instantáneo entre dos puntos en un circuito de ca no está en fase con la corriente instantánea que pasa a través de esos puntos. La cantidad ϕ se llama ángulo de fase del voltaje con respecto a la corriente.

$$i = I\cos\omega t \qquad (31.2)$$

$$v = V\cos(\omega t + \phi)$$



Resistencia y reactancia: El voltaje a través de un resistor R está en fase con la corriente. El voltaje a través de un inductor L se adelanta a la corriente 90° ($\phi = +90°$), en tanto que el voltaje a través de un capacitor C tiene un retraso de 90° ($\phi = -90°$) con respecto a la corriente. La amplitud del voltaje a través de cada tipo de dispositivo es proporcional a la amplitud de la corriente I. Un inductor tiene una reactancia inductiva $X_L = \omega L$, y un capacitor tiene una reactancia capacitiva $X_C = 1/\omega C$. (Véase los ejemplos 31.2 y 31.3).

$$V_R = IR \qquad (31.7)$$

$$V_L = IX_L \qquad (31.13)$$

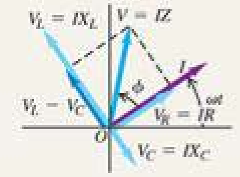
$$V_C = IX_C \qquad (31.19)$$

Impedancia y el circuito *L-R-C* en serie: En un circuito de ca general, las amplitudes del voltaje y la corriente están relacionadas por la impedancia Z del circuito. En un circuito L-R-C en serie, los valores de L, R, C y la frecuencia angular ω determinan la impedancia y el ángulo de fase ϕ del voltaje en relación con la corriente. (Véase los ejemplos 31.4 y 31.5).

$$V = IZ \qquad (31.22)$$

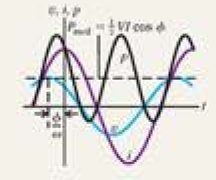
$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = \sqrt{R^2 + [\omega L - (1/\omega C)]^2} \qquad (31.23)$$

$$\tan\phi = \frac{\omega L - 1/\omega C}{R} \qquad (31.24)$$



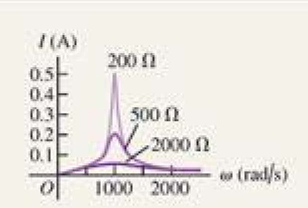
Potencia en circuitos de ca: La potencia media de alimentación, P_{med}, en un circuito de ca depende de las amplitudes de voltaje y de corriente (o, de manera equivalente, de sus valores rms) y del ángulo de fase ϕ del voltaje en relación con la corriente. La cantidad $\cos\phi$ se llama factor de potencia. (Véase los ejemplos 31.6 y 31.7).

$$P_{med} = \tfrac{1}{2}VI\cos\phi = V_{rms}I_{rms}\cos\phi \qquad (31.31)$$



Resonancia en circuitos de ca: En un circuito L-R-C en serie, la corriente es máxima y la impedancia mínima a cierta frecuencia angular, llamada frecuencia angular de resonancia. Este fenómeno se llama resonancia. En la resonancia, el voltaje y la corriente están en fase, y la impedancia Z es igual a la resistencia R. (Véase el ejemplo 31.8).

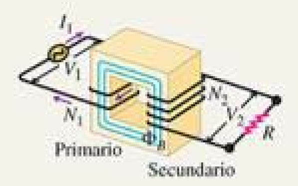
$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \qquad (31.32)$$



Transformadores: Un transformador se utiliza para transformar los niveles de voltaje y de corriente en un circuito de ca. En un transformador ideal sin pérdidas de energía, si el embobinado primario tiene N_1 espiras y el secundario tiene N_2 espiras, las amplitudes (o valores rms) de los dos voltajes están relacionadas mediante la ecuación (31.35). Las amplitudes (o valores rms) de los voltajes y las corrientes del primario y del secundario están relacionadas por la ecuación (31.36). (Véase el ejemplo 31.9).

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{N_2}{N_1} \tag{31.35}$$

$$V_1 I_1 = V_2 I_2 \tag{31.36}$$





PROBLEMA PRÁCTICO Circuito de corriente alterna

Un circuito en serie está formado por un inductor de 1.50 mH, un resistor de 125 Ω, y un capacitor de 25.0 nF conectado a través de una fuente de ca que tiene un voltaje rms de 35.0 V y frecuencia variable. *a*) ¿A qué frecuencias angulares la amplitud de corriente es igual a $\frac{1}{3}$ de su valor máximo posible? *b*) En las frecuencias del inciso *a*), ¿cuáles son las amplitudes de corriente y de voltaje en cada elemento de circuito (incluyendo la fuente de ca)?

GUÍA DE SOLUCIÓN

Véase el área de estudio MasteringPhysics® para consultar una solución con Video Tutor.



IDENTIFICAR y PLANTEAR

1. La amplitud máxima de corriente se presenta en la frecuencia angular de resonancia. Este problema se refiere a las frecuencias angulares donde la amplitud de la corriente es un tercio del máximo.
2. Elija la ecuación que le permitirá calcular las frecuencias angulares en cuestión, y seleccione las ecuaciones que usará después para determinar las amplitudes de corriente y de voltaje en cada frecuencia angular.

EJECUTAR

3. Calcule la impedancia en las frecuencias angulares del inciso *a*); luego, determine los valores de frecuencia angular.
4. Calcule la amplitud de voltaje a través de la fuente y la amplitud de corriente para cada una de las frecuencias angulares del inciso *a*). (*Sugerencia*: Asegúrese de distinguir entre *amplitud* y *valor rms*).
5. Utilice los resultados de los pasos 3 y 4 para calcular las reactancias de cada frecuencia angular. Después, calcule las amplitudes de voltaje del resistor, inductor y capacitor.

EVALUAR

6. ¿Existen algunas amplitudes de voltaje que sean mayores que la amplitud de voltaje de la fuente? Si es así, ¿significa esto que los resultados son erróneos?

Problemas

Para tareas asignadas por el profesor, visite www.masteringphysics.com



•, ••, •••: Problemas de dificultad creciente. **PA**: Problemas acumulativos que incorporan material de capítulos anteriores. **CALC**: Problemas que requieren cálculo. **BIO**: Problemas de ciencias biológicas.

PREGUNTAS PARA ANÁLISIS

P31.1 La energía eléctrica para consumo doméstico se suministra a 240 V en la mayor parte de Europa, y no a 120 V como en Estados Unidos y Canadá. ¿Cuáles son las ventajas y desventajas de cada sistema?

P31.2 La corriente en una línea de energía de ca cambia de sentido 120 veces por segundo, y su valor medio es de cero. Explique cómo es posible que se transmita energía en un sistema así.

P31.3 En un circuito de ca, ¿por qué valen cero la potencia media para un inductor y un capacitor, pero no para un resistor?

P31.4 La ecuación (31.14) se obtuvo de la relación $i = dq/dt$ entre la corriente y la carga en el capacitor. En la figura 31.9*a* la corriente positiva en sentido antihorario incrementa la carga en el capacitor. Cuando la carga en la placa izquierda es positiva, pero disminuye con el tiempo, ¿sigue siendo correcta la relación $i = dq/dt$ o debería ser $i = -dq/dt$? Cuando la placa derecha tiene carga positiva cuya magnitud aumenta o disminuye, ¿sigue siendo correcta la relación $i = dq/dt$? Explique su respuesta.

P31.5 Las lámparas fluorescentes utilizan con frecuencia un inductor, llamado balastra, para limitar la corriente a través de los tubos. ¿Por qué es mejor usar un inductor en vez de un resistor para tal propósito?

P31.6 La ecuación (31.9) indica que $v_{ab} = L\,di/dt$ (véase la figura 31.8*a*). Con base en la ley de Faraday, explique por qué el punto *a* está a un potencial mayor que el *b* cuando *i* tiene el sentido que se indica en la figura 31.8*a* y su magnitud va en aumento. Cuando *i* va en sentido antihorario y disminuye su magnitud, ¿aún es correcta la relación $v_{ab} = L\;di/dt$, o debería ser $v_{ab} = -L\,di/dt$? ¿Cuándo *i* va en sentido horario y aumenta o disminuye su magnitud, sigue siendo correcta la relación $v_{ab} = L\,di/dt$? Explique su respuesta.

P31.7 ¿Es posible que el factor de potencia de un circuito *L-R-C* en serie valga cero? Justifique su respuesta en términos *físicos*.

P31.8 En un circuito *L-R-C* en serie, ¿el voltaje instantáneo a través del capacitor puede superar el voltaje de fuente en ese mismo instante? ¿Puede esto ser verdad para el voltaje instantáneo a través del inductor? ¿Y a través del resistor? Explique su respuesta.

P31.9 En un circuito *L-R-C* en serie, ¿cuáles son el ángulo de fase ϕ y el factor de potencia cos ϕ cuando la resistencia es mucho menor que la reactancia inductiva o capacitiva, y el circuito funciona alejado de la resonancia? Explique su respuesta.

P31.10 Cuando un circuito *L-R-C* en serie está conectado a través de una línea de ca de 120 V, es posible que se exceda el voltaje nominal del capacitor aun cuando este sea de 200 o 400 V. ¿Cómo es posible esto?

P31.11 En el ejemplo 31.6 (sección 31.4), se trató una secadora para el cabello como un resistor puro. Sin embargo, como hay bobinas en el elemento calefactor y en el motor que impulsa el ventilador, una secadora también tiene inductancia. En términos cualitativos, la inclusión de la inductancia ¿incrementa o disminuye los valores de R, I_{rms} y P?

P31.12 Una bombilla eléctrica y un capacitor de placas paralelas con aire entre ellas están conectados en serie a una fuente de ca. ¿Qué sucede con el brillo de la bombilla cuando se inserta un dieléctrico entre las placas del capacitor? Explique su respuesta.

P31.13 Una bobina de alambre enrollado alrededor de un tubo hueco y una bombilla eléctrica están conectadas en serie a una fuente de ca. ¿Qué sucede con el brillo de la bombilla, cuando se inserta una varilla de hierro en el tubo?

P31.14 Un circuito consiste en una bombilla eléctrica, un capacitor y un inductor conectados en serie a una fuente de ca. ¿Qué sucede con el brillo de la bombilla cuando se retira el inductor? ¿Y cuando se deja el inductor en el circuito, pero se retira el capacitor? Dé una explicación.

P31.15 Un circuito consiste en una bombilla eléctrica, un capacitor y un inductor conectados en serie a una fuente de ca. ¿Es posible retirar tanto el capacitor como el inductor, sin que esto altere el brillo que emite la bombilla? Explique su respuesta.

P31.16 ¿Se puede utilizar un transformador con cd? Explique por qué. ¿Qué sucede cuando un transformador diseñado para ca a 120 V se conecta a una línea de cd a 120 V?

P31.17 Un transformador ideal tiene N_1 embobinados en el primario y N_2 en su secundario. Si se duplica el número de embobinados tan solo en el secundario, ¿en qué factor cambian *a*) la amplitud de voltaje en el secundario, y *b*) la resistencia efectiva del circuito secundario?

P31.18 Algunos aparatos eléctricos operan bien con ca o con cd, y otros únicamente funcionan con ca o solo con cd. Mencione ejemplos de cada uno y explique las diferencias.

EJERCICIOS

Sección 31.1 Fasores y corrientes alternas

31.1 • Usted tiene una bombilla eléctrica especial con un filamento de alambre *muy* delicado. El alambre se romperá si la corriente en él excede 1.50 A, incluso por un instante. ¿Cuál es la mayor corriente rms que puede pasar a través de la bombilla?

31.2 • Una corriente sinusoidal $i = I \cos \omega t$ tiene un valor rms $I_{rms} =$ 2.10 A. *a*) ¿Cuál es la amplitud de corriente? *b*) La corriente se hace pasar a través de un circuito rectificador de onda completa. ¿Cuál es la corriente media rectificada? *c*) ¿Qué es mayor: I_{rms} o I_{vmr}? Explique utilizando gráficas de i^2 y de la corriente rectificada.

31.3 • El voltaje entre las terminales de una fuente de energía de ca varía con el tiempo según la ecuación (31.1). La amplitud de voltaje es $V = 45.0$ V. ¿Cuáles son *a*) la diferencia de potencial cuadrática media, V_{rms}? y *b*) ¿la diferencia de potencial media V_{med} entre las dos terminales de la fuente de energía?

Sección 31.2 Resistencia y reactancia

31.4 • Un capacitor está conectado a una fuente de ca que tiene una amplitud de voltaje de 60.0 V y una frecuencia de 80.0 Hz. *a*) ¿Cuál es el ángulo de fase ϕ del voltaje de la fuente relativa a la corriente? ¿El voltaje de la fuente va atrás o adelante de la corriente? *b*) ¿Cuál es la capacitancia C del capacitor, si la amplitud de corriente es 5.30 A?

31.5 • Un inductor con $L = 9.50$ mH está conectado a una fuente de corriente alterna que tiene una amplitud de voltaje de 45.0 V. *a*) ¿Cuál es el ángulo de fase ϕ del voltaje de la fuente relativa a la corriente? ¿El voltaje de la fuente va atrás o adelante de la corriente? *b*) ¿Con qué valor de la frecuencia de la fuente se obtiene una amplitud de corriente de 3.90 A?

31.6 • Una capacitancia C y una inductancia L se operan a la misma frecuencia angular. *a*) ¿A qué frecuencia angular tendrán la misma reactancia? *b*) Si $L = 5.00$ mH y $C = 3.50\ \mu$F, ¿cuál es el valor numérico de la frecuencia angular del inciso *a*), y cuál es la reactancia de cada elemento?

31.7 • **Capacitancia en una cocina.** El sistema eléctrico de un refrigerador tiene un capacitor de arranque. Se aplica un voltaje con amplitud de 170 V y frecuencia de 60.0 Hz a través del capacitor, para producir una amplitud de corriente de 0.850 A en el capacitor. ¿Cuál es la capacitancia C que se necesita?

31.8 • *a*) Calcule la reactancia de un inductor de 0.450 H en las frecuencias de 60.0 y 600 Hz. *b*) Calcule la reactancia de un capacitor de 2.50 μF en las mismas frecuencias. *c*) ¿A qué frecuencia la reactancia de un inductor de 0.450 H es igual a la de un capacitor de 2.50 μF?

31.9 • *a*) ¿Cuál es la reactancia de un inductor de 3.00 H a una frecuencia de 80.0 Hz? *b*) ¿Cuál es la inductancia de un inductor cuya reactancia es de 120 Ω a 80.0 Hz? *c*) ¿Cuál es la reactancia de un capacitor de 4.00 μF a una frecuencia de 80.0 Hz? *d*) ¿Cuál es la capacitancia de un capacitor cuya reactancia es de 120 Ω a 80.0 Hz?

31.10 • **Inductor de radio.** Se desea que la amplitud de corriente a través de un inductor de 0.450 mH (parte de los circuitos de un receptor de radio) sea de 2.60 mA cuando a través del inductor se aplica un voltaje sinusoidal con amplitud de 12.0 V. ¿Cuál es la frecuencia que se requiere?

31.11 •• Un inductor de 0.180 H está conectado en serie con un resistor de 90.0 Ω y una fuente de ca. El voltaje a través del inductor es $v_L = -(12.0\ \text{V})$ sen $[(480\ \text{rad/s})t]$. *a*) Obtenga una expresión para el voltaje v_R a través del resistor. *b*) ¿Cuál es el valor de v_R en $t = 2.00$ ms?

31.12 •• Un resistor de 250 Ω está conectado en serie con un capacitor de 4.80 μF y una fuente de ca. El voltaje a través del capacitor es $v_C = (7.60\ \text{V})$ sen$[(120\ \text{rad/s})t]$. *a*) Determine la reactancia capacitiva del capacitor. *b*) Obtenga una expresión para el voltaje v_R a través del resistor.

31.13 •• Un resistor de 150 Ω está conectado en serie con un inductor de 0.250 H y una fuente de ca. El voltaje a través del resistor es $v_R = (3.80\ \text{V})$ cos$[(720\ \text{rad/s})t]$. *a*) Obtenga una expresión para la corriente de circuito. *b*) Determine la reactancia inductiva del inductor. *c*) Obtenga una expresión para el voltaje v_L a través del inductor.

Sección 31.3 Circuito *L-R-C* en serie

31.14 • Usted tiene un resistor de 200 Ω, un inductor de 0.400 H y un capacitor de 6.00 μF. Suponga que toma el resistor y el inductor, y construye un circuito en serie con una fuente de voltaje que tiene una amplitud de voltaje de 30.0 V y una frecuencia angular de 250 rad/s. *a*) ¿Cuál es la impedancia del circuito? *b*) ¿Cuál es la amplitud de corriente? *c*) ¿Cuáles son las amplitudes de voltaje a través del resistor y a través del inductor? *d*) ¿Cuál es el ángulo de fase ϕ del voltaje de fuente con respecto de la corriente? ¿La fuente de voltaje se adelanta o se atrasa en relación con la corriente? *e*) Elabore el diagrama de fasores.

31.15 • El resistor, el inductor, el capacitor y la fuente de voltaje descritos en el ejercicio 31.14 están conectados en un circuito *L-R-C* en serie. *a*) ¿Cuál es la impedancia del circuito? *b*) ¿Cuál es la amplitud de corriente? *c*) ¿Cuál es el ángulo de fase del voltaje de fuente respecto de la corriente? ¿El voltaje de fuente se atrasa o se adelanta a la corriente? *d*) ¿Cuáles son las amplitudes del voltaje a través del resistor, inductor y capacitor? *e*) Explique cómo es posible que la amplitud

de voltaje a través del capacitor sea mayor que la amplitud de voltaje a través de la fuente.

31.16 •• Un resistor de 200 Ω, un inductor de 0.900 H y un capacitor de 6.00 μF están conectados en serie a través de una fuente de voltaje, que tiene una amplitud de voltaje de 30.0 V y una frecuencia angular de 250 rad/s. ¿Cuáles son v, v_R, v_L y v_C en $t = 20.0$ ms? Compare $v_R + v_L + v_C$ con v en ese instante. *b*) ¿Cuáles son V_R, V_L y V_C? Compare V con $V_R + V_L + V_C$. Explique por qué estas dos cantidades son diferentes.

31.17 • En un circuito *L-R-C* en serie, el voltaje rms a través del resistor es de 30.0 V, a través del capacitor es de 90.0 V, y a través del inductor es de 50.0 V. ¿Cuál es el voltaje rms de la fuente?

Sección 31.4 Potencia en circuitos de corriente alterna

31.18 •• Un resistor con $R = 300$ Ω y un inductor están conectados en serie con una fuente de ca que tiene una amplitud de voltaje de 500 V. La tasa a la cual se disipa la energía eléctrica en el resistor es de 216 W. *a*) ¿Cuál es la impedancia Z del circuito? *b*) ¿Cuál es la amplitud del voltaje a través del inductor? *c*) ¿Cuál es el factor de potencia?

31.19 • La potencia de cierto reproductor de CD que opera a 120 V rms es de 20.0 W. Suponga que el reproductor de CD se comporta como un resistor puro, y calcule *a*) la potencia instantánea máxima, *b*) la corriente rms y *c*) la resistencia del reproductor.

31.20 •• En un circuito *L-R-C* en serie, los componentes tienen los siguientes valores: $L = 20.0$ mH, $C = 140$ nF y $R = 350$ Ω. El generador tiene un voltaje rms de 120 V y una frecuencia de 1.25 kHz. Determine *a*) la potencia suministrada por el generador y *b*) la potencia disipada en el resistor.

31.21 • *a*) Demuestre que para un circuito *L-R-C* en serie, el factor de potencia es igual a R/Z. *b*) Un circuito *L-R-C* en serie tiene un ángulo de fase de $-31.5°$. La amplitud de voltaje de la fuente es de 90.0 V. ¿Cuál es la amplitud de voltaje a través del resistor?

31.22 • *a*) Use los resultados del inciso *a*) del ejercicio 31.21 para demostrar que la potencia media entregada por la fuente en un circuito *L-R-C* en serie está dada por $P_{med} = I_{rms}{}^2R$. *b*) Un circuito *L-R-C* en serie tiene $R = 96.0$ Ω y amplitud de voltaje a través del resistor de 36.0 V. ¿Cuál es la potencia media entregada por la fuente?

31.23 • Un circuito *L-R-C* en serie, con $L = 0.120$ H, $R = 240$ Ω y $C = 7.30$ μF, conduce una corriente rms de 0.450 A con una frecuencia de 400 Hz. *a*) ¿Cuáles son el ángulo de fase y el factor de potencia de este circuito? *b*) ¿Cuál es la impedancia del circuito? *c*) ¿Cuál es el voltaje rms de la fuente? *d*) ¿Cuál es la potencia media que entrega la fuente? *e*) ¿Cuál es la tasa media a la cual la energía eléctrica se convierte en energía térmica en el resistor? *f*) ¿Cuál es la tasa media a la que se disipa la energía eléctrica (es decir, se convierte en otras formas) en el capacitor? *g*) ¿Y en el inductor?

31.24 •• Un circuito *L-R-C* en serie está conectado a una fuente de ca de 120 Hz que tiene $V_{rms} = 80.0$ V. El circuito tiene una resistencia de 75.0 Ω y una impedancia a esta frecuencia de 105 Ω. ¿Cuál es la potencia media que la fuente entrega al circuito?

31.25 •• Un circuito en serie de ca tiene un resistor de 250 Ω, un inductor de 15 mH, un capacitor de 3.5 μF, y una fuente de potencia de ca con amplitud de voltaje de 45 V que opera a una frecuencia angular de 360 rad/s. *a*) ¿Cuál es el factor de potencia de este circuito? *b*) Calcule la potencia media entregada a todo el circuito. *c*) ¿Cuál es la potencia media aportada al resistor, al capacitor y al inductor?

Sección 31.5 Resonancia en circuitos de corriente alterna

31.26 •• En un circuito *L-R-C* en serie la fuente opera a su frecuencia angular de resonancia. A esta frecuencia, la reactancia X_C del capacitor es de 200 Ω y la amplitud de voltaje a través del capacitor es de 600 V. El circuito tiene $R = 300$ Ω. ¿Cuál es la amplitud de voltaje de la fuente?

31.27 • **Análisis de un circuito *L-R-C*.** Se tiene un resistor de 200 Ω, un inductor de 0.400 H, un capacitor de 5.00 μF y una fuente de ca de frecuencia variable con amplitud de 3.00 V. Se conectan los cuatro elementos para formar un circuito en serie. *a*) ¿A qué frecuencia será máxima la corriente en el circuito? ¿Cuál será la amplitud de corriente a esta frecuencia? *b*) ¿Cuál será la amplitud de corriente a una frecuencia angular de 400 rad/s? A esta frecuencia, ¿el voltaje en la fuente se adelantará o se atrasará en relación con la corriente?

31.28 • Un circuito *L-R-C* en serie se construye usando un resistor de 175 Ω, un capacitor de 12.5 μF y un inductor de 8.00 mH, todos conectados a una fuente de ca que tiene frecuencia variable y una amplitud de voltaje de 25.0 V. *a*) ¿A qué frecuencia angular la impedancia será mínima, y cuál será su valor? *b*) A la frecuencia angular del inciso *a*), ¿cuál es la corriente máxima a través del inductor? *c*) A la frecuencia angular del inciso *a*), determine la diferencia de potencial a través de la fuente de ca, el resistor, el capacitor y el inductor en el instante en que la corriente es igual a la mitad de su valor positivo más grande. *d*) En el inciso *c*), ¿cómo están relacionadas las diferencias de potencial a través del resistor, el inductor y el capacitor con la diferencia de potencial a través de la fuente de ca?

31.29 • En un circuito *L-R-C* en serie, $R = 300$ Ω, $L = 0.400$ H y $C = 6.00 \times 10^{-8}$ F. Cuando la fuente de ca opera a la frecuencia de resonancia del circuito, la amplitud de la corriente es de 0.500 A. *a*) ¿Cuál es la amplitud de voltaje de la fuente? *b*) ¿Cuál es la amplitud de voltaje a través del resistor, a través del inductor y a través del capacitor? *c*) ¿Cuál es la potencia media que la fuente suministra?

31.30 • Un circuito *L-R-C* en serie consiste en una fuente con amplitud de voltaje de 120 V y frecuencia angular de 50.0 rad/s, un resistor con $R = 400$ Ω, un inductor con $L = 9.00$ H y un capacitor con capacitancia C. *a*) ¿Para qué valor de C será máxima la amplitud de la corriente en el circuito? *b*) Cuando C tiene el valor calculado en el inciso *a*), ¿cuál es la amplitud del voltaje a través del inductor?

31.31 • En un circuito *L-R-C* en serie, $R = 150$ Ω, $L = 0.750$ H y $C = 0.0180$ μF. La fuente tiene una amplitud de voltaje $V = 150$ V y una frecuencia igual a la frecuencia de resonancia del circuito. *a*) ¿Cuál es el factor de potencia? *b*) ¿Cuál es la potencia media que entrega la fuente? *c*) Se sustituye el capacitor por otro con $C = 0.0360$ μF y se ajusta la frecuencia de la fuente al nuevo valor de resonancia. En esas condiciones, ¿cuál es la potencia media que entrega la fuente?

31.32 • En un circuito *L-R-C* en serie, $R = 400$ Ω, $L = 0.350$ H y $C = 0.0120$ μF. *a*) ¿Cuál es la frecuencia angular de resonancia del circuito? *b*) El capacitor es capaz de manejar un voltaje máximo de 550 V. Si la fuente de voltaje opera a la frecuencia de resonancia, ¿cuál es la amplitud máxima de voltaje que puede tener, si no debe rebasarse el voltaje máximo del capacitor?

31.33 • Un circuito en serie consiste en una fuente de ca de frecuencia variable, un resistor de 115 Ω, un capacitor de 1.25 μF y un inductor de 4.50 mH. Calcule la impedancia de este circuito cuando la frecuencia angular de la fuente de ca se ajusta a *a*) la frecuencia angular de resonancia; *b*) el doble de la frecuencia angular de resonancia; *c*) la mitad de la frecuencia angular de resonancia.

31.34 •• En un circuito *L-R-C* en serie, $L = 0.280$ H y $C = 4.00$ μF. La amplitud de voltaje de la fuente es de 120 V. *a*) ¿Cuál es la frecuencia angular de resonancia del circuito? *b*) Cuando la fuente opera a la frecuencia angular de resonancia, la amplitud de corriente en el circuito es de 1.70 A. ¿Cuál es la resistencia R del resistor? *c*) A la frecuencia angular de resonancia, ¿cuáles son el máximo de voltaje a través del inductor, el capacitor y el resistor?

Sección 31.6 Transformadores

31.35 • **Transformador reductor.** Un transformador conectado a una línea de ca de 120 V (rms) debe suministrar 12.0 V (rms) a un dispositivo electrónico portátil. La resistencia de la carga en el secundario es de 5.00 Ω. *a*) ¿Cuál debería ser la razón entre las espiras del primario y el secundario del transformador? *b*) ¿Qué corriente rms debe suministrar el secundario? *c*) ¿Cuál es la potencia media que se entrega a la carga? *d*) ¿Qué resistencia conectada directamente a la línea de 120 V consumiría la misma potencia que el transformador? Demuestre que esta es igual al producto de 5.00 Ω por el cuadrado de la razón entre las espiras del primario y el secundario.

31.36 • **Transformador elevador.** Un transformador conectado a una línea de ca de 120 V (rms) tiene que suministrar 13,000 V (rms) para un anuncio de neón. Para reducir el peligro de una descarga, se inserta un fusible en el circuito primario, el cual se funde cuando la corriente rms en el circuito secundario rebasa los 8.50 mA. *a*) ¿Cuál es la razón entre las espiras del primario y el secundario del transformador? *b*) ¿Cuál es la potencia que debe suministrarse al transformador, cuando la corriente rms en el secundario es de 8.50 mA? *c*) ¿Cuál es la corriente nominal que debería tener el fusible en el circuito primario?

31.37 • **¡A Europa!** Usted planea llevar su secadora para el cabello a Europa, donde las tomas eléctricas son de 240 V en vez de 120 V, como en Estados Unidos. El dispositivo genera 1600 W a 120 V. *a*) ¿Qué podría hacer para poder operar su secadora en la línea de 240 V europea? *b*) ¿Cuál es la corriente que tomaría la secadora de una toma en Europa? *c*) ¿Qué resistencia parecería tener la secadora al operar a 240 V?

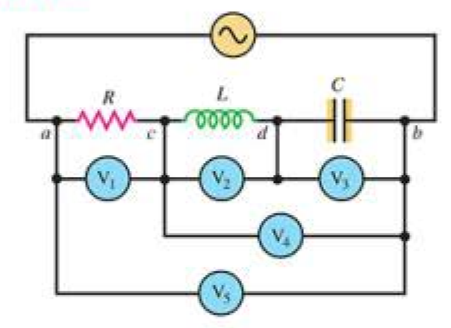
PROBLEMAS

31.38 •• La figura 31.12*a* ilustra la red de cruce de un sistema de altavoces. Un ramal consiste en un capacitor C y un resistor R en serie (el *tweeter*). Este ramal está en paralelo con otro (el *woofer*) que consiste en un inductor L y un resistor R en serie. A cada ramal en paralelo se aplica la misma fuente de voltaje con frecuencia angular ω. *a*) ¿Cuál es la impedancia del ramal del *tweeter*? *b*) ¿Cuál es la impedancia del ramal del *woofer*? *c*) Explique por qué las corrientes en los dos ramales son iguales cuando las impedancias de los ramales son iguales. *d*) Obtenga una expresión para la frecuencia f que corresponde al punto de cruce en la figura 31.12*b*.

31.39 • Una bobina tiene resistencia de 48.0 Ω. A una frecuencia de 80.0 Hz, el voltaje a través de la bobina se adelanta 52.3° a la corriente. Determine la inductancia de la bobina.

31.40 •• Cinco voltímetros con impedancia infinita, calibrados para leer valores rms, están conectados como se ilustra en la figura P31.40. Sea $R = 200\ \Omega$, $L = 0.400$ H, $C = 6.00\ \mu$F y $V = 30.0$ V. ¿Cuál es la lectura de cada voltímetro, si *a*) $\omega = 200$ rad/s y *b*) $\omega = 1000$ rad/s?

Figura **P31.40**



31.41 •• PA Un capacitor de placas paralelas cuadradas de 4.50 cm por lado y separadas 8.00 mm está en serie con una fuente de ca con frecuencia angular de 650 rad/s y amplitud de voltaje de 22.5 V, un resistor de 75.0 Ω, y un solenoide ideal de 9.00 cm de longitud, con una sección transversal de 0.500 cm de diámetro, y 125 espiras por centímetro. ¿Cuál es la frecuencia angular de resonancia de este circuito? (Véase el ejercicio 30.15).

31.42 •• PA Un solenoide toroidal tiene un embobinado compacto de 2900 espiras, área transversal de 0.450 cm^2, radio medio de 9.00 cm y resistencia $R = 2.80\ \Omega$. La variación del campo magnético a través de la sección transversal del solenoide es despreciable. ¿Cuál es la amplitud de la corriente en el solenoide, si está conectado a una fuente de ca que tiene una amplitud de voltaje de 24.0 V y frecuencia de 365 Hz?

31.43 •• Un circuito L-R-C en serie tiene $C = 4.80\ \mu$F, $L = 0.520$ H y amplitud de voltaje de fuente $V = 56.0$ V. La fuente opera a la frecuencia de resonancia del circuito. Si el voltaje a través del capacitor tiene una amplitud de 80.0 V, ¿cuál es el valor de R para el resistor en el circuito?

31.44 • Se conecta una bobina electromagnética grande a una fuente de ca de 120 Hz. La bobina tiene una resistencia de 400 Ω y, a esa frecuencia de la fuente, la bobina tiene una reactancia inductiva de 250 Ω. *a*) ¿Cuál es la inductancia de la bobina? *b*) ¿Cuál debe ser el voltaje rms de la fuente para que la bobina consuma una potencia eléctrica media de 800 W?

31.45 •• Un circuito en serie tiene una impedancia de 60.0 Ω y un factor de potencia de 0.720 a 50.0 Hz. El voltaje de fuente lleva un retraso con respecto a la corriente. *a*) ¿Qué elemento de circuito, un inductor o un capacitor, debería colocarse en serie con el circuito para elevar su factor de potencia? *b*) ¿De qué tamaño debe ser el elemento para elevar el factor de potencia a la unidad?

31.46 •• Un circuito L-R-C en serie tiene $R = 300\ \Omega$. En la frecuencia de la fuente, el inductor tiene una reactancia $X_L = 900\ \Omega$ y el capacitor tiene una reactancia de $X_C = 500\ \Omega$. La amplitud del voltaje a través del inductor es de 450 V. *a*) ¿Cuál es la amplitud del voltaje a través del resistor? *b*) ¿Cuál es la amplitud del voltaje a través del capacitor? *c*) ¿Cuál es la amplitud del voltaje de la fuente? *d*) ¿Cuál es la tasa a la cual la fuente entrega energía eléctrica al circuito?

31.47 •• En un circuito L-R-C en serie $R = 300\ \Omega$, $X_C = 300\ \Omega$ y $X_L = 500\ \Omega$. La potencia media consumida en el resistor es de 60.0 W. *a*) ¿Cuál es el factor de potencia del circuito? *b*) ¿Cuál es el voltaje rms de la fuente?

31.48 • Un circuito consiste en un resistor y un capacitor en serie con una fuente de ca que suministra un voltaje rms de 240 V. A la frecuencia de la fuente, la reactancia del capacitor es de 50.0 Ω. La corriente rms en el circuito es de 3.00 A. ¿Cuál es la potencia media que suministra la fuente?

31.49 • Un circuito L-R-C en serie consiste en un resistor de 50.0 Ω, un capacitor de 10.0 μF, un inductor de 3.50 mH y una fuente de voltaje con amplitud de 60.0 V que opera a 1250 Hz. *a*) Determine la amplitud de corriente y las amplitudes de voltaje a través del inductor, el resistor y el capacitor. ¿Por qué las amplitudes de voltaje suman *más* de 60.0 V? *b*) Si ahora se duplica la frecuencia, pero todo lo demás permanece constante, ¿cuál(es) de las cantidades del inciso *a*) cambiará(n)? Calcule esos nuevos valores.

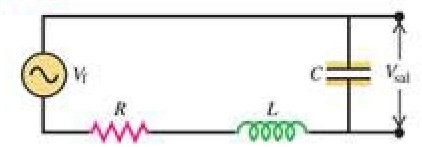
31.50 • A una frecuencia ω_1, la reactancia de cierto capacitor es igual a la de cierto inductor. *a*) Si la frecuencia cambia a $\omega_2 = 2\omega_1$, ¿cuál es la razón entre la reactancia del inductor y la del capacitor? ¿Cuál reactancia es mayor? *b*) Si la frecuencia cambia a $\omega_3 = \omega_1/3$, ¿cuál es la razón entre la reactancia del inductor y la del capacitor? ¿Cuál reactancia es más grande? *c*) Si el capacitor y el inductor se colocan en serie con un resistor de resistencia R para formar un circuito L-R-C en serie, ¿cuál será la frecuencia de resonancia angular del circuito?

31.51 •• Filtro de paso alto. Una aplicación de los circuitos *L-R-C* en serie es en los filtros de paso alto o de paso bajo, que filtran ya sea las componentes de alta frecuencia o las de baja frecuencia de una señal. En la figura P31.51 se presenta un filtro de paso alto, donde el voltaje de salida se toma entre los extremos de la combinación *L-R*. (La combinación *L-R* representa una bobina inductiva que también tiene una resistencia que se debe a la gran longitud del alambre de la bobina). Obtenga una expresión para V_{sal}/V_f, la razón entre las amplitudes de los voltajes de salida y de la fuente, en función de la frecuencia angular ω de la fuente. Demuestre que cuando ω es pequeña, esta razón es proporcional a ω y, por lo tanto, es pequeña, y demuestre que la razón tiende a la unidad en el límite de las frecuencias grandes.

Figura **P31.51**

31.52 •• Filtro de paso bajo. La figura P31.52 muestra un filtro de paso bajo (véase el problema 31.51); el voltaje de salida se toma a través del capacitor en un circuito *L-R-C* en serie. Obtenga una expresión para V_{sal}/V_f, la razón entre las amplitudes del voltaje de salida y de la fuente, como función de la frecuencia angular ω de la fuente. Demuestre que cuando ω es grande, esta razón es proporcional a ω^{-2} y, por lo tanto, es muy pequeña; asimismo, demuestre que la razón se aproxima a la unidad en el límite de las frecuencias pequeñas.

Figura **P31.52**



**31.53 ••• ** Un circuito *L-R-C* en serie está conectado a una fuente de ca de amplitud de voltaje V constante y frecuencia angular ω variable. *a)* Demuestre que la amplitud de corriente como función de ω es

$$I = \frac{V}{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}}$$

b) Demuestre que la potencia media disipada en el resistor es

$$P = \frac{V^2 R/2}{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}$$

c) Demuestre que *tanto I como P* son máximas cuando $\omega = 1/\sqrt{LC}$, la frecuencia de resonancia del circuito. *d)* Grafique P en función de ω, para $V = 100$ V, $R = 200\ \Omega$, $L = 2.0$ H y $C = 0.50\ \mu$F. Compare con la curva de color púrpura claro en la figura 31.19. Analice el comportamiento de I y P en los límites $\omega = 0$ y $\omega \to \infty$.

31.54 •• Un circuito *L-R-C* en serie está conectado a una fuente de ca de amplitud de voltaje constante V y frecuencia angular ω variable. Con los resultados del problema 31.53, encuentre una expresión para *a)* la amplitud V_L del voltaje a través del inductor como función de ω; y *b)* la amplitud V_C del voltaje a través del capacitor como función de ω. *c)* Grafique V_L y V_C como funciones de ω para $V = 100$ V, $R = 200\ \Omega$, $L = 2.0$ H y $C = 0.50\ \mu$F. *d)* Analice el comportamiento de V_L y V_C en los límites $\omega = 0$ y $\omega \to \infty$. ¿Para qué valor de ω es $V_L = V_C$? ¿Cuál es la importancia de este valor de ω?

31.55 •• En un circuito *L-R-C* en serie, la magnitud del ángulo de fase es de 54.0°, con el voltaje de fuente en retraso con respecto a la corriente. La reactancia del capacitor es de 350 Ω, y la resistencia del resistor es de 180 Ω. La potencia media que entrega la fuente es de 140 W. Determine *a)* la reactancia del inductor, *b)* la corriente rms, *c)* el voltaje rms de la fuente.

31.56 •• Circuito *L-R-C* en paralelo. Un resistor, un inductor y un capacitor están conectados en paralelo a una fuente de ca con amplitud de voltaje V y frecuencia angular ω. El voltaje de fuente está dado por $v = V \cos \omega t$. *a)* Demuestre que los voltajes instantáneos v_R, v_L y v_C en cualquier instante son todos iguales a v y que $i = i_R + i_L + i_C$, donde i es la corriente a través de la fuente, e i_R, i_L e i_C son las corrientes a través del resistor, el inductor y el capacitor, respectivamente. *b)* ¿Cuáles son las fases de i_R, i_L e i_C con respecto a v? Utilice los fasores de corriente para representar i, i_R, i_L e i_C. En un diagrama de fasores, muestre las fases de estas cuatro corrientes con respecto a v. *c)* Use el diagrama de fasores del inciso *b)* para demostrar que la amplitud de corriente I para la corriente i a través de la fuente está dada por $I = \sqrt{I_R^2 + (I_C - I_L)^2}$. *d)* Demuestre que el resultado del inciso *c)* se puede escribir como $I = V/Z$, con $1/Z = \sqrt{1/R^2 + (\omega C - 1/\omega L)^2}$.

31.57 •• Resonancia en paralelo. En el problema 31.56 se obtuvo la impedancia de un circuito *L-R-C* en paralelo. *a)* Demuestre que a la frecuencia angular de resonancia $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$, $I_C = I_L$, y que I es *mínima*. *b)* Puesto que I es mínima en la resonancia, ¿es correcto decir que la potencia entregada al resistor también es mínima en $\omega = \omega_0$? Explique su respuesta. *c)* En la resonancia, ¿cuál es el ángulo de fase de la corriente de fuente con respecto al voltaje de fuente? ¿Cómo se compara esto con el ángulo de fase para un circuito *L-R-C en serie* en la resonancia? *d)* Dibuje el diagrama de un circuito *L-R-C* en paralelo, y acomode los elementos de circuito de manera que el resistor sea el elemento más cercano a la fuente de ca. Justifique el enunciado siguiente: cuando la frecuencia angular de la fuente es $\omega = \omega_0$, *no* hay corriente que fluya entre **i.** la parte del circuito que incluye la fuente y el resistor, y **ii.** la parte que incluye el inductor y el capacitor, por lo que podrían cortarse los alambres que conectan esas dos partes del circuito sin afectar las corrientes. *e)* ¿Sigue siendo válido el enunciado del inciso *d)*, si se considera que cualquier inductor o capacitor real también tiene cierta resistencia propia? Explique su respuesta.

31.58 •• Un resistor de 400 Ω y un capacitor de 6.00 μF están conectados en paralelo a un generador de ca que suministra un voltaje rms de 220 V a una frecuencia angular de 360 rad/s. Use los resultados del problema 31.56. Observe que como en el circuito no hay inductor, el término $1/\omega L$ no está presente en la expresión para Z. Encuentre *a)* la amplitud de corriente en el resistor; *b)* la amplitud de corriente en el capacitor; *c)* el ángulo de fase de la corriente de fuente con respecto al voltaje de fuente; *d)* la amplitud de la corriente a través del generador. *e)* ¿La corriente de fuente se retrasa o se adelanta con respecto al voltaje de fuente?

31.59 •• Un circuito *L-R-C* en paralelo está conectado a una fuente de ca de amplitud de voltaje constante V y frecuencia angular variable ω. *a)* Con los resultados del problema 31.56, encuentre expresiones para las amplitudes I_R, I_L e I_C de las corrientes a través del resistor, el inductor y el capacitor, como funciones de ω. *b)* Grafique I_R, I_L e I_C, como funciones de ω para $V = 100$ V, $R = 200\ \Omega$, $L = 2.0$ H y $C = 0.50\ \mu$F. *c)* Analice el comportamiento de I_L e I_C en los límites $\omega = 0$ y $\omega \to \infty$. Explique por qué I_L e I_C se comportan como lo hacen en esos límites. *d)* Calcule la frecuencia de resonancia (en Hz) del circuito y dibuje el diagrama de fasores en la frecuencia de resonancia. *e)* En la frecuencia de resonancia, ¿cuál es la amplitud de corriente a través de la fuente? *f)* En la frecuencia de resonancia, ¿cuál es la amplitud de corriente a través del resistor, a través del inductor y a través del capacitor?

31.60 •• Un resistor de 100 Ω, un capacitor de 0.100 μF y un inductor de 0.300 H están conectados en paralelo a una fuente de voltaje con amplitud de 240 V. *a)* ¿Cuál es la frecuencia angular de resonancia? *b)* ¿Cuál es la corriente máxima a través de la fuente en la frecuencia

de resonancia? *c*) Determine la corriente máxima del resistor en resonancia. *d*) ¿Cuál es la corriente máxima en el inductor en resonancia? *e*) ¿Cuál es la corriente máxima en el ramal que contiene el capacitor en resonancia? *f*) Calcule la energía máxima almacenada en el inductor y en el capacitor en resonancia.

31.61 • Se desea duplicar la frecuencia angular de resonancia de un circuito *L-R-C* en serie cambiando solo los elementos *pertinentes* de circuito, todos en el mismo factor. *a*) ¿Cuáles deberían cambiar? *b*) ¿En qué factor tienen que cambiarse?

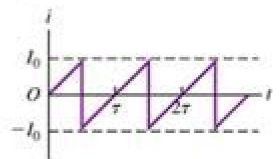
31.62 ••• Un circuito *L-R-C* en serie se compone de un capacitor de 2.50 μF, un inductor de 5.00 mH y un resistor de 75.0 Ω conectados a través de una fuente de ca con amplitud de voltaje de 15.0 V y frecuencia variable. *a*) ¿En qué circunstancias la potencia media entregada al circuito es igual a $\frac{1}{2}V_{rms}I_{rms}$? *b*) En las condiciones del inciso *a*), ¿cuál es la potencia media entregada a cada elemento de circuito, y cuál la corriente máxima a través del capacitor?

31.63 •• En un circuito *L-R-C* en serie, la fuente tiene una amplitud de voltaje de 120 V, $R = 80.0\ \Omega$ y la reactancia del capacitor es de 480 Ω. La amplitud del voltaje a través del capacitor es de 360 V. *a*) ¿Cuál es la amplitud de corriente en el circuito? *b*) ¿Cuál es la impedancia? *c*) ¿Cuáles son los dos valores que puede tener la reactancia del inductor? *d*) ¿Para cuál de los dos valores del inciso *c*) la frecuencia angular es menor que la frecuencia angular de resonancia? Explique su respuesta.

31.64 • Un circuito *L-R-C* en serie tiene $R = 500\ \Omega$, $L = 2.00$ H, $C = 0.500\ \mu$F y $V = 100$ V. *a*) Para $\omega = 800$ rad/s, calcule V_R, V_L, V_C y ϕ. Con un solo par de ejes, elabore la gráfica de v, v_R, v_L y v_C como funciones del tiempo. En la gráfica incluya dos ciclos de v. *b*) Repita el inciso *a*) para $\omega = 1000$ rad/s. *c*) Repita el inciso *a*) para $\omega = 1250$ rad/s.

31.65 •• **CALC** En cierto circuito la corriente varía con el tiempo, como se ilustra en la figura P31.65. Determine la corriente media y la corriente rms en términos de I_0.

Figura **P31.65**



31.66 •• **Anchura de resonancia.** Considere un circuito *L-R-C* en serie con un inductor de 1.80 H, un capacitor de 0.900 μF y un resistor de 300 Ω. La fuente tiene un voltaje rms terminal de $V_{rms} = 60.0$ V y frecuencia angular ω variable. *a*) ¿Cuál es la frecuencia angular de resonancia ω_0 del circuito? *b*) ¿Cuál es la corriente rms a través del circuito en la resonancia, $I_{rms\text{-}0}$? *c*) ¿Para cuáles dos valores de la frecuencia angular, ω_1 y ω_2, es la corriente rms la mitad del valor de resonancia? *d*) La cantidad $|\omega_1 - \omega_2|$ define la *anchura de resonancia*. Calcule $I_{rms\text{-}0}$ y la anchura de resonancia para $R = 300\ \Omega$, 30.0 Ω y 3.00 Ω. Describa cómo se comparan sus resultados con el análisis realizado en la sección 31.5.

31.67 •• Un inductor, un capacitor y un resistor están conectados en serie a una fuente de ca. Si se duplican la resistencia, la inductancia y la capacitancia, ¿en qué factor cambia cada una de las siguientes cantidades? Indique si aumentan o disminuyen: *a*) la frecuencia angular de resonancia, *b*) la reactancia inductiva, *c*) la reactancia capacitiva. *d*) ¿Se duplica la impedancia?

31.68 • Una resistencia *R*, una capacitancia *C* y una inductancia *L* están conectadas en serie a una fuente de voltaje de amplitud *V* y frecuencia angular variable ω. Si $\omega = \omega_0$, la frecuencia angular de resonancia, determine *a*) la corriente máxima en el resistor, *b*) el voltaje máximo a través del capacitor, *c*) el voltaje máximo a través del inductor, *d*) la energía máxima almacenada en el capacitor, e) la energía máxima almacenada en el inductor. Dé las respuestas en términos de *R*, *C*, *L* y *V*.

31.69 • Repita el problema 31.68 para el caso en que $\omega = \omega_0/2$.

31.70 • Repita el problema 31.68 para el caso en que $\omega = 2\omega_0$.

31.71 • Un transformador consta de 275 embobinados primarios y 834 embobinados secundarios. Si la diferencia de potencial a través de la bobina primaria es de 25.0 V, *a*) ¿cuál es el voltaje a través de la bobina secundaria? y *b*) ¿cuál es la resistencia de carga efectiva de la bobina secundaria, si está conectada a través de un resistor de 125 Ω?

31.72 •• Un circuito *L-R-C* en serie toma 220 W a partir de una línea de 120 V (rms) y 50.0 Hz. El factor de potencia es 0.560, y el voltaje de fuente se adelanta a la corriente. *a*) ¿Cuál es la resistencia neta *R* del circuito? *b*) Encuentre la capacitancia del capacitor en serie que dará como resultado un factor de potencia de la unidad cuando se agregue al circuito original. *c*) ¿Qué potencia se tomará entonces a partir de la línea de suministro?

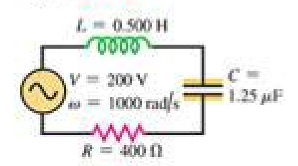
31.73 •• **CALC** En un circuito *L-R-C* en serie, la corriente está dada por $i = I \cos \omega t$. Las amplitudes de voltaje para el resistor, el inductor y el capacitor son V_R, V_L y V_C. *a*) Demuestre que la potencia instantánea que se alimenta al resistor es $p_R = V_R I \cos^2 \omega t = \frac{1}{2}V_R I(1 + \cos 2\omega t)$. ¿Qué alimentación de potencia media al resistor da esta expresión? *b*) Demuestre que la potencia instantánea que se alimenta al inductor es $p_L = -V_L I \operatorname{sen} \omega t \cos \omega t = -\frac{1}{2}V_L I \operatorname{sen} 2\omega t$. ¿Qué alimentación de potencia media al inductor da esta expresión? *c*) Demuestre que la potencia instantánea que se alimenta al capacitor es $p_C = V_C I \operatorname{sen} \omega t \cos \omega t = \frac{1}{2}V_C I \operatorname{sen} 2\omega t$. ¿Qué alimentación de potencia media al capacitor da esta expresión? *d*) En la sección 31.4 se demuestra que la potencia instantánea que entrega la fuente es $p = VI \cos \omega t(\cos \phi \cos \omega t - \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \omega t)$. Demuestre que $p_R + p_L + p_C$ es igual a p en cada instante del tiempo.

PROBLEMAS DE DESAFÍO

31.74 ••• **CALC** *a*) ¿A qué frecuencia angular alcanza su valor máximo la amplitud de voltaje entre los extremos del *resistor* de un circuito *L-R-C* en serie? *b*) ¿A qué frecuencia angular alcanza su valor máximo la amplitud de voltaje entre los extremos del *inductor*? *c*) ¿A qué frecuencia angular alcanza su valor máximo la amplitud de voltaje entre los extremos del *capacitor*? (Tal vez quiera consultar los resultados del problema 31.53).

31.75 ••• **Números complejos en un circuito.** El voltaje a través de un elemento de circuito de ca no necesariamente está en fase con la corriente que fluye a través de ese elemento de circuito. Por lo tanto, las amplitudes de voltaje a través de los elementos de un ramal de un circuito de ca no se suman algebraicamente. Un método de uso común para simplificar el análisis de un circuito de ca alimentado por una fuente sinusoidal es representar la impedancia *Z* como un número *complejo*. Se toma la resistencia *R* como la parte real de la impedancia, y la reactancia $X = X_L - X_C$ como la parte imaginaria. Así, en el caso de un ramal que contiene un resistor, un inductor y un capacitor en serie, la impedancia compleja es $Z_{cmp} = R + iX$, donde $i^2 = -1$. Si la amplitud de voltaje a través del ramal es V_{cmp}, definimos una amplitud de corriente *compleja* como $I_{cmp} = V_{cmp}/Z_{cmp}$. La amplitud de corriente *real* es el valor absoluto de la amplitud de corriente compleja, es decir, $I = (I_{cmp}^* I_{cmp})^{1/2}$. El ángulo de fase ϕ de la corriente con respecto al voltaje de fuente está dado por $\tan \phi = \operatorname{Im}(I_{cmp})/\operatorname{Re}(I_{cmp})$. Las amplitudes del voltaje, $V_{R\text{-}cmp}$, $V_{L\text{-}cmp}$ y $V_{C\text{-}cmp}$ a través de la resistencia, la inductancia y la capacitancia, respectivamente, se encuentran multiplicando I_{cmp} por R, iX_L y $-iX_C$, respectivamente. Empleando la representación compleja de las amplitudes de voltaje, el voltaje entre los extremos de un ramal es simplemente la

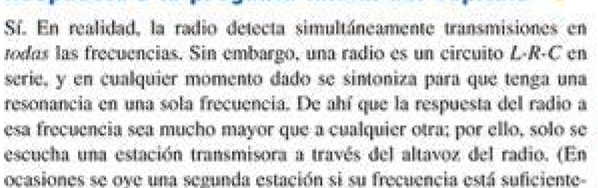
Figura **P31.75**



suma algebraica de los voltajes a través de cada elemento del circuito: $V_{cmp} = V_{R\text{-}cmp} + V_{L\text{-}cmp} + V_{C\text{-}cmp}$. El valor real de cualquier amplitud de corriente o de voltaje es el valor absoluto de la cantidad compleja correspondiente. Considere el circuito *L-R-C* en serie que se ilustra en la figura P31.75, donde se indican los valores de los elementos de circuito, la amplitud de voltaje de fuente y la frecuencia angular de fuente. Aplique las técnicas de diagramas de fasores presentadas en la sección 31.1 para obtener *a*) la amplitud de corriente y *b*) el ángulo de fase ϕ de la corriente con respecto al voltaje de fuente. (Observe que este ángulo es el negativo del ángulo de fase definido en la figura 31.13). A continuación analice el mismo circuito utilizando el enfoque de números complejos. *c*) Determine la impedancia compleja del circuito Z_{cmp}. Tome el valor absoluto para obtener *Z*, la impedancia real del circuito. *d*) Tome la amplitud de voltaje de la fuente, V_{cmp}, como la parte real, y determine la amplitud de corriente compleja I_{cmp}. Determine la amplitud de corriente real calculando el valor absoluto de I_{cmp}. *e*) Calcule el ángulo de fase ϕ de la corriente con respecto al voltaje de fuente con base en las partes real e imaginaria de I_{cmp}, según se explicó. *f*) Obtenga las representaciones complejas de los voltajes a través de la resistencia, la inductancia y la capacitancia. *g*) Sumando las respuestas del inciso *f*), compruebe que la suma de estos números complejos es real e igual a 200 V, el voltaje de la fuente.

Respuestas

Respuesta a la pregunta inicial del capítulo ?



Sí. En realidad, la radio detecta simultáneamente transmisiones en *todas* las frecuencias. Sin embargo, una radio es un circuito *L-R-C* en serie, y en cualquier momento dado se sintoniza para que tenga una resonancia en una sola frecuencia. De ahí que la respuesta del radio a esa frecuencia sea mucho mayor que a cualquier otra; por ello, solo se escucha una estación transmisora a través del altavoz del radio. (En ocasiones se oye una segunda estación si su frecuencia está suficientemente cerca de la que se sintoniza).

Respuestas a las preguntas de Evalúe su comprensión

31.1 Respuestas: *a*) D; *b*) A; *c*) B; *d*) C Para cada fasor, la corriente real está representada por la proyección de ese fasor sobre el eje horizontal. Todos los fasores giran en sentido antihorario alrededor del origen con rapidez angular ω, por lo que en el instante mostrado, la proyección del fasor A es positiva, pero tiende a cero; la proyección del fasor B es negativa y se hace más negativa; la proyección del fasor C es negativa y tiende a cero; y la proyección del fasor D es positiva y se hace más positiva.

31.2 Respuestas: *a*) iii; *b*) ii; *c*) i. En el caso de un resistor $V_R = IR$, así que $I = V_R/R$. La amplitud de voltaje V_R y la resistencia *R* no cambian con la frecuencia, de manera que la amplitud de corriente *I* permanece constante. En el caso de un inductor, $V_L = IX_L = I\omega L$, por lo que $I = V_L/\omega L$. La amplitud de voltaje V_L y la inductancia *L* son constantes, así que la amplitud de la corriente *I* disminuye a medida que la frecuencia aumenta. En el caso de un capacitor, $V_C = IX_C = I/\omega C$, por lo que $I = V_C\omega C$. La amplitud de voltaje V_C y la capacitancia *C* son constantes, de manera que la amplitud de corriente *I* aumenta a medida que la frecuencia se incrementa.

31.3 Respuesta: iv, ii, i, iii. Para el circuito del ejemplo 31.4, $I = V/Z = (50\ \text{V})/(500\ \Omega) = 0.10$ A. Si se eliminan el capacitor y el inductor, de manera que solo permanezcan la fuente de ca y el resistor, el circuito es como el que se aprecia en la figura 31.7*a*; de esta forma, $I = V/R = (50\ \text{V})/(300\ \Omega) = 0.17$ A. Si se eliminan el resistor y el capacitor, de manera que tan solo queden la fuente de ca y el inductor, el circuito es como el que se ilustra en la figura 31.8*a*; en tal caso, $I = V/X_L = (50\ \text{V})/(600\ \Omega) = 0.083$ A. Por último, si se eliminan el resistor y el inductor, de manera que únicamente continúen la fuente de ca y el capacitor, el circuito es como el de la figura 31.9*a*; en ese caso, $I = V/X_C = (50\ \text{V})/(200\ \Omega) = 0.25$ A.

31.4 Respuestas: *a*) v; *b*) iv. La energía no puede extraerse del resistor, puesto que en este se disipa y no se recupera. En cambio, la energía debe extraerse ya sea del inductor (que almacena energía del campo magnético) o del capacitor (que almacena energía del campo eléctrico). La potencia positiva significa que la energía se está transfiriendo de la fuente de ca al circuito, de manera que la potencia *negativa* implica que la energía se transfiere de regreso a la fuente.

31.5 Respuesta: ii. La capacitancia *C* aumenta si disminuye la separación de las placas (véase la sección 24.1). Por ello, disminuye la frecuencia de resonancia $f_0 = \omega_0/2\pi = 1/2\pi\sqrt{LC}$.

31.6 Respuesta: ii, iv, i, iii. De la ecuación (31.35), la razón de espiras es $N_2/N_1 = V_2/V_1$; por lo tanto, el número de espiras en el secundario es $N_2 = N_1V_2/V_1$. De esta forma, para los cuatro casos se tiene que **i.** $N_2 = (1000)(6.0\ \text{V})/(120\ \text{V}) = 50$ espiras; **ii.** $N_2 = (1000)(240\ \text{V})/(120\ \text{V}) = 2000$ espiras; **iii.** $N_2 = (1000)(6.0\ \text{V})/(240\ \text{V}) = 25$ espiras, y **iv.** $N_2 = (1000)(120\ \text{V})/(240\ \text{V}) = 500$ espiras. Observe que **i**, **iii** y **iv** son transformadores reductores con menos espiras en el secundario que en el primario; mientras que **ii** es un transformador elevador con más espiras en el secundario que en el primario.

Problema práctico

Respuestas: *a*) 8.35×10^4 rad/s y 3.19×10^5 rad/s

b) En 8.35×10^4 rad/s: $V_{fuente} = 49.5$ V, $I = 0.132$ A, $V_R = 16.5$ V, $V_L = 16.5$ V, $V_C = 63.2$ V.

En 3.19×10^5 rad/s: $V_{fuente} = 49.5$ V, $I = 0.132$ A, $V_R = 16.5$ V, $V_L = 63.2$ V, $V_C = 16.5$ V.

ONDAS ELECTROMAGNÉTICAS





? Los objetos metálicos reflejan no solo la luz visible, sino también las ondas de radio. ¿Qué característica de los metales los hace tan reflectantes?

OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

Al estudiar este capítulo, usted aprenderá:

- Por qué en una onda luminosa están presentes campos eléctricos y magnéticos.
- Cómo se relaciona la rapidez de la luz con las constantes fundamentales de la electricidad y el magnetismo.
- Cómo describir la propagación de una onda electromagnética sinusoidal.
- Qué determina la cantidad de potencia transportada por una onda electromagnética.
- Cómo describir las ondas electromagnéticas estacionarias.

¿Qué es la luz? Durante siglos, los seres humanos se han hecho esta pregunta; sin embargo, no hubo respuesta sino hasta que la electricidad y el magnetismo se unificaron en la disciplina del *electromagnetismo*, descrita por las ecuaciones de Maxwell. Estas ecuaciones muestran que un campo magnético variable en el tiempo actúa como fuente de campo eléctrico, y que un campo eléctrico que varía con el tiempo genera un campo magnético. Estos campos $\vec{E}$ y $\vec{B}$ se sostienen uno al otro y forman una *onda electromagnética* que se propaga a través del espacio. La luz visible emitida por el filamento incandescente de una bombilla eléctrica es un ejemplo de onda electromagnética; otras clases de ondas electromagnéticas son las producidas por fuentes tales como las estaciones de radio y televisión, las máquinas de rayos x y los núcleos radiactivos.

En este capítulo usaremos las ecuaciones de Maxwell como base teórica para comprender las ondas electromagnéticas. Veremos que estas ondas transportan tanto energía como momento lineal (que también se conoce como cantidad de movimiento). En las ondas electromagnéticas sinusoidales, los campos $\vec{E}$ y $\vec{B}$ son funciones sinusoidales del tiempo y la posición, con frecuencia y longitud de onda definidas. La luz visible, las ondas de radio, los rayos x y otros tipos de ondas electromagnéticas difieren solo en su frecuencia y longitud de onda. Nuestro estudio de la óptica en capítulos posteriores se basará en parte en la naturaleza electromagnética de la luz.

A diferencia de las ondas en una cuerda o las del sonido en un fluido, las ondas electromagnéticas no requieren un medio material; la luz que se observa por la noche procedente de las estrellas ha viajado sin dificultad a través de decenas o cientos de años luz del espacio (casi) vacío. No obstante, las ondas electromagnéticas y las ondas mecánicas tienen mucho en común y se describen en un lenguaje muy similar. Antes de avanzar en este capítulo, es recomendable repasar las propiedades de las ondas mecánicas que se estudiaron en los capítulos 15 y 16 (vol. 1).

32.1 Ecuaciones de Maxwell y ondas electromagnéticas

En los últimos capítulos estudiamos distintos aspectos de los campos eléctricos y magnéticos. Aprendimos que cuando estos campos no varían con el tiempo, como en el caso del campo eléctrico producido por cargas en reposo o el campo magnético de una corriente estable, podemos analizar los campos eléctricos y magnéticos de forma independiente, sin considerar las interacciones entre ellos. Pero cuando los campos varían con el tiempo, dejan de ser independientes. La ley de Faraday (véase la sección 29.2) dice que un campo magnético variable en el tiempo actúa como fuente de campo eléctrico, como lo demuestran las fem inducidas en los inductores y transformadores. La ley de Ampère, incluyendo la corriente de desplazamiento descubierta por Maxwell (véase la sección 29.7), demuestra que un campo eléctrico que cambia con el tiempo actúa como una fuente de campo magnético. Esta interacción mutua entre los dos campos se resume en las ecuaciones de Maxwell, presentadas en la sección 29.7.

Así, cuando un campo, *ya sea* eléctrico o magnético, cambia con el tiempo, induce un campo del otro tipo en las regiones adyacentes del espacio. Esto nos lleva (como a Maxwell) a considerar la posibilidad de la existencia de una perturbación electromagnética, consistente en campos eléctricos y magnéticos que se modifican con el tiempo, capaz de propagarse a través del espacio de una región a otra, aun cuando no exista materia en la región intermedia. Esta perturbación, en caso de existir, tendrá las propiedades de una *onda*, por lo que el término adecuado para nombrarla es **onda electromagnética**.

Estas ondas existen; las transmisiones de radio y televisión, la luz, los rayos x y muchas otras clases de radiación son ejemplos de ondas electromagnéticas. Nuestro objetivo en este capítulo es ver la forma en que los principios del electromagnetismo que hemos estudiado hasta este momento pueden explicar esas ondas y examinar sus propiedades.

Electricidad, magnetismo y luz

Como ocurre con frecuencia en el desarrollo de la ciencia, la comprensión teórica de las ondas electromagnéticas siguió un camino mucho más sinuoso que el que acabamos de describir. En los albores de la teoría electromagnética (a principios del siglo XIX), se utilizaban dos unidades distintas de carga eléctrica: una para los fenómenos electrostáticos y otra para los magnéticos que implicaban corrientes. En el sistema de unidades empleado en esa época, estas dos unidades de carga tenían dimensiones físicas distintas. Su *proporción* tenía unidades de velocidad, y las mediciones demostraron que la razón tenía un valor numérico que era exactamente igual a la rapidez de la luz, 3.00×10^8 m/s. En esa época, los físicos veían esto como una coincidencia extraordinaria y no tenían idea de cómo explicarla.

En su búsqueda por entender este resultado, Maxwell (figura 32.1) demostró en 1865 que una perturbación electromagnética debería propagarse en el espacio libre con una rapidez igual a la de la luz, por lo que era probable que la naturaleza de las ondas de luz fuera electromagnética. Al mismo tiempo, descubrió que los principios básicos del electromagnetismo podían expresarse en términos de las cuatro ecuaciones que hoy conocemos como **ecuaciones de Maxwell** y que estudiamos en la sección 29.7. Estas cuatro ecuaciones son: **1.** la ley de Gauss de los campos eléctricos; **2.** la ley de Gauss de los campos magnéticos, que demuestra la inexistencia de monopolos magnéticos; **3.** la ley de Ampère, que incluye la corriente de desplazamiento, y **4.** la ley de Faraday:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0} \quad \text{(ley de Gauss)} \qquad (29.18)$$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0 \quad \text{(ley de Gauss del magnetismo)} \qquad (29.19)$$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \left(i_C + \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} \right)_{enc} \quad \text{(ley de Ampère)} \qquad (29.20)$$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi_B}{dt} \quad \text{(ley de Faraday)} \qquad (29.21)$$

32.1 James Clerk Maxwell (1831-1879) fue la primera persona que comprendió verdaderamente la naturaleza fundamental de la luz. También realizó contribuciones importantes a la termodinámica, la óptica, la astronomía y la fotografía en color. Albert Einstein describió los logros de Maxwell como "los más profundos y fructíferos que la física ha experimentado desde la época de Newton".



Estas ecuaciones se aplican a los campos eléctricos y magnéticos *en el vacío*. Si está presente un material, la permitividad ϵ_0 y la permeabilidad μ_0 del espacio libre se sustituyen por la permitividad ϵ y la permeabilidad μ del material. Si los valores de ϵ y μ son diferentes en puntos distintos en las regiones de integración, entonces ϵ y μ deben transferirse al lado izquierdo de las ecuaciones (29.18) y (29.20), respectivamente, y colocarse dentro de las integrales. La ϵ en la ecuación (29.20) también tiene que incluirse en la integral cuyo resultado es $d\Phi_E/dt$.

De acuerdo con las ecuaciones de Maxwell, una carga puntual en reposo produce un campo $\vec{E}$ estático, pero no un campo $\vec{B}$; una carga puntual en movimiento con velocidad constante (véase la sección 28.1) produce los dos campos $\vec{E}$ y $\vec{B}$. Las ecuaciones de Maxwell también se usan para demostrar que para que una carga puntual produzca ondas electromagnéticas, la carga debe *acelerar*. De hecho, un resultado general de las ecuaciones de Maxwell es que *toda* carga acelerada emite energía electromagnética (figura 32.2).

32.2 (Foto superior) Todo teléfono móvil, módem inalámbrico o aparato transmisor de radio emite señales en forma de ondas electromagnéticas causadas por cargas en aceleración. (Foto inferior) Las líneas de transmisión de energía eléctrica conducen una corriente alterna intensa, lo que significa que hay una cantidad sustancial de carga que acelera hacia adelante y atrás y genera ondas electromagnéticas. Estas ondas son las que producen el zumbido en el radio del automóvil cuando conducimos cerca de las líneas de transmisión.





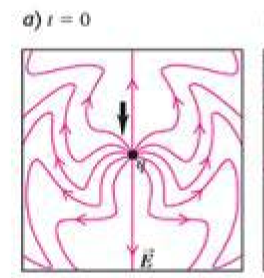
Generación de la radiación electromagnética

Una manera de conseguir que una carga puntual emita ondas electromagnéticas es haciéndola oscilar en movimiento armónico simple, de manera que tenga una aceleración casi en todo instante (excepto cuando la carga pasa por su posición de equilibrio). La figura 32.3 muestra algunas líneas de campo eléctrico producidas por una carga puntual oscilante. Las líneas de campo *no* son objetos materiales; sin embargo, es útil pensar que se comportan como cuerdas que se extienden de la carga puntual al infinito. La oscilación de la carga hacia arriba y abajo hace que las ondas se propaguen hacia fuera de la carga a lo largo de estas "cuerdas". Observe que la carga no emite ondas en todas direcciones por igual; las ondas son más intensas a 90° con respecto al eje de movimiento de la carga, en tanto que *no* hay ondas a lo largo de este eje. Esta es la conclusión a la que se llega con la analogía de la "cuerda". Además, hay una perturbación *magnética* que se extiende hacia afuera de la carga, lo que no se ilustra en la figura 32.3. Puesto que las perturbaciones eléctricas y magnéticas salen de la fuente, se utiliza de manera indistinta el nombre de **radiación electromagnética** o el de "ondas electromagnéticas".

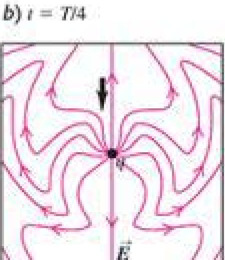
El físico alemán Heinrich Hertz generó por primera vez ondas electromagnéticas con longitudes de onda macroscópicas en el laboratorio en 1887. Como fuente de ondas, Hertz utilizó cargas oscilantes en circuitos *L-C* del tipo que estudiamos en la sección 30.5 y detectó las ondas electromagnéticas resultantes mediante otros circuitos sintonizados a la misma frecuencia. Hertz también produjo *ondas electromagnéticas estacionarias* y midió la distancia entre nodos adyacentes (media longitud de onda) para determinar la longitud de onda. Una vez que determinó la frecuencia de resonancia de sus circuitos, encontró la rapidez de las ondas a partir de la relación entre su longitud de onda y su frecuencia, $v = \lambda f$, y estableció que era igual a la rapidez de la luz; esto comprobó directamente la predicción teórica de Maxwell. La unidad del SI para la frecuencia recibió su nombre en honor de Hertz: un hertz (1 Hz) es igual a un ciclo por segundo.

32.3 Líneas de campo eléctrico de una carga puntual que oscila con movimiento armónico simple, vistas en cinco instantes durante un periodo de oscilación T. La trayectoria de la carga está en el plano de los dibujos. En $t = 0$, la carga puntual se encuentra en su máximo desplazamiento ascendente. La flecha indica cómo se propaga una "vuelta" de las líneas de $\vec{E}$ a medida que se propaga hacia afuera de la carga puntual. El campo magnético (no se ilustra) comprende círculos que se hallan en planos perpendiculares a las figuras y son concéntricos con respecto al eje de oscilación.

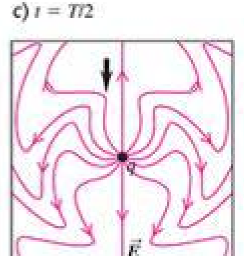
a) $t = 0$



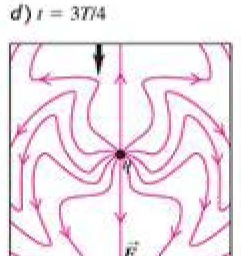
b) $t = T/4$



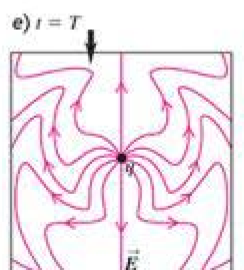
c) $t = T/2$



d) $t = 3T/4$



e) $t = T$



El valor moderno de la rapidez de la luz, que se denota con el símbolo c, es 299,792,458 m/s. (Recuerde que en la sección 1.3 (vol. 1) vimos que este valor es la base de nuestra unidad estándar de longitud: un metro se define como la distancia que recorre la luz en 1/299,792,458 de segundo). Para nuestros propósitos, $c = 3.00 \times 10^8$ m/s tiene suficiente exactitud.

Al parecer, el posible uso de las ondas electromagnéticas para la comunicación a larga distancia no se le ocurrió a Hertz, y fue gracias a Marconi y a otros investigadores que la comunicación por radio se convirtió en una experiencia cotidiana en el hogar. En un *transmisor* de radio se hacen oscilar las cargas eléctricas a lo largo de la antena conductora, lo que produce perturbaciones oscilatorias de campo, como las que se ilustran en la figura 32.3. Como en la antena hay muchas cargas que oscilan juntas, las perturbaciones son mucho más intensas que las de una sola carga y se detectan a una distancia mucho mayor. En un *receptor* de radio, la antena también es un conductor; los campos de la onda que emana desde un transmisor distante ejercen fuerzas sobre las cargas libres dentro de la antena receptora, lo que produce una corriente oscilante que se detecta y amplifica por los circuitos del receptor.

En lo que resta del capítulo nos ocuparemos de las ondas electromagnéticas en sí mismas, dejando a un lado el complejo problema de cómo se generan.

Espectro electromagnético

El **espectro electromagnético** abarca todas las longitudes de onda y frecuencias de las ondas electromagnéticas. La figura 32.4 muestra intervalos de longitud de onda y frecuencia para la mayor parte comúnmente encontrada del espectro. A pesar de las muchas diferencias en su uso y medios de producción, todas ellas son ondas electromagnéticas con la misma rapidez de propagación (en el vacío) $c = 299{,}792{,}458$ m/s. Las ondas electromagnéticas pueden diferir en frecuencia f y longitud de onda λ, pero la relación $c = \lambda f$ en el vacío se cumple para cada una.

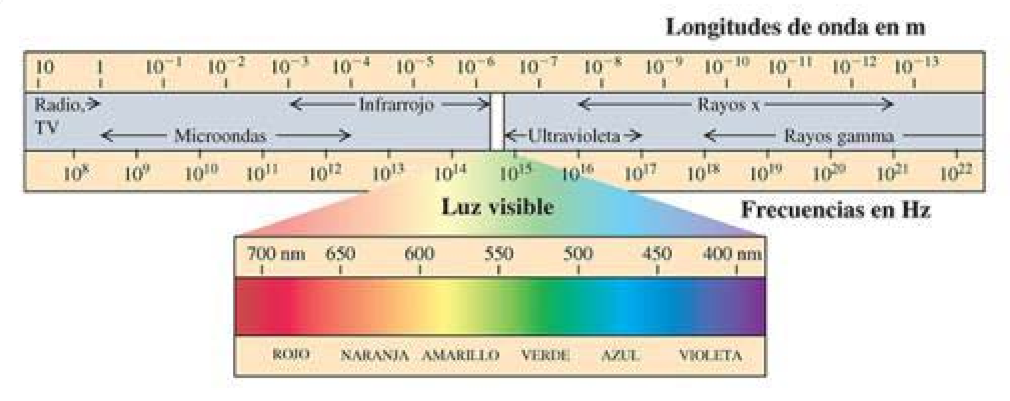
Solo podemos detectar directamente una parte muy pequeña del espectro con nuestro sentido de la vista, y a ese intervalo lo denominamos **luz visible**. Su intervalo de longitud de onda va de 380 a 750 nm (380 a 750×10^{-9} m), con frecuencias correspondientes aproximadas de 790 a 400 THz (7.9 a 4.0×10^{14} Hz). Las distintas partes del espectro visible evocan en los humanos las sensaciones de los diferentes colores. En la tabla 32.1 se presentan las longitudes de onda aproximadas de los colores en la parte visible del espectro.

La luz blanca ordinaria incluye todas las longitudes de onda visibles. Sin embargo, con el uso de fuentes o filtros especiales, es posible seleccionar una banda angosta de longitudes de onda dentro de un intervalo de unos cuantos nm. Esa luz es aproximadamente *monocromática* (de un solo color). La luz totalmente monocromática con una sola longitud de onda es una idealización inalcanzable. Cuando usamos la expresión "luz monocromática con $\lambda = 550$ nm" en relación con un experimento de laboratorio, en realidad nos referimos a una banda pequeña de longitudes de onda *alrededor*

Tabla 32.1 Longitudes de onda de la luz visible

380 a 450 nm	Violeta
450 a 495 nm	Azul
495 a 570 nm	Verde
570 a 590 nm	Amarillo
590 a 620 nm	Naranja
620 a 750 nm	Rojo

32.4 El espectro electromagnético. Las frecuencias y longitudes de onda que se encuentran en la naturaleza se extienden en un intervalo tan amplio que se tiene que usar una escala logarítmica para indicar todas las bandas importantes. Las fronteras entre las bandas son un tanto arbitrarias.



de 550 nm. La luz *láser* está mucho más cerca de ser monocromática que cualquiera que se obtenga de otra manera.

Las formas invisibles de la radiación electromagnética no son menos importantes que la luz visible. Por ejemplo, nuestro sistema mundial de comunicaciones depende de las ondas de radio: la radio AM utiliza ondas con frecuencias de 5.4×10^5 Hz a 1.6×10^6 Hz, mientras que las emisiones de radio en FM tienen lugar en las frecuencias de 8.8×10^7 Hz a 1.08×10^8 Hz. (Las emisoras de televisión usan frecuencias que incluyen la banda de FM). Las microondas también se utilizan para la comunicación (por ejemplo, en los teléfonos celulares y las redes inalámbricas) y en los radares meteorológicos (con frecuencias cercanas a 3×10^9 Hz). Muchas cámaras tienen un dispositivo que emite un haz de radiación infrarroja; al analizar las propiedades de la radiación infrarroja reflejada por el sujeto, la cámara determina a qué distancia se encuentra este y se enfoca de manera automática. Los rayos x son capaces de penetrar a través del tejido muscular, lo que los hace invaluables en la odontología y la medicina. Los rayos gamma, el tipo de radiación electromagnética de onda más corta, se utilizan en medicina para destruir células cancerosas.

Aplicación Visión ultravioleta
Muchos insectos y aves son capaces de ver longitudes de onda ultravioleta invisibles para los humanos. Por ejemplo, la foto de la izquierda muestra cómo vemos a las rudbeckias (género *Rudbeckia*). La foto de la derecha (con colores falsos), tomada con una cámara sensible al ultravioleta, muestra cómo ven a estas mismas flores las abejas que las polinizan. Observe la prominente mancha central que es invisible a los seres humanos. De manera similar, muchas aves con visión ultravioleta, incluyendo periquitos, loros y pavos reales, tienen patrones ultravioleta en sus cuerpos, lo que los hace verse unos a otros con colores más intensos de lo que nosotros vemos.



Evalúe su comprensión de la sección 32.1 *a*) ¿Es posible tener una onda puramente eléctrica que se propague a través del espacio vacío, es decir, una onda constituida por un campo eléctrico pero no por un campo magnético? *b*) ¿Y una onda puramente magnética, con campo magnético pero sin un campo eléctrico?



32.2 Ondas electromagnéticas planas y rapidez de la luz

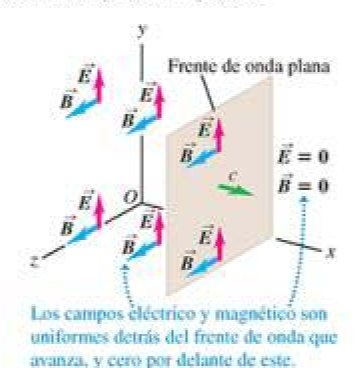
Estamos listos para formular las ideas básicas de las ondas electromagnéticas y su relación con los principios del electromagnetismo. Nuestro procedimiento consistirá en postular una configuración sencilla de campo eléctrico que tenga un comportamiento ondulatorio. Supondremos un campo eléctrico $\vec{E}$ que tenga solo una componente *y*, y un campo magnético $\vec{B}$ solo con una componente *z*, y supondremos que ambos campos se mueven juntos en la dirección $+x$ con una rapidez *c* que al principio es desconocida. (Conforme avancemos, quedará claro por qué elegimos que $\vec{E}$ y $\vec{B}$ fueran perpendiculares a la dirección de propagación y entre *sí*). Después evaluaremos si estos campos son físicamente posibles indagando si son congruentes con las ecuaciones de Maxwell, en particular con las leyes de Ampère y Faraday. Veremos que la respuesta es *sí*, siempre y cuando *c* tenga un valor particular. También veremos que la *ecuación de onda*, que encontramos durante nuestro estudio de las ondas mecánicas en el capítulo 15 (vol.1), se puede deducir a partir de las ecuaciones de Maxwell.

Una onda electromagnética plana simple

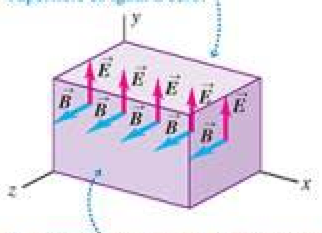
Si tomamos como base un sistema de coordenadas *xyz* (figura 32.5), suponemos que todo el espacio está dividido en dos regiones por un plano perpendicular al eje *x* (paralelo al plano *yz*). En cada punto a la izquierda de este plano hay un campo eléctrico uniforme $\vec{E}$ en la dirección $+y$ y un campo magnético uniforme $\vec{B}$ en la dirección $+z$, como se muestra. Además, supongamos que el plano frontera, al que llamaremos *frente de onda*, se desplaza hacia la derecha en la dirección $+x$ con rapidez constante *c*, un valor que por el momento dejaremos indeterminado. Así, los campos $\vec{E}$ y $\vec{B}$ viajan a la derecha hacia regiones hasta ahora libres de campo con rapidez definida. Esta es una onda electromagnética rudimentaria. Una onda como esta, en la que en cualquier instante los campos son uniformes en toda la extensión de cualquier plano perpendicular a la dirección de propagación, se llama **onda plana**. En el caso que se ilustra en la figura 32.5, los campos son igual a cero para los planos que están a la derecha del frente de onda y tienen los mismos valores en todos los planos ubicados a la izquierda del frente de onda; más adelante estudiaremos ondas planas más complejas.

No nos ocuparemos del problema de *generar* efectivamente una configuración de campo de este tipo; solo preguntaremos si es congruente con las leyes del electromagnetismo, es decir, con las ecuaciones de Maxwell. Consideraremos sucesivamente cada una de estas cuatro ecuaciones.

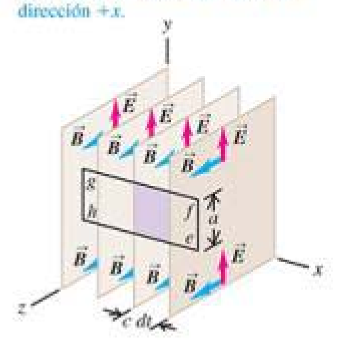
32.5 Frente de una onda electromagnética. El plano que representa el frente de onda se mueve hacia la derecha (en la dirección positiva del eje *x*) con rapidez *c*.

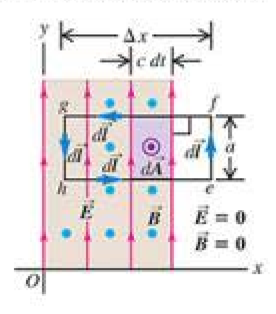


32.6 Superficie gaussiana para una onda electromagnética plana.



32.7 *a*) Aplicación de la ley de Faraday a una onda plana. *b*) En el momento dt, el flujo magnético a través del rectángulo en el plano xy se incrementa en una cantidad $d\Phi_B$. Este incremento es igual al flujo a través del rectángulo sombreado, con área $ac\,dt$; es decir, $d\Phi_B = Bac\,dt$. Por lo tanto, $d\Phi_B/dt = Bac$.





Primero verifiquemos si nuestra onda satisface la primera y segunda ecuaciones de Maxwell, es decir, las leyes de Gauss de los campos eléctrico y magnético. Para ello, tomaremos como nuestra superficie gaussiana una caja rectangular con lados paralelos a los planos coordenados xy, xz y yz (figura 32.6). La caja no encierra cargas eléctricas. Los flujos eléctrico y magnético totales a través de la caja son iguales a cero, aun si parte de la caja está en la región en la que $E = B = 0$. Esto *no* sería el caso si $\vec{E}$ o $\vec{B}$ tuvieran una componente x, paralela a la dirección de propagación; si el frente de onda estuviera dentro de la caja, podría fluir a través del lado izquierdo de la caja (en $x = 0$), pero no del lado derecho (en $x > 0$). Así, para satisfacer las ecuaciones primera y segunda de Maxwell, los campos eléctrico y magnético deben ser perpendiculares a la dirección de propagación; es decir, la onda debe ser **transversal**.

La siguiente ecuación de Maxwell a considerar es la ley de Faraday:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi_B}{dt} \tag{32.1}$$

Para probar si nuestra onda satisface la ley de Faraday, aplicamos esta ley a un rectángulo *efgh* paralelo al plano xy (figura 32.7*a*). En la figura 32.7*b*, que es una sección transversal en el plano xy, este rectángulo tiene altura a y anchura Δx. En el instante que se muestra, el frente de onda ha avanzado parcialmente a través del rectángulo, y $\vec{E}$ es igual a cero a lo largo del lado *ef*. Al aplicar la ley de Faraday, suponemos que el área vectorial $d\vec{A}$ del rectángulo *efgh* está en la dirección $+z$. Con esta elección, la regla de la mano derecha indica que se requiere integrar $\vec{E} \cdot d\vec{l}$ *en sentido antihorario* alrededor del rectángulo. $\vec{E}$ es igual a cero en todos los puntos del lado *ef*. En cada punto de los lados *fg* y *he*, $\vec{E}$ es igual a cero o perpendicular a $d\vec{l}$. Solo el lado *gh* contribuye a la integral, y sobre él $\vec{E}$ y $d\vec{l}$ son opuestos, por lo que se obtiene

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -Ea \tag{32.2}$$

Por consiguiente, el lado izquierdo de la ecuación (32.1) es diferente de cero.

Para satisfacer la ley de Faraday, ecuación (32.1), debe haber una componente de $\vec{B}$ en la dirección z (perpendicular a $\vec{E}$) de manera que pueda haber un flujo magnético Φ_B distinto de cero a través del rectángulo *efgh* y una derivada $d\Phi_B/dt$ diferente de cero. En realidad, en nuestra onda, $\vec{B}$ tiene *solo* la componente z. Hemos supuesto que esta componente tiene la dirección *z positiva*; veamos si esta suposición es congruente con la ley de Faraday. Durante un intervalo de tiempo dt, el frente de onda se desplaza una distancia $c\,dt$ hacia la derecha en la figura 32.7*b*, y recorre un área $ac\,dt$ del rectángulo *efgh*. Durante este intervalo, el flujo magnético Φ_B a través del rectángulo *efgh* se incrementa en $d\Phi_B = B(ac\,dt)$, por lo que la razón de cambio del flujo magnético es

$$\frac{d\Phi_B}{dt} = Bac \tag{32.3}$$

Ahora, sustituimos las ecuaciones (32.2) y (32.3) en la ley de Faraday, ecuación (32.1), y obtenemos

$$-Ea = -Bac$$

$$E = cB \qquad \text{(onda electromagnética en el vacío)} \tag{32.4}$$

Así, hemos demostrado que nuestra onda es congruente con la ley de Faraday solo si su rapidez c y las magnitudes de los vectores perpendiculares $\vec{E}$ y $\vec{B}$ guardan la relación que describe la ecuación (32.4). Observe que si supusiéramos que $\vec{B}$ estaba en la dirección *z negativa*, habría un signo menos adicional en la ecuación (32.4); como E, c y B son todas magnitudes positivas, no habría sido posible ninguna solución. Además, ninguna componente de $\vec{B}$ en la dirección y (paralela a $\vec{E}$) habría contribuido al flujo magnético cambiante Φ_B a través del rectángulo *efgh* (que es paralelo al plano xy), por lo que no sería parte de la onda.

Por último, se hace un cálculo similar empleando la ley de Ampère, el miembro restante de las ecuaciones de Maxwell. No hay corriente de conducción ($i_C = 0$), por lo que la ley de Ampère es

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} \qquad (32.5)$$

Para comprobar si nuestra onda es congruente con la ley de Ampère, movemos nuestro rectángulo de manera que esté sobre el plano xz, como se ilustra en la figura 32.8, y de nuevo observamos la situación en un momento en que el frente de onda ha viajado parcialmente a través del rectángulo. Tomamos el área vectorial $d\vec{A}$ en la dirección $+y$, y así, la regla de la mano derecha demanda que integremos $\vec{B} \cdot d\vec{l}$ en sentido antihorario alrededor del rectángulo. El campo $\vec{B}$ es igual a cero en todos los puntos a lo largo del lado ef, y en todos los puntos sobre los lados fg y he es cero o perpendicular a $d\vec{l}$. Solo el lado gh, donde $\vec{B}$ y $d\vec{l}$ son paralelos, contribuye a la integral, por lo que se obtiene

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = Ba \qquad (32.6)$$

Por consiguiente, el lado izquierdo de la ley de Ampère, ecuación (32.5), es diferente de cero; el lado derecho también debe ser diferente de cero. Así, $\vec{E}$ debe tener una componente y (perpendicular a $\vec{B}$) para que el flujo eléctrico Φ_E a través del rectángulo y la derivada con respecto al tiempo $d\Phi_E/dt$ puedan ser diferentes de cero. Llegamos a la misma conclusión que inferimos a partir de la ley de Faraday: en una onda electromagnética, $\vec{E}$ y $\vec{B}$ deben ser perpendiculares entre sí.

En un intervalo de tiempo dt, el flujo eléctrico Φ_E a través del rectángulo se incrementa en $d\Phi_E = E(ac\ dt)$. Como elegimos que $d\vec{A}$ estuviera en la dirección $+y$, este cambio de flujo es positivo; la razón de cambio del campo eléctrico es

$$\frac{d\Phi_E}{dt} = Eac \qquad (32.7)$$

Al sustituir las ecuaciones (32.6) y (32.7) en la ley de Ampère [ecuación (32.5)], se encuentra

$$Ba = \epsilon_0 \mu_0 Eac$$

$$B = \epsilon_0 \mu_0 cE \qquad \text{(onda electromagnética en el vacío)} \qquad (32.8)$$

De esta forma, la onda que hemos supuesto obedece la ley de Ampère solo si B, c y E están relacionados como en la ecuación (32.8).

Nuestra onda electromagnética debe obedecer *tanto* la ley de Ampère *como* la de Faraday, de manera que las ecuaciones (32.4) y (32.8) deben satisfacerse. Esto solo ocurre si $\epsilon_0 \mu_0 c = 1/c$, o:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \qquad \text{(rapidez de las ondas electromagnéticas en el vacío)} \qquad (32.9)$$

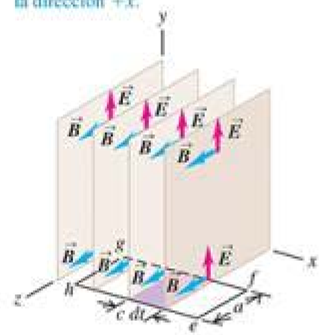
Al sustituir los valores numéricos de estas cantidades, encontramos que

$$c = \frac{1}{\sqrt{(8.85 \times 10^{-12}\ \text{C}^2/\text{N} \cdot \text{m}^2)(4\pi \times 10^{-7}\ \text{N/A}^2)}}$$
$$= 3.00 \times 10^8\ \text{m/s}$$

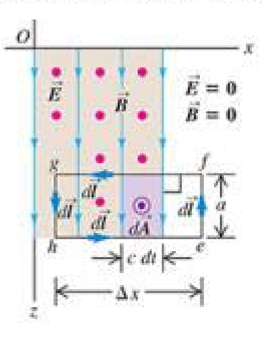
La onda que supusimos es congruente con todas las ecuaciones de Maxwell, siempre y cuando su frente de onda se desplace con la rapidez indicada, la cual reconocemos de inmediato como ¡la rapidez de la luz! Observe que el valor *exacto* de c está definido como 299,792,458 m/s; el valor moderno de ϵ_0 se define de manera que concuerde con esto cuando se utiliza en la ecuación (32.9) (véase la sección 21.3).

32.8 *a*) Aplicación de la ley de Ampère a una onda plana. (Compare con la figura 32.7*a*). *b*) En un tiempo dt, el flujo eléctrico a través del rectángulo en el plano xz se incrementa en una cantidad $d\Phi_E$. Este incremento es igual al flujo a través del rectángulo sombreado con área $ac\ dt$; es decir, $d\Phi_E = Eac\ dt$. Por lo tanto, $d\Phi_E/dt = Eac$.

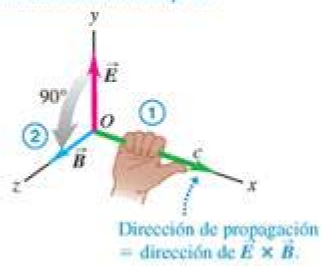
a) En un tiempo dt, el frente de onda se desplaza una distancia $c\ dt$ en la dirección $+x$.



b) Vista superior de la situación en *a*)



32.9 La regla de la mano derecha para las ondas electromagnéticas relaciona las direcciones de $\vec{E}$ y $\vec{B}$ con la dirección de propagación.



Propiedades clave de las ondas electromagnéticas

Para nuestro estudio elegimos una onda simple con la finalidad de evitar complicaciones matemáticas, pero este caso especial ilustra varias características importantes de *todas* las ondas electromagnéticas:

1. La onda es *transversal*; tanto como $\vec{E}$ y $\vec{B}$ son perpendiculares a la dirección de propagación de la onda. Los campos eléctrico y magnético también son perpendiculares entre sí. La dirección de propagación es la dirección del producto vectorial $\vec{E} \times \vec{B}$ (figura 32.9).
2. Hay una razón definida entre las magnitudes de $\vec{E}$ y $\vec{B}$: $E = cB$.
3. La onda viaja en el vacío con rapidez definida e invariable.
4. A diferencia de las ondas mecánicas, que necesitan de partículas oscilantes de un medio, como el agua o aire, para transmitirse, las ondas electromagnéticas no requieren un medio.

Podemos generalizar este análisis a una situación más realista. Suponga que tenemos varios frentes de onda en forma de planos paralelos perpendiculares al eje x, todos los cuales se desplazan hacia la derecha con rapidez c. Imagine que los campos $\vec{E}$ y $\vec{B}$ son iguales en todos los puntos dentro de una sola región comprendida entre dos planos, pero que los campos difieren de una región a otra. La onda en su conjunto es plana, pero en ella los campos varían por etapas a lo largo del eje x. Se podría construir una onda de este tipo sobreponiendo varias de las ondas de etapa sencilla que acabamos de estudiar (como se muestra en la figura 32.5). Esto es posible porque los campos $\vec{E}$ y $\vec{B}$ obedecen el principio de superposición en las ondas de la misma forma que en las situaciones estáticas: cuando dos ondas se superponen, el campo total $\vec{E}$ en cada punto es la suma vectorial de los campos $\vec{E}$ de las ondas individuales, y de manera similar para el campo $\vec{B}$ total.

Podemos ampliar lo anterior para demostrar que una onda con campos que varían por etapas también es congruente con las leyes de Ampère y Faraday, siempre y cuando todos los frentes de onda se desplacen con la rapidez c dada por la ecuación (32.9). En el límite en que las etapas individuales se hacen infinitesimalmente pequeñas, se tiene una onda en la que, en cualquier instante, los campos $\vec{E}$ y $\vec{B}$ varían *continuamente* a lo largo del eje x. Todo el patrón del campo se traslada hacia la derecha con rapidez c. En la sección 32.3 se considerarán ondas en las que $\vec{E}$ y $\vec{B}$ son funciones *sinusoidales* de x y t. Como en cada punto las magnitudes de $\vec{E}$ y $\vec{B}$ están relacionadas de acuerdo con $E = cB$, las variaciones periódicas de los dos campos en cualquier onda periódica viajera deben estar *en fase*.

Las ondas electromagnéticas tienen la propiedad de **polarización**. En el análisis anterior, la asignación de la dirección y para $\vec{E}$ fue arbitraria. De igual manera podríamos haber especificado el eje z para $\vec{E}$; en tal caso, $\vec{B}$ habría estado en la dirección $-y$. Se dice que una onda en la que $\vec{E}$ siempre es paralelo a cierto eje está **polarizada linealmente** a lo largo de ese eje. Más en general, *cualquier* onda que viaje en la dirección x se puede representar como una superposición de ondas polarizadas linealmente en las direcciones y y z. En el capítulo 33 estudiaremos la polarización con más detalle.

Deducción de la ecuación de onda electromagnética

A continuación se presenta otra deducción de la ecuación (32.9) que describe la rapidez de las ondas electromagnéticas. Tiene más profundidad matemática que el tratamiento anterior, pero incluye una deducción de la ecuación de onda para las ondas electromagnéticas. Esta parte de la sección puede omitirse sin perder continuidad en el estudio del capítulo.

En nuestro análisis de las ondas mecánicas en la sección 15.3 (vol. 1), demostramos que una función $y(x, t)$, la cual representa el desplazamiento de cualquier punto en una onda mecánica que viaja a lo largo del eje x, debe satisfacer la ecuación diferencial (15.12):

$$\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} \qquad (32.10)$$

Esta ecuación se llama **ecuación de onda**, y v es la rapidez de propagación de la onda.

Para deducir la ecuación correspondiente de una onda electromagnética, consideramos una vez más una onda plana. Es decir, suponemos que en cada instante, E_y y B_z son uniformes en la totalidad de cualquier plano perpendicular al eje x, la dirección de propagación. Pero ahora dejamos que E_y y B_z varíen continuamente a medida que se avanza sobre el eje x; en esas condiciones, ambas son funciones de x y t. Consideremos los valores de E_y y B_z en dos planos perpendiculares al eje x, uno en x y otro en $x + \Delta x$.

Siguiendo el mismo procedimiento anterior, aplicamos la ley de Faraday a un rectángulo que yace paralelo al plano xy, como se ilustra en la figura 32.10. Esta figura es similar a la 32.7. El extremo izquierdo gh del rectángulo está en la posición x, y el extremo derecho ef se localiza en la posición $(x + \Delta x)$. En el instante t, los valores de E_y en estos dos lados son $E_y(x, t)$ y $E_y(x + \Delta x, t)$, respectivamente. Cuando aplicamos la ley de Faraday a este rectángulo, encontramos que en vez de $\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -Ea$ como antes, tenemos

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -E_y(x, t)a + E_y(x + \Delta x, t)a$$
$$= a[E_y(x + \Delta x, t) - E_y(x, t)] \qquad (32.11)$$

Para determinar el flujo magnético Φ_B a través de este rectángulo, se supone que Δx es suficientemente pequeño como para que B_z sea casi uniforme en todo el rectángulo. En tal caso, $\Phi_B = B_z(x, t)A = B_z(x, t)a\,\Delta x$, y

$$\frac{d\Phi_B}{dt} = \frac{\partial B_z(x, t)}{\partial t} a\,\Delta x$$

Se utiliza notación de derivadas parciales porque B_z es función tanto de x como de t. Al sustituir esta expresión y la ecuación (32.11) en la ley de Faraday, ecuación (32.1), se obtiene

$$a[E_y(x + \Delta x, t) - E_y(x, t)] = -\frac{\partial B_z}{\partial t} a\,\Delta x$$
$$\frac{E_y(x + \Delta x, t) - E_y(x, t)}{\Delta x} = -\frac{\partial B_z}{\partial t}$$

Por último, imaginemos que el rectángulo se encoge hasta quedar como una astilla, de manera que Δx tiende a cero. Cuando se toma el límite de esta ecuación como $\Delta x \to 0$, se obtiene

$$\frac{\partial E_y(x, t)}{\partial x} = -\frac{\partial B_z(x, t)}{\partial t} \qquad (32.12)$$

Esta ecuación demuestra que si hay una componente B_z del campo magnético que varía con el tiempo, también debe haber una componente E_y del campo eléctrico que se modifica con x, y a la inversa. Por el momento dejaremos a un lado esta ecuación, pero volveremos a ella dentro de poco.

A continuación se aplica la ley de Ampère al rectángulo que se muestra en la figura 32.11. La integral de línea $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l}$ se convierte en

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = -B_z(x + \Delta x, t)a + B_z(x, t)a \qquad (32.13)$$

Suponiendo una vez más que el rectángulo es angosto, tomamos como aproximación del flujo eléctrico Φ_E a través de él la expresión $\Phi_E = E_y(x, t)A = E_y(x, t)\,a\,\Delta x$. Por lo tanto, la razón de cambio de Φ_E, que necesitamos para la ley de Ampère, es

$$\frac{d\Phi_E}{dt} = \frac{\partial E_y(x, t)}{\partial t} a\,\Delta x$$

Ahora sustituimos esta expresión y la ecuación (32.13) en la ley de Ampère, ecuación (32.5):

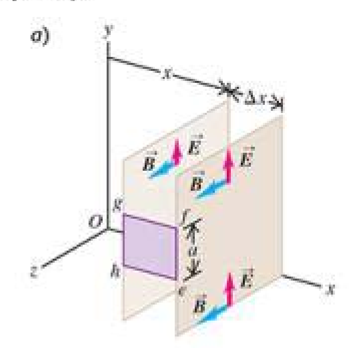
$$-B_z(x + \Delta x, t)a + B_z(x, t)a = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial E_y(x, t)}{\partial t} a\,\Delta x$$

De nuevo, dividimos ambos lados entre $a\,\Delta x$ y tomamos el límite como $\Delta x \to 0$. Así, se encuentra que

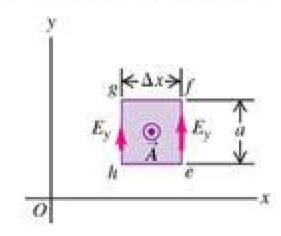
$$-\frac{\partial B_z(x, t)}{\partial x} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial E_y(x, t)}{\partial t} \qquad (32.14)$$

32.10 Ley de Faraday aplicada a un rectángulo con altura a y anchura Δx paralelo al plano xy.

a)

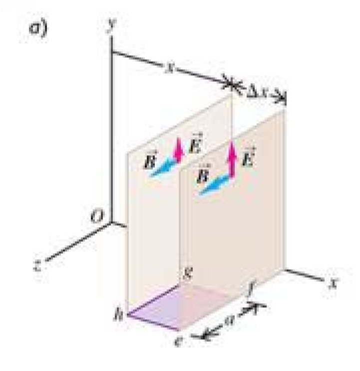


b) Vista lateral de la situación en *a)*

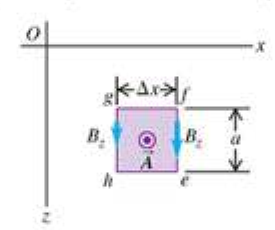


32.11 Ley de Ampère aplicada a un rectángulo con altura a y anchura Δx paralelo al plano xz.

a)



b) Vista superior de la situación en *a)*



Ahora viene el paso final. Tomamos las derivadas parciales con respecto a x en ambos lados de la ecuación (32.12) y las derivadas parciales con respecto a t en ambos lados de la ecuación (32.14). Los resultados son

$$-\frac{\partial^2 E_y(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 B_z(x,t)}{\partial x \partial t}$$

$$-\frac{\partial^2 B_z(x,t)}{\partial x \partial t} = \epsilon_0\mu_0 \frac{\partial^2 E_y(x,t)}{\partial t^2}$$

Se combinan estas dos ecuaciones para eliminar B_z y finalmente encontramos

$$\frac{\partial^2 E_y(x,t)}{\partial x^2} = \epsilon_0\mu_0 \frac{\partial^2 E_y(x,t)}{\partial t^2} \quad \text{(ecuación de onda electromagnética en el vacío)} \tag{32.15}$$

Esta expresión tiene la misma forma que la ecuación general de onda, ecuación (32.10). Como el campo eléctrico E_y debe satisfacer esta ecuación, se comporta como una onda con una configuración que viaja por el espacio con rapidez definida. Además, la comparación de las ecuaciones (32.15) y (32.10) demuestra que la rapidez de la onda v está dada por

$$\frac{1}{v^2} = \epsilon_0\mu_0 \quad \text{o} \quad v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}}$$

Esto concuerda con la ecuación (32.9) de la rapidez c de las ondas electromagnéticas.

Se puede demostrar que B_z también debe satisfacer la misma ecuación de onda que E_y, ecuación (32.15). Para demostrarlo, se toma la derivada parcial de la ecuación (32.12) con respecto a t y la derivada parcial de la ecuación (32.14) con respecto a x y se combinan los resultados. Esto se deja como ejercicio para el lector.

Evalúe su comprensión de la sección 32.2 Para cada una de las siguientes ondas electromagnéticas, indique la dirección del campo magnético. *a)* La onda se propaga en la dirección z positiva, y $\vec{E}$ iestá en la dirección x positiva; *b)* la onda se propaga en la dirección y positiva, y $\vec{E}$ está en la dirección z negativa; *c)* la onda se propaga en la dirección x negativa, y $\vec{E}$ está en la dirección z positiva.

32.3 Ondas electromagnéticas sinusoidales

Las ondas electromagnéticas sinusoidales son directamente análogas a las ondas mecánicas transversales sinusoidales que se forman en una cuerda estirada, las cuales estudiamos en la sección 15.3. En una onda electromagnética sinusoidal, $\vec{E}$ y $\vec{B}$ en cualquier punto del espacio son funciones sinusoidales del tiempo, y en cualquier instante la variación *espacial* de los campos también es sinusoidal.

Algunas ondas electromagnéticas sinusoidales son *ondas planas*; comparten con las ondas descritas en la sección 32.2 la propiedad de que, en cualquier instante, los campos son uniformes en la totalidad de cualquier plano perpendicular a la dirección de propagación. La distribución en conjunto viaja en la dirección de propagación con rapidez c. Las direcciones de $\vec{E}$ y $\vec{B}$ son perpendiculares a la dirección de propagación (y entre sí), por lo que la onda es *transversal*. Las ondas electromagnéticas producidas por una carga puntual oscilante, mostrada en la figura 32.3, son un ejemplo de ondas sinusoidales que *no* son ondas planas. Pero si restringimos nuestras observaciones a una región relativamente pequeña del espacio a una distancia suficientemente grande de la fuente, las ondas planas son una buena aproximación de estas ondas (figura 32.12). Del mismo modo, la superficie curva de la Tierra (casi) esférica nos parece plana en virtud de nuestro pequeño tamaño en relación con el radio terrestre. En esta sección restringiremos nuestro análisis a las ondas planas.

32.12 Las ondas que pasan a través de una pequeña área a una distancia suficientemente grande de la fuente pueden considerarse como ondas planas.

Las ondas que pasan a través de una superficie grande se propagan en diferentes direcciones...

Fuente de ondas electromagnéticas

... pero todas las ondas que pasan a través de un área pequeña se propagan casi en la misma dirección, por lo que podemos tratarlas como ondas planas.

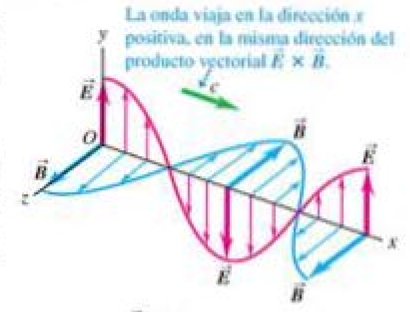
La frecuencia f, la longitud de onda λ y la rapidez de propagación c de cualquier onda periódica guardan entre sí la conocida relación entre longitud de onda y frecuencia, $c = \lambda f$. Si la frecuencia es 10^8 Hz (100 MHz), común para las emisiones de radio de FM, la longitud de onda es

$$\lambda = \frac{3 \times 10^8 \text{ m/s}}{10^8 \text{ Hz}} = 3 \text{ m}$$

La figura 32.4 muestra la proporcionalidad inversa entre la longitud de onda y la frecuencia.

Campos de una onda sinusoidal

La figura 32.13 ilustra una onda electromagnética polarizada sinusoidal que viaja en la dirección $+x$. Se muestran los vectores $\vec{E}$ y $\vec{B}$ correspondientes a unos cuantos puntos sobre el eje x positivo. Observe que los campos eléctrico y magnético oscilan en fase: $\vec{E}$ es máximo donde $\vec{B}$ también lo es, y $\vec{E}$ es igual a cero donde $\vec{B}$ también vale cero. Advierta además que donde $\vec{E}$ está en la dirección $+y$, $\vec{B}$ tiene la dirección $+z$; y donde $\vec{E}$ está en la dirección $-y$, $\vec{B}$ va en la dirección $-z$. En todos los puntos, el producto vectorial $\vec{E} \times \vec{B}$ está en la dirección en que se propaga la onda (la dirección $+x$). Esto se mencionó en la sección 32.2 como una de las características de las ondas electromagnéticas.



32.13 Representación de los campos eléctrico y magnético como funciones de x correspondientes a una onda electromagnética sinusoidal plana linealmente polarizada. Se muestra una longitud de onda de la onda en el tiempo $t = 0$. Los campos se indican solo para puntos a lo largo del eje x.

CUIDADO **En una onda plana, $\vec{E}$ y $\vec{B}$ están en todas partes** La figura 32.13 podría dar la impresión errónea de que los campos eléctrico y magnético existen únicamente a lo largo del eje x. En realidad, en una onda plana sinusoidal hay campos eléctrico y magnético en *todos* los puntos del espacio. Imagine un plano perpendicular al eje x (es decir, paralelo al plano yz) en un punto particular, en un momento dado; los campos tienen los mismos valores en todos los puntos del plano. Los valores son diferentes para distintos planos.

Podemos describir las ondas electromagnéticas por medio de *funciones de onda*, como se hizo en la sección 15.3 para el caso de las ondas en una cuerda. La ecuación (15.7) es una forma de la función de onda para una onda transversal que viaja en la dirección $+x$ a lo largo de una cuerda estirada:

$$y(x, t) = A\cos(kx - \omega t)$$

donde $y(x, t)$ es el desplazamiento transversal de su posición de equilibrio en el tiempo t de un punto con coordenada x sobre la cuerda. La cantidad A es el desplazamiento máximo, o *amplitud*, de la onda; ω es su *frecuencia angular*, igual al producto de 2π por la frecuencia f, y k es el *número de onda*, igual a $2\pi/\lambda$, donde λ es la longitud de onda.

Sea que $E_y(x, t)$ y $B_z(x, t)$ representen los valores instantáneos de la componente y de $\vec{E}$ y la componente z de $\vec{B}$, respectivamente, en la figura 32.13, y sea que $E_{máx}$ y $B_{máx}$ representen los valores máximos, o *amplitudes*, de dichos campos. De esta forma, las funciones de onda para la onda son

$$E_y(x, t) = E_{máx}\cos(kx - \omega t) \qquad B_z(x, t) = B_{máx}\cos(kx - \omega t) \qquad (32.16)$$

(onda electromagnética sinusoidal plana, que se propaga en la dirección $+x$)

También se pueden escribir las funciones de onda en forma vectorial:

$$\vec{E}(x, t) = \hat{\jmath}E_{máx}\cos(kx - \omega t)$$
$$\vec{B}(x, t) = \hat{k}B_{máx}\cos(kx - \omega t) \qquad (32.17)$$

CUIDADO **El símbolo k tiene dos significados** Advierta que existen dos k diferentes: el vector unitario en la dirección z, y el número de onda k. ¡No los confunda!

Las curvas sinusoidales de la figura 32.13 representan valores instantáneos de los campos eléctrico y magnético como funciones de x en el tiempo $t = 0$, es decir, $\vec{E}(x, t = 0)$ y $\vec{B}(x, t = 0)$. Conforme transcurre el tiempo, la onda viaja hacia la derecha con rapidez c. Las ecuaciones (32.16) y (32.17) indican que, en cualquier punto, las oscilaciones sinusoidales de $\vec{E}$ y $\vec{B}$ se encuentran *en fase*. De la ecuación (32.4) se desprende que las amplitudes deben estar relacionadas mediante la expresión

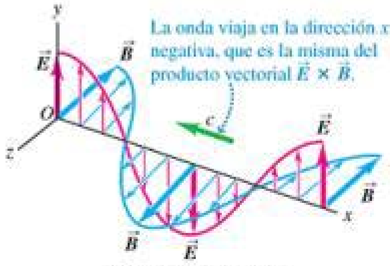
$$E_{máx} = cB_{máx} \qquad \text{(onda electromagnética en el vacío)} \qquad (32.18)$$

Estas relaciones de amplitud y fase también son requisitos para que $E(x, t)$ y $B(x, t)$ satisfagan las ecuaciones (32.12) y (32.14), que provienen de la ley de Faraday y la ley de Ampère, respectivamente. ¿Puede usted comprobar esto? (Véase el problema 32.38).

Mastering PHYSICS

PhET: Radio Waves & Electromagnetic Fields
ActivPhysics 10.1: Properties of Mechanical Waves

32.14 Representación de una longitud de onda de una onda electromagnética sinusoidal plana linealmente polarizada, que viaja en la dirección x negativa en el instante $t = 0$. Solo se ilustran los campos correspondientes a puntos a lo largo del eje x. (Compare con la figura 32.13).



La figura 32.14 muestra los campos eléctrico y magnético de una onda que viaja en la dirección *x negativa*. En los puntos donde $\vec{E}$ está en la dirección y positiva, $\vec{B}$ se encuentra en la dirección *z negativa*; y donde $\vec{E}$ está en la dirección y negativa, $\vec{B}$ va en la dirección *z positiva*. Las funciones de onda correspondientes a esta onda son

$$E_y(x, t) = E_{\text{máx}} \cos(kx + \omega t) \quad B_z(x, t) = -B_{\text{máx}} \cos(kx + \omega t) \quad (32.19)$$

(onda electromagnética sinusoidal plana, que se propaga en la dirección $-x$)

Al igual que ocurre con la onda que viaja en la dirección $+x$, las oscilaciones sinusoidales de los campos $\vec{E}$ y $\vec{B}$ en cualquier punto se encuentran *en fase*, y el producto vectorial $\vec{E} \times \vec{B}$ apunta en la dirección de propagación.

Las ondas sinusoidales que se muestran en las figuras 32.13 y 32.14 están linealmente polarizadas en la dirección y; el campo $\vec{E}$ siempre es paralelo al eje y. El ejemplo 32.1 se refiere a una onda linealmente polarizada en la dirección z.

Estrategia para resolver problemas 32.1 Ondas electromagnéticas



IDENTIFICAR *los conceptos relevantes:* Muchas de las mismas ideas que se aplican a las ondas mecánicas también se aplican a las ondas electromagnéticas. Una diferencia es que las ondas electromagnéticas se describen mediante dos cantidades (en este caso, el campo eléctrico $\vec{E}$ y el campo magnético $\vec{B}$), en vez de una sola cantidad, como el desplazamiento de una cuerda.

PLANTEAR *el problema* de acuerdo con los siguientes pasos:
1. Dibuje un diagrama que señale la dirección de propagación de la onda y las direcciones de $\vec{E}$ y $\vec{B}$.
2. Identifique las incógnitas.

EJECUTAR *la solución*, como sigue:
1. Repase el tratamiento de ondas mecánicas sinusoidales de los capítulos 15 y 16 (vol. 1), y en particular las cuatro estrategias para resolver problemas sugeridas ahí.
2. Considere las relaciones básicas para las ondas periódicas: $v = \lambda f$ y $\omega = vk$. Para las ondas electromagnéticas en el vacío, $v = c$. Distinga entre la frecuencia ordinaria f, que por lo general se expresa en hertz, y la frecuencia angular $\omega = 2\pi f$, que se expresa en rad/s. Recuerde que el número de onda es $k = 2\pi/\lambda$.
3. Concéntrese en las relaciones básicas, como aquellas entre $\vec{E}$ y $\vec{B}$ (magnitud, dirección y fase relativa), en la forma como se determina la rapidez de onda y en la naturaleza transversal de las ondas.

EVALUAR *su respuesta:* Verifique que el resultado sea razonable. En el caso de las ondas electromagnéticas en el vacío, la magnitud del campo magnético expresada en teslas es mucho menor (en un factor de 3.00×10^8) que la del campo eléctrico expresada en volts por metro. Si la respuesta sugiere otra cosa, es probable que se haya cometido un error al usar la relación $E = cB$. (Más adelante en esta sección, veremos que la relación entre E y B es diferente para las ondas electromagnéticas en un medio material).

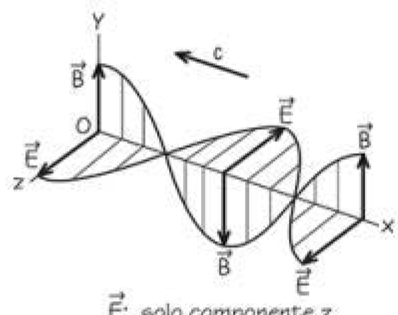
Ejemplo 32.1 Campos eléctrico y magnético de un rayo láser

Un láser de dióxido de carbono emite una onda electromagnética sinusoidal que viaja en el vacío en la dirección x negativa. La longitud de onda es 10.6 μm (en el rango del infrarrojo; véase la figura 32.4) y el campo $\vec{E}$ es paralelo al eje z, con magnitud máxima de 1.5 MV/m. Escriba las ecuaciones vectoriales para $\vec{E}$ y $\vec{B}$ como funciones del tiempo y la posición.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Las ecuaciones (32.19) describen una onda que viaja en la dirección x negativa con $\vec{E}$ a lo largo del eje y, es decir, una onda linealmente polarizada a lo largo del eje y. En cambio, la onda de este ejemplo está linealmente polarizada a lo largo del eje z. En los puntos donde $\vec{E}$ está en la dirección z positiva, $\vec{B}$ debe estar en la dirección y positiva para que el producto vectorial $\vec{E} \times \vec{B}$ esté en la dirección x negativa (la dirección de propagación). La figura 32.15 muestra una onda que satisface estos requisitos.

32.15 Diagrama para este problema.



EJECUTAR: Un par de posibles funciones de onda que describen la onda que se representa en la figura 32.15 son

$$\vec{E}(x, t) = \hat{k} E_{\text{máx}} \cos(kx + \omega t)$$
$$\vec{B}(x, t) = \hat{j} B_{\text{máx}} \cos(kx + \omega t)$$

El signo más en los argumentos de las funciones coseno indica que la onda se propaga en la dirección x negativa, como debería. La ley de Faraday requiere que $E_{máx} = cB_{máx}$ [ecuación (32.18)], de manera que

$$B_{máx} = \frac{E_{máx}}{c} = \frac{1.5 \times 10^6 \text{ V/m}}{3.0 \times 10^8 \text{ m/s}} = 5.0 \times 10^{-3} \text{ T}$$

Para comprobar la consistencia de las unidades, advierta que 1 V = 1 Wb/s, y que 1 Wb/m^2 = 1 T.

Se tiene que $\lambda = 10.6 \times 10^{-6}$ m, por lo que el número de onda y la frecuencia angular son

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi \text{ rad}}{10.6 \times 10^{-6} \text{ m}} = 5.93 \times 10^5 \text{ rad/m}$$

$$\omega = ck = (3.00 \times 10^8 \text{ m/s})(5.93 \times 10^5 \text{ rad/m})$$
$$= 1.78 \times 10^{14} \text{ rad/s}$$

Al sustituir estos valores en las funciones de onda anteriores, se obtiene

$$\vec{E}(x, t) = \hat{k}(1.5 \times 10^6 \text{ V/m}) \times \cos[(5.93 \times 10^5 \text{ rad/m})x + (1.78 \times 10^{14} \text{ rad/s})t]$$

$$\vec{B}(x, t) = \hat{j}(5.0 \times 10^{-3} \text{ T}) \times \cos[(5.93 \times 10^5 \text{ rad/m})x + (1.78 \times 10^{14} \text{ rad/s})t]$$

EVALUAR: Como se esperaba, la magnitud $B_{máx}$ en teslas es mucho menor que la magnitud de $E_{máx}$ en volts por metro. Para comprobar las direcciones de $\vec{E}$ y $\vec{B}$, observe que $\vec{E} \times \vec{B}$ está en la dirección de $\hat{k} \times \hat{j} = -\hat{\imath}$. Esto es lo correcto para una onda que se propaga en la dirección x negativa.

Nuestras expresiones para $\vec{E}(x, t)$ y $\vec{B}(x, t)$ no son las únicas soluciones posibles. Siempre es factible agregar un ángulo de fase ϕ a los argumentos de la función coseno, de manera que $kx + \omega t$ se vuelva $kx + \omega t + \phi$. Para determinar el valor de ϕ se necesitaría conocer $\vec{E}$ y $\vec{B}$ como funciones de x en un momento dado t o como funciones de t en una coordenada dada x. Sin embargo, el enunciado del problema no incluye esta información.

Ondas electromagnéticas en la materia

Hasta este momento, nuestro análisis de las ondas electromagnéticas se ha restringido a ondas en el *vacío*. Pero las ondas electromagnéticas también viajan en la *materia*; piense en la luz que viaja a través del aire, el agua o el vidrio. En este apartado ampliaremos nuestro estudio a las ondas electromagnéticas en materiales que no son conductores, es decir, en *dieléctricos*.

En un dieléctrico, la rapidez de la onda no es la misma que en el vacío, y la denotaremos con v en vez de utilizar c. La ley de Faraday no se altera, pero en la ecuación (32.4), obtenida de ella, se sustituye la rapidez c por v. En la ley de Ampère, la corriente de desplazamiento está dada no por $\epsilon_0\, d\Phi_E/dt$, donde Φ_E es el flujo de $\vec{E}$ a través de una superficie, sino por $\epsilon\, d\Phi_E/dt = K\epsilon_0\, d\Phi_E/dt$, donde K es la constante dieléctrica y ϵ es la permitividad del dieléctrico. (Estas magnitudes se presentaron en la sección 24.4). Asimismo, la constante μ_0 en la ley de Ampère debe sustituirse por $\mu = K_m\mu_0$, donde K_m es la permeabilidad relativa del dieléctrico y μ es su permeabilidad (véase la sección 28.8). Por lo tanto, las ecuaciones (32.4) y (32.8) se sustituyen por

$$E = vB \qquad \text{y} \qquad B = \epsilon\mu vE \tag{32.20}$$

Con el mismo procedimiento que seguimos para las ondas en el vacío, encontramos que la rapidez de onda v es

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}} = \frac{1}{\sqrt{KK_m}}\frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}} = \frac{c}{\sqrt{KK_m}} \tag{32.21}$$

Para la mayoría de dieléctricos, la permeabilidad relativa K_m se aproxima mucho a la unidad (excepto para materiales ferromagnéticos aislantes). Cuando $K_m \cong 1$,

$$v = \frac{1}{\sqrt{K}}\frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}} = \frac{c}{\sqrt{K}}$$

Como K siempre es mayor que la unidad, la rapidez v de las ondas electromagnéticas en un dieléctrico siempre es *menor* que la rapidez c en el vacío en un factor de $1/\sqrt{K}$ (figura 32.16). La razón entre la rapidez c en el vacío y la rapidez v en un material se conoce en óptica como el **índice de refracción** n del material. Cuando $K_m \cong 1$,

$$\frac{c}{v} = n = \sqrt{KK_m} \cong \sqrt{K} \tag{32.22}$$

Por lo general, en esta ecuación no es posible utilizar los valores de K que se dan en la tabla 24.1, ya que esos valores se miden con base en campos eléctricos *constantes*.

32.16 La constante dieléctrica K del agua es alrededor de 1.8 para la luz visible, por lo que la rapidez de la luz visible en el agua es menor que en el vacío en un factor de $1/\sqrt{K} = 1/\sqrt{1.8} = 0.75$.



Cuando los campos oscilan con rapidez, normalmente no hay tiempo para que ocurra la reorientación de los dipolos eléctricos que tiene lugar con los campos estables. Los valores de K con campos que varían con rapidez, en general, son *más pequeños* que los valores de la tabla. Por ejemplo, el valor de K para el agua es de 80.4 para campos estables, pero solo de 1.8 en el intervalo de frecuencias de la luz visible. Así, la "constante" dieléctrica K en realidad es función de la frecuencia (la *función dieléctrica*).



Ejemplo 32.2 Ondas electromagnéticas en diferentes materiales

a) Cierta noche, durante una visita a una joyería, usted sostiene un diamante contra la luz de una lámpara del alumbrado público. El vapor de sodio caliente de la lámpara emite luz amarilla con frecuencia de 5.09 $\times 10^{14}$ Hz. Determine la longitud de onda en el vacío, la rapidez de propagación de la onda y la longitud de onda en el diamante para el cual $K = 5.84$ y $K_m = 1.00$ a esta frecuencia. *b*) Una onda de radio con frecuencia de 90.0 MHz (en la banda de radio de FM) pasa del vacío hacia un núcleo de ferrita aislante (un material ferromagnético que se utiliza en los cables de computadora para eliminar la interferencia de radio). Determine la longitud de onda en el vacío, la rapidez de propagación de la onda en la ferrita, y la longitud de onda en la ferrita para la cual $K = 10.0$ y $K_m = 1000$ a esta frecuencia.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: En cada caso se determina la longitud de onda en el vacío usando $c = \lambda f$. Para usar la ecuación correspondiente $v = \lambda f$ con la finalidad de encontrar la longitud de onda en un medio material, encontramos la rapidez v de las ondas electromagnéticas en el medio usando la ecuación (23.21), la cual relaciona v con los valores de la constante dieléctrica K y la permeabilidad relativa K_m para el medio.

EJECUTAR: *a*) La longitud de onda de la luz de sodio en el vacío es

$$\lambda_{\text{vacío}} = \frac{c}{f} = \frac{3.00 \times 10^8 \text{ m/s}}{5.09 \times 10^{14} \text{ Hz}} = 5.89 \times 10^{-7} \text{ m} = 589 \text{ nm}$$

La rapidez de la onda y la longitud de onda en el diamante son

$$v_{\text{diamante}} = \frac{c}{\sqrt{KK_m}} = \frac{3.00 \times 10^8 \text{ m/s}}{\sqrt{(5.84)(1.00)}} = 1.24 \times 10^8 \text{ m/s}$$

$$\lambda_{\text{diamante}} = \frac{v_{\text{diamante}}}{f} = \frac{1.24 \times 10^8 \text{ m/s}}{5.09 \times 10^{14} \text{ Hz}}$$

$$= 2.44 \times 10^{-7} \text{ m} = 244 \text{ nm}$$

b) Siguiendo los mismos pasos que en el inciso *a*), se obtiene

$$\lambda_{\text{vacío}} = \frac{c}{f} = \frac{3.00 \times 10^8 \text{ m/s}}{90.0 \times 10^6 \text{ Hz}} = 3.33 \text{ m}$$

$$v_{\text{ferrita}} = \frac{c}{\sqrt{KK_m}} = \frac{3.00 \times 10^8 \text{ m/s}}{\sqrt{(10.0)(1000)}} = 3.00 \times 10^6 \text{ m/s}$$

$$\lambda_{\text{ferrita}} = \frac{v_{\text{ferrita}}}{f} = \frac{3.00 \times 10^6 \text{ m/s}}{90.0 \times 10^6 \text{ Hz}}$$

$$= 3.33 \times 10^{-2} \text{ m} = 3.33 \text{ cm}$$

EVALUAR: La rapidez de la luz en los materiales transparentes como el diamante normalmente está entre $0.2c$ y c; nuestro resultado del inciso *a*) muestra que $v_{\text{diamante}} = 0.414c$. Como indican nuestros resultados en el inciso *b*), la rapidez de las ondas electromagnéticas en los materiales densos como la ferrita (para la que $v_{\text{ferrita}} = 0.010c$) puede ser *mucho menor* que en el vacío.

Evalúe su comprensión de la sección 32.3 La primera de las ecuaciones (32.17) da el campo eléctrico para una onda plana medida en puntos a lo largo del eje x. Para esta onda plana, ¿en qué difiere el campo eléctrico en puntos *afuera* del eje x, de la expresión en las ecuaciones (32.17)? **i.** La amplitud es diferente; **ii.** la fase es diferente; **iii.** tanto la amplitud como la fase son diferentes; **iv.** ninguna de las opciones anteriores es válida.

32.4 Energía y momento lineal de las ondas electromagnéticas

Es un hecho muy conocido que hay energía asociada con las ondas electromagnéticas; piense en la energía de la radiación solar. Las aplicaciones prácticas de las ondas electromagnéticas, como los hornos de microondas, los transmisores de radio y rayos láser para cirugía ocular, utilizan la energía que esas ondas transportan. Para comprender cómo se aprovecha esta energía, resulta útil deducir relaciones detalladas de la energía de una onda electromagnética.

Comencemos con las expresiones obtenidas en las secciones 24.3 y 30.3 para las **densidades de energía** en campos eléctricos y magnéticos; sugerimos al lector que las revise en este momento. Las ecuaciones (24.11) y (30.10) indican que en una región de espacio vacío donde están presentes los campos $\vec{E}$ y $\vec{B}$ la densidad total de energía u está dada por

$$u = \tfrac{1}{2}\epsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0}B^2 \qquad (32.23)$$

donde ϵ_0 y μ_0 son, respectivamente, la permitividad y la permeabilidad del espacio libre. Para las ondas electromagnéticas en el vacío, las magnitudes E y B están relacionadas por

$$B = \frac{E}{c} = \sqrt{\epsilon_0 \mu_0}\, E \qquad (32.24)$$

Al combinar las ecuaciones (32.23) y (32.24) también se puede expresar la densidad de energía u en una onda electromagnética simple en el vacío como

$$u = \tfrac{1}{2}\epsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0}(\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}\, E)^2 = \epsilon_0 E^2 \qquad (32.25)$$

Esto demuestra que en el vacío, la densidad de energía asociada con el campo $\vec{E}$ en nuestra onda simple es igual a la densidad de energía del campo $\vec{B}$. En general, la magnitud del campo eléctrico E es función de la posición y el tiempo, igual que para la onda sinusoidal descrita por las ecuaciones (32.16); así, la densidad de energía u de una onda electromagnética, dada por la ecuación (32.25), también depende en general de la posición y el tiempo.

Flujo de energía electromagnética y el vector de Poynting

Las ondas electromagnéticas como las que hemos descrito son ondas que *viajan* y transportan energía de una región a otra. Esta transferencia de energía se puede describir en términos de la energía transferida *por unidad de tiempo por unidad de área de sección transversal*, o *potencia por unidad de área*, para un área perpendicular a la dirección en que viaja la onda.

Para ver cómo se relaciona el flujo de energía con los campos, considere un plano estacionario, perpendicular al eje x, que coincida con el frente de onda en cierto momento. En un tiempo dt después de eso, el frente de onda se desplaza una distancia $dx = c\, dt$ hacia la derecha del plano. Si se considera un área A sobre este plano estacionario (figura 32.17), advertimos que la energía del espacio a la derecha de esta área debió haber pasado a través del área para llegar a la nueva ubicación. El volumen dV de la región en cuestión es el producto del área de la base A por la longitud $c\, dt$, y la energía dU de esta región es el producto de la densidad de energía u por este volumen:

$$dU = u\, dV = (\epsilon_0 E^2)(Ac\, dt)$$

Esta energía pasa a través del área A en el tiempo dt. El flujo de energía por unidad de tiempo por unidad de área, que llamaremos S, es

$$S = \frac{1}{A}\frac{dU}{dt} = \epsilon_0 c E^2 \qquad \text{(en el vacío)} \qquad (32.26)$$

Si empleamos las ecuaciones (32.4) y (32.9), obtenemos las siguientes formas alternativas:

$$S = \frac{\epsilon_0}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} E^2 = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E^2 = \frac{EB}{\mu_0} \qquad \text{(en el vacío)} \qquad (32.27)$$

La deducción de la ecuación (32.27) a partir de la (32.26) se deja al lector. Las unidades S son energía por unidad de tiempo por unidad de área, o potencia por unidad de área. La unidad del SI para S es $1\ \text{J/s}\cdot\text{m}^2$, o $1\ \text{W/m}^2$.

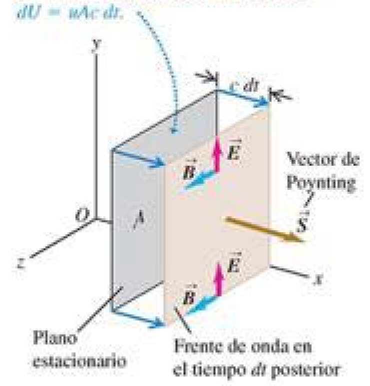
Es posible definir una cantidad *vectorial* que describa tanto la magnitud como la dirección de la rapidez del flujo de energía:

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0}\vec{E} \times \vec{B} \qquad \text{(vector de Poynting en el vacío)} \qquad (32.28)$$

El vector $\vec{S}$ se denomina **vector de Poynting**, y fue introducido por el físico británico John Poynting (1852-1914). Su dirección es la misma que la dirección en que se propaga la onda (figura 32.18). Como $\vec{E}$ y $\vec{B}$ son perpendiculares, la magnitud de $\vec{S}$ es $S = EB/\mu_0$; según las ecuaciones (32.26) y (32.27), este es el flujo de energía por unidad de área y por unidad de tiempo a través de un área de sección transversal perpendicular a la dirección de propagación. El flujo total de energía por unidad de tiempo (potencia, P) hacia afuera de cualquier superficie cerrada es la integral de $\vec{S}$ sobre la superficie:

$$P = \oint \vec{S} \cdot d\vec{A}$$

32.17 Frente de onda en el tiempo dt después de haber pasado a través del plano estacionario con área A.



32.18 Estos paneles solares en el techo de un edificio están inclinados hacia el Sol, es decir, de frente al vector Poynting de las ondas electromagnéticas provenientes del Sol; de esta forma, los paneles pueden absorber la máxima cantidad de energía de las ondas.



Para las ondas sinusoidales que estudiamos en la sección 32.3, así como en el caso de otras ondas más complejas, los campos eléctrico y magnético en un punto cualquiera varían con el tiempo, por lo que el vector de Poynting en cualquier punto también es función del tiempo. Puesto que las frecuencias de las ondas electromagnéticas comunes son muy altas, la variación en el tiempo del vector Poynting es tan rápida que lo más adecuado es examinar su valor *medio*. La magnitud del valor medio de $\vec{S}$ en un punto recibe el nombre de **intensidad** de la radiación en ese punto. La unidad del SI para la intensidad es la misma que para S: 1 W/m^2 (watt por metro cuadrado).

Veamos cuál es la intensidad de la onda sinusoidal descrita por las ecuaciones (32.17). Primero sustituimos $\vec{E}$ y $\vec{B}$ en la ecuación (32.28):

$$\vec{S}(x,t) = \frac{1}{\mu_0}\vec{E}(x,t) \times \vec{B}(x,t)$$
$$= \frac{1}{\mu_0}[\hat{\jmath}E_{\text{máx}}\cos(kx - \omega t)] \times [\hat{k}B_{\text{máx}}\cos(kx - \omega t)]$$

El producto vectorial de los vectores unitarios $\hat{\jmath} \times \hat{k} = \hat{\imath}$ y $\cos^2(kx - \omega t)$ nunca es negativo, por lo que (x, t) siempre apunta en la dirección x positiva (la dirección de propagación de la onda). La componente x del vector de Poynting es

$$S_x(x,t) = \frac{E_{\text{máx}}B_{\text{máx}}}{\mu_0}\cos^2(kx - \omega t) = \frac{E_{\text{máx}}B_{\text{máx}}}{2\mu_0}[1 + \cos 2(kx - \omega t)]$$

El valor medio del tiempo de cos2 $(kx - \omega t)$ es igual a cero porque, en cualquier punto, es positivo durante la mitad de un ciclo y negativo durante la otra mitad. Por lo tanto, el valor medio del vector de Poynting en un ciclo completo es $\vec{S}_{\text{med}} = \hat{\imath}S_{\text{med}}$, donde

$$S_{\text{med}} = \frac{E_{\text{máx}}B_{\text{máx}}}{2\mu_0}$$

Es decir, la magnitud del valor medio de $\vec{S}$ para una onda sinusoidal (la intensidad I de la onda) es $\frac{1}{2}$ del valor máximo. Con base en las relaciones $E_{\text{máx}} = B_{\text{máx}}c$ y $\epsilon_0\mu_0 = 1/c^2$, podemos expresar la intensidad en varias formas equivalentes:

$$I = S_{\text{med}} = \frac{E_{\text{máx}}B_{\text{máx}}}{2\mu_0} = \frac{E_{\text{máx}}{}^2}{2\mu_0 c}$$
$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}}E_{\text{máx}}{}^2 = \frac{1}{2}\epsilon_0 c E_{\text{máx}}{}^2 \qquad \text{(intensidad de una onda sinusoidal en el vacío)} \qquad (32.29)$$

Se invita al lector a que compruebe que estas expresiones son equivalentes.

En el caso de una onda que viaja en la dirección $-x$, representada por las ecuaciones (32.19), el vector de Poynting tiene la dirección $-x$ en todos los puntos, pero su magnitud es la misma que en el caso de una onda que viaja en la dirección $+x$. Se invita al lector a comprobar estas afirmaciones (véase el ejercicio 32.24).

CUIDADO **Vector de Poynting contra intensidad** En cualquier punto x, la magnitud del vector de Poynting varía con el tiempo. En consecuencia, la rapidez *instantánea* con la que la energía electromagnética en una onda plana sinusoidal llega a la superficie no es constante. Esto tal vez parezca contradecir la experiencia cotidiana; la luz del Sol, la de una bombilla eléctrica o la del rayo láser de un escáner en la tienda de comestibles parecen estables y de intensidad invariable. En realidad, el vector de Poynting de estas fuentes *sí* varía con el tiempo, pero esta variación es imperceptible ya que la frecuencia de oscilación es muy alta (alrededor de 5×10^{14} Hz en el caso de la luz visible). Lo único que percibimos es la rapidez *media* con que la energía llega al ojo; por esta razón, es común usar la intensidad (valor medio de S) para describir la intensidad de la radiación electromagnética.

Aplicación Cirugía láser
Los láseres se utilizan ampliamente en medicina como "bisturíes" de muy alta precisión, sin derramar sangre. Pueden alcanzar y eliminar tumores con un daño mínimo a los tejidos sanos vecinos, como en la cirugía del cerebro que aquí se muestra. La potencia de salida del láser es normalmente inferior a 40 W, menor que la de una bombilla normal. Sin embargo, esta potencia se concentra en un punto de 0.1 a 2.0 mm de diámetro, de modo que la intensidad de la luz (igual al valor medio del vector de Poynting) puede ser tan elevada como 5×10^9 W/m^2.



A lo largo de este análisis hemos considerado solo ondas electromagnéticas que se propagan en el vacío. Sin embargo, si las ondas viajan en un medio dieléctrico, deben

modificarse las expresiones para la densidad de energía [ecuación (32.23)], el vector de Poynting [ecuación (32.28)] y la intensidad de una onda sinusoidal [ecuación (32.29)]. Los cambios requeridos son muy sencillos: basta con sustituir ϵ_0 por la permitividad ϵ del dieléctrico, μ_0 por la permeabilidad μ del dieléctrico y c por la rapidez v de las ondas electromagnéticas en el dieléctrico. De manera sorprendente, las densidades de energía en los campos $\vec{E}$ y $\vec{B}$ son iguales incluso en un dieléctrico.



Ejemplo 32.3 Energía en una onda no sinusoidal



Con respecto a la onda no sinusoidal descrita en la sección 32.2, suponga que $E = 100$ V/m $= 100$ N/C. Determine el valor B, la densidad de energía u y la rapidez de flujo de energía por unidad de área S.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: En esta onda, $\vec{E}$ y $\vec{B}$ son uniformes detrás del frente de onda (y cero delante de ella). Por lo tanto, las incógnitas B, u y S también deben ser uniformes detrás del frente de onda. Dado el valor de la magnitud E, calculamos la magnitud de B con la ecuación (32.4), determinamos u con la ecuación (32.25), y S con la ecuación (32.27). [No es posible utilizar la ecuación (32.29), ya que solo se aplica a ondas sinusoidales].

EJECUTAR: De acuerdo con la ecuación (32.4),

$$B = \frac{E}{c} = \frac{100\ \text{V/m}}{3.00 \times 10^8\ \text{m/s}} = 3.33 \times 10^{-7}\ \text{T}$$

Según la ecuación (32.25),

$$u = \epsilon_0 E^2 = (8.85 \times 10^{-12}\ \text{C}^2/\text{N}\cdot\text{m}^2)(100\ \text{N/C})^2$$
$$= 8.85 \times 10^{-8}\ \text{N/m}^2 = 8.85 \times 10^{-8}\ \text{J/m}^3$$

La magnitud del vector de Poynting es

$$S = \frac{EB}{\mu_0} = \frac{(100\ \text{V/m})(3.33 \times 10^{-7}\ \text{T})}{4\pi \times 10^{-7}\ \text{T}\cdot\text{m/A}}$$
$$= 26.5\ \text{V}\cdot\text{A/m}^2 = 26.5\ \text{W/m}^2$$

EVALUAR: Se puede comprobar el resultado para S usando la ecuación (32.26):

$$S = \epsilon_0 c E^2 = (8.85 \times 10^{-12}\ \text{C}^2/\text{N}\cdot\text{m}^2)(3.00 \times 10^8\ \text{m/s}) \times (100\ \text{N/C})^2 = 26.5\ \text{W/m}^2$$

Como $\vec{E}$ y $\vec{B}$ tienen los mismos valores en todos los puntos detrás del frente de onda, u y S también tienen el mismo valor en toda la región detrás del frente de onda. Por delante del frente de onda, $\vec{E} = \mathbf{0}$ y $\vec{B} = \mathbf{0}$, por lo que $u = 0$ y $S = 0$; donde no hay campos, no hay energía de campo.

Ejemplo 32.4 Energía en una onda sinusoidal

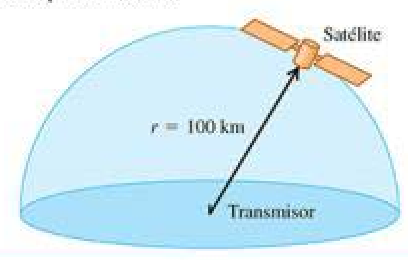


Una estación de radio en la superficie terrestre emite una onda sinusoidal con una potencia total media de 50 kW (figura 32.19). Suponiendo que el transmisor irradia por igual en todas direcciones sobre el terreno (lo que es improbable en situaciones reales), calcule las amplitudes $E_{máx}$ y $B_{máx}$ detectadas por un satélite ubicado a 100 km de la antena.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Se conoce la potencia total media del transmisor P. La intensidad I es exactamente la potencia media por unidad de área, por lo que para encontrar I a 100 km del transmisor se divide P entre el área superficial del hemisferio que se ilustra en la figura 32.19. Para una onda sinusoidal, I también es igual a la magnitud del valor medio S_{med} del vector de Poynting, por lo que podemos utilizar las ecuaciones (32.29) para encontrar $E_{máx}$, y la ecuación (32.4) para encontrar $B_{máx}$.

32.19 Una estación de radio irradia ondas hacia el interior del hemisferio que se muestra.



EJECUTAR: El área de la superficie de un hemisferio de radio $r = 100$ km $= 1.00 \times 10^5$ m es

$$A = 2\pi R^2 = 2\pi(1.00 \times 10^5\ \text{m})^2 = 6.28 \times 10^{10}\ \text{m}^2$$

Toda la potencia radiada pasa a través de esta superficie, por lo que la potencia media por unidad de área (es decir, la intensidad) es

$$I = \frac{P}{A} = \frac{P}{2\pi R^2} = \frac{5.00 \times 10^4\ \text{W}}{6.28 \times 10^{10}\ \text{m}^2} = 7.96 \times 10^{-7}\ \text{W/m}^2$$

De acuerdo con las ecuaciones (32.29), $I = S_{med} = E_{máx}{}^2/2\mu_0 c$, así que

$$E_{máx} = \sqrt{2\mu_0 c S_{med}}$$
$$= \sqrt{2(4\pi \times 10^{-7}\ \text{T}\cdot\text{m/A})(3.00 \times 10^8\ \text{m/s})(7.96 \times 10^{-7}\ \text{W/m}^2)}$$
$$= 2.45 \times 10^{-2}\ \text{V/m}$$

A partir de la ecuación (32.4) se tiene

$$B_{máx} = \frac{E_{máx}}{c} = 8.17 \times 10^{-11}\ \text{T}$$

EVALUAR: Observe que la magnitud de $E_{máx}$ es comparable con los campos que se observan comúnmente en el laboratorio, pero $B_{máx}$ es extremadamente pequeña en comparación con los campos $\vec{B}$ estudiados en capítulos anteriores. Por esta razón, la mayoría de los detectores de radiación electromagnética responden al efecto del campo eléctrico, no del campo magnético. Una excepción es el caso de las antenas de espira para radio (véase el problema práctico al final de este capítulo).

Flujo de momento electromagnético y presión de radiación

A partir de la observación de que se requiere energía para establecer campos eléctricos y magnéticos, hemos demostrado que las ondas electromagnéticas transportan energía. También se puede demostrar que las ondas electromagnéticas llevan un *momento lineal p* con una densidad de momento lineal correspondiente (momento lineal dp por volumen dV) de magnitud

$$\frac{dp}{dV} = \frac{EB}{\mu_0 c^2} = \frac{S}{c^2} \qquad (32.30)$$

Este momento electromagnético es una propiedad del campo; no está asociada con la masa de una partícula en movimiento en el sentido habitual.

Existe también una rapidez de flujo de momento electromagnético correspondiente. El volumen dV ocupado por una onda electromagnética (rapidez c) que pasa a través de un área A en el tiempo dt es $dV = Ac\ dt$. Cuando se sustituye esto en la ecuación (32.30) y se reordena, se encuentra que la rapidez de flujo del momento electromagnético por unidad de área es

$$\frac{1}{A}\frac{dp}{dt} = \frac{S}{c} = \frac{EB}{\mu_0 c} \quad \text{(tasa de flujo del momento electromagnético)} \qquad (32.31)$$

Este es el momento lineal que se transfiere por unidad de área y por unidad de tiempo. Al sustituir S por $S_{med} = I$ en la ecuación (32.31), se obtiene la rapidez *media* de transferencia de momento lineal por unidad de área.

Este momento lineal es responsable del fenómeno llamado **presión de radiación**. Cuando una onda electromagnética es absorbida por completo por una superficie, el momento lineal de la onda también se transfiere a la superficie. Por sencillez, consideraremos una superficie perpendicular a la dirección de propagación. Con base en las ideas desarrolladas en la sección 8.1, se observa que la razón dp/dt con que se transfiere el momento lineal a la superficie absorbente es igual a la *fuerza* sobre la superficie. La fuerza media por unidad de área que se debe a la onda, o *presión de radiación* p_{rad}, es el valor medio de dp/dt dividido entre el área absorbente A. (Se utiliza el subíndice "rad" para distinguir la presión del momento electromagnético, que también se representa mediante el símbolo p). De acuerdo con la ecuación (32.31), la presión de radiación es

$$p_{rad} = \frac{S_{med}}{c} = \frac{I}{c} \quad \text{(presión de radiación, onda absorbida totalmente)} \qquad (32.32)$$

Si la onda se refleja por completo, el cambio en el momento electromagnético es dos veces más grande, y la presión es

$$p_{rad} = \frac{2S_{med}}{c} = \frac{2I}{c} \quad \text{(presión de radiación, onda reflejada totalmente)} \qquad (32.33)$$

Por ejemplo, el valor de I (o S_{med}) para la luz solar directa, antes de que pase a través de la atmósfera terrestre, es aproximadamente de 1.4 kW/m^2. De acuerdo con la ecuación (32.32), la presión media correspondiente sobre una superficie totalmente absorbente es

$$p_{rad} = \frac{I}{c} = \frac{1.4 \times 10^3\ \text{W/m}^2}{3.0 \times 10^8\ \text{m/s}} = 4.7 \times 10^{-6}\ \text{Pa}$$

Según la ecuación (32.33), la presión media sobre una superficie totalmente *reflectante* es el doble de esto: $2I/c$, o 9.4×10^{-6} Pa. Estas son presiones muy pequeñas, del orden de 10^{-10} atm, pero es posible medirlas con instrumentos sensibles.

La presión de la radiación de la luz solar es mucho mayor *dentro* del Sol que en la Tierra (véase el problema 32.45). En el interior de las estrellas que son mucho más masivas y luminosas que el Sol, la presión de radiación es tan grande que aumenta considerablemente la presión gaseosa dentro de ellas, lo que ayuda a impedir que estas colapsen bajo el efecto de su propia gravedad. En ciertos casos, la presión de radiación tiene efectos colosales sobre el material que rodea a las estrellas (figura 32.20).

32.20 En el centro de esta nube de gas interestelar, hay un grupo de estrellas muy luminosas que ejercen una presión de radiación enorme sobre sus alrededores. Auxiliada por un "viento" de partículas que emana de las estrellas, en los últimos millones de años, la presión de radiación ha formado una burbuja dentro de la nube de 70 años luz de diámetro.



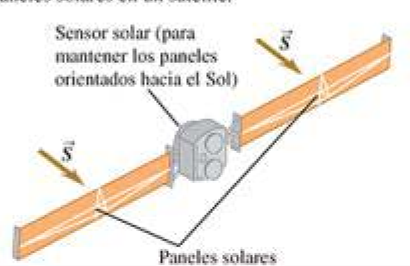


Ejemplo 32.5 Potencia y presión de la luz solar

Un satélite en órbita alrededor de la Tierra tiene paneles recolectores de energía solar con área total de 4.0 m^2 (figura 32.21). Si la radiación del Sol es perpendicular a los paneles y es absorbida por completo, calcule la potencia solar media absorbida y la fuerza media asociada con la presión de radiación.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Este problema utiliza las relaciones entre intensidad, potencia, presión de radiación y fuerza. En el análisis anterior calculamos la intensidad I (potencia por unidad de área) de la luz solar, así como la presión de radiación p_{rad} (fuerza por unidad de área) de la luz solar sobre una superficie absorbente. (Estos valores se calcularon para puntos sobre la atmósfera, que es donde el satélite está en órbita). Al multiplicar cada valor por el área de los paneles solares se obtiene la potencia media absorbida y la fuerza neta de la radiación sobre los paneles.



32.21 Paneles solares en un satélite.

EJECUTAR: La intensidad I (potencia por unidad de área) es 1.4×10^3 W/m^2. Aunque la luz proveniente del Sol no es una onda sinusoidal simple, es posible usar la relación según la cual la potencia media P es el producto de la intensidad I por el área A:

$$P = IA = (1.4 \times 10^3 \text{ W/m}^2)(4.0 \text{ m}^2) = 5.6 \times 10^3 \text{ W} = 5.6 \text{ kW}$$

La presión de radiación de la luz solar sobre una superficie absorbente es $p_{rad} = 4.7 \times 10^{-6}$ Pa $= 4.7 \times 10^{-6}$ N/m^2. La fuerza total F es la presión p_{rad} por el área A:

$$F = p_{rad}A = (4.7 \times 10^{-6} \text{ N/m}^2)(4.0 \text{ m}^2) = 1.9 \times 10^{-5} \text{ N}$$

EVALUAR: La potencia absorbida es considerable. Parte de ella se puede utilizar para alimentar los equipos a bordo del satélite; el resto calienta los paneles, ya sea directamente o por ineficiencias de sus celdas fotovoltaicas.

La fuerza de radiación total es comparable con el peso (sobre la Tierra) de un solo grano de sal. Sin embargo, con el tiempo, esta fuerza pequeña puede tener un efecto importante en la órbita del satélite como el de la figura 32.21, y por lo tanto se debe considerar la presión de radiación.

Evalúe su comprensión de la sección 32.4 La figura 32.13 muestra una longitud de onda de una onda electromagnética sinusoidal en el instante $t = 0$. ¿Para cuáles de los siguientes cuatro valores de x, *a*) la densidad de energía es máxima; *b*) la densidad de energía es mínima; *c*) la magnitud instantánea (no media) del vector de Poynting alcanza su nivel máximo; *d*) la magnitud instantánea (no media) del vector de Poynting alcanza su nivel mínimo? **i.** $x = 0$; **ii.** $x = \lambda/4$; **iii.** $x = \lambda/2$; **iv.** $x = 3\lambda/4$. ❙

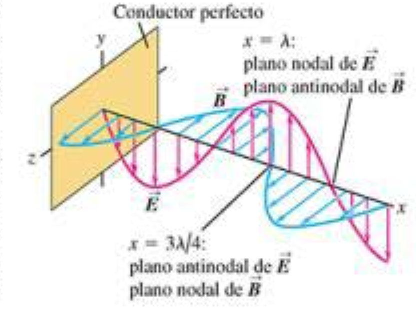
32.5 Ondas electromagnéticas estacionarias

Las ondas electromagnéticas se pueden *reflejar*; la superficie de un conductor (como una lámina metálica pulida) o de un dieléctrico (como una hoja de vidrio) pueden servir como reflectores. El principio de superposición se cumple para las ondas electromagnéticas, al igual que para los campos eléctricos y magnéticos. La superposición de una onda incidente y una onda reflejada forma una **onda estacionaria**. La situación es análoga a las ondas estacionarias en una cuerda estirada que se estudiaron en la sección 15.7 (vol. 1); es recomendable repasar ese análisis.

Suponga que una hoja de un conductor perfecto (con resistividad igual a cero) se coloca en el plano yz de la figura 32.22, y una onda electromagnética linealmente polarizada que viaja en la dirección x negativa choca con ella. Como se vio en la sección 23.4, $\vec{E}$ no puede tener una componente paralela a la superficie de un conductor perfecto. Por lo tanto, en esa situación, $\vec{E}$ debe ser igual a cero en todo lugar del plano yz. El campo eléctrico de la onda electromagnética *incidente no* es cero en todo momento en el plano yz. Pero esta onda incidente induce corrientes oscilantes en la superficie del conductor, y estas corrientes dan origen a un campo eléctrico adicional. El campo eléctrico *neto*, que es la suma vectorial de este campo y del incidente $\vec{E}$, es igual a cero en todo lugar tanto en el interior como en la superficie del conductor.

Las corrientes inducidas sobre la superficie del conductor también producen una onda *reflejada* que viaja hacia afuera del plano en la dirección $+x$. Suponga que la onda incidente está descrita por las funciones de onda de las ecuaciones (32.19) (una onda sinusoidal que viaja en la dirección $-x$) y la onda reflejada por el negativo de las ecuaciones (32.16) (una onda sinusoidal que se desplaza en la dirección $+x$). Tomamos el *negativo* de la onda dada por las ecuaciones (32.16) de manera que los campos eléctricos inci-

32.22 Representación de los campos eléctrico y magnético de una onda estacionaria linealmente polarizada cuando $\omega t = 3\pi/4$ rad. En cualquier plano perpendicular al eje x, E es máxima (un antinodo) donde B es cero (un nodo), y viceversa. Conforme transcurre el tiempo, el patrón *no* se desplaza a lo largo del eje x; en vez de ello, los vectores $\vec{E}$ y $\vec{B}$ simplemente oscilan en todos los puntos.





PhET: Microwaves

dente y reflejado se anulen en $x = 0$ (el plano del conductor, donde el campo eléctrico total debe ser cero). El principio de superposición establece que el campo total $\vec{E}$ en cualquier punto es la suma vectorial de los campos $\vec{E}$ de las ondas incidente y reflejada, y de manera análoga para el campo $\vec{B}$. Por lo tanto, las funciones de onda para la superposición de las dos ondas son las siguientes:

$$E_y(x, t) = E_{\text{máx}}[\cos(kx + \omega t) - \cos(kx - \omega t)]$$
$$B_z(x, t) = B_{\text{máx}}[-\cos(kx + \omega t) - \cos(kx - \omega t)]$$

Estas expresiones se pueden expandir y simplificar con ayuda de las identidades

$$\cos(A \pm B) = \cos A \cos B \mp \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B$$

Los resultados son

$$E_y(x, t) = -2E_{\text{máx}} \operatorname{sen} kx \operatorname{sen} \omega t \tag{32.34}$$

$$B_z(x, t) = -2B_{\text{máx}} \cos kx \cos \omega t \tag{32.35}$$

La ecuación (32.34) es análoga a la (15.28) (vol. 1) para una cuerda estirada. Se observa que en $x = 0$, el campo eléctrico $E_y(x = 0, t)$ *siempre* es igual a cero; esto es una exigencia de la naturaleza del conductor ideal, que desempeña el mismo papel que un punto fijo al final de una cuerda. Además, $E_y(x, t)$ es cero en *todo* momento en los puntos de aquellos planos perpendiculares al eje x para los que sen $kx = 0$; es decir, $kx = 0, \pi, 2\pi, \ldots$ Como $k = 2\pi/\lambda$, las posiciones de estos planos son

$$x = 0, \frac{\lambda}{2}, \lambda, \frac{3\lambda}{2}, \ldots \qquad (\text{planos nodales de } \vec{E}) \tag{32.36}$$

Estos planos se llaman **planos nodales** del campo $\vec{E}$ son el equivalente de los nodos, o puntos nodales, de una onda estacionaria en una cuerda. En el punto medio entre dos planos nodales adyacentes cualesquiera hay un plano en el que sen $kx = \pm 1$; en cada uno de tales planos, la magnitud de $E(x, t)$ es igual al valor máximo posible de $2E_{\text{máx}}$ dos veces en cada ciclo de oscilación. Estos son los **planos antinodales** de $\vec{E}$, que corresponden a los antinodos de las ondas en una cuerda.

El campo magnético total es igual a cero en todo momento en los puntos de los planos en los que cos $kx = 0$. Esto ocurre donde

$$x = \frac{\lambda}{4}, \frac{3\lambda}{4}, \frac{5\lambda}{4}, \ldots \qquad (\text{planos nodales de } \vec{B}) \tag{32.37}$$

Estos son los planos nodales del campo $\vec{B}$; hay un plano antinodal de $\vec{B}$ en el punto medio entre dos planos nodales adyacentes cualesquiera.

La figura 32.22 muestra un patrón de onda estacionaria en cierto instante del tiempo. El campo magnético *no* es igual a cero en la superficie conductora ($x = 0$). Las corrientes superficiales que deben estar presentes para hacer que $\vec{E}$ sea exactamente cero en la superficie ocasionan campos magnéticos en esta última. Entre los planos nodales de cada campo hay una separación de media longitud de onda. Los planos nodales de un campo están en el punto medio entre los de otro; de esta forma, los nodos de $\vec{E}$ coinciden con los antinodos de $\vec{B}$, y a la inversa. Compare esta situación con la diferencia entre los nodos de presión y los nodos de desplazamiento que se vieron en la sección 16.4 (vol. 1).

El campo eléctrico total es una función *seno* de t, y el campo magnético total es una función *coseno* de t. Por consiguiente, las variaciones sinusoidales de los dos campos están 90° fuera de fase en cada punto. En los momentos en que sen $\omega t = 0$, el campo eléctrico es cero *en todo lugar*, y el campo magnético es máximo. Cuando cos $\omega t = 0$, el campo magnético es cero en todo lugar, y el campo eléctrico es máximo. Esto contrasta con lo que ocurre en una onda que viaja en una dirección, como se describe en las ecuaciones (32.16) o (32.19) por separado, en las que las variaciones sinusoidales de $\vec{E}$ y $\vec{B}$ en cualquier punto en particular están *en fase*. Es interesante comprobar que las ecuaciones (32.34) y (32.35) satisfacen la ecuación de onda, ecuación (32.15). También se puede demostrar que satisfacen las ecuaciones (32.12) y (32.14), equivalentes de las leyes de Faraday y de Ampère (véase el ejercicio 32.36).

Ondas estacionarias en una cavidad

Ahora insertemos un segundo plano conductor, paralelo al primero y a una distancia L de él, a lo largo del eje x. La cavidad entre los dos planos es análoga a una cuerda estirada sujeta en los puntos $x = 0$ y $x = L$. Ambos planos conductores deben ser planos nodales para $\vec{E}$; una onda estacionaria puede existir solo cuando el segundo plano está situado en alguna de las posiciones en las que $E(x, t) = 0$, por lo que L debe ser un múltiplo entero de $\lambda/2$. Las longitudes de onda que satisfacen esta condición son

$$\lambda_n = \frac{2L}{n} \qquad (n = 1, 2, 3, \dots) \tag{32.38}$$

Las frecuencias correspondientes son

$$f_n = \frac{c}{\lambda_n} = n\frac{c}{2L} \qquad (n = 1, 2, 3, \dots) \tag{32.39}$$

Así, hay un conjunto de *modos normales*, cada uno con una frecuencia, forma de onda y distribución nodal características (figura 32.23). Al medir las posiciones nodales es posible medir la longitud de onda. Si se conoce la frecuencia, se puede determinar la rapidez de onda. Hertz fue el primero en utilizar esta técnica en la década de 1880 en sus investigaciones pioneras sobre las ondas electromagnéticas.

Las superficies conductoras no son las únicas que reflejan las ondas electromagnéticas. La reflexión también ocurre en la interfase entre dos materiales aislantes con diferentes propiedades dieléctricas o magnéticas. El análogo mecánico es la unión de dos cuerdas con igual tensión pero distinta densidad de masa lineal. En general, una onda incidente sobre una superficie frontera de este tipo se transmite parcialmente al segundo material y se refleja parcialmente de regreso hacia el primero. Por ejemplo, la luz se transmite a través de una ventana de vidrio, pero sus superficies también reflejan la luz.

32.23 Un horno de microondas establece una onda electromagnética estacionaria con $\lambda = 12.2$ cm, una longitud de onda que el agua de los alimentos absorbe intensamente. Como la onda tiene nodos separados por una distancia $\lambda/2 = 6.1$ cm, es necesario hacer girar los alimentos mientras se cocinan; de lo contrario, las partes que se encuentran en un nodo, donde la amplitud del campo eléctrico es igual a cero, permanecerían frías.





Ejemplo 32.6 Intensidad en una onda estacionaria

Calcule la intensidad de la onda estacionaria representada por las ecuaciones (32.34) y (32.25).

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: La intensidad I de la onda es el valor medio S_{med} de la magnitud del vector de Poynting $\vec{S}$. Para encontrar S_{med}, primero usamos la ecuación (32.28) con la finalidad de encontrar el valor instantáneo de $\vec{S}$ y luego su promedio a lo largo de un número entero de ciclos de la onda.

EJECUTAR: Al utilizar las funciones de onda de las ecuaciones (32.34) y (32.35) en la ecuación (32.28) para el vector de Poynting $\vec{S}$, se obtiene

$$\begin{aligned}\vec{S}(x, t) &= \frac{1}{\mu_0}\vec{E}(x, t) \times \vec{B}(x, t)\\ &= \frac{1}{\mu_0}[-2\hat{j}E_{\text{máx}}\operatorname{sen}kx\cos\omega t] \times [-2\hat{k}B_{\text{máx}}\cos kx\operatorname{sen}\omega t]\\ &= \hat{\imath}\frac{E_{\text{máx}}B_{\text{máx}}}{\mu_0}(2\operatorname{sen}kx\cos kx)(2\operatorname{sen}\omega t\cos\omega t)\\ &= \hat{\imath}S_x(x, t)\end{aligned}$$

Usando la identidad sen $2A = 2$ sen A cos A, podemos rescribir $S_x(x, t)$ como

$$S_x(x, t) = \frac{E_{\text{máx}}B_{\text{máx}}\operatorname{sen}2kx\operatorname{sen}2\omega t}{\mu_0}$$

El valor medio de una función seno con respecto a cualquier número entero de ciclos es igual a cero. Así, *el tiempo medio de $\vec{S}$ en cualquier punto es igual a cero*; $I = S_{med} = 0$.

EVALUAR: Esto es exactamente lo que cabe esperar. La onda estacionaria se forma con la superposición de dos ondas de la misma frecuencia y amplitud que viajan en sentidos opuestos. Toda la energía transferida por una de ellas se anula totalmente por una cantidad igual transferida en sentido opuesto por la otra onda. Cuando se utilicen ondas electromagnéticas para transmitir potencia, es importante evitar reflexiones que originen ondas estacionarias.



Ejemplo 32.7 Ondas estacionarias en una cavidad

Se establecen ondas electromagnéticas estacionarias en una cavidad con dos paredes paralelas, altamente conductoras, separadas por una distancia de 1.50 cm. *a*) Calcule la longitud de onda más larga l y la frecuencia más baja f de estas ondas estacionarias. *b*) En el caso de la onda estacionaria con la longitud de onda más larga, ¿en qué parte de la cavidad $\vec{E}$ tiene su magnitud máxima? ¿Dónde es igual a cero el campo $\vec{E}$? ¿Dónde tiene $\vec{B}$ su magnitud máxima? ¿Dónde es igual a cero el campo $\vec{B}$?

Continúa

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Este problema se basa en la idea de que solo ciertos modos electromagnéticos normales son posibles para las ondas electromagnéticas en una cavidad, de igual forma que solo ciertos modos normales son posibles para ondas estacionarias en una cuerda. La longitud de onda más larga y la frecuencia más baja que son posibles corresponden al modo $n = 1$ en las ecuaciones (32.38) y (32.39); estas ecuaciones se utilizan para determinar los valores de λ y f. Así, las ecuaciones (32.36) y (32.37) nos indican las ubicaciones de los planos nodales de $\vec{E}$ y $\vec{B}$; los planos antinodales de cada campo están en el punto medio entre los planos nodales adyacentes.

EJECUTAR: *a*) De acuerdo con las ecuaciones (32.38) y (32.39), la longitud de onda y la frecuencia que corresponde al modo electromagnético normal con $n = 1$ son

$$\lambda_1 = 2L = 2(1.50 \text{ cm}) = 3.00 \text{ cm}$$

$$f_1 = \frac{c}{2L} = \frac{3.00 \times 10^8 \text{ m/s}}{2(1.50 \times 10^{-2} \text{ m})} = 1.00 \times 10^{10} \text{ Hz} = 10 \text{ GHz}$$

b) Con $n = 1$ solo hay media longitud de onda entre las paredes. El campo eléctrico tiene planos nodales ($\vec{E} = \mathbf{0}$) en las paredes y un plano antinodal (donde se presenta la magnitud máxima de $\vec{E}$ equidistante de ambas. El campo magnético tiene planos *antinodales* en las paredes y un plano nodal equidistante de ambas.

EVALUAR: Una aplicación de las ondas estacionarias de este tipo es la generación de un campo $\vec{E}$ oscilante de frecuencia definida, el cual, a la vez, se utiliza para examinar el comportamiento de una pequeña muestra de material colocada en el interior de la cavidad. Para someter la muestra al campo más intenso posible, esta debe colocarse cerca del centro de la cavidad, en el antinodo de $\vec{E}$.

Evalúe su comprensión de la sección 32.5 En la onda estacionaria descrita en el ejemplo 32.7, ¿hay algún punto en la cavidad en el que la densidad de la energía sea igual a cero en todo momento? Si es así, ¿dónde? Si no, ¿por qué no? ❙

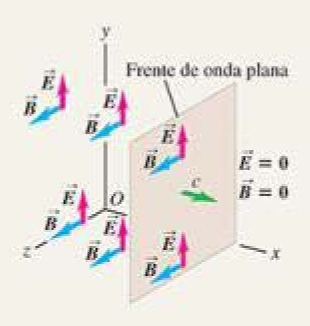


Ecuaciones de Maxwell y ondas electromagnéticas: Las ecuaciones de Maxwell pronostican la existencia de ondas electromagnéticas que se propagan en el vacío con la rapidez de la luz c. El espectro electromagnético cubre frecuencias desde 1 hasta 10^{24} Hz, y el correspondiente amplio intervalo de longitudes de onda. La luz visible, con longitudes de onda de 380 a 750 nm, es solo una parte muy pequeña de ese espectro. En una onda plana, los campos $\vec{E}$ y $\vec{B}$ son uniformes sobre cualquier plano perpendicular a la dirección de propagación. Las leyes de Faraday y Ampère establecen relaciones entre las magnitudes de $\vec{E}$ y $\vec{B}$; la exigencia de que se satisfagan estas dos relaciones permite obtener una expresión para c en términos de ϵ_0 y μ_0. Las ondas electromagnéticas son transversales; los campos $\vec{E}$ y $\vec{B}$ son perpendiculares entre sí y a la dirección de propagación, la cual es la dirección del producto vectorial $\vec{E} \times \vec{B}$.

$$E = cB \tag{32.4}$$

$$B = \epsilon_0\mu_0 cE \tag{32.8}$$

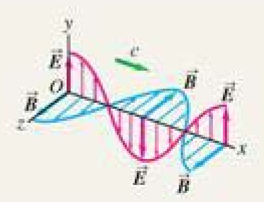
$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}} \tag{32.9}$$



Ondas electromagnéticas sinusoidales: Las ecuaciones (32.17) y (32.18) describen una onda electromagnética plana sinusoidal que viaja en el vacío en la dirección $+x$. Si la onda se propaga en la dirección $-x$, sustituya $kx - \omega t$ por $kx + \omega t$. (Véase el ejemplo 32.1).

$$\vec{E}(x,t) = \hat{j}E_{máx}\cos(kx - \omega t)$$
$$\vec{B}(x,t) = \hat{k}B_{máx}\cos(kx - \omega t) \tag{32.17}$$

$$E_{máx} = cB_{máx} \tag{32.18}$$



Ondas electromagnéticas en la materia: Cuando una onda electromagnética viaja a través de un dieléctrico su rapidez de propagación v es menor que la rapidez de la luz en el vacío c. (Véase el ejemplo 32.2).

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}} = \frac{1}{\sqrt{KK_m}}\frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}} = \frac{c}{\sqrt{KK_m}} \tag{32.21}$$

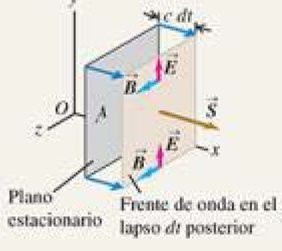
Energía y momento lineal de las ondas electromagnéticas: La rapidez de flujo de energía (potencia por unidad de área) de una onda electromagnética en el vacío está dada por el vector de Poynting $\vec{S}$. La magnitud del valor promediado en el tiempo del vector de Poynting se llama la intensidad I de la onda. Las ondas electromagnéticas también transportan momento lineal, y cuando una de ellas incide sobre una superficie, ejerce una presión de radiación p_{rad}. Si la superficie es perpendicular a la dirección de propagación de la onda y es totalmente absorbente, $p_{rad} = I/c$; si la superficie es un reflector perfecto, $p_{rad} = 2I/c$. (Véase los ejemplos 32.3 a 32.5).

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0}\vec{E} \times \vec{B} \tag{32.28}$$

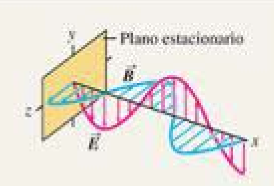
$$I = S_{med} = \frac{E_{máx}B_{máx}}{2\mu_0} = \frac{E_{máx}^2}{2\mu_0 c} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}}E_{máx}^2 = \frac{1}{2}\epsilon_0 c E_{máx}^2 \tag{32.29}$$

$$\frac{1}{A}\frac{dp}{dt} = \frac{S}{c} = \frac{EB}{\mu_0 c} \tag{32.31}$$

(rapidez de flujo de momento electromagnético)



Ondas electromagnéticas estacionarias: Si se coloca una superficie perfectamente reflectante en $x = 0$, las ondas incidente y reflejada forman una onda estacionaria. Los planos nodales para $\vec{E}$ se presentan en $kx = 0, \pi, 2\pi, \ldots$, y los planos nodales para $\vec{B}$ en $kx = \pi/2, 3\pi/2, 5\pi/2, \ldots$ En cada punto, las variaciones sinusoidales de $\vec{E}$ y $\vec{B}$ con respecto al tiempo están 90° fuera de fase. (Véase los ejemplos 32.6 y 32.7).





PROBLEMA PRÁCTICO **Detección de ondas electromagnéticas**

Una espira circular de alambre se puede utilizar como antena de radio. Si se coloca una antena de 18.0 cm de diámetro a 2.50 km de una fuente de 95.0 MHz con una potencia total de 55.0 kW, ¿cuál es la fem inducida máxima en la espira? Suponga que el plano de la antena de espira es perpendicular a la dirección de radiación del campo magnético y que la fuente irradia uniformemente en todas las direcciones.

GUÍA DE SOLUCIÓN

Véase el área de estudio MasteringPhysics® para consultar una solución con Video Tutor.



IDENTIFICAR y PLANTEAR:

1. La onda electromagnética tiene un campo magnético oscilatorio. Este ocasiona un flujo magnético que pasa a través de la antena de espira que varía sinusoidalmente con respecto del tiempo. De acuerdo con la ley de Faraday, esto produce una fem igual en magnitud a la razón de cambio del flujo. La incógnita es la magnitud de esta fem.
2. Seleccione las ecuaciones que necesita para encontrar **i.** la intensidad de la onda en la posición de la espira, a una distancia r = 2.50 km de la fuente de potencia P = 55.0 kW; **ii.** la amplitud del campo magnético que varía sinusoidalmente en esa posición; **iii.** el flujo magnético que pasa a través de la espira como una función del tiempo; **iv.** la fem producida por el flujo.

EJECUTAR

3. Encuentre la intensidad de onda en la posición de la espira.
4. Utilice su resultado del paso 3 para escribir expresiones para el campo magnético dependiente del tiempo en esta posición y para el flujo magnético dependiente del tiempo que pasa por la espira.
5. Use los resultados del paso 4 para encontrar la fem inducida dependiente del tiempo en la espira. La amplitud de esta fem es su incógnita.

EVALUAR

6. ¿La fem inducida es lo suficientemente grande para ser detectada? (Si es así, un receptor conectado a esta antena podrá detectar señales de la fuente).

Problemas

Para tareas asignadas por el profesor, visite www.masteringphysics.com



•, ••, •••: Problemas de dificultad creciente. **PA**: Problemas acumulativos que incorporan material de capítulos anteriores. **CALC**: Problemas que requieren cálculo. **BIO**: Problemas de ciencias biológicas.

PREGUNTAS PARA ANÁLISIS

P32.1 Si se miden los campos eléctrico y magnético en un punto del espacio donde hay una onda electromagnética, ¿es posible determinar la dirección de donde proviene la onda? Explique su respuesta.

P32.2 De acuerdo con la ley de Ampère, ¿es posible tener al mismo tiempo una corriente de conducción y una corriente de desplazamiento? ¿Es posible que los efectos de las dos clases de corriente se anulen exactamente, de manera que *no* se genere un campo magnético? Explique su respuesta.

P32.3 Dé varios ejemplos de ondas electromagnéticas que se encuentren en la vida cotidiana. ¿En qué se parecen? ¿En qué difieren?

P32.4 En ocasiones se observa que los anuncios de neón, situados cerca de una estación de radio potente, brillan un poco durante la noche, aunque no estén encendidos. ¿Qué es lo que ocurre?

P32.5 ¿La polarización es una propiedad de todas las ondas electromagnéticas, o es exclusiva de la luz visible? ¿Las ondas sonoras se polarizan? ¿Cuál diferencia fundamental de las propiedades de las ondas está implicada? Explique su respuesta.

P32.6 Suponga que una carga puntual positiva q inicialmente se encuentra en reposo sobre el eje x, en la trayectoria de la onda electromagnética plana descrita en la sección 32.2. ¿La carga se moverá después de que el frente de onda la alcance? Si no es así, ¿por qué? Si la carga se mueve, describa su movimiento en términos cualitativos. (Recuerde que $\vec{E}$ y $\vec{B}$ tienen el mismo valor en todos los puntos detrás del frente de onda).

P32.7 El haz de luz de un reflector llega a tener una magnitud de campo eléctrico de 1000 V/m, la cual corresponde a una diferencia de potencial de 1500 V entre la cabeza y los pies de una persona de 1.5 m de estatura iluminada por el reflector. ¿Esto provoca que la persona sienta una descarga eléctrica fuerte? ¿Por qué?

P32.8 Para cierta onda sinusoidal de intensidad I, la amplitud del campo magnético es B. ¿Cuál sería la amplitud (en términos de B) de una onda similar con el doble de intensidad?

P32.9 La amplitud del campo magnético de la onda electromagnética del láser descrito en el ejemplo 32.1 (sección 32.3) es alrededor de 100 veces mayor que el campo magnético terrestre. Si con la luz de ese láser se iluminara una brújula, ¿debemos esperar que la aguja se desvíe? ¿Por qué?

P32.10 La mayoría de los automóviles tienen antenas verticales para recibir emisiones de radio. Explique qué indica esto acerca de la dirección de polarización de $\vec{E}$ en las ondas de radio usadas en las transmisiones.

P32.11 Si un haz de luz tiene momento electromagnético, ¿una persona que sostiene una linterna de mano debería sentir un retroceso análogo al de un rifle al ser disparado? ¿Por qué no se observa este retroceso en la realidad?

P32.12 Una fuente de luz irradia una onda electromagnética sinusoidal de manera uniforme en todas direcciones. Esta onda ejerce una presión media p sobre una superficie perfectamente reflectante situada a una distancia R de ella. ¿Cuál es la presión media (en términos de p) que ejercería esta onda sobre una superficie perfectamente absorbente ubicada al doble de distancia de la fuente?

P32.13 ¿Tiene energía una onda electromagnética *estacionaria*? ¿Tiene momento lineal? ¿Sus respuestas a estas preguntas son las mismas para una onda *viajera*? ¿Por qué?

P32.14 Cuando se maneja sobre el nivel superior del Puente de la Bahía hacia el oeste, de Oakland a San Francisco, es fácil captar varias estaciones de radio en el receptor del automóvil. Pero cuando se viaja hacia el este sobre el nivel inferior del puente, que tiene vigas de acero a ambos lados para sostener el nivel superior, la recepción del radio es mucho más deficiente. ¿A qué se debe esta diferencia?

EJERCICIOS

Sección 32.2 Ondas electromagnéticas planas y rapidez de la luz

32.1 • *a*) ¿Cuánto tiempo tarda la luz en viajar de la Luna a la Tierra, una distancia de 384,000 km? *b*) La luz de la estrella Sirio tarda 8.61 años para llegar a la Tierra. ¿Cuál es la distancia, en kilómetros, de la estrella Sirio a la Tierra?

32.2 • Considere cada una de las orientaciones de los campos eléctrico y magnético que se indican a continuación. En cada caso, ¿cuál es la dirección de propagación de la onda? *a*) $\vec{E}$ está en la dirección $+x$, $\vec{B}$ está en la dirección $+y$; *b*) $\vec{E}$ está en la dirección $-y$, $\vec{B}$ está en la dirección $+x$; *c*) está en la dirección $+z$, $\vec{B}$ está en la dirección $-x$; *d*) $\vec{E}$ está en la dirección $+y$, $\vec{B}$ está en la dirección $-z$.

32.3 • Una onda electromagnética sinusoidal se propaga en el vacío en la dirección $+z$. Si en un instante determinado y en un cierto punto en el espacio, el campo eléctrico se encuentra en la dirección $+x$ y tiene magnitud 4.00 V/m, ¿cuáles son la magnitud y la dirección del campo magnético de la onda en este mismo punto en el espacio y en el mismo instante?

32.4 • Considere cada una de las siguientes orientaciones de los campos eléctrico y magnético. En cada caso, ¿cuál es la dirección de propagación de la onda? *a*) $\vec{E} = E\hat{\imath}$, $\vec{B} = -B\hat{\jmath}$; *b*) $\vec{E} = E\hat{\jmath}$, $\vec{B} = B\hat{\imath}$; *c*) $\vec{E} = -E\hat{k}$, $\vec{B} = -B\hat{\imath}$; *d*) $\vec{E} = E\hat{\imath}$, $\vec{B} = -B\hat{k}$.

Sección 32.3 Ondas electromagnéticas sinusoidales

32.5 • BIO **Rayos x en medicina.** Los rayos x en medicina se toman con ondas electromagnéticas que tienen una longitud de onda de alrededor de 0.10 nm. ¿Cuáles son la frecuencia, el periodo y el número de onda de las ondas de este tipo?

32.6 • BIO **Radiación ultravioleta.** Hay dos categorías de luz ultravioleta. La ultravioleta A (UVA) tiene una longitud de onda que varía de 320 a 400 nm. No es dañina para la piel y es necesaria para la producción de vitamina D. La UVB, con longitud de onda de entre 280 y 320 nm, es mucho más peligrosa porque causa cáncer de piel. *a*) Encuentre los intervalos de frecuencia de la UVA y la UVB. *b*) ¿Cuáles son los intervalos de los números de onda para la UVA y la UVB?

32.7 • Una onda electromagnética sinusoidal, que tiene un campo magnético de amplitud 1.25 μT y longitud de onda de 432 nm, viaja en la dirección $+x$ a través del espacio vacío. *a*) ¿Cuál es la frecuencia de esta onda? *b*) ¿Cuál es la amplitud del campo eléctrico asociado? *c*) Escriba las ecuaciones para los campos eléctrico y magnético como funciones de x y t en la forma de las ecuaciones (32.17).

32.8 • Una onda electromagnética con longitud de onda de 435 nm viaja en el vacío en la dirección $-z$. El campo eléctrico tiene una amplitud de 2.70×10^{-3} V/m y es paralelo al eje x. ¿Cuáles son *a*) la frecuencia, y *b*) la amplitud del campo magnético? *c*) Escriba las ecuaciones vectoriales para $\vec{E}(z, t)$ y $\vec{B}(z, t)$.

32.9 • Considere ondas electromagnéticas que se propagan en el aire. *a*) Determine la frecuencia de una onda con una longitud de onda de **i.** 5.0 km, **ii.** 5.0 μm, **iii.** 5.0 nm. *b*) ¿Cuál es la longitud de onda (en metros y nanómetros) de **i.** los rayos gamma de frecuencia de 6.50×10^{21} Hz y **ii.** una onda de una estación de radio de AM con frecuencia de 590 kHz?

32.10 • El campo eléctrico de una onda electromagnética sinusoidal obedece la ecuación $E = (375\ \text{V/m}) \cos[(1.99 \times 10^7\ \text{rad/m})x + (5.97 \times 10^{15}\ \text{rad/s})t]$. *a*) ¿Cuáles son las amplitudes de los campos eléctrico y magnético de esta onda? *b*) ¿Cuáles son la frecuencia, la longitud de onda y el periodo de la onda? ¿Esta luz es visible para los humanos? *c*) ¿Cuál es la rapidez de la onda?

32.11 • Una onda electromagnética tiene un campo eléctrico dado por $\vec{E}(y, t) = (3.10 \times 10^5\ \text{V/m})\hat{k} \cos[ky - (12.65 \times 10^{12}\ \text{rad/s})t]$. *a*) ¿En qué dirección viaja la onda? *b*) ¿Cuál es su longitud de onda? *c*) Escriba la ecuación vectorial para $\vec{B}(y, t)$.

32.12 • Una onda electromagnética tiene un campo magnético dado por $\vec{B}(x, t) = -(8.25 \times 10^{-9}\ \text{T})\hat{\jmath} \cos[(1.38 \times 10^4\ \text{rad/m})x + \omega t]$. *a*) ¿En qué dirección viaja la onda? *b*) ¿Cuál es la frecuencia f de la onda? *c*) Escriba la ecuación vectorial para $\vec{E}(x, t)$.

32.13 • La estación de radio WCCO en Minneapolis transmite su señal con una frecuencia de 830 kHz. En un punto a cierta distancia del transmisor, la amplitud del campo magnético de la onda electromagnética de WCCO es de 4.82×10^{-11} T. Calcule *a*) la longitud de onda; *b*) el número de onda; *c*) la frecuencia angular; *d*) la amplitud del campo eléctrico.

32.14 • Una onda electromagnética con frecuencia de 65.0 Hz viaja en un material magnético aislante que tiene constante dieléctrica de 3.64 y permeabilidad relativa de 5.18 a esta frecuencia. El campo eléctrico tiene una amplitud de 7.20×10^{-3} V/m. *a*) ¿Cuál es la rapidez de propagación de la onda? *b*) ¿Cuál es la longitud de onda correspondiente? *c*) ¿Cuál es la amplitud del campo magnético?

32.15 • Una onda electromagnética con frecuencia de 5.70×10^{14} Hz se propaga con una rapidez de 2.17×10^8 m/s en cierta pieza de vidrio. Encuentre *a*) la longitud de onda en el vidrio; *b*) la longitud de onda de una onda de la misma frecuencia que se propaga en el aire; *c*) el índice de refracción n del vidrio para una onda electromagnética con esta frecuencia; *d*) la constante dieléctrica para el vidrio a esta frecuencia, suponiendo que la permeabilidad relativa es igual a 1.

Sección 32.4 Energía y momento lineal de las ondas electromagnéticas

32.16 • BIO **Tratamiento de alta energía del cáncer.** Los científicos están trabajando en una nueva técnica para exterminar las células cancerosas atacándolas con pulsos de luz de ultra-alta energía (en el rango de 10^{12} W) que duran un tiempo extremadamente corto (unos cuantos nanosegundos). Estos pulsos cortos codifican el interior de una célula sin causar que estalle, como lo harían los pulsos largos. Se puede modelar una célula típica tal como un disco de 5.0 μm de diámetro, con una duración de pulso de 4.0 ns con una potencia media de 2.0×10^{12} W. Supondremos que la energía se distribuye de manera uniforme sobre las caras de 100 células por cada pulso. *a*) ¿Cuánta energía se da a la célula durante este pulso? *b*) ¿Cuál es la intensidad (para W/m^2) sobre la célula? *c*) ¿Cuáles son los valores máximos de los campos eléctrico y magnético en el pulso?

32.17 •• **Campos de una bombilla eléctrica.** Una bombilla incandescente de 75 W se puede modelar en forma razonable como una esfera de 6.0 cm de diámetro. Es común que solo el 5% de la energía se convierta en luz visible; el resto consiste sobre todo en radiación infrarroja invisible. *a*) ¿Cuál es la intensidad de la luz visible (en W/m^2) en la superficie de la bombilla? *b*) ¿Cuáles son las amplitudes de los campos eléctrico y magnético en esta superficie, para una onda sinusoidal con esta intensidad?

32.18 •• Una onda electromagnética sinusoidal de una estación de radio pasa en forma perpendicular a través de una ventana abierta con área de 0.500 m^2. En la ventana, el campo eléctrico de la onda tiene un valor rms (eficaz) de 0.0200 V/m. ¿Cuánta energía transporta esta onda a través de la ventana durante un comercial de 30.0 s?

32.19 •• **Prueba de un transmisor espacial de radio.** Usted es un especialista en misiones de la NASA y está en su primer vuelo a bordo del transbordador espacial. Gracias a sus exhaustivos estudios de física, le asignaron la tarea de evaluar el desempeño de un nuevo transmisor de radio a bordo de la Estación Espacial Internacional (EEI). Encaramado en el brazo móvil del transbordador, usted apunta un detector sensible hacia la EEI, que se localiza a 2.5 km de distancia, y encuentra que la amplitud de campo eléctrico de las ondas de radio provenientes del transmisor en la EEI es de 0.090 V/m, y que la frecuencia de las ondas es de 244 MHz. Determine lo siguiente: *a*) la intensidad de la onda de radio donde usted se encuentra; *b*) la amplitud de campo magnético de la onda donde usted se encuentra; *c*) la potencia de salida total del transmisor de radio de la EEI. *d*) ¿Qué suposiciones hizo, si es el caso, para sus cálculos?

32.20 • La intensidad de un rayo láser cilíndrico es de 0.800 W/m^2. El área de sección transversal del haz es de 3.0×10^{-4} m^2, y la intensidad es uniforme en toda la sección transversal del rayo. *a*) ¿Cuál es la potencia de salida media del láser? *b*) ¿Cuál es el valor rms (eficaz) del campo eléctrico en el rayo?

32.21 • Una sonda espacial situada a una distancia de 2.0×10^{10} m de una estrella mide la intensidad total de la radiación electromagnética de la estrella, la cual resulta ser de 5.0×10^3 W/m^2. Si la estrella irradia de manera uniforme en todas direcciones, ¿cuál es la potencia de salida media total?

32.22 • Una onda electromagnética sinusoidal emitida por un teléfono celular tiene una longitud de onda de 35.4 cm y una amplitud de campo eléctrico de 5.40×10^{-2} V/m a una distancia de 250 m del teléfono. Calcule *a*) la frecuencia de la onda; *b*) la amplitud del campo magnético; *c*) la intensidad de la onda.

32.23 • Una fuente de luz monocromática con una potencia de salida de 60.0 W irradia luz uniformemente en todas direcciones con una longitud de onda de 700 nm. Calcule $E_{máx}$ y $B_{máx}$ para la luz de 700 nm a una distancia de 5.00 m de la fuente.

32.24 • Con respecto a la onda electromagnética representada por las ecuaciones (32.19), demuestre que el vector de Poynting *a*) tiene la misma dirección que la propagación de la onda, y *b*) tiene una magnitud media dada por las ecuaciones (32.29).

32.25 •• Una fuente de luz intensa irradia de manera uniforme en todas direcciones. A una distancia de 5.0 m de la fuente, la presión de radiación sobre una superficie perfectamente absorbente es de 9.0×10^{-6} Pa. ¿Cuál es la potencia de salida total media de la fuente?

32.26 • **Emisora de televisión.** La estación de televisión pública KQED de San Francisco emite una señal de radio sinusoidal con potencia de 316 kW. Suponga que la onda se difunde de manera uniforme en un hemisferio sobre el terreno. En una casa localizada a 5.00 km de la antena, *a*) ¿qué presión media ejerce esta onda sobre una superficie totalmente reflectante?, *b*) ¿cuáles son las amplitudes de los campos eléctrico y magnético de la onda y *c*) ¿cuál es la densidad media de la energía que transporta esta onda? *d*) Para la densidad de energía del inciso *c*), ¿qué porcentaje se debe al campo eléctrico y qué porcentaje al campo magnético?

32.27 •• BIO **Seguridad del láser.** Si el ojo recibe una intensidad media superior a 1.0×10^2 W/m^2, pueden ocurrir daños a la retina. Esta cantidad se llama el *umbral de daño* de la retina. *a*) ¿Cuál es la máxima potencia media (en mW) que un haz de láser de 1.5 mm de diámetro puede tener y que aún se considere seguro para verse de frente? *b*) ¿Cuáles son los valores máximos de los campos eléctrico y magnético del haz en el inciso *a*)? *c*) ¿Cuánta energía entregaría el haz en el inciso *a*) por segundo a la retina? *d*) Exprese el umbral de daño en W/cm^2.

32.28 • En las instalaciones del Simulador Espacial de 25 pies en el Jet Propulsion Laboratory de la NASA, una serie de lámparas de arco elevadas producen luz con una intensidad de 2500 W/m^2 sobre el piso de las instalaciones. (Esto simula la intensidad de la luz solar cerca del planeta Venus). Calcule la presión media de la radiación (en pascales y en atmósferas) sobre *a*) una sección totalmente absorbente del piso, y *b*) una sección totalmente reflectante del piso. *c*) Calcule la densidad media de momento electromagnético (momento electromagnético por unidad de volumen) de la luz en el piso.

32.29 • **Láseres de laboratorio.** Láseres de He-Ne se utilizan a menudo en demostraciones de física. Producen luz de longitud de onda de 633 nm y una potencia de propagación de 0.500 mW sobre un haz cilíndrico de 1.00 mm de diámetro (aunque estas cantidades pueden variar). *a*) ¿Cuál es la intensidad de este haz de láser? *b*) ¿Cuáles son los valores máximos de los campos eléctrico y magnético? *c*) ¿Cuál es la densidad de energía media en el haz de láser?

32.30 •• **Navegación solar 1.** Durante el año 2004, científicos japoneses probaron con éxito dos velas solares. Una tenía una forma algo complicada que se podría modelar como un disco de 9.0 m de diámetro y 7.5 μm de espesor. La intensidad de la energía solar en esa ubicación era alrededor de 1400 W/m^2. *a*) ¿Qué fuerza tenía que ejercer la luz del Sol sobre esta vela, suponiendo que incide perpendicularmente sobre ella, y que esta última es perfectamente reflectante? *b*) Si la vela estuviera hecha de magnesio, con densidad de 1.74 g/cm^3, ¿qué aceleración daría la radiación del Sol a la vela? *c*) ¿La aceleración parece ser lo suficientemente grande para ser viable para un vuelo espacial? ¿De qué manera podría la vela modificarse para aumentar su aceleración?

Sección 32.5 Ondas electromagnéticas estacionarias

32.31 • **Horno de microondas.** Las microondas en cierto horno tienen una longitud de onda de 12.2 cm. *a*) ¿Cuál debe ser el ancho del horno para que contenga cinco planos antinodales del campo eléctrico sobre su anchura en el patrón de onda estacionaria? *b*) ¿Cuál es la frecuencia de esas microondas? *c*) Suponga que hubo un error de manufactura y el horno se hizo 5.0 cm más largo de lo especificado en el inciso *a*). En este caso, ¿cuál tendría que ser la frecuencia de las microondas para que todavía hubiera cinco planos antinodales del campo eléctrico sobre la anchura del horno?

32.32 • Se establece una onda electromagnética estacionaria con frecuencia de 750 MHz, en el aire, conectando dos planos conductores separados por una distancia de 80.0 cm. ¿En qué posiciones entre los planos podría colocarse una carga puntual en reposo de manera que *permaneciera* en reposo? Explique su respuesta.

32.33 • Una onda electromagnética estacionaria en cierto material tiene una frecuencia de 2.20×10^{10} Hz. Los planos nodales de $\vec{B}$ están separados por una distancia de 3.55 mm. Determine *a*) la longitud de onda de la onda en este material; *b*) la distancia entre planos nodales adyacentes del campo $\vec{E}$; *c*) la rapidez de propagación de la onda.

32.34 • Una onda electromagnética estacionaria en el aire tiene una frecuencia de 75.0 MHz. *a*) ¿Cuál es la distancia entre planos nodales del campo $\vec{E}$? *b*) ¿Cuál es la distancia entre un plano nodal de $\vec{E}$ y el plano nodal más cercano de $\vec{B}$?

32.35 • Una onda electromagnética estacionaria en cierto material tiene una frecuencia de 1.20×10^{10} Hz y rapidez de propagación de 2.10×10^8 m/s. *a*) ¿Cuál es la distancia entre un plano nodal de $\vec{B}$ y el plano antinodal más cercano de $\vec{B}$? *b*) ¿Cuál es la distancia entre un plano antinodal de $\vec{E}$ y el plano antinodal más cercano de $\vec{B}$? *c*) ¿Cuál es la distancia entre un plano nodal de $\vec{E}$ y el plano nodal más cercano de $\vec{B}$?

32.36 • CALC Demuestre que los campos eléctrico y magnético de ondas estacionarias dados por las ecuaciones (32.34) y (32.35), *a*) satisfacen la ecuación de onda, ecuación (32.15), y *b*) satisfacen las ecuaciones (32.12) y (32.14).

PROBLEMAS

32.37 •• BIO **Cirugía láser.** Pulsos muy cortos de rayos láser de alta intensidad se utilizan para reparar partes independientes de la retina del ojo. Los pulsos cortos de energía absorbida por la retina sueldan las partes separadas y las reinstalan en su lugar. En uno de tales procedimientos, un haz de láser tiene una longitud de onda de 810 nm y entrega 250 mW de potencia que se propaga sobre un punto circular de 510 μm de diámetro. El humor vítreo (líquido transparente que llena la mayor parte del ojo) tiene un índice de refracción de 1.34. *a*) Si los pulsos de láser son, cada uno, de 1.50 ms de duración, ¿qué cantidad de energía se hace incidir sobre la retina con cada pulso? *b*) ¿Cuál es la presión media que el pulso del haz de láser ejerce sobre la retina cuando es totalmente absorbido por el punto circular? *c*) ¿Cuáles son la longitud de onda y la frecuencia de la luz láser dentro del humor vítreo del ojo? *d*) ¿Cuáles son los valores máximos de los campos eléctrico y magnético en el haz de láser?

32.38 •• CALC Considere una onda electromagnética sinusoidal con campos $\vec{E} = E_{máx}\hat{j}\cos(kx - \omega t)$ y $\vec{B} = B_{máx}\hat{k}\cos(kx - \omega t + \phi)$,

con $-\pi \leq \phi \leq \pi$. Demuestre que si $\vec{E}$ y $\vec{B}$ satisfacen las ecuaciones (32.12) y (32.14), entonces $E_{máx} = cB_{máx}$ y $\phi = 0$. (El resultado $\phi = 0$ significa que los campos $\vec{E}$ y $\vec{B}$ oscilan en fase).

32.39 •• Usted desea sostener una hoja de papel a prueba de fuego horizontalmente, utilizando solo un haz de luz vertical hacia arriba que se propaga uniformemente sobre la hoja. No hay otra luz en este papel. La hoja mide 22.0×28.0 cm y tiene una masa de 1.50 g. *a*) Si el papel es de color negro y, por lo tanto, absorbe toda la luz que le llega, ¿cuál debe ser la intensidad del haz de luz? *b*) Para la luz en el inciso *a*), ¿cuáles son las amplitudes de los campos eléctrico y magnético? *c*) Si el papel es blanco y, por lo tanto, refleja toda la luz que le llega, ¿qué intensidad del haz de luz necesita para sostenerlo? *d*) Para ver si es físicamente razonable sostener una hoja de papel de esta manera, calcule la intensidad en un típico rayo láser de 0.500 mW que mide 1.00 mm de diámetro, y compare este valor con la respuesta del inciso *a*).

32.40 •• Para una onda electromagnética sinusoidal en el vacío, como la descrita por la ecuación (32.16), demuestre que la densidad de energía *media* del campo eléctrico es igual que la del campo magnético.

32.41 • Un satélite que se encuentra a 575 km sobre la superficie terrestre transmite ondas electromagnéticas sinusoidales con frecuencia de 92.4 MHz uniformemente en todas direcciones, con una potencia de 25.0 kW. *a*) ¿Cuál es la intensidad de estas ondas cuando alcanzan un receptor en la superficie terrestre directamente abajo del satélite? *b*) ¿Cuáles son las amplitudes de los campos eléctrico y magnético en el receptor? *c*) Si el receptor tiene un panel totalmente absorbente que mide 15.0×40.0 cm, orientado con su plano perpendicular a la dirección en que viajan las ondas, ¿cuál es la fuerza media que ejercen estas ondas sobre el panel? ¿Esta fuerza es suficientemente grande para provocar efectos significativos?

32.42 • Una onda electromagnética plana sinusoidal en el aire tiene una longitud de onda de 3.84 cm y una amplitud de campo $\vec{E}$ de 1.35 V/m. *a*) ¿Cuál es la frecuencia? *b*) ¿Cuál es la amplitud de campo $\vec{B}$. *c*) ¿Cuál es la intensidad? *d*) ¿Cuál es la fuerza media que ejerce esta radiación sobre una superficie totalmente absorbente con área de 0.240 m^2, perpendicular a la dirección de propagación?

32.43 • Un rayo láser pequeño de helio-neón emite luz roja visible con potencia de 4.60 mW en un haz cuyo diámetro es de 2.50 mm. *a*) ¿Cuáles son las amplitudes de los campos eléctrico y magnético de la luz? *b*) ¿Cuáles son las densidades de energía medias asociadas con el campo eléctrico y con el campo magnético? *c*) ¿Cuál es la energía total contenida en un tramo del haz de 1.00 m de longitud?

32.44 •• La componente del campo eléctrico de una onda electromagnética que viaja sinusoidalmente a través de un cilindro de plástico está dada por la ecuación $E = (5.35 \text{ V/m})\cos[(1.39 \times 10^7 \text{ rad/m})x - (3.02 \times 10^{15} \text{ rad/s})t]$. *a*) Determine la frecuencia, la longitud de onda y la rapidez de esta onda en el plástico. *b*) ¿Cuál es el índice de refracción del plástico? *c*) Suponiendo que la amplitud del campo eléctrico no cambia, escriba una ecuación similar para el campo eléctrico si la luz está viajando en el aire y no en plástico.

32.45 • El Sol emite energía en forma de ondas electromagnéticas a razón de 3.9×10^{26} W. Esta energía es producto de reacciones nucleares en las profundidades del interior del Sol. *a*) Calcule la intensidad de la radiación electromagnética y la presión de radiación sobre un objeto absorbente en la superficie del Sol (radio $r = R = 6.96 \times 10^5$ km), y en $r = R/2$ en el interior del Sol. Ignore la dispersión que sufren las ondas cuando estas salen radialmente desde el centro del Sol. Compare los resultados con los valores dados en la sección 32.4 para la luz solar inmediatamente antes de entrar a la atmósfera terrestre. *b*) La presión gaseosa en la superficie del Sol es de alrededor de 1.0×10^4 Pa; en $r = R/2$, la presión gaseosa calculada a partir de modelos del Sol es de aproximadamente 4.7×10^{13} Pa. Comparando con los resultados en el inciso *a*), ¿sería de esperar que la presión de radiación fuera un factor importante para determinar la estructura del Sol? ¿Por qué?

32.46 •• Una fuente de ondas electromagnéticas sinusoidales irradia uniformemente en todas direcciones. A 10.0 m de esta fuente, la amplitud del campo eléctrico que se mide es de 1.50 N/C. ¿Cuál es la amplitud del campo eléctrico a una distancia de 20.0 cm desde la fuente?

32.47 •• PA Dos reflectores cuadrados, cada uno con 1.50 cm de lado y masa de 4.00 g, están ubicados en los extremos opuestos de una varilla delgada de 1.00 m, extremadamente ligera, que puede girar sin fricción en un vacío alrededor de un eje perpendicular que pasa por su centro (figura P32.47). Estos reflectores son suficientemente pequeños como para considerarse masas puntuales en los cálculos de momento de inercia. Los dos reflectores están iluminados en una cara por una onda luminosa sinusoidal que tiene un campo eléctrico con amplitud de 1.25 N/C y que cae uniformemente en ambas superficies y siempre llega en forma perpendicular al plano de estas. Un reflector tiene un recubrimiento perfectamente absorbente, y el otro tiene un recubrimiento perfectamente reflectante. ¿Cuál es la aceleración angular de este dispositivo?

Figura **P32.47**



32.48 •• PA Una espira circular de alambre tiene un radio de 7.50 cm. Una onda sinusoidal plana electromagnética que viaja en el aire pasa a través de la espira, con la dirección del campo magnético de la onda perpendicular al plano de la espira. La intensidad de la onda en la ubicación de la espira es 0.0195 W/m^2, y la longitud de onda es 6.90 m. ¿Cuál es la fem máxima inducida en la espira?

32.49 • CALC PA Un conductor cilíndrico con sección transversal circular tiene un radio a y resistividad ρ, y transporta una corriente constante I. *a*) ¿Cuáles son la magnitud y la dirección del vector campo eléctrico $\vec{E}$ en un punto situado inmediatamente adentro del alambre, a una distancia a de su eje? *b*) ¿Cuáles son la magnitud y la dirección del vector campo magnético $\vec{B}$ en el mismo punto? *c*) ¿Cuáles son la magnitud y la dirección del vector de Poynting $\vec{S}$ en el mismo punto? (La dirección de $\vec{S}$ es aquella en la que fluye la energía electromagnética hacia adentro o hacia fuera del conductor). *d*) Con base en el resultado del inciso *c*), determine la rapidez de flujo de la energía hacia el volumen que ocupa un tramo de longitud l del conductor. (*Sugerencia:* Integre $\vec{S}$ sobre la superficie de este volumen). Compare su resultado con la rapidez de generación de energía térmica en el mismo volumen. Analice por qué la energía disipada en un conductor portador de corriente, en virtud de su resistencia, puede verse como si entrara a través de los lados cilíndricos del conductor.

32.50 • En cierto experimento, un transmisor de radio emite ondas electromagnéticas sinusoidales con frecuencia de 110.0 MHz, en direcciones opuestas dentro de una cavidad angosta con reflectores en ambos extremos, lo que hace que se forme un patrón de ondas estacionarias. *a*) ¿Qué tan separados están los planos nodales del campo magnético? *b*) Si se determina que el patrón de onda estacionaria está en su octavo armónico, ¿qué tan larga es la cavidad?

32.51 •• PA **Linterna al rescate.** Usted es el único tripulante de la nave espacial interplanetaria *T:1339 Vorga*, que realiza viajes regulares de carga entre la Tierra y las colonias mineras en el cinturón de asteroides. Cierto día, se encuentra trabajando afuera de la nave a una distancia de 2.0 UA del Sol [1 UA (unidad astronómica) es la distancia media entre la Tierra y el Sol: 149,600,000 km)]. Por desgracia, usted pierde contacto con el casco de la nave y comienza a ir a la deriva en el espacio. Entonces intenta regresar hacia la nave con ayuda de los cohetes de su traje espacial, pero el combustible se agota y estos dejan de funcionar antes de que usted consiga regresar a la nave. Está en problemas, flotando a 16.0 m de la nave espacial con velocidad cero en relación a esta. Por fortuna, usted lleva una linterna de 200 W.

Enciende la linterna para utilizar su haz como "cohete de luz" que lo impulse de regreso a su nave. *a*) Si usted, su traje espacial y la linterna tienen una masa combinada de 150 kg, ¿cuánto tiempo tardará en regresar a la nave? *b*) ¿Hay otra manera en que pudiera emplear la linterna para regresar a la nave?

32.52 • En el siglo XIX el inventor Nikola Tesla propuso transmitir energía eléctrica por medio de ondas electromagnéticas sinusoidales. Suponga que se pretende transmitir energía eléctrica en un haz con área de sección transversal de 100 m^2. ¿Qué amplitudes de campo eléctrico y magnético se requieren para transmitir una cantidad de potencia equivalente a la que transportan las líneas de transmisión modernas (que conducen voltajes y corrientes del orden de 500 kV y 1000 A)?

32.53 •• PA **Sistema de posicionamiento global (GPS).** La red GPS consiste en 24 satélites, cada uno de los cuales completa a diario dos órbitas alrededor de la Tierra. Cada satélite transmite una señal electromagnética sinusoidal de 50.0 W (o incluso menos) en dos frecuencias, una de las cuales es de 1575.42 MHz. Suponga que un satélite transmite la mitad de su potencia en cada frecuencia y que las ondas viajan uniformemente en forma de hemisferio hacia abajo. *a*) ¿Cuál es la intensidad media que recibe un receptor GPS en el terreno directamente abajo el satélite? (*Sugerencia:* Primero utilice las leyes de Newton para encontrar la altitud del satélite). *b*) ¿Cuáles son las amplitudes de los campos eléctrico y magnético del receptor GPS del inciso *a*) y cuánto tiempo necesita la señal para llegar a él? *c*) Si el receptor es un panel cuadrado de 1.50 cm de lado que absorbe todo el haz, ¿cuál es la presión media que ejerce la señal sobre él? *d*) ¿Cuál es la longitud de onda a la que debe sintonizarse el receptor?

32.54 •• PA **Navegación solar 2.** La NASA está dando importancia al concepto de *navegación solar*. Un velero solar utiliza una vela grande y de poca masa, y la energía y el momento electromagnético de la luz del Sol como elemento de propulsión. *a*) ¿La vela debe ser absorbente o reflectante? ¿Por qué? *b*) La producción total de potencia del Sol es de 3.9×10^{26} W. ¿Qué tan grande debe ser una vela para impulsar un vehículo espacial de 10,000 kg contra la fuerza gravitacional del Sol? Exprese su resultado en kilómetros cuadrados. *c*) Explique por qué la respuesta del inciso *b*) es independiente de la distancia con respecto al Sol.

32.55 •• PA El espacio interplanetario contiene muchas partículas pequeñas conocidas como *polvo interplanetario*. La presión de radiación proveniente del Sol pone un límite inferior al tamaño de esas partículas. Para comprender el origen de este límite, considere una partícula esférica de polvo de radio R y densidad de masa ρ. *a*) Escriba una expresión para la fuerza gravitacional que ejerce el Sol (masa M) sobre esta partícula cuando esta última se encuentra a una distancia r del Sol. *b*) Sea L la luminosidad del Sol, equivalente a la tasa con la que emite energía en forma de radiación electromagnética. Calcule la fuerza ejercida sobre la partícula (totalmente absorbente) debido a la presión de radiación solar, recordando que la intensidad de la radiación solar también depende de la distancia r. El área relevante es el área de sección transversal de la partícula, *no* su área total. Como parte de la respuesta, explique por qué es así. *c*) La densidad de masa de una partícula representativa de polvo interplanetario es de alrededor de 3000 kg/m^3. Determine el radio R de la partícula tal que las fuerzas gravitacional y de radiación que actúan sobre la partícula son de igual magnitud. La luminosidad del Sol es de 3.9×10^{26} W. ¿La respuesta depende de la distancia que hay entre la partícula y el Sol? ¿Por qué? *d*) Explique por qué es poco probable que en el Sistema Solar se encuentren partículas de polvo con un radio menor que el calculado en el inciso *c*). [*Sugerencia:* Obtenga la razón de las dos expresiones de fuerza encontradas en los incisos *a*) y *b*)].

PROBLEMAS DE DESAFÍO

32.56 ••• CALC Las ondas electromagnéticas se propagan en forma muy diferente en los *conductores* que en los dieléctricos o en el vacío. Si la resistividad del conductor es suficientemente baja (es decir, si es un conductor suficientemente bueno), el campo eléctrico oscilante de la onda da origen a una corriente de conducción oscilante mucho más grande que la corriente de desplazamiento. En este caso, la ecuación de onda de un campo eléctrico $\vec{E}(x,t) = E_y(x,t)\hat{j}$ que se propaga en la dirección $+x$ adentro de un conductor es

$$\frac{\partial^2 E_y(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\mu}{\rho}\frac{\partial E_y(x,t)}{\partial t}$$

donde μ es la permeabilidad del conductor y ρ es su resistividad. *a*) Una solución para esta ecuación de onda es

$$E_y(x,t) = E_{\text{máx}} e^{-k_C x}\cos(k_C x - \omega t)$$

donde $k_C = \sqrt{\omega\mu/2\rho}$. Compruebe esto sustituyendo $E_y(x,t)$ en la ecuación de onda anterior. *b*) El término exponencial indica que el campo eléctrico disminuye en amplitud conforme se propaga. Explique por qué ocurre esto. (*Sugerencia:* Considere que el campo realiza trabajo para mover las cargas dentro del conductor. La corriente de estas cargas en movimiento ocasiona un calentamiento de i^2R en el interior del conductor, lo que eleva su temperatura. ¿De dónde proviene la energía para hacer esto? *c*) Demuestre que la amplitud del campo eléctrico disminuye en un factor de $1/e$ en una distancia $1/k_C = \sqrt{2\rho/\omega\mu}$, y calcule esta distancia para una onda de radio con frecuencia $f = 1.0$ MHz en el cobre (resistividad de $1.72 \times 10^{-8}\ \Omega \cdot$m; permeabilidad $\mu = \mu_0$). Como esta distancia es muy corta, las ondas electromagnéticas de tal frecuencia difícilmente se propagan en el cobre. En vez de ello, se reflejan en la superficie del metal. Por esa razón, las ondas de radio no penetran el cobre ni otros metales, y por eso la recepción de radio es deficiente en el interior de una estructura metálica.

32.57 ••• PA Las cargas que se aceleran emiten radiación electromagnética. La rapidez con que se emite energía desde una de tales cargas q, con aceleración a, está dada por la expresión

$$\frac{dE}{dt} = \frac{q^2a^2}{6\pi\epsilon_0 c^3}$$

donde c es la rapidez de la luz. *a*) Verifique que esta ecuación sea dimensionalmente correcta. *b*) Si un protón con energía cinética de 6.0 MeV viaja en un acelerador de partículas en una órbita circular con radio de 0.750 m, ¿qué fracción de su energía irradia por segundo? *c*) Considere un electrón que describe la misma órbita con igual rapidez. ¿Qué fracción de su energía irradia por segundo?

32.58 ••• PA **El átomo clásico de hidrógeno.** Se puede considerar que el electrón de un átomo de hidrógeno describe una órbita circular con radio de 0.0529 nm y energía cinética de 13.6 eV. Si el electrón se comporta de acuerdo con la física clásica, ¿cuánta energía irradiaría por segundo? (Véase el problema de desafío 32.57). ¿Qué le dice esto sobre el uso de la física clásica para describir el átomo?

Respuestas

Pregunta inicial del capítulo 

Los metales son reflectantes porque son buenos conductores de la electricidad. Cuando una onda electromagnética incide sobre un conductor, el campo eléctrico de la onda establece corrientes en la superficie del conductor que generan una onda reflejada. En el caso de un conductor perfecto, esta onda reflejada es tan intensa como la onda incidente. Los metales empañados son menos brillantes porque su superficie está oxidada y es menos conductora; si se pule el metal, se elimina el óxido y el metal conductor queda expuesto.

Preguntas de las secciones
Evalúe su comprensión

32.1 **Respuestas:** ***a*) no, *b*) no** Una onda puramente eléctrica tendría un campo eléctrico variable. Un campo así necesariamente genera un campo magnético de acuerdo con la ley de Ampère, ecuación (29.20), por lo que es imposible que exista una onda puramente eléctrica. De la misma forma, es imposible una onda puramente magnética: el campo magnético variable en una onda de este tipo daría origen en forma automática a un campo eléctrico, según la ley de Faraday, ecuación (29.21).

32.2 **Respuestas:** ***a*) positiva en la dirección *y*, *b*) negativa en la dirección *x*, *c*) positiva en la dirección *y*** Podemos verificar estas respuestas utilizando la regla de la mano derecha para demostrar que $\vec{E} \times \vec{B}$ en cada caso está en la dirección de propagación, o por medio de la regla que se ilustra en la figura 32.9.

32.3 **Respuesta: iv.** En una onda electromagnética plana ideal, en cualquier instante, los campos son los mismos en todos los puntos de un plano perpendicular a la dirección de propagación. La onda plana descrita por las ecuaciones (32.17) se propaga en la dirección x, de manera que los campos dependen de la coordenada x y del tiempo t, pero *no* de las coordenadas y ni z.

32.4 **Respuestas:** ***a*) i y iii, *b*) ii y iv, *c*) i y iii, *d*) ii y iv.** Tanto la densidad de energía u como la magnitud del vector de Poynting S son máximas donde los campos $\vec{E}$ y $\vec{B}$ tienen sus magnitudes máximas. (La dirección de los campos no importa). De acuerdo con la figura 32.13, esto ocurre en $x = 0$ y $x = \lambda/2$. Tanto u como S tienen un valor mínimo de cero; eso sucede cuando $\vec{E}$ y $\vec{B}$ son iguales a cero. De acuerdo con la figura 32.13, esto ocurre en $x = \lambda/4$ y $x = 3\lambda/4$.

32.5 **Respuesta: no** Hay lugares donde $\vec{E} = \mathbf{0}$ en todo momento (en las paredes) y la densidad de energía eléctrica $\frac{1}{2}\epsilon_0 E^2$ siempre es igual a cero. También hay lugares donde $\vec{B} = \mathbf{0}$ en todo momento (sobre el plano localizado en el punto medio entre las paredes) y la densidad de energía magnética $B^2/2\mu_0$ siempre es cero. Sin embargo, *no* hay lugares donde tanto $\vec{E}$ como $\vec{B}$ sean siempre cero. Por consiguiente, la densidad de energía en cualquier punto de la onda estacionaria siempre es diferente de cero.

Problema práctico

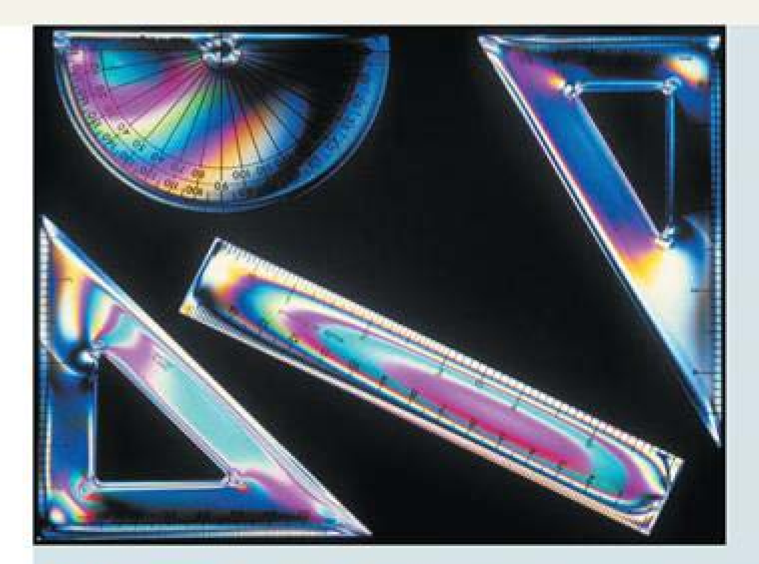
Respuesta: 0.0368 V

33 NATURALEZA Y PROPAGACIÓN DE LA LUZ

OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

Al terminar de estudiar este capítulo, usted aprenderá:

- Qué son los rayos de luz y cómo se relacionan con los frentes de onda.
- Las leyes que rigen la reflexión y la refracción de la luz.
- Las circunstancias en que la luz se refleja totalmente en una interfase.
- Cómo crear luz polarizada a partir de luz ordinaria.
- Cómo ayuda el principio de Huygens a analizar los fenómenos de reflexión y refracción.



? Estas herramientas de dibujo están hechas de plástico transparente, pero en ellas aparecen los colores de un arcoíris cuando se les coloca entre dos filtros especiales llamados polarizadores. ¿Qué es lo que produce los colores?

Quienquiera que tenga ojos para percibir los colores puede disfrutar de los lagos azules, los desiertos color ocre, los bosques verdes y los arcoíris de múltiples colores. No obstante, al estudiar la rama de la física llamada **óptica**, la cual se ocupa del comportamiento de la luz y otras ondas electromagnéticas, es posible obtener una apreciación más profunda del mundo visible. El conocimiento de las propiedades de la luz nos permite entender el color azul del cielo, el diseño de dispositivos ópticos como telescopios, microscopios, cámaras y anteojos, y el funcionamiento del ojo humano. Los mismos principios básicos de la óptica se encuentran en el meollo de los equipos modernos como el láser, la fibra óptica, los hologramas, las computadoras ópticas y las novedosas técnicas para obtener imágenes con fines médicos.

La importancia de la óptica en la física y para la ciencia e ingeniería en general es tan grande que dedicaremos los siguientes cuatro capítulos a su estudio. En este capítulo comenzaremos con el análisis de las leyes de reflexión y refracción, además de explicar los conceptos de dispersión y polarización de la luz. En el camino compararemos las distintas descripciones posibles de la luz en términos de partículas, rayos y ondas, y presentaremos el principio de Huygens, un eslabón importante que relaciona los puntos de vista basados en rayos y ondas. En el capítulo 34 usaremos la descripción de la luz en términos de rayos para entender cómo funcionan los espejos y las lentes, y veremos cómo se usan en instrumentos ópticos como cámaras, microscopios y telescopios. Exploraremos las características ondulatorias de la luz con más detalle en los capítulos 35 y 36.

33.1 Naturaleza de la luz

Hasta la época de Isaac Newton (1642-1727), la mayoría de los científicos pensaban que la luz consistía en corrientes de partículas (llamadas *corpúsculos*) emitidas por las fuentes luminosas. Galileo y otros científicos intentaron (sin éxito) medir la rapidez de la luz. Alrededor de 1665, comenzaron a descubrirse evidencias de las propiedades *ondulatorias* de la luz. A principios del siglo XIX, la evidencia de que la luz es una onda se había vuelto muy convincente.

En 1873 James Clerk Maxwell predijo la existencia de ondas electromagnéticas y calculó su rapidez de propagación, como se vio en el capítulo 32. Este avance, así como el trabajo experimental que inició en 1887 Heinrich Hertz, demostró en forma concluyente que la luz en verdad es una onda electromagnética.

Las dos personalidades de la luz

Sin embargo, la concepción ondulatoria de la luz no ofrece una visión completa sobre su naturaleza. Varios efectos asociados con su emisión y absorción revelan un aspecto de partícula, en el sentido en que la energía transportada por las ondas luminosas está contenida en paquetes discretos llamados *fotones* o *cuantos*. Estas propiedades aparentemente contradictorias de onda y partícula se conciliaron a partir de 1930 con el desarrollo de la electrodinámica cuántica, una teoría integral que incluye *tanto* las propiedades ondulatorias como las corpusculares. La *propagación* de la luz se describe mejor con el modelo ondulatorio, pero para comprender la emisión y la absorción se requiere un enfoque corpuscular.

Las fuentes fundamentales de toda la radiación electromagnética son las cargas eléctricas con movimiento acelerado. Todos los cuerpos emiten radiación electromagnética como resultado del movimiento térmico de sus moléculas; esta radiación, llamada *radiación térmica*, es una mezcla de diferentes longitudes de onda. A altas temperaturas, toda la materia emite suficiente luz visible para ser luminosa por sí misma; un cuerpo muy caliente parece estar al "rojo vivo" (figura 33.1) o al "blanco vivo". Así, la materia caliente en cualquiera de sus formas es una fuente luminosa. Algunos ejemplos conocidos son la llama de una vela, las brazas calientes de una fogata, la bobina de un calentador doméstico y el filamento de una lámpara incandescente (que por lo general opera a una temperatura aproximada de 3000°C).

33.1 El elemento de un calentador eléctrico emite radiación infrarroja principalmente. Pero si su temperatura es suficientemente elevada, también emite una cantidad apreciable de luz visible.



La luz también se produce durante descargas eléctricas a través de gases ionizados. Por ejemplo, el brillo azuloso de las lámparas de arco de mercurio, la luz amarillo naranja de las lámparas de vapor de sodio, y los distintos colores de los anuncios de "neón" son muy conocidos. Una variación de la lámpara de arco de mercurio es la lámpara *fluorescente* (véase la figura 30.7). Esta fuente luminosa emplea un material llamado *fósforo* para convertir la radiación ultravioleta de un arco de mercurio en luz visible. Tal conversión hace que las lámparas fluorescentes sean más eficientes que las incandescentes para transformar energía eléctrica en luz.

En la mayoría de fuentes luminosas, la luz es emitida de forma independiente por diferentes átomos dentro de la fuente; en contraste, en un *láser* los átomos son inducidos a emitir luz en forma cooperativa y coherente. El resultado es un haz muy angosto de radiación que puede llegar a tener una enorme intensidad y que está mucho más cerca de ser *monocromático*, o de una sola frecuencia, en comparación con la luz de cualquier otra fuente. Los rayos láser se utilizan en medicina para hacer microcirugías, en reproductores de DVD o Blu-ray para leer la información codificada en el disco; también se emplean en la industria para cortar acero y para fundir materiales con puntos de fusión elevados, y en muchas otras aplicaciones (figura 33.2).

33.2 Los cirujanos oftalmólogos usan láseres para reparar retinas desprendidas y para cauterizar vasos sanguíneos en retinopatías. Las pulsaciones de luz azul verdosa de un láser de argón son ideales para este propósito, pues atraviesan la parte transparente del ojo sin causar daño, pero son absorbidos por los pigmentos rojos de la retina.



Sin importar cuál sea su fuente, la radiación electromagnética viaja en el vacío con la misma rapidez. Como vimos en las secciones 1.3 (vol. 1) y 32.1, la rapidez de la luz en el vacío es

$$c = 2.99792458 \times 10^8 \text{ m/s}$$

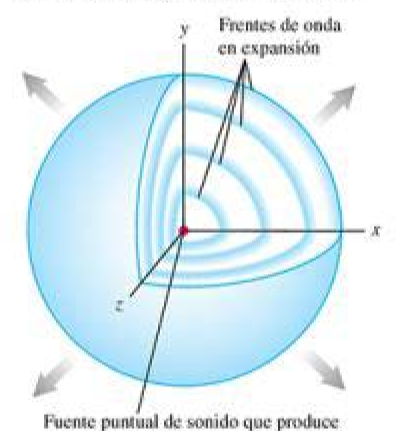
o 3.00×10^8 m/s, con tres cifras significativas. La duración de un segundo está definida por el reloj de cesio (véase la sección 1.3, vol. 1), y un metro se define como la distancia que recorre la luz en 1/299,792,458 s.

Ondas, frentes de onda y rayos

A menudo se utiliza el concepto de **frente de onda** para describir la propagación de las ondas. Presentamos este concepto en la sección 32.2 para describir el extremo frontal de una onda. De manera más general, un frente de onda se define como *el lugar geométrico de todos los puntos adyacentes en los cuales la fase de vibración de una cantidad física asociada con la onda es la misma*. Es decir, en cualquier instante, todos los puntos del frente de onda están en la misma parte de su ciclo de variación.

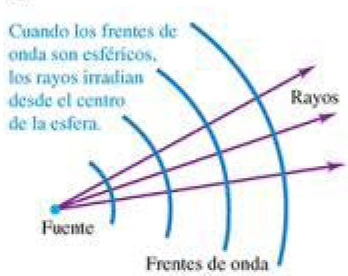
Cuando arrojamos una piedra en un estanque tranquilo, los círculos de expansión formados por las crestas de onda, al igual que los círculos formados por los valles de

33.3 Los frentes de onda esféricos de sonido se propagan de manera uniforme en todas direcciones desde una fuente puntual en un medio sin movimiento, como aire tranquilo, que tenga las mismas propiedades en todas las regiones y en todas las direcciones. Las ondas electromagnéticas en el vacío también se propagan como se ilustra aquí.

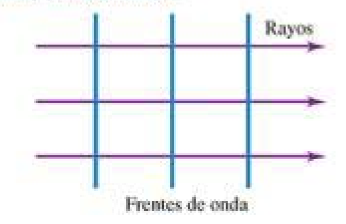


33.4 Frentes de onda (en color azul) y rayos (púrpura).

a)



b)



MasteringPHYSICS

ActivPhysics 15.1: Reflection and Refraction
ActivPhysics 15.3: Refraction Applications

onda intermedios, son los frentes de onda. De manera similar, cuando las ondas de sonido viajan en el aire tranquilo desde una fuente puntual, o cuando la radiación electromagnética se propaga desde un emisor puntual, cualquier superficie esférica concéntrica con respecto a la fuente es un frente de onda, como se ilustra en la figura 33.3. En los diagramas del movimiento ondulatorio, por lo general, solo se dibujan partes de unos cuantos frentes de onda, y a menudo se eligen frentes de onda consecutivos que tengan la misma fase y que, por lo tanto, estén separados por una longitud de onda, como las crestas de las olas en el agua. De manera similar, un diagrama de ondas sonoras solo muestra las "crestas de presión", que son las superficies sobre las cuales la presión es máxima, y un diagrama de ondas electromagnéticas solo indica las "crestas" en las que el campo eléctrico o magnético es máximo.

Será frecuente que usemos diagramas para mostrar las formas de los frentes de onda o sus secciones transversales en algún plano de referencia. Por ejemplo, cuando se irradian ondas electromagnéticas desde una pequeña fuente luminosa, es posible representar los frentes de onda como superficies esféricas concéntricas con respecto a la fuente o, como se aprecia en la figura 33.4*a*, mediante las intersecciones circulares de estas superficies con el plano del diagrama. Lejos de la fuente, donde los radios de las esferas son muy grandes, una sección de superficie esférica se puede considerar como un plano, y así surge una onda *plana* como las que se examinaron en las secciones 32.2 y 32.3 (figura 33.4*b*).

Para describir las direcciones en las que se propaga la luz, a menudo conviene representar una onda luminosa por medio de **rayos** y no por frentes de onda. Los rayos se utilizaron para describir la luz mucho tiempo antes de que su naturaleza ondulatoria estuviera firmemente establecida. En la teoría corpuscular de la luz, los rayos son las trayectorias de las partículas. Desde el punto de vista ondulatorio, *un rayo es una línea imaginaria a lo largo de la dirección de propagación de la onda*. En la figura 33.4*a* los rayos son los radios de los frentes de onda esféricos, y en la figura 33.4*b* son las líneas rectas perpendiculares a los frentes de onda. Cuando las ondas viajan en un material isotrópico homogéneo (un material que tiene las mismas propiedades en todas las regiones y en todas direcciones), los rayos siempre son líneas rectas normales a los frentes de onda. En una superficie de frontera entre dos materiales, como la superficie de una placa de vidrio en el aire, la rapidez de la onda y la dirección de un rayo pueden cambiar, pero los segmentos del rayo en el aire y en el vidrio son líneas rectas.

Varios de los siguientes capítulos darán al lector muchas oportunidades de ver la interrelación de las descripciones de la luz como rayo, onda y partícula. La rama de la óptica en la cual resulta adecuada la descripción con rayos se llama **óptica geométrica**; la rama que se ocupa específicamente del comportamiento ondulatorio se llama **óptica física**. Este capítulo y el siguiente tratan sobre todo con la óptica geométrica. En los capítulos 35 y 36 estudiaremos fenómenos ondulatorios y la óptica física.

Evalúe su comprensión de la sección 33.1 Algunos cristales *no* son isotrópicos: la luz viaja a través del cristal con una rapidez mayor en ciertas direcciones que en otras. En un cristal en que la luz viaja con la misma rapidez en las direcciones x y z, pero con una rapidez mayor en la dirección y, ¿cuál sería la forma de los frentes de onda producidos por una fuente luminosa en el origen? **i.** Esférica, como la que se ilustra en la figura 33.3; **ii.** elipsoidal, aplanada a lo largo del eje y; **iii.** elipsoidal, estirada a lo largo del eje y.

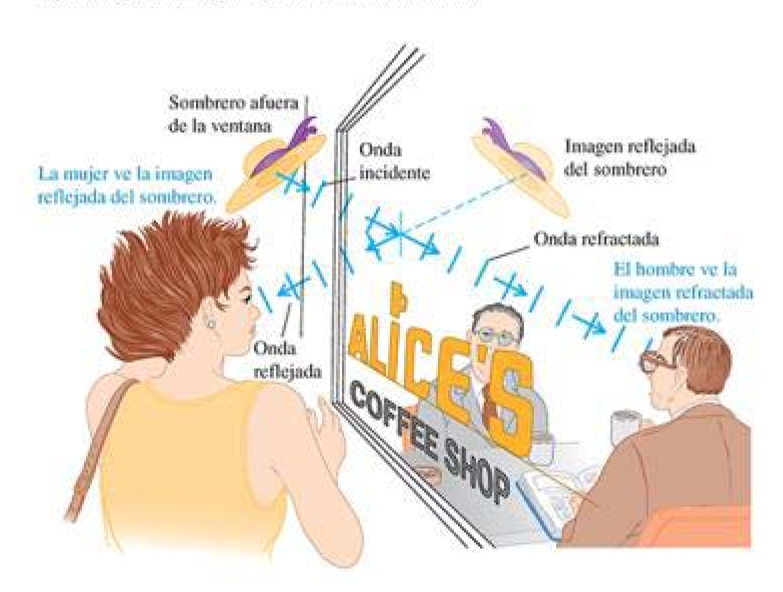


33.2 Reflexión y refracción

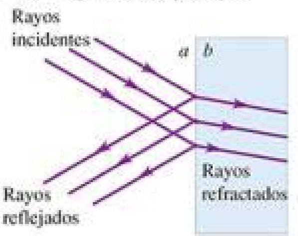
En esta sección usaremos el modelo de la luz basado en *rayos* para explorar dos de los aspectos más importantes de la propagación de la luz: la **reflexión** y la **refracción**. Cuando una onda luminosa incide en una interfase lisa que separa dos materiales transparentes (como el aire y el vidrio, o el agua y el vidrio), la onda en general se *refleja* parcialmente y también se *refracta* (se transmite) parcialmente hacia el segundo material, como se ilustra en la figura 33.5*a*. Por ejemplo, cuando usted mira a través de la ventana de un restaurante desde la calle, observa un reflejo de la escena en la calle, pero una persona en el interior del restaurante puede ver a través de la ventana la misma escena cuando la luz le llega por refracción.

33.5 *a*) Una onda plana en parte se refleja y en parte se refracta en la frontera entre dos medios (en este caso, aire y vidrio). La luz que llega al interior de la cafetería se refracta dos veces, una cuando entra al vidrio y otra al salir de este. *b*) y *c*) Cómo se comporta la luz en la interfase entre el aire afuera de la cafetería (material *a*) y el vidrio (material *b*). Para el caso que se ilustra, el material *b* tiene un índice de refracción mayor que el del material *a* ($n_b > n_a$) y el ángulo θ_b es más pequeño que θ_a.

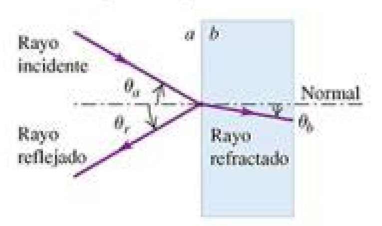
a) Ondas planas reflejadas y refractadas en una ventana



b) Ondas en el exterior del aire y del vidrio representadas por rayos



c) Representación simplificada para ilustrar solo un conjunto de rayos



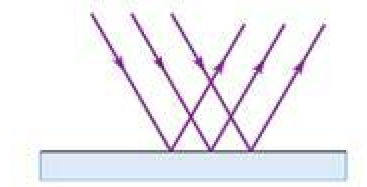
Los segmentos de ondas planas que se ilustran en la figura 33.5*a* pueden representarse por paquetes de rayos que forman *haces* de luz (figura 33.5*b*). Para simplificar, es frecuente que se dibuje un solo rayo de cada haz (figura 33.5*c*). La representación de estas ondas en términos de rayos es la base de la óptica geométrica. Comenzaremos nuestro estudio con el análisis del comportamiento de un rayo individual.

Describimos las direcciones de los rayos incidente, reflejado y refractado (transmitido) en una interfase lisa entre dos materiales ópticos en términos de los ángulos que forman con la *normal* (perpendicular) a la superficie en el punto de incidencia, como se ilustra en la figura 33.5*c*. Si la interfase es rugosa, tanto la luz transmitida como la reflejada se dispersan en varias direcciones y no hay un ángulo único de transmisión o reflexión. La reflexión con un ángulo definido desde una superficie muy lisa se llama **reflexión especular** (el término proviene del vocablo latino que significa "espejo"); la reflexión dispersa a partir de una superficie áspera se llama **reflexión difusa**. Esta diferencia se ilustra en la figura 33.6. Ambas clases de reflexión ocurren con materiales transparentes o con materiales *opacos* que no transmiten la luz. La gran mayoría de objetos en el ambiente (plantas, personas y este libro) son visibles porque reflejan la luz en una forma difusa desde sus superficies. Sin embargo, nuestro interés principal se centra en la reflexión especular a partir de una superficie muy lisa, como vidrio o metal muy pulidos. A menos que se especifique otra cosa, cuando hablemos de "reflexión" siempre nos referiremos a la reflexión *especular*.

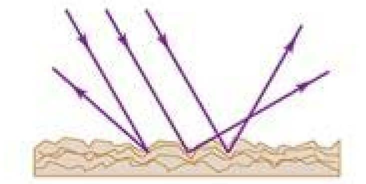
33.6 Dos tipos de reflexión.

a) Reflexión especular





b) Reflexión difusa



El **índice de refracción** de un material óptico (también llamado **índice refractivo**), denotado con *n*, desempeña un papel central en la óptica geométrica. Es la razón entre la rapidez *c* de la luz en el vacío y la rapidez *v* de la luz en el material:

$$n = \frac{c}{v} \qquad \text{(índice de refracción)} \qquad (33.1)$$

La luz siempre viaja con *más lentitud* en un material que en el vacío, por lo que el valor de *n* en cualquier material que no sea el vacío siempre es mayor que la unidad.

Para el vacío, $n = 1$. Como n es una razón entre dos valores de rapidez, es un número sin unidades. (La relación entre el valor de n y las propiedades eléctricas y magnéticas de un material se describe en la sección 32.3).

CUIDADO **Rapidez de las ondas e índice de refracción** Recuerde que la rapidez v de las ondas es *inversamente* proporcional al índice de refracción n. Cuanto mayor sea el índice de refracción de un material, *menor* será la rapidez de la onda en ese material. ¡Olvidar esto puede originar serias confusiones!

33.7 Leyes de reflexión y refracción.

1. Los rayos incidente, reflejado y refractado, así como la normal a la superficie, se encuentran en el mismo plano.

Los ángulos θ_a, θ_b y θ_r se miden *a partir de la normal*.

Rayo incidente; Normal; θ_a; θ_r; θ_b; Rayo refractado; Rayo reflejado; Material a; Material b

2. $\theta_r = \theta_a$

3. Cuando un rayo de luz monocromática cruza la interfase entre dos materiales dados a y b, los ángulos θ_a y θ_b se relacionan con los índices de refracción de a y b por medio de

$$\frac{\operatorname{sen}\theta_a}{\operatorname{sen}\theta_b} = \frac{n_b}{n_a}$$

Leyes de reflexión y refracción

Los estudios experimentales de las direcciones de los rayos incidentes, reflejados y refractados en una interfase lisa entre dos materiales ópticos condujeron a las siguientes conclusiones (figura 33.7):

1. **Los rayos incidente, reflejado y refractado, así como la normal a la superficie, se encuentran todos en el mismo plano.** El plano de los tres rayos y la normal, llamado **plano de incidencia**, es perpendicular al plano de la superficie de frontera entre los dos materiales. Siempre se dibujan los diagramas de manera que los rayos incidente, reflejado y refractado estén en el plano del diagrama.
2. **El ángulo de reflexión θ_r es igual al ángulo de incidencia θ_a para todas las longitudes de onda y para cualquier par de materiales.** Es decir, en la figura 33.5*c*,

$$\theta_r = \theta_a \qquad \text{(ley de reflexión)} \tag{33.2}$$

Esta relación, junto con la observación de que los rayos incidente y reflejado y la normal están en el mismo plano, se conoce como **ley de reflexión**.

3. Para la luz monocromática y para un par dado de materiales, a y b, en lados opuestos de la interfase, **la razón entre los senos de los ángulos θ_a y θ_b, donde los dos ángulos están medidos a partir de la normal a la superficie, es igual al inverso de la razón entre los dos índices de refracción:**

$$\frac{\operatorname{sen}\theta_a}{\operatorname{sen}\theta_b} = \frac{n_b}{n_a} \tag{33.3}$$

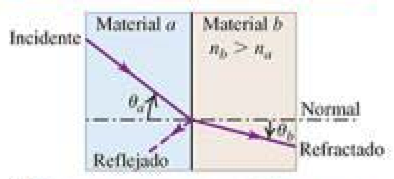
o bien,

$$n_a \operatorname{sen}\theta_a = n_b \operatorname{sen}\theta_b \qquad \text{(ley de refracción)} \tag{33.4}$$

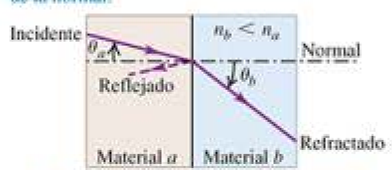
Este resultado experimental, junto con la observación de que los rayos incidente y refractado, así como la normal, se encuentran en el mismo plano se llama **ley de refracción** o **ley de Snell**, en honor del científico holandés Willebrord Snell (1591-1626). Existen algunas dudas de que Snell la haya descubierto en realidad. El descubrimiento de que $n = c/v$ fue muy posterior.

33.8 Tres casos de refracción y reflexión. *a*) El material b tiene un índice de refracción mayor que el material a. *b*) El material b tiene un índice de refracción menor que el material a. *c*) El rayo de luz incidente es normal a la interfase entre los materiales.

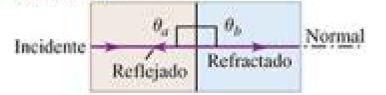
a) Un rayo que entra a un material con *mayor* índice de refracción se desvía *hacia* la normal.



b) Un rayo que entra a un material con *menor* índice de refracción se desvía *alejándose* de la normal.



c) Un rayo orientado a lo largo de la normal no se desvía, sin importar cuáles sean los materiales.



Si bien estos resultados se obtuvieron primero en forma experimental, es posible obtenerlos teóricamente a partir de la descripción ondulatoria de la luz, como veremos en la sección 33.7.

Las ecuaciones (33.3) y (33.4) indican que cuando un rayo pasa de un material a hacia otro material b que tiene un mayor índice de refracción ($n_b > n_a$) y, por lo tanto, una menor rapidez de onda, el ángulo θ_b que forma con la normal es *más pequeño* en el segundo material que el ángulo θ_a en el primero; por consiguiente, el rayo se desvía *hacia* la normal (figura 33.8*a*). Cuando el segundo material tiene un *menor* índice de refracción que el primero ($n_b < n_a$) y, por lo tanto, una mayor rapidez de onda, el rayo se desvía *alejándose* de la normal (figura 33.8*b*).

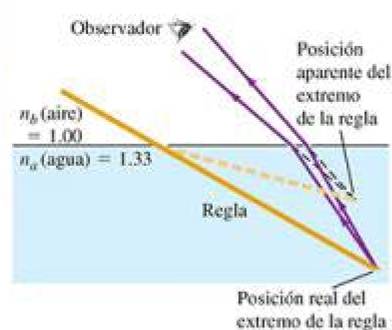
Sin importar cuáles sean los materiales a cada lado de la interfase, en el caso de una incidencia *normal* el rayo transmitido no se desvía en absoluto (figura 33.8*c*). En

33.9 *a*) Esta regla en realidad es recta, pero parece que se dobla al entrar en la superficie del agua. *b*) Los rayos de luz provenientes de cualquier objeto sumergido se desvían alejándose de la normal cuando salen al aire. Desde el punto de vista de un observador situado afuera de la superficie del agua, el objeto parece estar mucho más cerca de la superficie de lo que en realidad está.

a) La mitad de una regla recta sumergida en agua



b) ¿Por qué la regla se ve doblada?



33.10 *a*) El índice de refracción del aire es ligeramente mayor que 1; por esta razón, los rayos luminosos del Sol durante el ocaso se desvían hacia abajo cuando entran a la atmósfera. (El efecto se exagera en esta figura). *b*) La luz que proviene del extremo inferior del Sol (la parte que parece estar más cerca del horizonte) experimenta una refracción más intensa, pues pasa a través del aire más denso en las capas bajas de la atmósfera. Como resultado, cuando se oculta, se ve achatado en la dirección vertical. (Véase el problema 33.55).

a)



b)



este caso, $\theta_a = 0$ y sen $\theta_a = 0$, por lo que de acuerdo con la ecuación (33.4), θ_b también es igual a cero, de manera que el rayo transmitido también es normal a la interfase. La ecuación (33.2) indica que θ_r es igual a cero, así que el rayo reflejado viaja de regreso a lo largo de la misma trayectoria que el rayo incidente.

La ley de la refracción explica por qué una regla o una pajilla parcialmente sumergidos parecen estar doblados; los rayos de luz que provienen de un lugar por debajo de la superficie cambian de dirección al pasar por la interfase aire-agua, de manera que los rayos parecen provenir de una posición por arriba de su punto de origen real (figura 33.9). Un efecto similar explica la apariencia de los atardeceres (figura 33.10).

Un caso especial muy importante es la refracción que ocurre en la interfase entre un material y el vacío, para el cual el índice de refracción, por definición, es la unidad. Cuando un rayo pasa del vacío al material *b*, de forma que $n_a = 1$ y $n_b > 1$, el rayo siempre se desvía *hacia* la normal. Cuando un rayo pasa de un material al vacío, de forma que $n_a > 1$ y $n_b = 1$, el rayo siempre se desvía *alejándose* de la normal.

Las leyes de reflexión y refracción se aplican sin importar de qué lado de la interfase proviene el rayo incidente. Si en la figura 33.8*a* o 33.8*b* un rayo de luz se acerca a la interfase desde la derecha y no desde la izquierda, una vez más habrá rayos reflejado y refractado; estos dos rayos, el rayo incidente y la normal a la superficie de nuevo quedan en el mismo plano. Además, la trayectoria de un rayo refractado es *reversible*: sigue la misma trayectoria cuando va de *b* a *a* que cuando va de *a* a *b*. [Usted puede verificar esto mediante la ecuación (33.4)]. Como el rayo reflejado y el incidente forman el mismo ángulo con la normal, la trayectoria de un rayo reflejado también es reversible. Por esa razón, cuando usted ve los ojos de alguien en un espejo, la persona observada también lo puede mirar a usted.

La *intensidad* de los rayos reflejado y refractado dependen del ángulo de incidencia, de los dos índices de refracción y de la polarización (es decir, de la dirección del vector del campo eléctrico) del rayo incidente. La parte reflejada es mínima cuando la incidencia es normal ($\theta_a = 0°$); en tal caso, es alrededor del 4% para una interfase aire-vidrio. Esta fracción se incrementa al aumentar el ángulo de incidencia hasta llegar al 100%, que se da con una incidencia límite, cuando $\theta_a = 90°$.

Es posible usar las ecuaciones de Maxwell para pronosticar la amplitud, la intensidad, la fase y los estados de polarización de las ondas reflejadas y refractadas. Sin embargo, ese análisis está más allá de nuestro alcance.

El índice de refracción no solo depende de la sustancia, sino también de la longitud de onda de la luz. La dependencia de la longitud de onda se llama *dispersión*, la cual estudiaremos en la sección 33.4. En la tabla 33.1 se presentan los índices de refracción de varios sólidos y líquidos para una longitud de onda particular de luz amarilla.

Aplicación Transparencia e índice de refracción

Una anguila en estado larvario es casi tan transparente como el agua de mar en la que nada. Sin embargo, la larva de esta fotografía es fácil de ver porque su índice de refracción es mayor que el del agua, de modo que la luz que la alcanza se refleja en lugar de transmitirse. La larva aparece particularmente brillante en su contorno porque la luz que llega a la cámara desde esos puntos llegó a la larva con un ángulo de incidencia casi rasante ($\theta_a = 90°$), lo que da como resultado una reflexión cercana al 100%.



Tabla 33.1 Índice de refracción para la luz amarilla de sodio (λ_0 = 589 nm)

Sustancia	Índice de refracción, n
Sólidos	
Hielo (H_2O)	1.309
Fluorita (CaF_2)	1.434
Poliestireno	1.49
Sal de roca (NaCl)	1.544
Cuarzo (SiO_2)	1.544
Circonio ($ZrO_2 \cdot SiO_2$)	1.923
Diamante (C)	2.417
Fabulita ($SrTiO_3$)	2.409
Rutilo (TiO_2)	2.62
Vidrios (valores comunes)	
Blanco (Crown)	1.52
Cristal ligero	1.58
Cristal mediano	1.62
Cristal denso	1.66
Cristal de lantano	1.80
Líquidos a 20°C	
Metanol (CH_3OH)	1.329
Agua (H_2O)	1.333
Etanol (C_2H_5OH)	1.36
Tetracloruro de carbono (CCl_4)	1.460
Aguarrás	1.472
Glicerina	1.473
Benceno	1.501
Disulfuro de carbono (CS_2)	1.628

El índice de refracción del aire a temperatura y presión estándares es de alrededor de 1.0003, y por lo general lo tomaremos como si fuera exactamente igual a 1. El índice de refracción de un gas se incrementa conforme su densidad aumenta. La mayoría de los vidrios que se utilizan en los instrumentos ópticos tienen índices de refracción entre 1.5 y 2.0. Unas cuantas sustancias tienen índices mayores; un ejemplo de esto es el diamante, con 2.417.

Índice de refracción y aspectos ondulatorios de la luz

Hemos analizado la forma en que la dirección de un rayo de luz cambia cuando pasa de un material a otro con distinto índice de refracción. También es importante ver lo que ocurre con las características *ondulatorias* de la luz cuando eso sucede.

En primer lugar, la frecuencia f de la onda no cambia cuando pasa de un material a otro. Es decir, el número de ciclos de la onda que llegan por unidad de tiempo es igual al número de ciclos que salen por unidad de tiempo; esto significa que la superficie de frontera no puede crear ni destruir ondas.

En segundo lugar, la longitud de onda λ, en general, *es* diferente en distintos materiales. Esto se debe a que en cualquier material, $v = \lambda f$; como f es la misma en cualquier material que en el vacío y v siempre es menor que la rapidez c de la onda en el vacío, λ también se reduce en forma correspondiente. Así, la longitud de onda λ de la luz en un material es *menor que* la longitud de onda λ_0 de la misma luz en el vacío. De acuerdo con el análisis anterior, $f = c/\lambda_0 = v/\lambda$. Al combinar esto con la ecuación (33.1), $n = c/v$, se encuentra que

$$\lambda = \frac{\lambda_0}{n} \qquad \text{(longitud de onda de la luz en un material)} \qquad (33.5)$$

Cuando una onda pasa de un material a otro con mayor índice de refracción, de manera que $n_b > n_a$, la rapidez de la onda disminuye. La longitud de onda $\lambda_b = \lambda_0/n_b$ en el segundo material es, por consiguiente, más corta que la longitud de onda $\lambda_a = \lambda_0/n_a$ del primer material. Si en lugar de ello, el segundo material tiene un índice de refracción menor que el primero, de manera que $n_b < n_a$, entonces la rapidez de la onda se incrementa. Así, la longitud de onda λ_b en el segundo material es mayor que la longitud de onda λ_a en el primero. Esto tiene sentido intuitivamente; las ondas se "comprimen" (la longitud de onda se acorta) si la rapidez de onda disminuye, y se "estiran" (la longitud de onda se alarga) si la rapidez de onda aumenta.

Estrategia para resolver problemas 33.1 Reflexión y refracción



IDENTIFICAR *los conceptos relevantes:* Use la óptica geométrica, analizada en esta sección, siempre que la luz (o una radiación electromagnética de *cualquier* frecuencia y longitud de onda) encuentra una frontera entre dos materiales diferentes. En general, parte de la luz se refleja de regreso hacia el primer material y parte se refracta hacia el segundo.

PLANTEAR *el problema* de acuerdo con los siguientes pasos:

1. En los problemas relacionados con rayos y ángulos, comience por hacer un diagrama grande y bien definido. Etiquete todos los ángulos conocidos y los índices de refracción.
2. Identifique las incógnitas.

EJECUTAR *la solución* como sigue:

1. Aplique las leyes de reflexión, ecuación (33.2), y refracción, ecuación (33.4). Mida los ángulos de incidencia, de reflexión y de refracción con respecto de la *normal* a la superficie, *nunca* a partir de la superficie misma.
2. Aplique geometría o trigonometría al trabajar con relaciones angulares. Recuerde que la suma de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo es igual a 90° (son *complementarios*) y la suma de los ángulos interiores de un triángulo es igual a 180°.
3. La frecuencia de la radiación electromagnética no cambia cuando pasa de un material a otro, pero la longitud de onda cambia de acuerdo con la ecuación (33.5), $\lambda = \lambda_0/n$.

EVALUAR *la respuesta:* En problemas relacionados con la refracción, compruebe que los resultados son congruentes con la ley de Snell (n_a sen $\theta_a = n_b$ sen θ_b). Si el segundo material tiene un mayor índice de refracción que el primero, el ángulo de refracción debe ser más *pequeño* que el ángulo de incidencia: el rayo refractado se desvía hacia la normal. Si el primer material tiene un mayor índice de refracción, el ángulo de refracción debe ser mayor que el ángulo de incidencia. El rayo refractado se desvía alejándose de la normal.



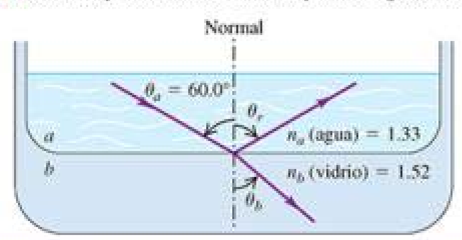
Ejemplo 33.1 Reflexión y refracción

En la figura 33.11, el material a es agua y el material b es un vidrio con índice de refracción de 1.52. Si el rayo incidente forma un ángulo de 60.0° con la normal, determine las direcciones de los rayos reflejado y refractado.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Este es un problema de óptica geométrica. Se da el ángulo de incidencia $\theta_a = 60.0°$ y los índices de refracción $n_a = 1.33$ y $n_b = 1.52$. Se deben calcular los ángulos de reflexión y refracción θ_r y θ_b; para esto se usan las ecuaciones (33.2) y (33.4), respectivamente. La figura 33.11 muestra los rayos y los ángulos; n_b es ligeramente mayor que n_a, por lo que, de acuerdo con la ley de Snell [ecuación (33.4)], θ_b es ligeramente menor que θ_a, como se ilustra en la figura.

33.11 Reflexión y refracción de la luz al pasar de agua a vidrio.



EJECUTAR: De acuerdo con la ecuación (33.2), el ángulo que forma el rayo reflejado con la normal es el mismo que el del rayo incidente; por lo tanto, $\theta_r = \theta_a = 60.0°$.

Para determinar la dirección del rayo refractado se usa la ley de Snell, ecuación (33.4):

$$n_a \operatorname{sen}\theta_a = n_b \operatorname{sen}\theta_b$$

$$\operatorname{sen}\theta_b = \frac{n_a}{n_b}\operatorname{sen}\theta_a = \frac{1.33}{1.52}\operatorname{sen} 60.0° = 0.758$$

$$\theta_b = \operatorname{arcsen}(0.758) = 49.3°$$

EVALUAR: El segundo material tiene un mayor índice de refracción que el primero, igual que la situación que se ilustra en la figura 33.8a. Por lo tanto, el rayo refractado se desvía hacia la normal y $\theta_b < \theta_a$.



Ejemplo 33.2 Índice de refracción en el ojo

La longitud de onda de la luz roja de un láser de helio-neón es de 633 nm en el aire, pero de 474 nm en el humor acuoso del globo ocular. Calcule el índice de refracción del humor acuoso, además de la rapidez y la frecuencia de la luz en esta sustancia.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Las ideas clave aquí son **i.** la definición del índice de refracción n en términos de la rapidez de onda v en un medio y la rapidez c en el vacío, y **ii.** la relación entre la longitud de onda λ_0 en el vacío y la longitud de onda λ en un medio de índice n. Se usa la ecuación (33.1), $n = c/v$; así como la ecuación (33.5), $\lambda = \lambda_0/n$ y $v = \lambda f$.

EJECUTAR: El índice de refracción del aire está muy cerca de la unidad, por lo que supondremos que la longitud de onda λ_0 en el vacío es la misma que en el aire, 633 nm. Así, según la ecuación (33.5),

$$\lambda = \frac{\lambda_0}{n} \qquad n = \frac{\lambda_0}{\lambda} = \frac{633 \text{ nm}}{474 \text{ nm}} = 1.34$$

Esto es aproximadamente el mismo índice de refracción que el del agua. Por lo tanto, usando $n = c/v$ y $v = \lambda f$, tenemos

$$v = \frac{c}{n} = \frac{3.00 \times 10^8 \text{ m/s}}{1.34} = 2.25 \times 10^8 \text{ m/s}$$

$$f = \frac{v}{\lambda} = \frac{2.25 \times 10^8 \text{ m/s}}{474 \times 10^{-9} \text{ m}} = 4.74 \times 10^{14} \text{ Hz}$$

EVALUAR: Observe que si bien la rapidez y la longitud de onda tienen diferentes valores en el aire y en el humor acuoso, la *frecuencia* en el aire, f_0, es igual que la frecuencia f en el humor acuoso:

$$f_0 = \frac{c}{\lambda_0} = \frac{3.00 \times 10^8 \text{ m/s}}{633 \times 10^{-9} \text{ m}} = 4.74 \times 10^{14} \text{ Hz}$$

Cuando una onda luminosa pasa de un material a otro, tanto la rapidez como la longitud de onda cambian, pero la frecuencia permanece igual.



Ejemplo 33.3 Un rayo reflejado dos veces

Dos espejos están perpendiculares entre sí. Un rayo que viaja en un plano perpendicular con respecto a los dos espejos se refleja en uno de ellos y luego en el otro, como se ilustra en la figura 33.12. ¿Cuál es la dirección final del rayo en relación con su dirección original?

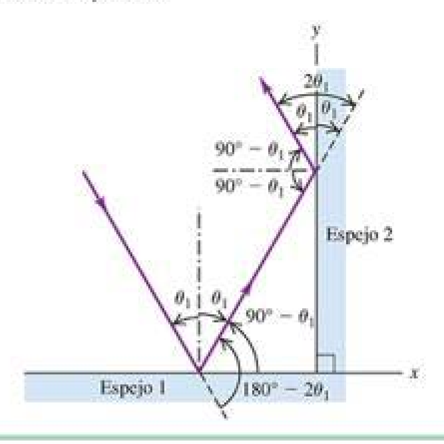
SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Este problema se relaciona con la ley de reflexión, la cual se debe aplicar dos veces (una por cada espejo).

EJECUTAR: Para el espejo 1, el ángulo de incidencia es θ_1, y este es igual al ángulo de reflexión. La suma de los ángulos interiores del triángulo que se ilustra en la figura es igual a 180°, por lo que vemos que los ángulos de incidencia y reflexión para el espejo 2 son de $90° - \theta_1$. El cambio total en la dirección del rayo después de las dos reflexiones es, por lo tanto, $2(90° - \theta_1) + 2\theta_1 = 180°$. Es decir, la dirección final del rayo es opuesta a su dirección original.

Continúa

33.12 Un rayo que se desplaza en el plano xy. La primera reflexión cambia el signo de la componente y de su velocidad, y la segunda reflexión modifica el signo de la componente x. En el caso de un rayo diferente que tuviera una componente z de velocidad, se podría usar un tercer espejo (perpendicular a los dos que se ilustran) para cambiar el signo de esa componente.



EVALUAR: Un punto de vista alternativo es que la reflexión invierte el signo de la componente de la velocidad de la luz perpendicular a la superficie, pero deja las otras componentes inalteradas. Se invita al lector a que verifique esto con detalle. También deberá ser capaz de usar este resultado para demostrar que cuando un rayo de luz se refleja sucesivamente en tres espejos que forman la esquina de un cubo (un "reflector de vértice o retrorreflector"), su dirección final, de nuevo, es opuesta a su dirección original. Este principio se usa mucho en las luces traseras y en los reflectores posteriores de las bicicletas para mejorar su visualización nocturna. Los astronautas del Apolo colocaron arreglos de reflectores de vértice en la Luna. Por medio de rayos láser reflejados en tales arreglos, se logró medir la distancia entre la Tierra y la Luna con un error de 0.15 m.

Evalúe su comprensión de la sección 33.2 Usted se encuentra en la orilla de un lago y observa un apetitoso pez que nada a cierta distancia debajo de la superficie. *a*) Si quiere atrapar al pez, ¿debe lanzar el arpón **i.** más arriba, **ii.** más abajo o **iii.** directamente hacia la posición aparente del pez? *b*) Si en lugar del arpón usara un rayo láser potente que le permitiera matar y cocinar al pez al mismo tiempo, ¿debería disparar el rayo láser **i.** más arriba, **ii.** más abajo o **iii.** directamente hacia la posición aparente del pez?



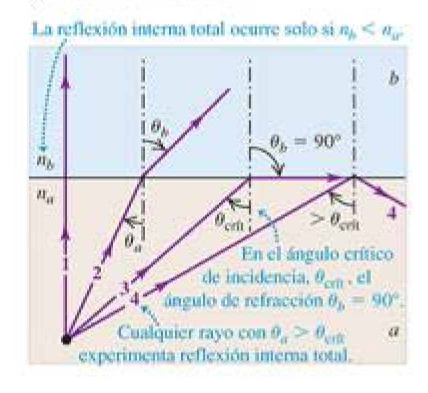
ActivPhysics 15.2: Total Internal Reflection

33.3 Reflexión interna total

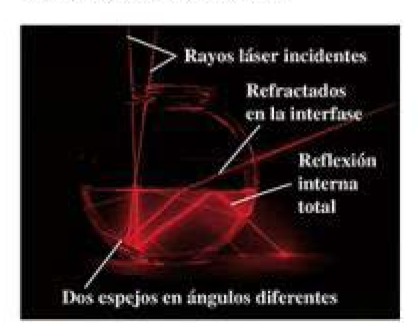
Hemos descrito la forma en que la luz es parcialmente reflejada y parcialmente transmitida en una interfase entre dos materiales con distintos índices de refracción. Sin embargo, en ciertas circunstancias, *toda* la luz se puede reflejar en la interfase, sin que se transmita nada de ella, aun si el segundo material es transparente. La figura 33.13*a* ilustra la forma en que esto ocurre. Se muestran varios rayos que salen de una fuente puntual en el material *a* con índice de refracción n_a. Los rayos inciden en la superficie

33.13 *a*) Reflexión interna total. El ángulo de incidencia para el que el ángulo de refracción es de 90° se llama ángulo crítico; este es el caso del rayo 3. Las porciones reflejadas de los rayos 1, 2 y 3 se omiten por claridad. *b*) Los rayos de luz láser entran al agua en la pecera desde arriba; se reflejan en el fondo en los espejos inclinados con ángulos ligeramente distintos. Un rayo experimenta reflexión interna total en la interfase aire-agua.

a) Reflexión interna total



b) Reflexión interna total demostrada con un láser, espejos y agua en una pecera



del segundo material b con índice n_b, donde $n_a > n_b$. (Los materiales a y b podrían ser agua y aire, respectivamente). Según la ley de Snell de la refracción,

$$\operatorname{sen}\theta_b = \frac{n_a}{n_b}\operatorname{sen}\theta_a$$

Como n_a/n_b es mayor que la unidad, sen θ_b es mayor que sen θ_a; el rayo se desvía *apartándose* de la normal. Así, debe haber algún valor de θ_a *menor que* 90° para el cual sen $\theta_b = 1$ y $\theta_b = 90°$. Esto se ilustra con el rayo 3 en el diagrama, que emerge rozando apenas la superficie con un ángulo de refracción de 90°. Compare la figura 33.13*a* con la fotografía de los rayos de luz en la figura 33.13*b*.

El ángulo de incidencia para el cual el rayo refractado emerge en forma tangencial a la superficie se llama **ángulo crítico**, y se denota con $\theta_{\text{crít}}$. (Un análisis más detallado usando las ecuaciones de Maxwell demuestra que conforme el ángulo de incidencia se aproxima al ángulo crítico, la intensidad transmitida tiende a cero). Si el ángulo de incidencia es *mayor* que el ángulo crítico, el seno del ángulo de refracción, de acuerdo con la ley de Snell, tendría que ser mayor que la unidad, lo cual es imposible. Más allá del ángulo crítico, el rayo *no puede* pasar hacia el material ubicado en la parte superior: queda atrapado en el material de la parte inferior y se refleja por completo en la frontera de la superficie. Esta situación, llamada **reflexión interna total**, solo ocurre cuando un rayo en el material a incide sobre un segundo material b cuyo índice de refracción es *menor* que el del material a (es decir, $n_b < n_a$).

Se puede obtener el ángulo crítico para dos materiales dados a y b si se iguala $\theta_b = 90°$ (sen $\theta_b = 1$) en la ley de Snell. De esta forma, se tiene

$$\operatorname{sen}\theta_{\text{crít}} = \frac{n_b}{n_a} \qquad \text{(ángulo crítico para la reflexión interna total)} \qquad (33.6)$$

La reflexión interna total ocurrirá si el ángulo de incidencia θ_a es mayor o igual que $\theta_{\text{crít}}$.

Aplicaciones de la reflexión interna total

La reflexión interna total tiene numerosas aplicaciones en la tecnología óptica. Por ejemplo, considere un vidrio cuyo índice de refracción es $n = 1.52$. Si la luz que se propaga dentro de este vidrio encuentra una interfase vidrio-aire, el ángulo crítico es:

$$\operatorname{sen}\theta_{\text{crít}} = \frac{1}{1.52} = 0.658 \qquad \theta_{\text{crít}} = 41.1°$$

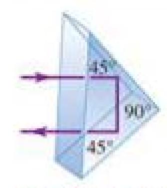
La luz *se reflejará totalmente* si incide en la superficie vidrio-aire con un ángulo de 41.1° o mayor. Puesto que el ángulo crítico es un poco menor de 45°, es posible usar un prisma con ángulos de 45° − 45° − 90° como superficie totalmente reflectante. Como reflectores, los prismas totalmente reflectantes tienen ciertas ventajas sobre las superficies metálicas, como los espejos comunes de vidrio con un recubrimiento. Mientras que ninguna superficie metálica refleja el 100% de la luz que incide sobre ella, un prisma puede reflejar *totalmente* la luz. Las propiedades reflectantes de un prisma son permanentes y no se deterioran por empañamiento.

Un prisma de 45° − 45° − 90°, usado como en la figura 33.14*a*, se llama prisma de *Porro*. La luz entra y sale en ángulos rectos con respecto a la hipotenusa y se refleja totalmente en cada una de las caras más cortas. El cambio total de la dirección de los rayos es de 180°. Es frecuente que los binoculares usen combinaciones de dos prismas de Porro como en la figura 33.14*b*.

Cuando un rayo de luz entra por el extremo de una varilla transparente (figura 33.15), la luz se refleja por completo internamente si el índice de refracción de la varilla es mayor que el del material circundante. La luz queda "atrapada" dentro de la varilla aun si esta se curva, siempre que la curvatura no sea muy grande. Una varilla

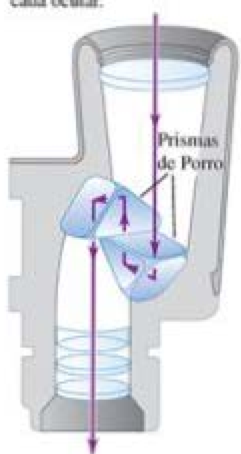
33.14 *a*) Reflexión interna total en un prisma de Porro. *b*) Combinación de dos prismas de Porro en los binoculares.

a) Reflexión interna total en un prisma de Porro

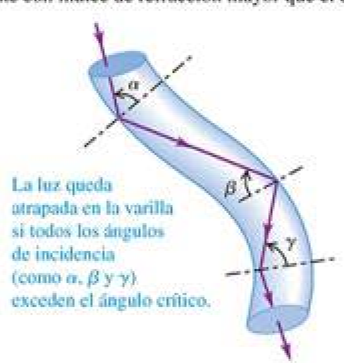


Si el rayo incidente está orientado como se ilustra, la reflexión interna total ocurre en las caras a 45° (porque para una interfase vidrio-aire, $\theta_{\text{crít}} = 41.1$).

b) Los binoculares utilizan prismas de Porro para reflejar la luz hacia cada ocular.

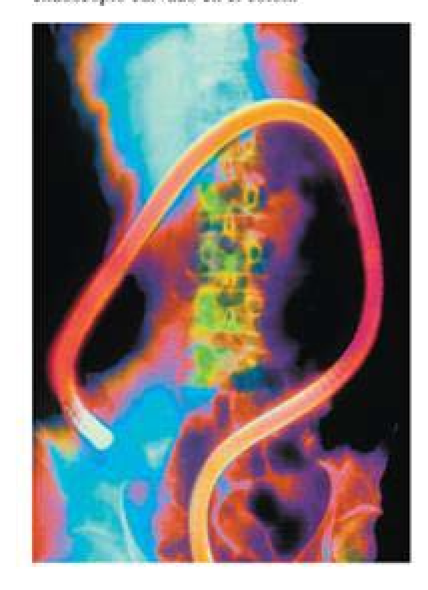


33.15 Varilla transparente con índice de refracción mayor que el del material circundante.



con estas características en ocasiones recibe el nombre de *tubo de luz*. Un manojo de fibras finas de vidrio o de plástico se comporta del mismo modo y tiene la ventaja de ser flexible. Un manojo puede estar formado por miles de fibras individuales, cada una del orden de 0.002 a 0.01 mm de diámetro. Si las fibras se acomodan en el manojo de manera que las posiciones relativas en sus extremos sean las mismas (imágenes especulares), el manojo puede transmitir una imagen.

33.16 Esta imagen a colores de rayos x del abdomen de un paciente muestra un endoscopio curvado en el colon.



Los dispositivos de fibra óptica tienen muchas aplicaciones médicas en los instrumentos llamados *endoscopios*, los cuales se pueden insertar directamente en los tubos bronquiales, la vejiga, el colon y otros órganos para efectuar un examen visual directo (figura 33.16). Incluso es posible introducir un manojo de fibras en una aguja hipodérmica para estudiar los tejidos y vasos sanguíneos que hay muy por debajo de la piel.

La fibra óptica también tiene aplicaciones en los sistemas de comunicación, en los cuales se usa para transmitir un rayo láser modulado. La rapidez con la que una onda (ya sea de luz, de radio o de otro tipo) puede transmitir información es proporcional a la frecuencia. Para comprender por qué, en términos cualitativos, considere la modulación (modificación) de la onda por medio del recorte de algunas de sus crestas. Suponga que cada cresta representa un dígito binario: una cresta recortada representa un 0 y una cresta sin modificar representa un 1. El número de dígitos binarios que podemos transmitir por unidad de tiempo es, por consiguiente, proporcional a la frecuencia de la onda. Las ondas de luz infrarroja y visible tienen una frecuencia mucho mayor que las ondas de radio, de manera que un rayo láser modulado puede transmitir una cantidad enorme de información a través de un solo cable de fibra óptica.

Otra ventaja de las fibras ópticas es que se pueden hacer más delgadas que el alambre de cobre convencional, por lo que es posible agrupar más fibras en un cable de un diámetro dado. Así, más señales distintas (por ejemplo, diferentes líneas telefónicas) se pueden enviar por el mismo cable. Como los cables de fibra óptica son aislantes eléctricos, son inmunes a la interferencia eléctrica proveniente de los relámpagos y otras fuentes, y no permiten corrientes indeseables entre el emisor y el receptor. Por estas y otras razones, los cables de fibra óptica tienen un papel cada vez más importante en la telefonía de larga distancia, la televisión y la comunicación por Internet.

33.17 Para maximizar su brillo, los diamantes se cortan de manera que haya una reflexión interna total en sus superficies posteriores.



La reflexión interna total también desempeña un papel importante en el diseño de joyería. El brillo de un diamante se debe en gran medida a su alto índice de refracción ($n = 2.417$) y al pequeño ángulo crítico correspondiente. La luz que entra a través de un diamante cortado se refleja por completo internamente en las facetas de su superficie posterior, y luego sale por la superficie anterior (figura 33.17). Las gemas "imitación de diamante", como la circonia cúbica, están elaboradas con materiales cristalinos menos costosos y con índices de refracción comparables.



Ejemplo conceptual 33.4 Un periscopio con fugas

El periscopio de un submarino usa dos prismas totalmente reflectantes de 45° – 45° – 90° con reflexión interna total en los lados adyacentes a los ángulos de 45°. Explique por qué el periscopio deja de funcionar si se presenta una fuga y el prisma inferior queda cubierto por el agua.

SOLUCIÓN

El ángulo crítico del agua ($n_b = 1.33$) sobre vidrio ($n_a = 1.52$) es

$$\theta_{crit} = \text{arcsen}\frac{1.33}{1.52} = 61.0^\circ$$

El ángulo de incidencia de 45° en un prisma totalmente reflectante es *más pequeño que* el ángulo crítico de 61.0°, así que no hay reflexión in-terna total en la interfase vidrio-agua. La mayor parte de la luz se transmite hacia el agua, y muy poca se refleja de regreso al prisma.

Evalúe su comprensión de la sección 33.3 ¿En cuál de las siguientes situaciones hay reflexión interna total? **i.** Luz que se propaga en agua ($n = 1.33$) incide en una interfase agua-aire con un ángulo de 70°; **ii.** luz que se propaga en vidrio ($n = 1.52$) incide en una interfase vidrio-agua con un ángulo de 70°; **iii.** luz que se propaga en agua incide en una interfase agua-vidrio con un ángulo de 70°.

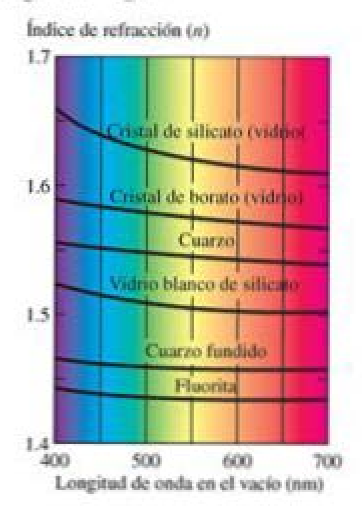
33.4 Dispersión

La luz blanca ordinaria es una superposición de ondas con longitudes de onda que se extienden a través de todo el espectro visible. La rapidez de la luz *en el vacío* es la misma para todas las longitudes de onda, pero la rapidez en una sustancia material es diferente para distintas longitudes de onda. En consecuencia, el índice de refracción de un material depende de la longitud de onda. La dependencia de la rapidez de onda y del índice de refracción de la longitud de onda se llama **dispersión**.

La figura 33.18 muestra la variación del índice de refracción n con la longitud de onda en algunos materiales ópticos comunes. Observe que el eje horizontal de la figura es la longitud de onda de la luz *en el vacío*, λ_0; la longitud de onda en el material está dada por la ecuación (33.5), $\lambda = \lambda_0/n$. En la mayoría de los materiales, el valor de n *disminuye* al aumentar la longitud de onda y disminuir la frecuencia; por lo tanto, n *aumenta* al disminuir la longitud de onda y aumentar la frecuencia. En un material de ese tipo, la luz de mayor longitud de onda tiene una rapidez mayor que la luz de longitud de onda más corta.

La figura 33.19 muestra un rayo de luz blanca que incide sobre un prisma. La desviación (esto es, el cambio de dirección) que produce el prisma aumenta al incrementarse el índice de refracción y la frecuencia y al disminuir la longitud de onda. La luz violeta es la que se desvía en mayor grado, y la roja es la que se desvía menos; otros colores están en posiciones intermedias. Cuando sale del prisma, la luz se dispersa en un rayo con forma de abanico, como se ilustra. Se dice que la luz se *dispersa* en un espectro. La cantidad de dispersión depende de la *diferencia* entre los índices de refracción para la luz violeta y para la luz roja. En la figura 33.18 se observa que para una sustancia como la fluorita, la diferencia entre los índices para el rojo y el violeta es pequeña, y la dispersión también será mínima. Una mejor elección del material para un prisma cuya finalidad es generar un espectro sería el cristal de silicato, para el que hay una mayor diferencia en el valor de n entre el rojo y el violeta.

33.18 Variación del índice de refracción n con la longitud de onda para distintos materiales transparentes. El eje horizontal muestra la longitud de onda λ_0 de la luz *en el vacío*; la longitud de onda en el material es igual a $\lambda = \lambda_0/n$.





33.19 Dispersión de la luz a través de un prisma. La banda de colores se llama espectro.

Como se mencionó en la sección 33.3, el brillo del diamante se debe en parte a su inusual índice de refracción tan grande; otro factor importante es su gran dispersión, la cual ocasiona que la luz que entra al diamante salga como un espectro multicolor. Los cristales de rutilo y de titanato de estroncio, los cuales se producen de forma sintética, tienen alrededor de ocho veces la dispersión del diamante.

Arcoíris

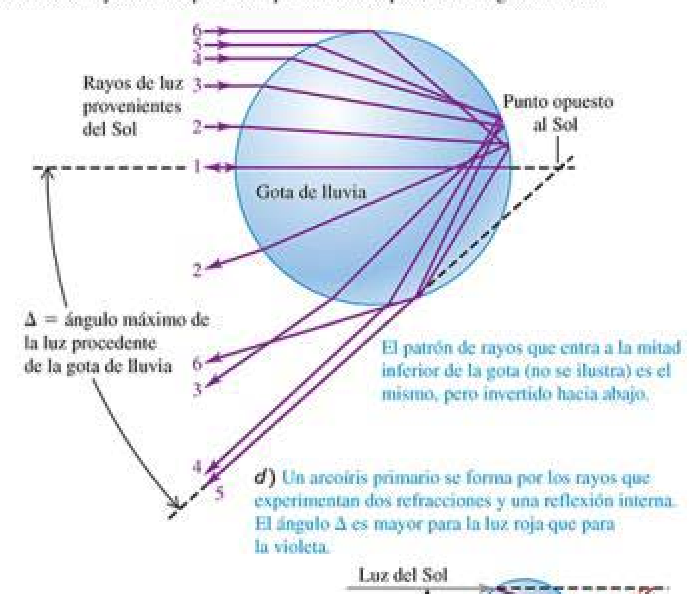
Cuando usted presencia la belleza de un arcoíris, como el de la figura 33.20*a*, observa los efectos combinados de la dispersión, la refracción y la reflexión. La luz proveniente de atrás del observador entra en una gota de agua, se refleja (parcialmente) en la superficie posterior de esta, y se refracta otra vez al salir de ella (figura 33.20*b*). Un rayo de luz que entra por el punto medio de la gota se refleja directamente de regreso. Los demás rayos salen de la gota con un ángulo Δ con respecto al rayo medio, y muchos rayos se "apilan" en el ángulo Δ. Lo que se ve es un disco de luz de radio

33.20 Cómo se forma el arcoíris.

a) Arcoíris doble



b) Trayectorias de rayos de luz que entran por la mitad superior de una gota de lluvia

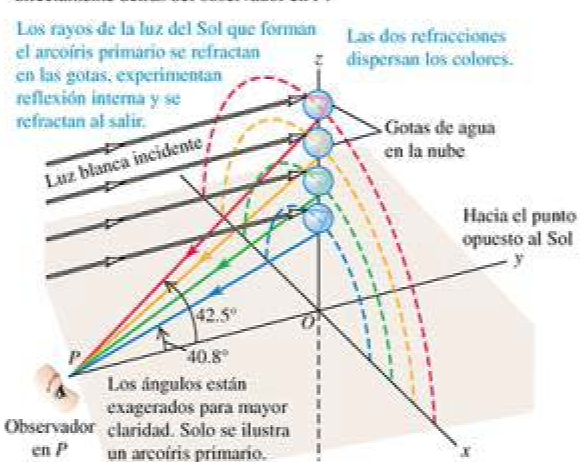


d) Un arcoíris primario se forma por los rayos que experimentan dos refracciones y una reflexión interna. El ángulo Δ es mayor para la luz roja que para la violeta.

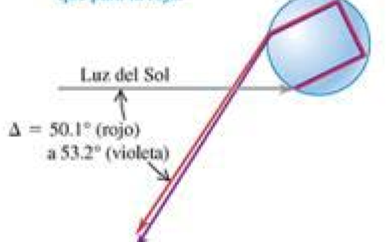
Luz del Sol

Δ = 40.8° (violeta) a 42.5° (rojo)

c) Formación de un arcoíris. En esta ilustración, el Sol está directamente detrás del observador en *P*.



e) Un arcoíris secundario se forma por los rayos que experimentan dos refracciones y dos reflexiones internas. El ángulo Δ es mayor para la luz violeta que para la roja.



angular Δ con centro en el punto bajo del Sol (el punto en el cielo opuesto al Sol); debido al "apilamiento" de los rayos luminosos, el disco tiene su brillo máximo alrededor de su borde, el cual vemos como el arcoíris (figura 33.20*c*). Como ninguna luz llega al ojo en ángulos mayores que Δ, el cielo parece oscuro afuera del arcoíris (véase la figura 33.20*a*). El valor del ángulo Δ depende del índice de refracción del agua que forma las gotas, el cual a la vez depende de la longitud de onda (figura 33.20*d*). El disco brillante de luz roja es un poco mayor que el de luz naranja, que a la vez es algo mayor que el de la luz amarilla, y así sucesivamente. Como resultado, el observador ve al arcoíris como una banda de colores.

En muchos casos es posible ver un segundo arcoíris más grande. Este es el resultado de la dispersión, la refracción y *dos* reflexiones en la superficie posterior de la gota (figura 33.20*e*). Cada vez que un rayo de luz incide en la superficie posterior, parte de la luz se refracta hacia afuera de la gota (no se muestra en la figura 33.20); después de dos de estas incidencias, relativamente poca luz queda dentro de la gota y, por eso, el arcoíris secundario es notablemente más tenue que el arcoíris primario. Así como un espejo colocado frente a un libro invierte las letras impresas, la segunda reflexión invierte la secuencia de colores en el arcoíris secundario. Se puede observar este efecto en la figura 33.20*a*.

33.5 Polarización

MasteringPHYSICS

ActivPhysics 16.9: Physical Optics: Polarization

La *polarización* es una característica de todas las ondas transversales. Este capítulo trata sobre la luz, pero para presentar algunos conceptos básicos acerca de la polarización, volvamos a las ondas transversales en una cuerda que estudiamos en el capítulo 15 (vol. 1). En el caso de una cuerda que esté en equilibrio a lo largo del eje x, los desplazamientos pueden ocurrir a lo largo de la dirección y, como en la figura 33.21*a*. En este caso, la cuerda siempre queda en el plano xy. Pero los desplazamientos pueden ser a lo largo del eje z como en la figura 33.21*b*; en tal caso, la cuerda siempre se encuentra en el plano xz.

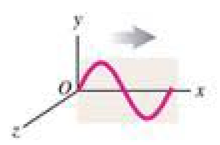
Cuando una onda solo tiene desplazamientos en y, se dice que está **linealmente polarizada** en la dirección y; una onda con desplazamientos solo en z está linealmente polarizada en esa dirección. Para las ondas mecánicas es posible construir un **filtro polarizador**, o **polarizador** simplemente, que permita que solo pasen ondas con cierta dirección de polarización. En la figura 33.21*c* la cuerda puede deslizarse verticalmente en la ranura sin fricción, pero no es posible ningún movimiento horizontal. Este filtro deja pasar ondas polarizadas en la dirección y, pero bloquea las ondas polarizadas en la dirección z.

Este mismo lenguaje se puede aplicar a las ondas electromagnéticas que presentan polarización. Como se vio en el capítulo 32, una onda electromagnética es una onda *transversal*; los campos eléctrico y magnético fluctuantes son perpendiculares entre sí y a la dirección de propagación. Siempre se define la dirección de polarización de una onda electromagnética como la dirección del vector del campo *eléctrico* $\vec{E}$, no del campo magnético, porque muchos detectores comunes de una onda electromagnética responden a las fuerzas eléctricas de los electrones en los materiales y no a las fuerzas magnéticas. Así, la onda electromagnética descrita por la ecuación (32.17),

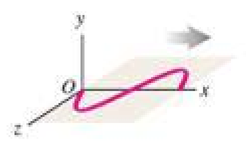
$$\vec{E}(x,t) = \hat{\jmath}E_{\text{máx}}\cos(kx - \omega t)$$
$$\vec{B}(x,t) = \hat{k}B_{\text{máx}}\cos(kx - \omega t)$$

33.21 *a*), *b*) Ondas polarizadas en una cuerda. *c*) Formación de una onda polarizada en una cuerda a partir de otra no polarizada por medio de un filtro polarizador.

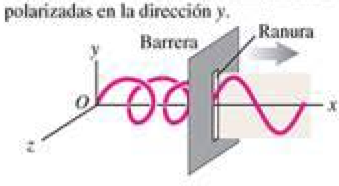
a) Onda transversal linealmente polarizada en la dirección y



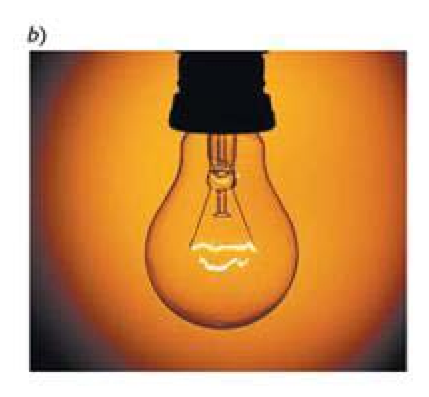
b) Onda transversal linealmente polarizada en la dirección z



c) La ranura funciona como filtro polarizador dejando pasar solamente las componentes polarizadas en la dirección y.







33.22 *a*) Los electrones en la antena de telecomunicaciones de color rojo y blanco oscilan verticalmente y producen ondas electromagnéticas verticalmente polarizadas que se propagan desde la antena en dirección horizontal. (Las pequeñas antenas grises son para transmitir señales de telefonía móvil). *b*) Sin importar cómo esté orientada esta bombilla eléctrica, el movimiento aleatorio de los electrones en el filamento produce ondas luminosas no polarizadas.

se dice que está polarizada en la dirección *y* porque el campo eléctrico solo tiene componente *y*.

CUIDADO **Significado de "polarización"** Es poco afortunado el hecho de que la misma palabra "polarización", que se usa para describir la dirección de $\vec{E}$ en una onda electromagnética, también se utilice para describir el desplazamiento de la carga eléctrica dentro de un cuerpo, como el que ocurre en respuesta a la proximidad de otro cuerpo con carga; en la sección 21.2 se describió esta última clase de polarización (véase la figura 21.7). El lector debe recordar que aun cuando estos dos conceptos tengan el mismo nombre, no describen el mismo fenómeno.

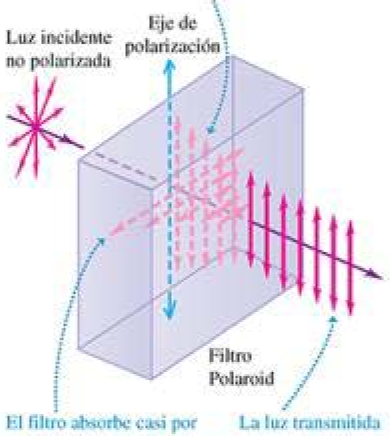
Filtros polarizadores

Las ondas emitidas por un transmisor de radio por lo general están linealmente polarizadas. Las antenas verticales que se usan para las transmisiones de radiodifusión emiten ondas que, en un plano horizontal alrededor de la antena, están polarizadas en dirección vertical (paralelas a la antena; figura 33.22*a*).

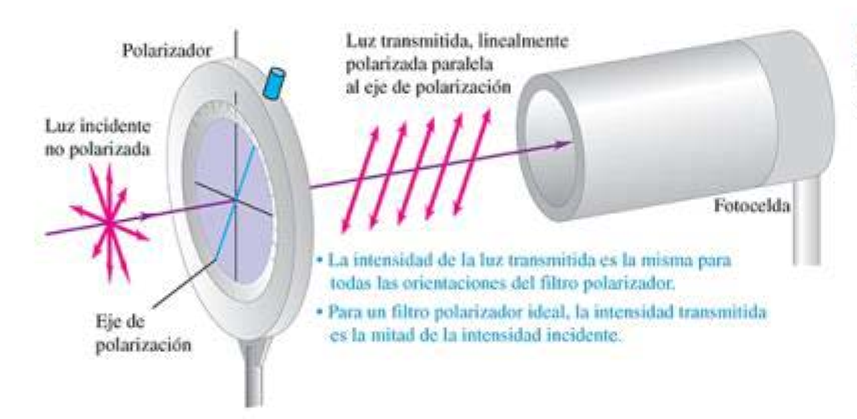
La situación es diferente para la luz visible. La luz de las bombillas eléctricas incandescentes y de las lámparas fluorescentes *no* está polarizada (figura 33.22*b*). Las "antenas" que irradian ondas luminosas son las moléculas que constituyen las fuentes. Las ondas emitidas por cualquier molécula pueden estar linealmente polarizadas, como las de una antena de radio. Pero cualquier fuente luminosa real contiene un número enorme de moléculas con orientaciones al azar, por lo que la luz emitida es una mezcla aleatoria de ondas linealmente polarizadas en todas las direcciones transversales posibles. Esa luz se llama **luz no polarizada** o **luz natural**. Para crear luz polarizada a partir de luz natural no polarizada se requiere un filtro análogo a la ranura para ondas mecánicas de la figura 33.21*c*.

Los filtros polarizadores para las ondas electromagnéticas están construidos de diferentes modos, dependiendo de la longitud de onda. Para las microondas con longitud de onda de unos cuantos centímetros, un buen polarizador es un arreglo de alambres conductores paralelos, estrechamente espaciados y que estén aislados uno de otro. (Piense en una parrilla para asar carne en la que el anillo metálico exterior se ha sustituido por un anillo aislante). Los electrones tienen libertad de movimiento a lo largo de la longitud de los alambres conductores y lo harán en respuesta a una onda cuyo campo $\vec{E}$ sea paralelo a los alambres. Las corrientes resultantes en los alambres disipan energía de acuerdo con I^2R por calentamiento; la energía disipada proviene de la onda, por lo que la amplitud de cualquier onda que pase a través de la rejilla se reduce considerablemente. Las ondas con $\vec{E}$ orientado en forma perpendicular a los alambres pasan prácticamente intactas, ya que los electrones no se pueden desplazar a través del aire que separa los alambres. Por consiguiente, una onda que pase a través de un filtro de este tipo estará polarizada predominantemente en la dirección perpendicular a los alambres.

33.23 Un filtro Polaroid es iluminado por luz natural no polarizada (ilustrado por los vectores $\vec{E}$ que apuntan en todas las direcciones perpendiculares a la dirección de propagación). La luz transmitida está linealmente polarizada a lo largo del eje de polarización (ilustrado por los vectores $\vec{E}$ a lo largo de la dirección de polarización solamente).



El filtro polarizador más común para la luz visible es el material conocido con el nombre comercial de Polaroid, que se usa mucho en los anteojos de sol y en los filtros polarizadores para lentes de cámaras fotográficas. Este material, desarrollado por primera vez por el científico estadounidense Edwin H. Land, incorpora sustancias que presentan **dicroísmo**, la absorción selectiva en la que una de las componentes polarizadas se absorbe con mucho mayor intensidad que la otra (figura 33.23). Un filtro Polaroid transmite el 80% o más de la intensidad de una onda que esté polarizada en forma paralela a cierto eje en el material, llamado **eje de polarización**, pero solo el



33.24 La luz natural no polarizada incide sobre el filtro polarizador. La fotocelda mide la intensidad de la luz linealmente polarizada que se transmite.

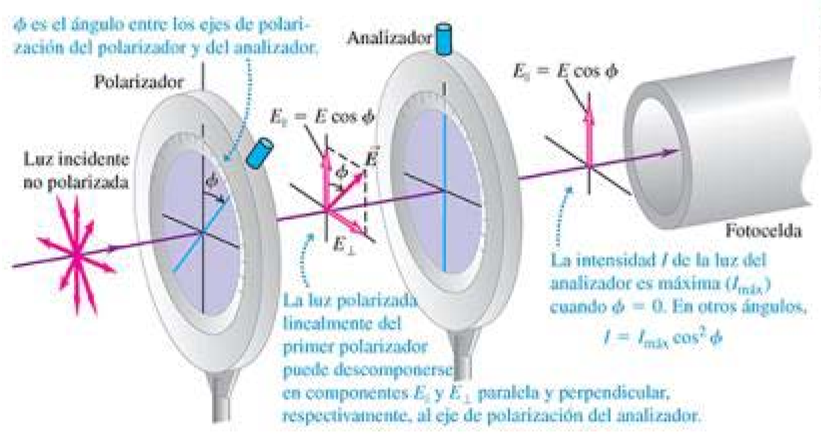
1% o menos de las ondas polarizadas perpendiculares a ese eje. En un tipo de filtro Polaroid hay largas cadenas de moléculas dentro del filtro, que están orientadas con su eje perpendicular al eje de polarización; estas moléculas absorben preferentemente luz polarizada a lo largo de ellas, en forma muy parecida a los alambres conductores de un filtro polarizador para microondas.

Uso de filtros polarizadores

Un filtro polarizador *ideal* (polarizador) deja pasar el 100% de la luz incidente que esté polarizada en forma paralela al eje de polarización del filtro, pero bloquea por completo toda la luz polarizada en forma perpendicular a ese eje. Tal dispositivo es una idealización inalcanzable, pero el concepto es útil para aclarar algunas ideas fundamentales. En la siguiente explicación supondremos que todos los filtros polarizadores son ideales. En la figura 33.24 la luz no polarizada incide sobre un filtro polarizador plano. El vector $\vec{E}$ de la onda incidente se puede representar en términos de las componentes paralela y perpendicular al eje de polarización (mostrado en color azul); solo se transmite la componente de $\vec{E}$ paralela al eje de polarización. Así, la luz que sale del polarizador está linealmente polarizada en forma paralela al eje de polarización.

Cuando la luz no polarizada incide en un polarizador ideal como el de la figura 33.24, la intensidad de la luz transmitida es *exactamente la mitad* de la luz incidente no polarizada, sin importar cómo se oriente el eje de polarización. La razón es la siguiente: podemos descomponer el campo $\vec{E}$ de la onda incidente en una componente paralela al eje de polarización y otra perpendicular a este. Como la luz incidente es una mezcla aleatoria de todos los estados de polarización, estas dos componentes son iguales en promedio. El polarizador ideal transmite solo la componente que es paralela al eje de polarización, por lo que solo se transmite la mitad de la intensidad incidente.

¿Qué sucede cuando la luz linealmente polarizada que sale de un polarizador pasa a través de un segundo polarizador, o *analizador*, como se ilustra en la figura 33.25? Suponga que el eje de polarización del analizador forma un ángulo ϕ con el eje de polarización del primer polarizador. Podemos descomponer la luz linealmente polari-



33.25 Un analizador ideal transmite solo la componente del campo eléctrico paralela a su dirección de transmisión (es decir, su eje de polarización).



33.26 Estas fotografías muestran la visión a través de anteojos para sol Polaroid cuyos ejes de polarización están alineados ($\phi = 0$; imagen izquierda) y son perpendiculares ($\phi = 90°$; imagen derecha). La intensidad transmitida es máxima cuando los ejes están alineados, y es cero cuando los ejes son perpendiculares.



Video Tutor Demo

zada que es transmitida por el primer polarizador en dos componentes, como se aprecia en la figura 33.25, una paralela y la otra perpendicular al eje del analizador. Solo la componente paralela, con amplitud $E \cos \phi$, es transmitida por el analizador. La intensidad transmitida es máxima cuando $\phi = 0$, y es igual a cero cuando el polarizador y el analizador están *cruzados* de manera que $\phi = 90°$ (figura 33.26). Para determinar la dirección de polarización de la luz transmitida por el primer polarizador, se hace girar el analizador hasta que la fotocelda de la figura 33.25 mida una intensidad igual a cero; el eje de polarización del primer polarizador es, entonces, perpendicular al del analizador.

Para determinar la intensidad transmitida con valores intermedios del ángulo ϕ, recordemos nuestra explicación acerca de la energía en la sección 32.4, donde dijimos que la intensidad de una onda electromagnética es proporcional al *cuadrado* de la amplitud de la onda [véase la ecuación (33.29)]. La razón entre la *amplitud* transmitida y la incidente es $\cos \phi$, por lo que la razón entre la *intensidad* transmitida y la incidente es $\cos^2 \phi$, así que la intensidad de la luz transmitida a través del analizador es

$$I = I_{\text{máx}} \cos^2 \phi \quad \text{(ley de Malus, luz polarizada que pasa a través de un analizador)} \tag{33.7}$$

donde $I_{\text{máx}}$ es la intensidad máxima de la luz transmitida (en $\phi = 0$), e I es la cantidad transmitida con el ángulo ϕ. Esta relación, que descubrió experimentalmente Etienne Louis Malus en 1809, se llama **ley de Malus**. La ley de Malus *solo* se aplica si la luz incidente que pasa a través del analizador ya está linealmente polarizada.

Estrategia para resolver problemas 33.2 Polarización lineal



IDENTIFICAR *los conceptos relevantes:* En todas las ondas electromagnéticas, incluidas las ondas luminosas, la dirección del campo $\vec{E}$ es la dirección de polarización y es perpendicular a la dirección de propagación. Cuando se trabaja con polarizadores, en realidad se está tratando con las componentes de $\vec{E}$ paralela y perpendicular al eje de polarización.

PLANTEAR *el problema* de acuerdo con los siguientes pasos:

1. Comience por hacer un diagrama grande y nítido. Indique todos los ángulos conocidos, incluidos los ángulos de todos los ejes de polarización.
2. Identifique las incógnitas.

EJECUTAR *la solución* como sigue:

1. Recuerde que un polarizador solo deja pasar componentes del campo eléctrico paralelas a su eje de polarización.
2. Si la luz incidente está linealmente polarizada y tiene amplitud E e intensidad $I_{\text{máx}}$, la luz que pasa a través de un polarizador ideal tiene una amplitud $E \cos \phi$ e intensidad $I_{\text{máx}} \cos^2 \phi$, donde ϕ es el ángulo entre la dirección de polarización incidente y el eje de polarización del filtro.
3. La luz no polarizada es una mezcla aleatoria de todos los estados posibles de polarización, por lo que, en promedio, tiene componentes iguales en dos direcciones perpendiculares cualesquiera. Cuando pasa a través de un polarizador ideal, la luz no polarizada se convierte en linealmente polarizada con la mitad de la intensidad de incidencia. La luz linealmente polarizada en forma parcial es una superposición de luz polarizada en forma lineal y luz no polarizada.
4. La intensidad (potencia media por unidad de área) de una onda es proporcional al *cuadrado* de su amplitud. Si usted encuentra que dos ondas difieren en amplitud por un determinado factor, sus intensidades diferirán por el cuadrado de ese factor.

EVALUAR *la respuesta:* Verifique su respuesta buscando errores evidentes. Si los resultados dicen que la luz que sale de un polarizador tiene mayor intensidad que la luz incidente, algo es incorrecto: un polarizador no puede agregar energía a una onda luminosa.



Ejemplo 33.5 Combinación de dos polarizadores

En la figura 33.25, la luz incidente no polarizada tiene una intensidad I_0. Determine las intensidades transmitidas por el primero y segundo polarizadores si el ángulo entre los ejes de los dos filtros es de 30°.

SOLUCIÓN

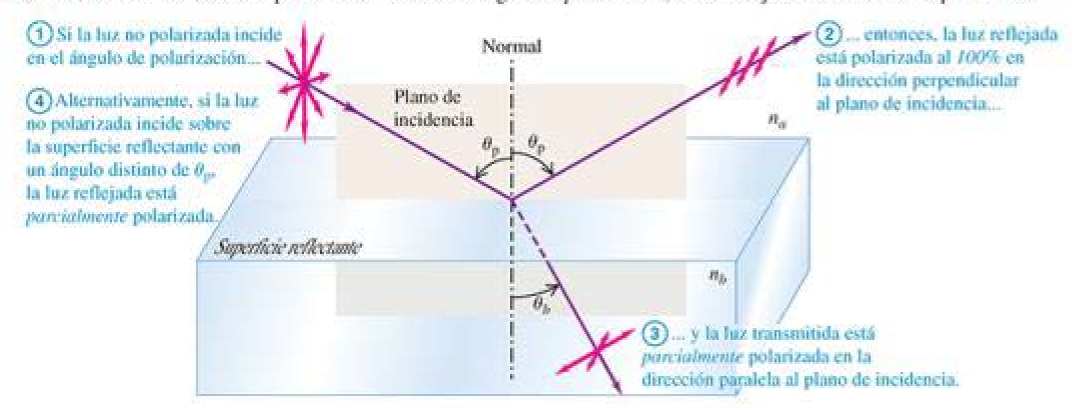
IDENTIFICAR y PLANTEAR: En este problema interviene un polarizador (un filtro polarizador en el que incide luz no polarizada, lo que produce luz polarizada) y un analizador (un segundo filtro polarizador en el cual incide la luz ya polarizada por el primero). Se conoce la intensidad I_0 de la luz incidente y el ángulo $\phi = 30°$ entre los ejes de los polarizadores. Se usa la ley de Malus, ecuación (33.7), para obtener las intensidades de la luz que sale de cada polarizador.

EJECUTAR: La luz incidente es no polarizada, de modo que la intensidad de la luz linealmente polarizada transmitida por el primer filtro es $I_0/2$. De acuerdo con la ecuación (33.7) con $\phi = 30°$, el segundo polarizador reduce la intensidad en un factor de $\cos^2 30° = \frac{3}{4}$. Por lo tanto, la intensidad transmitida por el segundo polarizador es

$$\left(\frac{I_0}{2}\right)\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{3}{8}I_0$$

EVALUAR: Observe que la intensidad disminuye después de cada paso a través de un polarizador. La única situación en la que la intensidad transmitida *no* disminuye es aquella en que el polarizador es ideal (de manera que no absorbe nada de la luz que pasa a través de él) y si la luz incidente está linealmente polarizada a lo largo del eje de polarización, de modo que $\phi = 0$.

33.27 Cuando la luz incide en una superficie reflectante en el ángulo de polarización, la luz reflejada está linealmente polarizada.



Polarización por reflexión

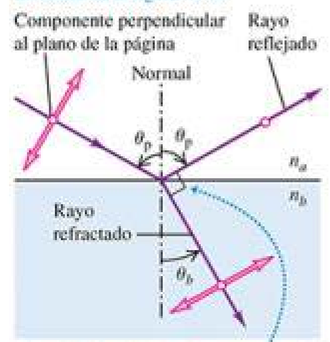
La luz no polarizada se puede polarizar, ya sea en forma parcial o total, mediante *reflexión*. En la figura 33.27, la luz natural no polarizada incide sobre una superficie reflectante entre dos materiales ópticos transparentes. Para la mayoría de los ángulos de incidencia, las ondas para las que el vector campo eléctrico $\vec{E}$ es perpendicular al plano de incidencia (es decir, paralelo a la superficie reflectante) se reflejan más fuertemente que aquellas cuyo $\vec{E}$ se encuentra en ese plano. En este caso, la luz reflejada está *parcialmente polarizada* en la dirección perpendicular al plano de incidencia.

Pero en cierto ángulo particular de incidencia, llamado **ángulo de polarización**, θ_p, la luz cuyo $\vec{E}$ se encuentra en el plano de incidencia *no se refleja en absoluto*, sino que se refracta por completo. A ese mismo ángulo de incidencia, la luz cuyo $\vec{E}$ es perpendicular al plano de incidencia se refleja parcialmente y la otra parte se refracta parcialmente. Por consiguiente, la luz *reflejada* está *completamente* polarizada en la dirección perpendicular al plano de incidencia, como se ilustra en la figura 33.27. La luz *refractada* (transmitida) está *parcialmente* polarizada en la dirección paralela a este plano; la luz refractada es una mezcla de la componente paralela al plano de incidencia (toda la cual se refracta) y el resto de la componente perpendicular.

En 1812 el científico británico Sir David Brewster descubrió que cuando el ángulo de incidencia es igual al ángulo de polarización θ_p, el rayo reflejado y el rayo refractado son perpendiculares entre sí (figura 33.28). En este caso, el ángulo de refracción θ_b es igual a $90° - \theta_p$. De acuerdo con la ley de refracción,

$$n_a \operatorname{sen}\theta_p = n_b \operatorname{sen}\theta_b$$

33.28 La importancia del ángulo de polarización. Los círculos abiertos representan una componente de $\vec{E}$ que es perpendicular al plano de la figura (el plano de incidencia) y paralela a la superficie que separa los dos materiales.



entonces obtenemos

$$n_a \operatorname{sen}\theta_p = n_b \operatorname{sen}(90^\circ - \theta_p) = n_b \cos\theta_p$$

$$\tan\theta_p = \frac{n_b}{n_a} \qquad \text{(ley de Brewster para el ángulo de polarización)} \qquad (33.8)$$

Esta relación se conoce como **ley de Brewster**. Aunque se descubrió en forma experimental, también puede *deducirse* a partir de un modelo de onda empleando las ecuaciones de Maxwell.

La polarización por reflexión es la razón por la que los filtros polarizadores se usan tanto en los anteojos de sol (figura 33.26). Cuando la luz solar se refleja en una superficie horizontal, el plano de incidencia es vertical, y la luz reflejada contiene predominantemente luz que está polarizada en la dirección horizontal. Cuando la reflexión ocurre en una carretera asfáltica lisa o en la superficie de un lago, produce reflejos indeseables, que se manifiesta como un deslumbramiento. La visión mejora si se elimina este deslumbramiento. El fabricante hace que el eje de polarización del material de los anteojos sea vertical, por lo que muy poca de la luz polarizada horizontalmente que se refleja en la carretera se transmite a los ojos. Los anteojos también reducen la intensidad total de la luz transmitida a un poco menos del 50% de la intensidad de la luz incidente no polarizada.

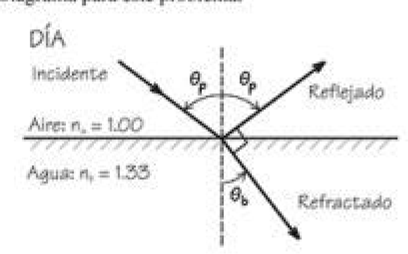
Ejemplo 33.6 Reflexión en la superficie de una alberca

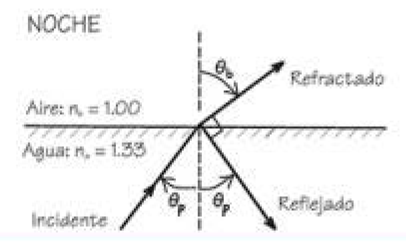
La luz del Sol se refleja en la superficie lisa de una alberca. *a*) ¿Con qué ángulo de reflexión se polariza completamente la luz reflejada? *b*) ¿Cuál es el ángulo correspondiente de refracción? *c*) De noche se enciende un reflector subacuático en la alberca. Repita los incisos *a*) y *b*) para los rayos del reflector que llegan a la superficie desde abajo.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Este problema se relaciona con la polarización por reflexión en una interfase aire-agua en los incisos *a*) y *b*), y en una interfase agua-aire en el inciso *c*). La figura 33.29 muestra los diagramas. En ambos casos nuestra primera incógnita es el ángulo de polarización θ_p, el cual se obtiene usando la ley de Brewster, ecuación (33.8). Para este ángulo de reflexión, el ángulo de refracción θ_b es el complemento de θ_p (es decir, $\theta_b = 90^\circ - \theta_p$).

33.29 Diagrama para este problema.





EJECUTAR: *a*) Durante el día (como se ilustra en la parte superior de la figura 33.29), la luz pasa del aire al agua, así que $n_a = 1.00$ (aire) y $n_b = 1.33$ (agua). De acuerdo con la ecuación (33.8),

$$\theta_p = \arctan\frac{n_b}{n_a} = \arctan\frac{1.33}{1.00} = 53.1^\circ$$

b) La luz incidente está en el ángulo de polarización, por lo que los rayos reflejado y refractado son perpendiculares; por lo tanto,

$$\theta_b = 90^\circ - \theta_p = 90^\circ - 53.1^\circ = 36.9^\circ$$

c) Durante la noche (como se ilustra en la parte inferior de la figura 33.29), la luz se mueve del agua hacia el aire, por lo que $n_a = 1.33$ y $n_b = 1.00$. De nuevo, utilizando la ecuación (33.8), se obtiene

$$\theta_p = \arctan\frac{1.00}{1.33} = 36.9^\circ$$
$$\theta_b = 90^\circ - 36.9^\circ = 53.1^\circ$$

EVALUAR: La respuesta para el inciso *b*) se puede comprobar con la ley de Snell, $n_a \operatorname{sen}\theta_a = n_b \operatorname{sen}\theta_b$, despejando θ_b:

$$\operatorname{sen}\theta_b = \frac{n_a \operatorname{sen}\theta_p}{n_b} = \frac{1.00 \operatorname{sen} 53.1^\circ}{1.33} = 0.600$$
$$\theta_b = \operatorname{arcsen}(0.600) = 36.9^\circ$$

Observe que los dos ángulos de polarización que se obtuvieron en los incisos *a*) y *c*) suman 90°. Esto *no* es casualidad; ¿sabe usted por qué?

Polarización circular y elíptica

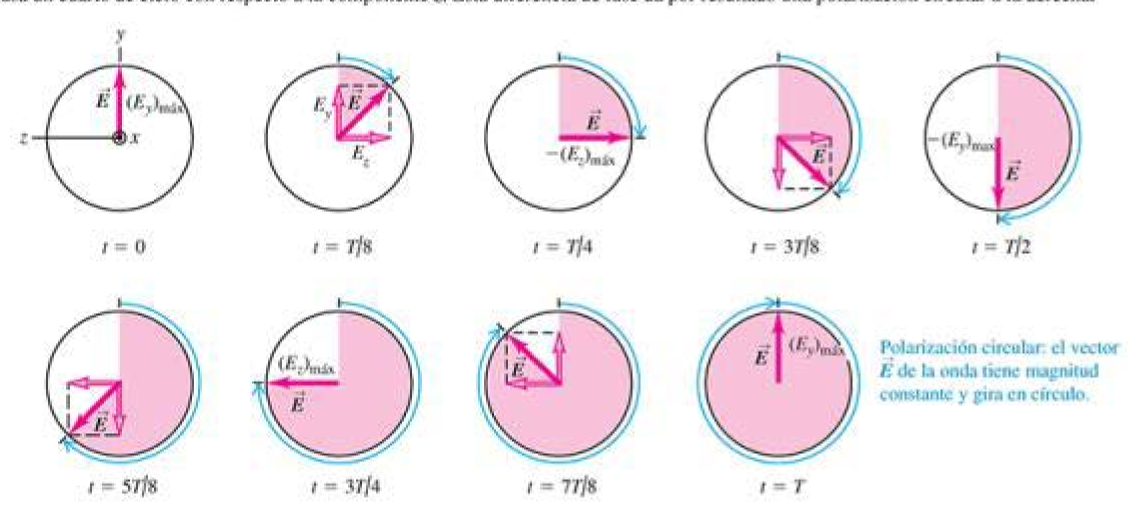
La luz y otro tipo de radiación electromagnética también pueden tener polarización *circular* o *elíptica*. Para introducir estos conceptos, volvamos una vez más a las ondas mecánicas en una cuerda estirada. En la figura 33.21, suponga que las dos ondas linealmente polarizadas de los incisos *a*) y *b*) están en fase y tienen la misma amplitud. Cuando se superponen, cada punto de la cuerda tiene desplazamientos y y z simultáneos de igual magnitud. Si reflexionamos un poco, vemos que la onda resultante se encuentra en un plano orientado a 45° con respecto a los ejes y y z (es decir, en un plano que forma un ángulo de 45° con los planos xy y xz). La amplitud de la onda resultante es $\sqrt{2}$ veces más grande que cualquiera de las ondas componentes, y la onda resultante está linealmente polarizada.

Pero ahora suponga que las dos ondas de igual amplitud difieren en su fase por un cuarto de ciclo. En ese caso, el movimiento resultante de cada punto corresponde a una superposición de dos movimientos armónicos simples en ángulo recto, con una diferencia de fase de un cuarto de ciclo. El desplazamiento y en un punto es máximo en los momentos en que el desplazamiento z es igual a 0, y viceversa. Entonces, el movimiento de la cuerda como un todo ya no tiene lugar en un solo plano. Puede demostrarse que cada punto de la cuerda se mueve en un *círculo* en un plano paralelo al plano yz. Puntos sucesivos de la cuerda tienen diferencias de fases sucesivas, y el movimiento de la cuerda en conjunto tiene el aspecto de una hélice giratoria. Esto se ilustra a la izquierda del filtro polarizador que aparece en la figura 33.21*c*. Esta superposición en particular de dos ondas linealmente polarizadas se llama **polarización circular**.

La figura 33.30 muestra la situación análoga para una onda electromagnética. Dos ondas sinusoidales de igual amplitud, polarizadas en las direcciones y y z y con una diferencia de fase de un cuarto de ciclo, están superpuestas. El resultado es una onda en la que el vector $\vec{E}$ en cada punto tiene magnitud constante, pero *gira* en torno a la dirección de propagación. La onda de la figura 33.30 se propaga hacia el lector y el vector $\vec{E}$ parece girar en sentido horario, por lo que se denomina onda electromagnética *polarizada circularmente a la derecha.* Si en lugar de ello, el vector $\vec{E}$ de una onda que va hacia usted parece girar en sentido antihorario, se llama onda electromagnética *circularmente polarizada a la izquierda*.

Si la diferencia de fase entre las dos ondas componentes es distinta de un cuarto de ciclo, o si las dos ondas componentes tienen amplitudes diferentes, entonces cada punto de la cuerda no traza un círculo, sino una *elipse*. En este caso, se dice que la onda está **polarizada elípticamente**.

En el caso de ondas electromagnéticas con frecuencias de radio, se puede crear una polarización circular o elíptica mediante dos antenas situadas en ángulo recto alimen-



33.30 Polarización circular de una onda electromagnética que se desplaza hacia usted, paralelamente al eje x. La componente y de $\vec{E}$ se retrasa un cuarto de ciclo con respecto a la componente z. Esta diferencia de fase da por resultado una polarización circular a la derecha.

tadas por el mismo transmisor, pero con una red modificadora de fase que introduce la diferencia de fase adecuada. En el caso de la luz, el desplazamiento de fase se introduce empleando un material que presente *birrefringencia*, es decir, que tenga diferentes índices de refracción ante distintas direcciones de polarización. Un ejemplo conocido es el de la calcita ($CaCO_3$). Cuando un cristal de calcita se orienta en forma adecuada a un haz de luz no polarizada, su índice de refracción (para una longitud de onda en el vacío de 589 nm) es 1.658 en una dirección de polarización, y 1.486 en la dirección perpendicular. Cuando dos ondas de igual amplitud y direcciones de polarización perpendiculares entran en un material de este tipo, viajan con diferente rapidez. Si están en fase cuando ingresan al material, en general, ya no estarán en fase cuando salgan. Si el cristal tiene el espesor justo para introducir una diferencia de fase de un cuarto de ciclo, entonces el cristal convierte la luz linealmente polarizada en luz circularmente polarizada. Un cristal de este tipo recibe el nombre de *placa de cuarto de onda*. Esa placa también convierte la luz circularmente polarizada en luz linealmente polarizada. ¿Podría usted probarlo?

Fotoelasticidad

Algunos materiales ópticos que normalmente no tienen birrefringencia, adquieren esta propiedad cuando se someten a un esfuerzo mecánico. Esta es la base de la ciencia de la *fotoelasticidad*. Es posible analizar los esfuerzos en vigas, placas de calderas, dientes de engranes y pilares de las catedrales elaborando un modelo transparente del objeto, por lo general con un material plástico, para luego someterlo a esfuerzos y examinarlo mediante un polarizador y un analizador en posición cruzada. Con estos métodos ópticos se han estudiado distribuciones de esfuerzos muy complicadas.

33.31 Este modelo de plástico de una articulación artificial de cadera fue fotografiado entre dos filtros polarizadores (un polarizador y un analizador) con ejes de polarización perpendiculares. El patrón de interferencia a colores revela la magnitud y dirección de los esfuerzos en el modelo. Los ingenieros usan estos resultados como ayuda en el diseño de las articulaciones artificiales de cadera usadas en medicina.



La figura 33.31 es la fotografía de un modelo fotoelástico sometido a esfuerzos. La luz polarizada que entra al modelo puede considerarse como si tuviera una componente a lo largo de cada una de las dos direcciones del plástico birrefringente. Como estas dos componentes viajan a través del plástico con diferente rapidez, la luz que sale por el otro lado del modelo puede tener una dirección final de polarización distinta. Entonces, algo de esta luz transmitida será capaz de pasar a través del analizador aun cuando su eje de polarización forme un ángulo de 90° con el eje del polarizador, y las áreas sometidas a esfuerzo en el plástico aparecerán como puntos brillantes. La cantidad de birrefringencia es distinta para longitudes de onda diferentes; de ahí los distintos colores de luz. El color que aparece en cada ubicación de la figura 33.31 es aquel para el que la luz transmitida está más cerca de estar polarizada a lo largo del eje de polarización del analizador.

Evalúe su comprensión de la sección 33.5 Suponga que usted toma una fotografía de un edificio de oficinas muy alto, iluminado por la luz solar. Con la finalidad de reducir al mínimo las reflexiones de las ventanas del edificio, coloca un filtro polarizador en la lente de la cámara. ¿Cómo debería orientar el filtro? **i.** Con el eje del polarizador vertical; **ii.** con el eje del polarizador horizontal; **iii.** cualquier orientación reducirá al mínimo las reflexiones; **iv.** ninguna orientación tendrá un efecto apreciable.

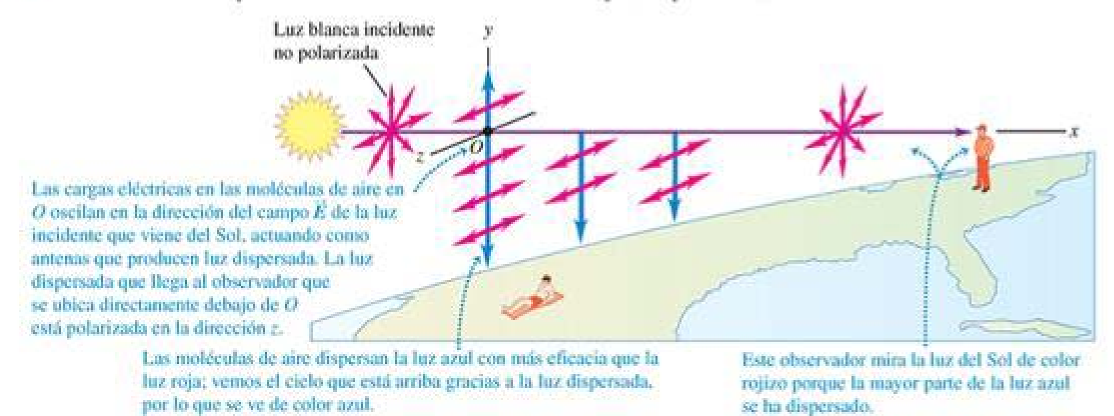


33.6 Dispersión de la luz

El cielo es azul. Los atardeceres son rojos. La luz del cielo está parcialmente polarizada; por eso, el cielo se ve más oscuro desde ciertos ángulos que desde otros cuando se observa a través de unos anteojos Polaroid de sol. Como se verá, un solo fenómeno es el responsable de todos estos efectos.

Cuando usted mira el cielo durante el día, la luz que observa es la del Sol que ha sido absorbida y vuelta a irradiar en diferentes direcciones. Este proceso se llama **dispersión**. (Si la Tierra no tuviera atmósfera, el cielo se vería tan negro durante el día como durante la noche, tal como lo ve un astronauta en el espacio o en la Luna). La figura 33.32 muestra algunos de los detalles del proceso de dispersión. La luz del

33.32 Cuando la persona que toma un baño de Sol a la izquierda de la ilustración mira hacia arriba, ve la luz solar polarizada, de color azul, que las moléculas de aire han dispersado. El observador a la derecha ve luz rojiza, no polarizada, si mira hacia el Sol.



Sol, que no está polarizada, llega desde el lado izquierdo a lo largo del eje x y pasa sobre un observador que mira verticalmente hacia arriba a lo largo del eje y. (Nosotros observamos la situación lateralmente). Considere que las moléculas de la atmósfera terrestre se localizan en el punto O. El campo eléctrico en el haz de luz solar hace vibrar las cargas eléctricas de estas moléculas. Como la luz es una onda transversal, la dirección del campo eléctrico en cualquier componente de la luz solar se encuentra en el plano yz, y el movimiento de las cargas tiene lugar en ese plano. No hay campo, y por lo tanto no hay movimiento de cargas, en la dirección del eje x.

Una onda de luz incidente provoca que las cargas eléctricas de las moléculas en el punto O vibren a lo largo de la línea de $\vec{E}$. Esta vibración se descompone en dos componentes, una a lo largo del eje y y la otra a lo largo del eje z. Cada componente de la luz incidente produce el equivalente de dos "antenas" moleculares que oscilan con la misma frecuencia que la luz incidente y están a lo largo de los ejes y y z.

En el capítulo 32 mencionamos que una carga oscilante, como las de una antena, no irradia en la dirección de su oscilación. (Véase la figura 32.3 en la sección 32.1). Así, la "antena" a lo largo del eje y no envía ninguna luz al observador ubicado directamente debajo de ella, aunque emite luz en otras direcciones. De esta forma, la única luz que llega al observador proviene de las otras "antenas" moleculares correspondientes a la oscilación de carga a lo largo del eje z. Esta luz está linealmente polarizada, con su campo eléctrico a lo largo del eje z (paralelo a la "antena"). Los vectores rojos sobre el eje y, abajo del punto O en la figura 33.32, indican la dirección de polarización de la luz que llega al observador.

Conforme el haz original de luz solar pasa a través de la atmósfera, su intensidad disminuye a medida que su energía pasa a la luz dispersa. El análisis detallado del proceso de dispersión revela que la intensidad de la luz dispersada por las moléculas del aire se incrementa en proporción a la cuarta potencia de la frecuencia (inversamente a la cuarta potencia de la longitud de onda). Así, la razón de la intensidad para los dos extremos del espectro visible es $(750 \text{ nm}/380 \text{ nm})^4 = 15$. En términos generales, la luz dispersada contiene 15 veces más luz azul que roja, y por eso el cielo es azul.

Las nubes contienen una gran concentración de gotas de agua o cristales de hielo, que también dispersan la luz. Como esta concentración es elevada, la luz que pasa a través de una nube tiene muchas más oportunidades de dispersarse que la luz que pasa a través de un cielo despejado. En consecuencia, luz de *todas* las longitudes de onda termina por dispersarse fuera de la nube, y por eso la nube es de color blanco (figura 33.33). La leche se ve blanca por la misma razón; la dispersión se debe a los glóbulos de grasa de la leche.

Cerca del ocaso, cuando la luz del Sol tiene que recorrer una distancia más larga a través de la atmósfera de la Tierra, una parte sustancial de luz azul es eliminada por la dispersión. La luz blanca sin la luz azul se ve de color amarillo o rojo. Esto explica el tono amarillo o rojizo que es frecuente ver durante el ocaso (y que percibe el observador en el extremo derecho de la figura 33.32).

Aplicación Visión de las abejas y la luz polarizada del cielo

Los ojos de una abeja pueden detectar la polarización de la luz. Las abejas aprovechan esta capacidad para poder volar entre la colmena y las fuentes de alimento. Como muestra la figura 33.32, una abeja ve la luz no polarizada si mira directamente hacia el Sol, y la luz polarizada completamente si mira con un ángulo de 90° con respecto al Sol. Estas polarizaciones no se ven afectadas por la presencia de nubes, de modo que una abeja puede volar en relación con el Sol, incluso en un día nublado.



33.33 Las nubes son blancas porque dispersan con mucha eficiencia la luz solar de todas las longitudes de onda.

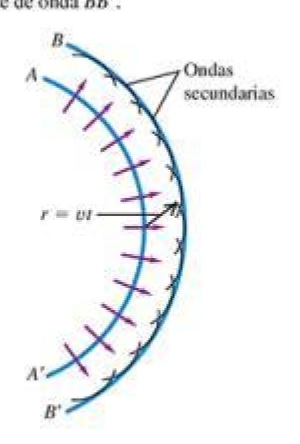


33.7 Principio de Huygens

Las leyes de reflexión y refracción de los rayos de luz que presentamos en la sección 33.2 fueron descubiertas de manera experimental mucho antes de que la naturaleza ondulatoria de la luz se hubiera establecido sobre bases firmes. Sin embargo, es posible *deducir* esas leyes a partir de consideraciones referentes a las ondas y demostrarse que son congruentes con la naturaleza ondulatoria de la luz.

Comenzaremos con el llamado **principio de Huygens**. Este principio, establecido por primera vez por el científico holandés Christiaan Huygens en 1678, es un método geométrico para obtener, a partir de la forma conocida de un frente de onda en un instante determinado, la forma que tiene ese frente de onda cierto tiempo después. Huygens supuso que **todo punto de un frente de onda puede considerarse la fuente de ondas secundarias que se dispersan en todas direcciones con rapidez igual a la rapidez de la propagación de la onda**. El nuevo frente de onda en un momento posterior se obtiene entonces construyendo una superficie *tangente* a las ondas secundarias, conocida como *envolvente* de esas ondas. Todos los resultados que se obtienen con el principio de Huygens también se pueden obtener a partir de las ecuaciones de Maxwell, de manera que no se trata de un principio independiente, pero a menudo resulta muy útil para efectuar cálculos con fenómenos ondulatorios.

33.34 Aplicación del principio de Huygens al frente de onda AA' para construir un nuevo frente de onda BB'.



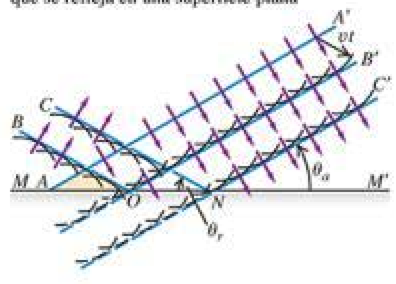
El principio de Huygens se ilustra en la figura 33.34. El frente de onda original AA' viaja hacia afuera de la fuente, como señalan las flechas. Queremos obtener la forma del frente de onda después de transcurrido un intervalo t de tiempo. Suponemos que v, la rapidez de propagación de la onda, es la misma en todos los puntos; por lo tanto, en un tiempo t el frente de onda recorre una distancia vt. Construimos varios círculos (trazos de las ondas esféricas secundarias) con radio $r = vt$ con centro en los puntos a lo largo de AA'. El trazo de la envolvente de estas ondas secundarias, que ahora es el nuevo frente de onda, es la curva BB'.

Reflexión y principio de Huygens

Para deducir la ley de reflexión a partir del principio de Huygens, consideremos una onda plana que se acerca a una superficie reflectante plana. En la figura 33.35*a*, las rectas AA', OB' y NC' representan posiciones sucesivas de un frente de onda que avanza hacia la superficie MM'. El punto A sobre el frente de onda AA' acaba de llegar a la superficie reflectante. Podemos aplicar el principio de Huygens para encontrar la posición del frente de onda después de transcurrido un intervalo de tiempo t. Con los puntos sobre AA' como centros, se dibujan varias ondas secundarias con radio vt. Las ondas secundarias que se originan cerca del extremo superior de AA' se dispersan sin encontrar obstáculos, y su envolvente da la parte OB' del nuevo frente de onda. Si la superficie reflectante no estuviera ahí, las ondas secundarias que se originan cerca del extremo inferior de AA' alcanzarían de manera similar las posiciones mostradas por los arcos circulares discontinuos. En lugar de ello, estas ondas secundarias inciden en la superficie reflectante.

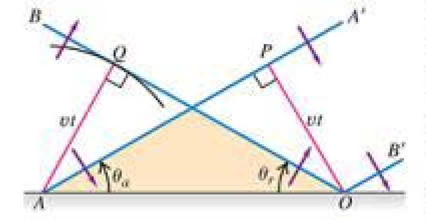
33.35 Aplicación del principio de Huygens para deducir la ley de la reflexión.

a) Posiciones sucesivas de una onda plana AA' que se refleja en una superficie plana



El efecto de la superficie reflectante consiste en *cambiar la dirección* de propagación de las ondas secundarias que inciden en ella, por lo que parte de una onda secundaria que hubiera penetrado en la superficie en realidad se encuentra a la izquierda de ella, como lo ilustran las líneas continuas. La primera de tales ondas secundarias tiene su centro en el punto A; la envolvente de todas las ondas secundarias reflejadas es la parte OB del frente de onda. El trazo del frente de onda completo en este instante es la línea quebrada BOB'. Una construcción similar genera la línea CNC' para el frente de onda después de transcurrido otro intervalo t.

b) Detalle ampliado de *a*)



Por la geometría plana sabemos que el ángulo θ_a entre el *frente de onda* incidente y la *superficie* es el mismo que aquel entre el *rayo* incidente y la *normal* a la superficie, de manera que corresponde al ángulo de incidencia. De forma similar, θ_r es el ángulo de reflexión. Para encontrar la relación entre estos ángulos, consideremos la figura 33.35*b*. A partir de O se dibuja $OP = vt$, perpendicular a AA'. Ahora OB, por construcción, es tangente a un círculo de radio vt con centro en A. Si se dibuja AQ desde A hacia el punto de tangencia, los triángulos APO y OQA son congruentes porque son triángulos rectángulos con el lado AO en común y con $AQ = OP = vt$. Por lo tanto, el ángulo θ_a es igual al ángulo θ_r y tenemos así la ley de la reflexión.

Refracción y principio de Huygens

La ley de la *refracción* se deduce mediante un procedimiento similar. En la figura 33.36*a* consideremos un frente de onda representado por la recta AA', para el cual el punto A acaba de llegar a la superficie de frontera SS' entre dos materiales transparentes a y b, con índices de refracción n_a y n_b y rapidez de onda v_a y v_b. (Las ondas *reflejadas* no se ilustran en la figura; estas se comportan exactamente como en la figura 33.35). Podemos aplicar el principio de Huygens para determinar la posición de los frentes de onda refractados después de cierto intervalo t.

Con los puntos sobre AA' como centros, dibujamos varias ondas secundarias. Las que se originan cerca del extremo superior de AA' viajan con rapidez v_a y, después de cierto intervalo de tiempo t, son superficies esféricas de radio v_at. Sin embargo, la onda secundaria que se origina en el punto A viaja en el segundo material b con rapidez v_b, y en el tiempo t es una superficie esférica de radio v_bt. La envolvente de las ondas secundarias desde el frente de onda original es el plano cuyo trazo es la línea quebrada BOB'. Una construcción similar da como resultado el trazo CPC' después de un segundo intervalo t.

Los ángulos θ_a y θ_b entre la superficie y los frentes de onda incidente y refractado son el ángulo de incidencia y el de refracción, respectivamente. Para obtener la relación entre esos ángulos, consulte la figura 33.36*b*. Dibujamos $OQ = v_at$ perpendicular a AQ, y $AB = v_bt$ perpendicular a BO. Del triángulo rectángulo AOQ resulta,

$$\operatorname{sen}\theta_a = \frac{v_at}{AO}$$

y del triángulo rectángulo AOB,

$$\operatorname{sen}\theta_b = \frac{v_bt}{AO}$$

Estos se combinan y se obtiene

$$\frac{\operatorname{sen}\theta_a}{\operatorname{sen}\theta_b} = \frac{v_a}{v_b} \qquad (33.9)$$

Hemos definido el índice de refracción n de un material como la razón entre la rapidez c de la luz en el vacío y su rapidez v en el material: $n_a = c/v_a$ y $n_b = c/v_b$. Por lo tanto,

$$\frac{n_b}{n_a} = \frac{c/v_b}{c/v_a} = \frac{v_a}{v_b}$$

y la ecuación (33.9) se rescribe como

$$\frac{\operatorname{sen}\theta_a}{\operatorname{sen}\theta_b} = \frac{n_b}{n_a} \quad \text{o bien,}$$

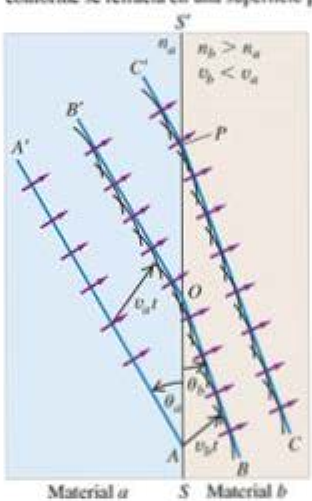
$$n_a\operatorname{sen}\theta_a = n_b\operatorname{sen}\theta_b$$

que reconocemos como la ley de Snell, ecuación (33.4). Así, hemos obtenido la ley de Snell a partir de una teoría ondulatoria. De forma alternativa, elegimos considerar la ley de Snell como un resultado experimental que define el índice de refracción de un material; en tal caso, este análisis ayuda a confirmar la relación $v = c/n$ de la rapidez de la luz en un material.

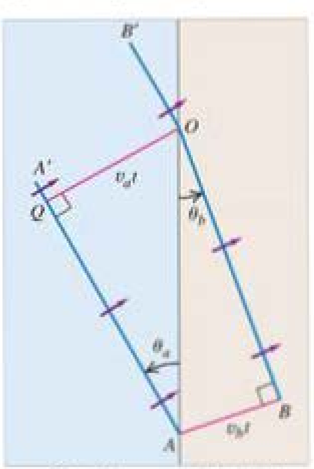
Los espejismos ofrecen un ejemplo interesante del principio de Huygens en acción. Cuando la superficie del pavimento o la arena del desierto se calientan mucho por la acción de los rayos solares, cerca de la superficie se forma una capa de aire caliente, menos densa y de menor n. La rapidez de la luz es un poco mayor en el aire caliente cerca del suelo, las ondas secundarias de Huygens tienen radios ligeramente más grandes, los frentes de onda se inclinan levemente, y los rayos que se dirigían hacia la superficie con un ángulo de incidencia grande (casi de 90°) se flexionan como se ilustra en la figura 33.37. La luz lejos del terreno se desvía menos y viaja casi en línea recta. El observador mira el objeto en su posición natural, con una imagen invertida debajo, como si estuviera en una superficie reflectante horizontal. La mente del viajero sediento interpreta la superficie aparentemente reflectante como una capa de agua.

33.36 Aplicación del principio de Huygens para deducir la ley de la refracción. Se presenta el caso $v_b < v_a$ ($n_b > n_a$).

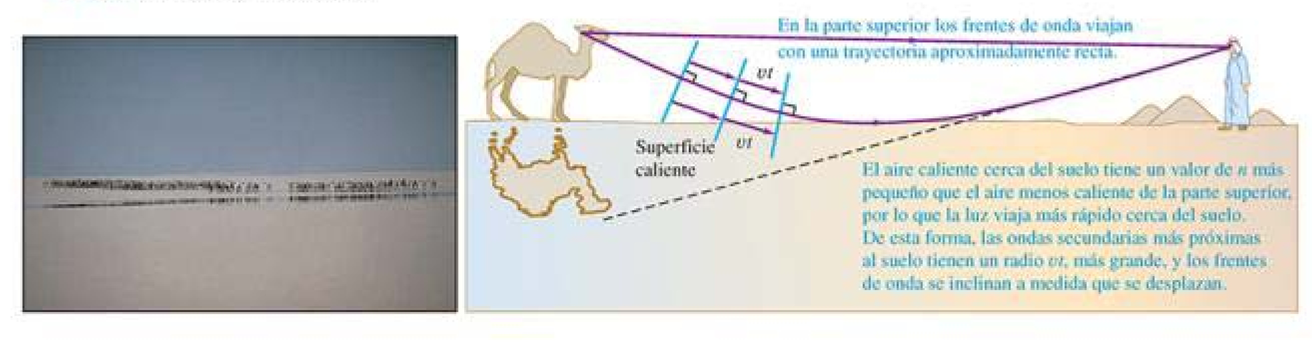
***a*)** Posiciones sucesivas de una onda plana AA' conforme se refracta en una superficie plana



***b*)** Detalle ampliado de *a*)



33.37 Formación de un espejismo.



Es importante recordar que las ecuaciones de Maxwell son las relaciones fundamentales de la propagación de las ondas electromagnéticas, pero el principio de Huygens ofrece una manera conveniente para visualizar la propagación.

Evalúe su comprensión de la sección 33.7 El sonido viaja más rápido en el aire caliente que en el aire frío. Imagine un frente climático que corre de norte a sur, con aire cálido al oeste del frente y aire frío hacia el este. Una onda sonora que viaja en dirección noreste en el aire caliente se topa con este frente. ¿Cómo cambiará la dirección de la onda de sonido al pasar al aire frío? **i.** La dirección de la onda se desviará hacia el norte; **ii.** la dirección de la onda se desviará hacia el este; **iii.** la dirección de la onda no cambiará.



La luz y sus propiedades: La luz es una onda electromagnética. Cuando es emitida o absorbida, también manifiesta propiedades de partícula. Es emitida por cargas eléctricas aceleradas.

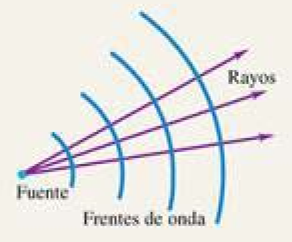
Un frente de onda es una superficie de fase constante; los frentes de onda se desplazan con rapidez igual a la de propagación de la onda. Un rayo es una línea recta a lo largo de la dirección de propagación, perpendicular a los frentes de onda.

Cuando se transmite luz de un material a otro, la frecuencia de la luz no cambia, pero la longitud de onda y la rapidez de onda pueden cambiar. El índice de refracción n de un material es la razón entre la rapidez c de la luz en el vacío y su rapidez v en el material. Si λ_0 es la longitud de onda en el vacío, la misma onda tiene una longitud más corta λ en un medio con un índice de refracción n. (Véase el ejemplo 33.2).

$$n = \frac{c}{v} \quad (33.1)$$

$$\lambda = \frac{\lambda_0}{n} \quad (33.5)$$





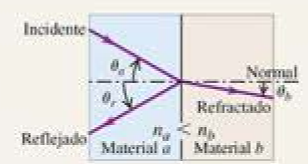
Reflexión y refracción: En una interfase lisa entre dos materiales ópticos, los rayos incidente, reflejado y refractado, así como la normal a la interfase, se encuentran en un solo plano llamado plano de incidencia. La ley de reflexión establece que los ángulos de incidencia y reflejado son iguales. La ley de refracción relaciona los ángulos de incidencia y reflexión con los índices de refracción de los materiales. (Véase los ejemplos 33.1 y 33.3).

$$\theta_r = \theta_a \quad (33.2)$$

(ley de reflexión)

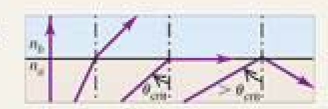
$$n_a \operatorname{sen}\theta_a = n_b \operatorname{sen}\theta_b \quad (33.4)$$

(ley de refracción)



Reflexión interna total: Cuando un rayo viaja en un material de índice de refracción mayor n_a hacia un material con menor índice n_b, la reflexión interna total ocurre en la interfase cuando el ángulo de incidencia excede el ángulo crítico $\theta_{\text{crít}}$. (Véase el ejemplo 33.4).

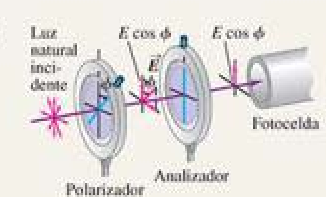
$$\operatorname{sen}\theta_{\text{crít}} = \frac{n_b}{n_a} \quad (33.6)$$



Polarización de la luz: La dirección de polarización de una onda electromagnética linealmente polarizada es la dirección del campo $\vec{E}$. Un filtro polarizador deja pasar ondas linealmente polarizadas que estén a lo largo de su eje de polarización y bloquea aquellas perpendicularmente polarizadas con respecto a ese eje. Cuando luz polarizada con intensidad $I_{\text{máx}}$ incide en un filtro polarizador que se usa como analizador, la intensidad I de la luz transmitida a través del analizador depende del ángulo ϕ entre la dirección de polarización de la luz incidente y el eje de polarización del analizador. (Véase el ejemplo 33.5).

$$I = I_{\text{máx}} \cos^2\phi \quad (33.7)$$

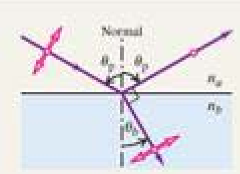
(ley de Malus)



Polarización por reflexión: Cuando luz no polarizada incide en una interfase entre dos materiales, la ley de Brewster establece que la luz reflejada está completamente polarizada en forma perpendicular al plano de incidencia (paralela a la interfase) si el ángulo de incidencia es igual al ángulo de polarización θ_p. (Véase el ejemplo 33.6).

$$\tan\theta_p = \frac{n_b}{n_a} \quad (33.8)$$

(ley de Brewster)



Principio de Huygens: El principio de Huygens establece que si se conoce la posición de un frente de onda en cierto instante, entonces la posición del frente en un momento posterior se puede construir imaginando el frente como una fuente de ondas secundarias. El principio de Huygens se puede usar para deducir las leyes de la reflexión y la refracción.



PROBLEMA PRÁCTICO Reflexión y refracción

La figura 33.38 muestra un bloque rectangular de vidrio que tiene un reflector metálico en una de sus caras y agua en una cara adyacente. Un haz de luz incide sobre el reflector como se indica. Gradualmente se incrementa el ángulo θ del haz de luz. Si $\theta \geq 59.2°$, no entra luz al agua. ¿Cuál es la rapidez de la luz en este vidrio?

33.318



GUÍA DE SOLUCIÓN

Véase el área de estudio MasteringPhysics® para consultar una solución con Video Tutor.



IDENTIFICAR y PLANTEAR

1. La reflexión especular ocurre donde el rayo de luz en el vidrio incide en el reflector. Para que no entre luz al agua, se requiere que solo haya reflexión, y no refracción, donde este rayo incide en la interfase vidrio-agua, es decir, debe haber reflexión interna total.
2. La incógnita es la rapidez de la luz v en el vidrio, que se puede determinar a partir del índice de refracción n del vidrio. (La tabla 33.1 proporciona el índice de refracción del agua). Escriba las ecuaciones que usará para calcular n y v.

EJECUTAR

3. Use la figura para obtener el ángulo de incidencia del rayo en la interfase vidrio-agua.
4. Use el resultado del paso 3 para determinar n.
5. Use el resultado del paso 4 para calcular v.

EVALUAR

6. Compare la rapidez de la luz en el vidrio con la rapidez en el agua. ¿Es lógico?

Problemas

Para tareas asignadas por el profesor, visite www.masteringphysics.com



•, ••, •••: Problemas de dificultad creciente. **PA**: Problemas acumulativos que incorporan material de capítulos anteriores. **CALC**: Problemas que requieren cálculo. **BIO**: Problemas de ciencias biológicas.

PREGUNTAS PARA ANÁLISIS

P33.1 La luz tarda cerca de ocho minutos en viajar del Sol a la Tierra. ¿La atmósfera terrestre la retrasa en forma apreciable? Explique su respuesta.

P33.2 La luz del Sol o de las estrellas que pasa a través de la atmósfera de la Tierra siempre se desvía hacia la vertical. ¿Por qué? ¿Significa esto que una estrella no se encuentra en realidad donde parece estar? Explique su respuesta.

P33.3 Un haz de luz pasa de un material a otro. En términos *físicos*, explique *por qué* cambia la longitud de onda, pero no la frecuencia ni el periodo.

P33.4 Un estudiante afirma que debido a la refracción atmosférica (véase la pregunta para análisis P33.2), el Sol puede verse después del ocaso y que entonces el día es más largo de lo que sería si la Tierra no tuviera atmósfera. En primer lugar, ¿qué quiere decir el estudiante con que el Sol se puede ver después del ocaso? Luego, comente la validez de esa conclusión.

P33.5 Cuando sale aire caliente de un radiador o un conducto caliente, los objetos tras él parecen vibrar u ondular. ¿Cuál es la causa de esto?

P33.6 Diseñe experimentos directos para medir la rapidez de la luz en un vidrio dado, empleando *a*) la ley de Snell, *b*) la reflexión interna total, *c*) la ley de Brewster.

P33.7 Algunas veces, al mirar a través de una ventana, se observan dos imágenes reflejadas desplazadas ligeramente una con respecto a la otra. ¿A qué se debe esto?

P33.8 Si se mira desde abajo hacia la superficie del agua en un acuario, se verá un reflejo invertido de los peces en la superficie de esta. Explique cómo sucede esto.

P33.9 Un rayo de luz en el aire incide en una superficie de vidrio. ¿Hay algún intervalo de ángulos para los cuales ocurre la reflexión total? Explique su respuesta.

P33.10 Cuando la luz incide en una interfase entre dos materiales, el ángulo del rayo refractado depende de la longitud de onda, pero el ángulo del rayo reflejado no. ¿Por qué es así?

P33.11 Un vendedor afirma que cierto par de anteojos para sol tiene filtros Polaroid; usted sospecha que los vidrios tan solo son plástico teñido. ¿Cómo podría saberlo con certeza?

P33.12 ¿Tiene sentido hablar acerca de la polarización de una onda *longitudinal* como las del sonido? ¿Por qué?

P33.13 ¿Cómo se puede determinar la dirección del eje de polarización de un polarizador único?

P33.14 Se ha propuesto que los parabrisas de los automóviles y los faros deberían tener filtros polarizadores con la finalidad de disminuir el resplandor de las luces cuando los vehículos se acercan de frente mientras se maneja de noche. ¿Funcionaría esto? ¿Cómo habría que disponer los ejes de polarización? ¿Qué ventajas tendría esta medida? ¿Qué desventajas?

P33.15 Cuando se coloca una hoja de envoltura de plástico para comida entre dos polarizadores cruzados, no se transmite luz. Cuando la hoja se estira en una dirección, algo de luz pasa a través de los polarizadores cruzados. ¿Qué es lo que sucede?

P33.16 Si usted se sienta en la playa y mira el océano a través de unos anteojos Polaroid, estos le ayudan a reducir el resplandor de la luz solar que se refleja en el agua. Pero si se recuesta de costado en la playa, es poco lo que se reduce el resplandor. Explique a qué se debe la diferencia.

P33.17 Cuando la luz no polarizada incide en dos polarizadores cruzados, no se transmite luz. Un estudiante afirmó que si se insertaba un tercer polarizador entre los otros dos, habría algo de transmisión. ¿Tiene sentido esto? ¿Cómo podría un tercer filtro *incrementar* la transmisión?

P33.18 Para las antenas antiguas de televisión de "tipo conejo", es posible alterar la calidad de la recepción considerablemente con solo cambiar la orientación de la antena. ¿Por qué?

P33.19 En la figura 33.32, si la luz que se dispersa hacia afuera del rayo incidente está polarizada, ¿por qué el haz transmitido no está también polarizado parcialmente?

P33.20 Usted toma un baño de Sol ya avanzada la tarde, cuando el Sol está relativamente bajo en el oeste. Se encuentra acostado sobre su espalda, y ve directamente hacia arriba a través de sus anteojos Polaroid. Para reducir al mínimo la cantidad de luz del cielo que llega a sus ojos, ¿cómo debería recostarse: con sus pies hacia el norte, el este, el sur, el oeste o en alguna otra dirección? Explique su razonamiento.

P33.21 La luz dispersada del cielo azul está muy polarizada debido a la naturaleza del proceso de dispersión que se describió en la sección 33.6. Pero la luz dispersada de las nubes blancas *no* está polarizada por lo general. ¿Por qué?

P33.22 La bruma atmosférica se debe a las gotas de agua o partículas de humo ("smog"). Esa niebla reduce la visibilidad porque dispersa la luz, por lo que la luz procedente de objetos distantes se hace aleatoria y las imágenes son indistinguibles. Explique por qué la visibilidad a través de la niebla mejora si se usan anteojos teñidos de rojo, los cuales eliminan la luz azul por filtración.

P33.23 La explicación que se dio en la sección 33.6 para el color del ocaso del Sol debería aplicarse igualmente al Sol *cuando sale*, ya que la luz solar viaja la misma distancia a través de la atmósfera para llegar a los ojos de un observador durante el amanecer o durante el ocaso; sin embargo, lo común es que los atardeceres sean más rojos que los amaneceres. ¿Por qué? (*Sugerencia:* Considere que partículas de todas clases en la atmósfera contribuyen a la dispersión).

P33.24 El principio de Huygens también se aplica a las ondas sonoras. Durante el día, la temperatura de la atmósfera disminuye conforme aumenta la altitud con respecto al suelo. Pero en la noche, cuando el suelo se enfría, hay una capa de aire justo arriba de la superficie en la cual la temperatura *aumenta* con la altitud. Use esto para explicar por qué las ondas sonoras procedentes de fuentes distantes se oyen con más claridad en la noche que en el día. (*Sugerencia:* Considere que la rapidez del sonido aumenta al incrementarse la temperatura. Use las ideas descritas en la figura 33.37 para la luz).

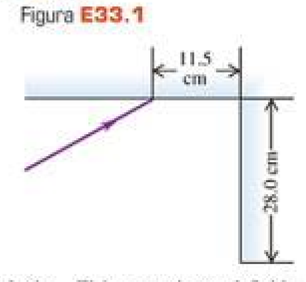
P33.25 Las ondas en el agua, ¿pueden reflejarse y refractarse? Dé algunos ejemplos. ¿El principio de Huygens se aplica a las ondas en el agua? Explique su respuesta.

EJERCICIOS

Sección 33.2 Reflexión y refracción

33.1 • Dos espejos planos se intersecan en ángulos rectos. Un rayo láser incide en el primero de ellos en un punto situado a 11.5 cm de la intersección, como se ilustra en la figura E33.1. ¿Para qué ángulo de incidencia en el primer espejo el rayo incidirá en el punto medio del segundo (que mide 28.0 cm de largo) después de reflejarse en el primer espejo?

Figura **E33.1**



33.2 • **BIO** **Luz en el interior del ojo.** El humor vítreo, el fluido transparente y gelatinoso que llena la mayor parte del globo ocular, tiene un índice de refracción de 1.34. La luz visible tiene una longitud de onda que va de 380 nm (luz violeta) a 750 nm (luz roja), medida en el aire. Esta luz viaja a través del humor vítreo e incide en los conos y los bastones en la superficie de la retina. ¿Cuáles son los rangos de *a*) la longitud de onda, *b*) la frecuencia y *c*) la rapidez de la luz exactamente cuando se aproxima a la retina dentro del humor vítreo?

33.3 • Un haz de luz tiene una longitud de onda de 650 nm en el vacío. *a*) ¿Cuál es la rapidez de esta luz en un líquido cuyo índice de refracción a esta longitud de onda es de 1.47? *b*) ¿Cuál es la longitud de onda de estas ondas en el líquido?

33.4 • Luz con frecuencia de 5.80×10^{14} Hz viaja en un bloque de vidrio cuyo índice de refracción es de 1.52. ¿Cuál es la longitud de onda de la luz *a*) en el vacío y *b*) en el vidrio?

33.5 • Un haz de luz viaja a 1.94×10^8 m/s en el cuarzo. La longitud de onda de la luz en el cuarzo es de 355 nm. *a*) ¿Cuál es el índice de refracción del cuarzo a esta longitud de onda? *b*) Si esta misma luz viaja a través del aire, ¿cuál es su longitud de onda?

33.6 •• Luz de cierta frecuencia tiene una longitud de onda de 438 nm en el agua. ¿Cuál es su longitud de onda en el benceno?

33.7 •• Un haz paralelo de luz en el aire forma un ángulo de 47.5° con la superficie de una placa de vidrio que tiene un índice de refracción de 1.66. *a*) ¿Cuál es el ángulo entre la parte reflejada del haz y la superficie del vidrio? *b*) ¿Cuál es el ángulo entre el haz refractado y la superficie del vidrio?

33.8 •• Un haz de un láser brilla a través de la superficie de un bloque de material transparente (véase la figura E33.8). La mitad del haz viaja directo a un detector, mientras que la otra mitad viaja a través del bloque y luego incide en el detector. El tiempo de retardo en la llegada de los dos haces de luz en el detector es de 6.25 ns. ¿Cuál es el índice de refracción de este material?

Figura **E33.8**

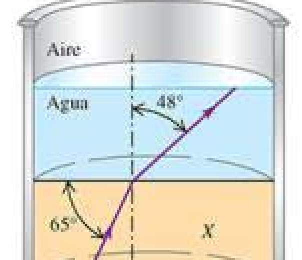


33.9 • Luz que viaja en el aire incide sobre la superficie de un bloque de plástico con un ángulo de 62.7° con respecto a la normal y se desvía de manera que forma un ángulo de 48.1° con la normal en el plástico. Determine la rapidez de la luz en el plástico.

33.10 • *a*) Un tanque que contiene metanol tiene paredes con espesor de 2.50 cm hechas de vidrio con índice de refracción de 1.550. Luz procedente del aire exterior incide en el vidrio a un ángulo de 41.3° con la normal al vidrio. Calcule el ángulo que forma la luz con la normal en el metanol. *b*) El tanque se vacía y se vuelve a llenar con un líquido desconocido. Si la luz que incide al mismo ángulo que en el inciso *a*) entra en el líquido del tanque a un ángulo de 20.2° con respecto a la normal, ¿cuál es el índice de refracción del líquido desconocido?

33.11 •• Como se muestra en la figura E33.11, una capa de agua cubre una placa de material X en un vaso. Un rayo de luz que viaja hacia arriba sigue la trayectoria indicada. Usando la información de la figura, determine *a*) el índice de refracción del material X y *b*) el ángulo que forma la luz con la normal en el *aire*.

Figura **E33.11**



33.12 •• Una placa horizontal de vidrio con lados paralelos tiene un índice de refracción de 1.52 y está en contacto con la superficie de agua en un tanque. Un rayo que llega desde arriba a través del aire forma un ángulo de incidencia de 35.0° con la normal a la superficie superior del vidrio. *a*) ¿Qué ángulo forma el rayo refractado en el agua con la normal a la superficie? *b*) ¿Cómo depende este ángulo del índice de refracción del vidrio?

33.13 •• En cierto material con índice de refracción n, un rayo de luz tiene frecuencia f, longitud de onda λ y rapidez v. ¿Cuáles son la frecuencia, longitud de onda y rapidez de esta luz *a*) en el vacío y *b*) en un

material con índice de refracción n'? En cada caso exprese sus respuestas en términos *solo* de f, λ, v, n y n'.

33.14 • Un rayo de luz que viaja en el agua incide en una interfase con una pieza plana de vidrio. La longitud de onda de la luz en el agua es de 726 nm y su longitud de onda en el vidrio es de 544 nm. Si el rayo en el agua forma un ángulo de 42.0° con respecto a la normal a la interfase, ¿qué ángulo forma el rayo refractado en el vidrio con respecto a la normal?

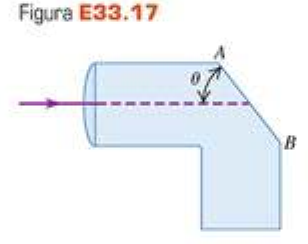
33.15 • Un rayo de luz incide sobre una superficie plana que separa dos hojas de vidrio con índices de refracción de 1.70 y 1.58. El ángulo de incidencia es de 62.0° y el rayo se origina en el vidrio con $n = 1.70$. Calcule el ángulo de refracción.

Sección 33.3 Reflexión interna total

33.16 • Una pieza plana de vidrio cubre la parte superior de un cilindro vertical que está completamente lleno de agua. Si un rayo de luz que viaja en el vidrio incide en la interfase con el agua a un ángulo de $\theta_a = 36.2°$, el rayo refractado hacia el agua forma un ángulo de 49.8° con la normal de la interfase. ¿Cuál es el valor más pequeño del ángulo incidente θ_a con el que el rayo no se refracta en el agua?

33.17 • **Tubo de luz.** Entra luz a un tubo sólido hecho de plástico con un índice de refracción de 1.60. La luz viaja en forma paralela a la parte superior del tubo (figura E33.17). Se desea cortar la cara *AB* de manera que toda la luz se refleje de regreso hacia el tubo después de que incide por primera vez en esa cara. *a*) ¿Cuál es el valor máximo de θ si el tubo está en el aire? *b*) Si el tubo se sumerge en agua, cuyo índice de refracción es de 1.33, ¿cuál es el máximo valor que puede tener θ?

Figura **E33.17**



33.18 • Un haz de luz que viaja dentro de un cubo de vidrio sólido con índice de refracción de 1.53 incide en la superficie del cubo desde su interior. *a*) Si el cubo está en el aire, ¿cuál es el ángulo mínimo con la normal dentro del vidrio con la que esta luz *no* entraría al aire en dicha superficie? *b*) ¿Cuál sería el ángulo mínimo en el inciso *a*) si el cubo se sumergiera en agua?

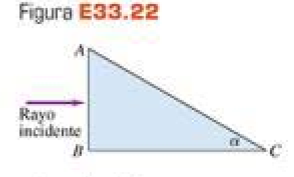
33.19 •• El ángulo crítico para la reflexión interna total en una interfase líquido-aire es de 42.5°. *a*) Si un rayo de luz que viaja por el líquido tiene un ángulo de incidencia en la interfase de 35.0°, ¿qué ángulo forma el rayo refractado en el aire con respecto a la normal? *b*) Si un rayo de luz que viaja en el aire tiene un ángulo de incidencia con la interfase de 35.0°, ¿qué ángulo forma el rayo refractado en el líquido con respecto a la normal?

33.20 • Al finalizar la serie de óperas de Wagner que lleva por título *El Anillo de los Nibelungos*, Brunilda quita el anillo de oro del cadáver de Sigfrido y lo arroja al río Rin, donde se va al fondo. Si se supone que el anillo es suficientemente pequeño en comparación con la profundidad del río como para considerarlo un punto, y que el río Rin tiene 10.0 m de profundidad en la parte en que cae la joya, ¿cuál es el área del círculo más grande en la superficie del agua adonde podría llegar luz emitida por el anillo y salir del agua?

33.21 • Un rayo de luz viaja por un cubo de vidrio que está totalmente sumergido en agua. Usted descubre que si el rayo incide sobre la interfase vidrio-agua a un ángulo mayor de 48.7° con respecto a la normal, la luz no se refracta en el agua. ¿Cuál es el índice de refracción del vidrio?

33.22 • A lo largo de la cara *AB* de un prisma de vidrio con índice de refracción de 1.52, incide luz, como se ilustra en la figura E33.22. Calcule el valor más grande que puede tener el ángulo α sin que se refracte ninguna luz hacia afuera del prisma por la cara *AC*, si el prisma está inmerso *a*) en aire y *b*) en agua.

Figura **E33.22**



33.23 • En el fondo de un tanque de agua se encuentra una pieza plana de vidrio. Si un rayo de luz que viaja en el vidrio incide en la interfase con el agua a un ángulo con respecto a la normal que es mayor que 62.0°, no refracta luz en el agua. Para ángulos de incidencia más pequeños, parte del rayo se refracta en el agua. Si la luz tiene una longitud de onda en el vidrio de 408 nm, ¿cuál es la longitud de onda de la luz en el agua?

33.24 •• El índice de refracción de un material para las ondas sonoras se define como la razón entre la rapidez del sonido en el aire y la rapidez del sonido en el material. Entonces la ley de Snell es válida para la refracción de las ondas sonoras. La rapidez de una onda sonora es de 344 m/s en el aire y de 1320 m/s en el agua. *a*) ¿Qué medio tiene el mayor índice de refracción del sonido? *b*) ¿Cuál es el ángulo crítico para que una onda sonora incida sobre la superficie entre el aire y el agua? *c*) Para que ocurra la reflexión interna total, ¿la onda sonora debe viajar en el aire o en el agua? *d*) Use los resultados anteriores para explicar por qué es posible oír a las personas en la orilla opuesta de un río o de un lago pequeño con mucha claridad.

Sección 33.4 Dispersión

33.25 •• Un haz angosto de luz blanca incide sobre la cara de una placa de un cristal de silicato (vidrio). La luz se desplaza de forma paralela a las dos caras adyacentes, como se muestra en la figura E33.25. Para la luz transmitida al interior del vidrio, ¿en qué ángulo $\Delta\theta$ se encuentra dispersa la parte visible del espectro entre 400 y 700 nm? (Consulte la gráfica de la figura 33.18).

Figura **E33.25**



33.26 • Un haz de luz incide en una hoja de vidrio a un ángulo de 57.0° con respecto a la normal en el aire. Usted observa que la luz roja forma un ángulo de 38.1° con la normal en el vidrio, mientras que la luz violeta forma un ángulo de 36.7°. *a*) ¿Cuáles son los índices de refracción de este vidrio para los colores de luz mencionados? *b*) ¿Cuál es la rapidez de la luz roja y violeta en el vidrio?

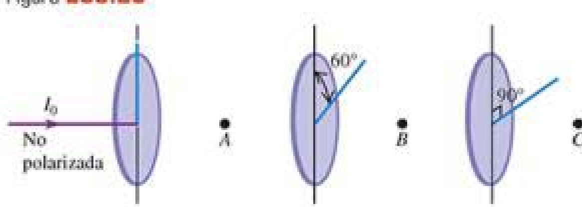
Sección 33.5 Polarización

33.27 • Luz no polarizada con intensidad I_0 incide sobre dos filtros polarizadores. El eje del primer filtro forma un ángulo de 60.0° con la vertical, y el eje del segundo filtro es horizontal. ¿Cuál es la intensidad de la luz después de que ha pasado por el segundo filtro?

33.28 •• *a*) ¿A qué ángulo arriba de la horizontal se encuentra el Sol si su luz reflejada desde la superficie de un lago en calma está completamente polarizada? *b*) ¿Cuál es el plano del vector campo eléctrico en la luz reflejada?

33.29 •• Un haz de luz no polarizada con intensidad I_0 pasa a través de una serie de filtros polarizadores ideales con sus direcciones de polarización giradas en diferentes ángulos, como se aprecia en la figura E33.29. *a*) ¿Cuál es la intensidad de la luz (en términos de I_0) en los puntos *A*, *B* y *C*? *b*) Si se elimina el filtro de en medio, ¿cuál será la intensidad de la luz en el punto *C*?

Figura **E33.29**

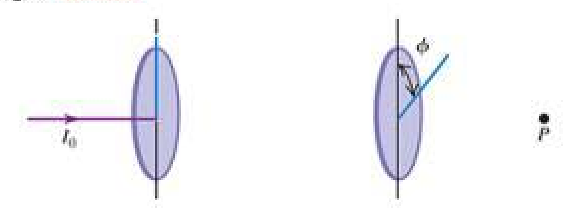


33.30 • Luz que viaja a través de agua incide en una placa de vidrio a un ángulo de incidencia de 53.0°; una parte del haz se refleja y otra se refracta. Si las partes reflejada y refractada forman un ángulo de 90.0° entre sí, ¿cuál es el índice de refracción del vidrio?

33.31 • Un haz paralelo de luz no polarizada en el aire incide con ángulo de 54.5° (con respecto a la normal) sobre una superficie plana de vidrio. El haz reflejado está linealmente polarizado por completo. *a*) ¿Cuál es el índice de refracción del vidrio? *b*) ¿Cuál es el ángulo de refracción del haz transmitido?

33.32 •• Luz con intensidad original I_0 pasa a través de dos filtros polarizadores ideales que tienen sus ejes de polarización orientados como se ilustra en la figura E33.32. Se desea ajustar el ángulo ϕ de manera que la intensidad en el punto P sea igual a $I_0/10$. *a*) Si la luz original no está polarizada, ¿cuál debería ser el valor de ϕ? *b*) Si la luz original está linealmente polarizada en la misma dirección que el eje de polarización del primer polarizador que alcanza la luz, ¿cuánto debería ser el valor de ϕ?

Figura **E33.32**



33.33 •• Un haz de luz polarizada pasa a través de un filtro polarizador. Cuando el ángulo entre el eje de polarización del filtro y la dirección de polarización de la luz es θ, la intensidad del haz que sale es I. Si se desea que ahora la intensidad sea de $I/2$, ¿cuál debe ser el ángulo (en términos de θ) entre el ángulo de polarización del filtro y la dirección original de polarización de la luz?

33.34 • El índice de refracción de cierto vidrio es de 1.66. ¿A qué ángulo de incidencia estará totalmente polarizada la luz que se refleja en la superficie de este vidrio si está inmerso en *a*) aire y *b*) agua?

33.35 •• Sobre dos filtros polarizadores incide luz no polarizada con intensidad de 20.0 W/cm^2. El eje del primer filtro está a un ángulo de 25.0° en sentido antihorario con respecto a la vertical (visto en la dirección en que viaja la luz), y el eje del segundo filtro está a 62.0° en sentido antihorario con respecto a la vertical. ¿Cuál es la intensidad de la luz una vez que ha pasado a través del segundo polarizador?

33.36 ••• Tres filtros polarizadores están enfilados con los ejes de polarización del segundo y el tercero a 23.0° y 62.0°, respectivamente, en relación con el eje del primero. Si luz no polarizada incide sobre la fila, la luz tiene una intensidad de 75.0 W/cm^2 una vez que atraviesa la fila. Si la intensidad de la luz incidente se mantiene constante, ¿cuál es la intensidad de la luz una vez que ha pasado por la fila si se retira el segundo polarizador?

33.37 • **Tres filtros polarizadores.** Tres filtros polarizadores están enfilados con los ejes de polarización del segundo y el tercero a 45.0° y 90.0°, respectivamente, con respecto al eje del primero. *a*) Si sobre la fila de polarizadores incide luz no polarizada de intensidad I_0, determine la intensidad y el estado de polarización de la luz que sale de cada filtro. *b*) Si se retira el segundo filtro, ¿cuál es la intensidad de la luz que emerge de cada uno de los filtros que permanecen?

Sección 33.6 Dispersión de la luz

33.38 • Un haz de luz blanca pasa a través de una capa de aire con espesor uniforme. Si la intensidad de la luz dispersada en medio de la parte verde del espectro visible es I, calcule la intensidad (en términos de I) de la luz polarizada en medio de *a*) la parte roja del espectro y *b*) la parte violeta del espectro. Consulte la tabla 32.1.

PROBLEMAS

33.39 •• **Reflector de vértice.** El vértice interior de un cubo está cubierto con espejos que forman un reflector de vértice (véase el ejemplo 33.3 de la sección 33.2). Un rayo de luz se refleja sucesivamente en cada uno de los tres espejos perpendiculares entre sí; demuestre que su dirección final siempre es exactamente la opuesta de su dirección inicial.

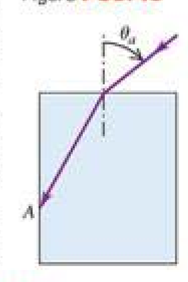
33.40 • Un haz de luz se dirige paralelamente al eje de un tubo cilíndrico hueco. Cuando el tubo solamente contiene aire, la luz tarda 8.72 ns en recorrerlo en toda su longitud, pero cuando el tubo se llena de gelatina transparente, el recorrido dura 2.04 ns más. ¿Cuál es el índice de refracción de la gelatina?

33.41 •• BIO **Ultrasonido en el corazón.** Los médicos usan ondas de sonido de alta frecuencia (f = 1 a 5 MHz), llamadas ultrasonido, para obtener imágenes de los órganos internos. La rapidez de estas ondas de ultrasonido es de 1480 m/s en un músculo y de 344 m/s en el aire. Definimos el índice de refracción de un material para ondas de sonido como la razón entre la rapidez del sonido en el aire y la rapidez del sonido en el material. Entonces se cumple la ley de Snell para la refracción de las ondas sonoras. *a*) ¿A qué ángulo respecto de la normal entra el haz de ultrasonido al corazón si sale de los pulmones a un ángulo de 9.73° relativo a la normal a la pared del corazón? (Suponga que la rapidez del sonido en los pulmones es de 344 m/s). *b*) ¿Cuál es el ángulo crítico de las ondas sonoras en el aire que inciden en el músculo?

33.42 ••• En un laboratorio de física, un haz de luz con longitud de onda de 490 nm se propaga en el aire desde un láser a una fotocelda en 17.0 ns. Cuando se coloca una placa de vidrio de 0.840 m de espesor ante el haz de luz, de manera que este incida a lo largo de la normal a las caras paralelas de la placa, la luz tarda 21.2 ns en viajar del láser a la fotocelda. ¿Cuál es la longitud de onda de la luz en el vidrio?

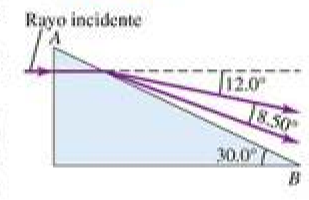
33.43 •• Un rayo de luz incide desde el aire sobre un bloque sólido transparente cuyo índice de refracción es n. Si n = 1.38, ¿cuál es el ángulo de incidencia *más grande* θ_a para el que ocurrirá la reflexión interna total en la cara vertical (punto A en la figura P33.43)?

Figura **P33.43**



33.44 • Un rayo de luz en el aire incide en el prisma rectangular que se ilustra en la figura P33.44. El ángulo del prisma en B es de 30°. Este rayo consiste en dos longitudes de onda diferentes. Cuando emerge por la cara AB, se ha dividido en dos rayos diferentes que divergen entre sí 8.50°. Determine el índice de refracción del prisma para cada una de las dos longitudes de onda.

Figura **P33.44**



33.45 •• Un rayo de luz que viaja *en* un bloque de vidrio (n = 1.52) incide en la superficie superior a un ángulo de 57.2° con respecto a la normal del vidrio. Si se coloca una capa de aceite en

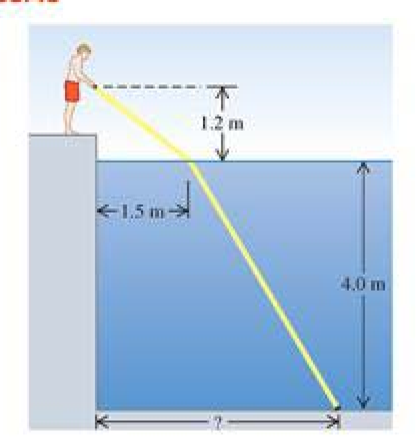
la superficie superior del vidrio, el rayo se refleja totalmente. ¿Cuál es el índice máximo posible de refracción del aceite?

33.46 ••• Una placa de vidrio de 2.50 mm de espesor, con índice de refracción de 1.40, se coloca entre una fuente puntual de luz con longitud de onda de 540 nm (en el vacío) y una pantalla. La distancia de la fuente a la pantalla es de 1.80 cm. ¿Cuántas longitudes de onda hay entre la fuente y la pantalla?

33.47 •• Las antiguas placas fotográficas estaban hechas de vidrio con una emulsión fotosensible en la superficie anterior. Esta emulsión era algo transparente. Cuando una fuente puntual brillante se enfocaba sobre la parte anterior de la placa, la fotografía revelada mostraba un halo alrededor de la imagen del punto. Si la placa de vidrio mide 3.10 mm de espesor y los halos tienen radio interior de 5.34 mm, ¿cuál es el índice de refracción del vidrio? (*Sugerencia:* Considere que la luz del punto que incide en la superficie anterior se dispersa en todas direcciones gracias a la emulsión. Algo de ella se refleja totalmente en la superficie posterior de la placa y regresa a la superficie anterior).

33.48 • Después de un largo día de viaje, a altas horas de la noche, usted nada en la piscina del hotel donde se hospeda. Cuando se retira a su habitación, se da cuenta de que perdió la llave en la alberca. Consigue una linterna potente y camina alrededor de la alberca dirigiendo la luz hacia ella. La luz ilumina la llave, que se encuentra en el fondo de la alberca, cuando sostiene la linterna a 1.2 m de la superficie del agua y está dirigida hacia la superficie a una distancia horizontal de 1.5 m desde el borde (figura P33.48). Si el agua en ese punto tiene 4.0 m de profundidad, ¿a qué distancia del borde de la alberca se encuentra la llave?

Figura **P33.48**



33.49 • Usted mira sobre el borde de un vaso con lados verticales, de manera que el borde superior está alineado con el borde opuesto del fondo (figura P33.49*a*). El vaso es un cilindro hueco de paredes delgadas, de 16.0 cm de alto y 8.0 cm de diámetro en sus partes superior e inferior. Mientras usted mantiene la vista en la misma posición, un amigo suyo llena el vaso con un líquido transparente, y entonces usted ve una moneda pequeña en el centro del fondo del vaso (figura P33.49*b*). ¿Cuál es el índice de refracción del líquido?

Figura **P33.49**



33.50 •• Un prisma de 45° − 45° − 90° está sumergido en agua. Un rayo de luz incide en dirección normal sobre una de sus caras más cortas. ¿Cuál es el índice de refracción mínimo que debe tener el prisma si este rayo debe reflejarse totalmente dentro del vidrio en la cara larga del prisma?

33.51 • Una capa delgada de hielo (n = 1.309) flota en la superficie del agua (n = 1.333) que hay en una cubeta. Un rayo de luz que sale del fondo de esta viaja hacia arriba a través del agua. *a*) ¿Cuál es el ángulo máximo con respecto a la normal que el rayo puede formar en la interfase hielo-agua sin dejar de salir al aire arriba del hielo? *b*) ¿Cuál es este ángulo una vez que el hielo se ha derretido?

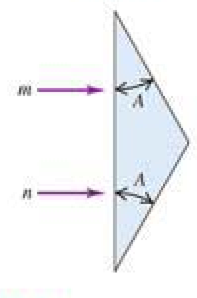
33.52 •• Sobre la cara corta de un prisma de 30° − 60° − 90° incide luz en una dirección normal (figura P33.52). Se coloca una gota de líquido en la hipotenusa del prisma. Si el índice de refracción del prisma es de 1.62, calcule el índice máximo que puede tener el líquido si la luz se refleja totalmente.

Figura **P33.52**



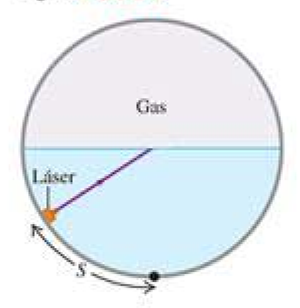
33.53 •• El prisma que se ilustra en la figura P33.53 tiene un índice de refracción de 1.66, y los ángulos A son de 25.0°. Dos rayos de luz m y n entran paralelos al prisma. ¿Cuál es el ángulo entre ellos una vez que salen?

Figura **P33.53**



33.54 •• Un tanque cilíndrico horizontal de 2.20 m de diámetro está lleno de agua hasta la mitad. El espacio sobre el agua se encuentra lleno de un gas presurizado con índice de refracción desconocido. Un equipo emisor de luz láser pequeño se mueve a lo largo del fondo curvado del agua y lanza un rayo hacia el centro de la superficie del agua (figura P33.54). Usted observa que cuando el láser ha recorrido una distancia S = 1.09 m o más (medida a lo largo de la superficie curva) desde el punto más bajo del agua, la luz no pasa al gas. *a*) ¿Cuál es el índice de refracción del gas? *b*) ¿Cuál es el tiempo mínimo que tarda el haz de luz en viajar del equipo emisor al borde del tanque cuando **i.** $S > 1.09$ m y **ii.** $S < 1.09$ m?

Figura **P33.54**



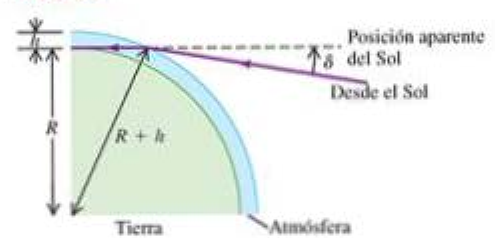
33.55 •• Cuando el Sol sale o se oculta y parece estar justo sobre el horizonte, en realidad está *debajo* de este. La explicación de esta aparente paradoja es que la luz solar se desvía un poco cuando entra a la atmósfera terrestre, como se ilustra en la figura P33.55. Como nuestra percepción se basa en la idea de que la luz viaja en líneas rectas, la percibimos como si viniera desde una posición aparente que forma un ángulo δ sobre la posición verdadera del Sol. *a*) Para simplificar, suponga que la atmósfera tiene densidad uniforme y, por lo tanto, índice de refracción uniforme n, y se extiende a una altura h por encima de la superficie de la Tierra, punto en el cual se desvanece de manera abrupta. Demuestre que el ángulo δ está dado por

$$\delta = \text{arcsen}\left(\frac{nR}{R+h}\right) - \text{arcsen}\left(\frac{R}{R+h}\right)$$

donde R = 6378 km es el radio de la Tierra. *b*) Calcule δ con n = 1.0003 y h = 20 km. ¿Cómo se compara esto con el radio angular del Sol, que es de aproximadamente un cuarto de grado? (En realidad, los

rayos de luz provenientes del Sol se desvían de manera gradual, no abrupta, ya que la densidad y el índice de refracción de la atmósfera cambian poco a poco con la altitud).

Figura **P33.55**

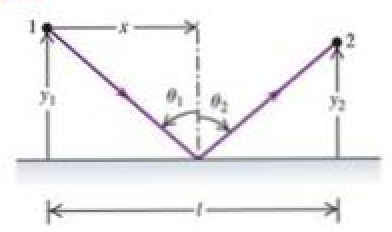


33.56 •• CALC **Principio de Fermat del tiempo mínimo.** Un rayo de luz que viaja con rapidez c sale del punto 1, como se ilustra en la figura P33.56, y se refleja en el punto 2. El rayo incide en la superficie reflectante a una distancia horizontal x del punto 1. *a*) Demuestre que el tiempo t que se requiere para que la luz viaje de 1 a 2 es

$$t = \frac{\sqrt{y_1^2 + x^2} + \sqrt{y_2^2 + (l - x)^2}}{c}$$

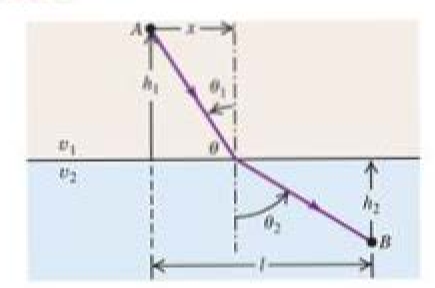
b) Obtenga la derivada de t con respecto a x e iguálela a cero para demostrar que el tiempo alcanza su valor *mínimo* cuando $\theta_1 = \theta_2$, que es la ley de reflexión y corresponde a la trayectoria real que sigue la luz. Este es un ejemplo del *principio de Fermat del tiempo mínimo*, el cual dice que de todas las trayectorias posibles entre dos puntos, la que sigue un rayo de luz es aquella para la que el tiempo de recorrido es *mínimo*. (En realidad, hay ciertos casos en los que el tiempo es máximo, y no mínimo).

Figura **P33.56**



33.57 •• CALC Un rayo de luz va del punto A, en un medio donde la rapidez de la luz es v_1, al punto B en el que la rapidez es v_2 (figura P33.57). El rayo incide en la interfase a una distancia horizontal x a la derecha del punto A. *a*) Demuestre que el tiempo requerido para que la luz vaya de A a B es

Figura **P33.57**



$$t = \frac{\sqrt{h_1^2 + x^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{h_2^2 + (l - x)^2}}{v_2}$$

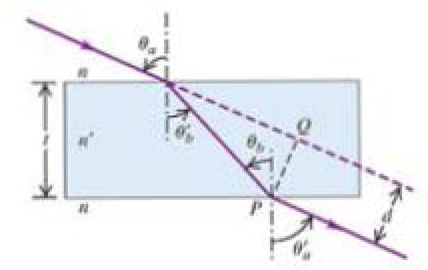
b) Obtenga la derivada de t con respecto a x e iguálela a cero para demostrar que este tiempo alcanza su valor *mínimo* cuando $n_1 \operatorname{sen} \theta_1 = n_2 \operatorname{sen} \theta_2$. Esta es la ley de Snell y corresponde a la trayectoria real que toma la luz. Este es otro ejemplo del principio de Fermat del tiempo mínimo (véase el problema 33.56).

33.58 •• Sobre la superficie superior de una placa transparente incide luz que viaja por el aire con un ángulo θ_a (figura P33.58); las superficies de la placa son planas y paralelas entre sí. *a*) Demuestre que $\theta_a = \theta_a'$. *b*) Demuestre que esto se cumple para cualquier número de diferentes placas paralelas. *c*) Pruebe que el desplazamiento lateral d del haz que sale está dado por la relación

$$d = t\frac{\operatorname{sen}(\theta_a - \theta_b')}{\cos \theta_b'}$$

donde t es el espesor de la placa. *d*) Un rayo de luz incide con ángulo de 66.0° sobre la superficie de una placa de vidrio de 2.40 cm de espesor e índice de refracción de 1.80. El medio en cualquiera de sus lados es aire. Calcule el desplazamiento lateral entre los rayos incidente y emergente.

Figura **P33.58**

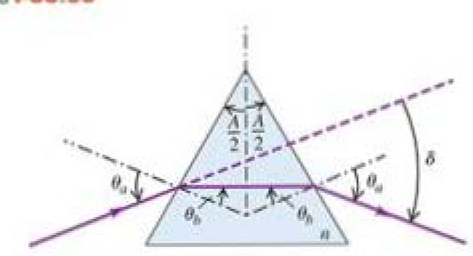


33.59 •• **Ángulo de desviación.** El ángulo de incidencia θ_a que se ilustra en la figura P33.59 se eligió de manera que la luz pase de manera simétrica a través del prisma, el cual tiene índice de refracción n y ángulo A en el vértice. *a*) Demuestre que el ángulo de desviación δ (aquel que hay entre las direcciones inicial y final del rayo) está dado por

$$\operatorname{sen}\frac{A + \delta}{2} = n \operatorname{sen}\frac{A}{2}$$

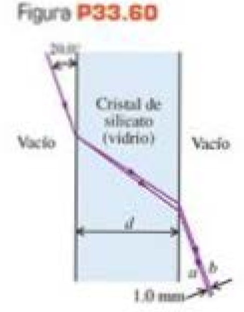
(Cuando la luz atraviesa en forma simétrica, como se ilustra, el ángulo de desviación es mínimo). *b*) Utilice el resultado del inciso *a*) para obtener el ángulo de desviación de un rayo de luz que pasa simétricamente por un prisma que tiene tres ángulos iguales ($A = 60.0°$) y $n = 1.52$. *c*) Cierto tipo de vidrio tiene un índice de refracción de 1.61 para la luz roja (700 nm) y 1.66 para la luz violeta (400 nm). Si los dos colores pasan de manera simétrica, como se describió en el inciso *a*), y si $A = 60.0°$, obtenga la diferencia entre los ángulos de desviación para ambos colores.

Figura **P33.59**



33.60 • Se dirige un haz delgado de luz blanca hacia una placa plana de cristal de silicato (vidrio) a un ángulo de 20.0° con respecto a la superficie de la placa. Debido a la dispersión del vidrio, el haz se extiende como se ilustra en el espectro de la figura P33.60. En la figura 33.18 aparece la gráfica del índice de refracción del vidrio en función de la longitud de onda. *a*) Los rayos *a* y *b* que aparecen en la figura P33.60 corresponden a las longitudes de onda extremas mostradas en la figura 33.18. ¿Cuál corresponde al rojo y cuál al violeta? Explique su razonamiento. *b*) ¿Para qué espesor *d* de la lámina de vidrio el espectro tendrá 1.0 mm de ancho, como se ilustra (véase el problema 33.58)?

Figura **P33.60**



33.61 • Un haz de luz que viaja horizontalmente tiene una componente no polarizada con intensidad I_0 y otra componente polarizada con intensidad I_p. El plano de polarización de la componente polarizada está orientado con un ángulo θ con respecto a la vertical. Los datos de la siguiente tabla dan la intensidad medida a través de un polarizador con orientación ϕ con respecto a la vertical. *a*) ¿Cuál es la orientación de la componente polarizada? (Es decir, ¿cuál es el ángulo θ?). *b*) ¿Cuáles son los valores de I_0 e I_p?

ϕ(°)	I_{total} (W/m²)	ϕ(°)	I_{total} (W/m²)
0	18.4	100	8.6
10	21.4	110	6.3
20	23.7	120	5.2
30	24.8	130	5.2
40	24.8	140	6.3
50	23.7	150	8.6
60	21.4	160	11.6
70	18.4	170	15.0
80	15.0	180	18.4
90	11.6		

33.62 •• BIO **Actividad óptica de moléculas biológicas.** Muchas moléculas de importancia biológica son ópticamente activas. Cuando luz polarizada linealmente atraviesa una solución de compuestos que contienen estas moléculas, su plano de polarización gira. Algunos compuestos giran la polarización en sentido horario; otros en sentido antihorario. La cantidad de rotación depende de la cantidad de material en la trayectoria de la luz. Los siguientes datos indican los grados de rotación a través de dos aminoácidos en una trayectoria de 100 cm de longitud:

Rotación (°)		
Leucina-*l*	**Ácido glutámico**	**Concentración (g/100 mL)**
−0.11	0.124	1.0
−0.22	0.248	2.0
−0.55	0.620	5.0
−1.10	1.24	10.0
−2.20	2.48	20.0
−5.50	6.20	50.0
−11.0	12.4	100.0

A partir de estos datos, determine la relación entre la concentración *C* (en gramos por cada 100 mL) y la rotación de la polarización (en grados) de cada aminoácido. (*Sugerencia:* Grafique la concentración en función del ángulo de rotación de cada aminoácido).

33.63 •• Un haz de luz solar no polarizada incide con un ángulo desconocido sobre la pared vertical de plástico de un tanque de agua. Parte de la luz se refleja en la pared y entra en el agua (figura P33.63). El índice de refracción de la pared de plástico es 1.61. Si se observa que la luz que se refleja desde la pared hacia el agua está completamente polarizada, ¿qué ángulo forma el haz con la normal dentro del agua?

Figura **P33.63**



33.64 •• Cierto material birrefringente tiene índices de refracción n_1 y n_2 para las dos componentes perpendiculares de luz linealmente polarizada que lo atraviesan. Las longitudes de onda correspondientes son $\lambda_1 = \lambda_0/n_1$ y λ_0/n_2, donde λ_0 es la longitud de onda en el vacío. *a*) Para que el cristal funcione como placa de un cuarto de onda, el número de longitudes de onda de cada componente en el interior del material debe diferir en $\frac{1}{4}$. Demuestre que el espesor mínimo de una placa de un cuarto de onda debe ser

$$d = \frac{\lambda_0}{4(n_1 - n_2)}$$

b) Calcule el espesor mínimo de una placa de un cuarto de onda hecha de siderita ($FeO \cdot CO_2$), si los índices de refracción son $n_1 = 1.875$ y $n_2 = 1.635$, y la longitud de onda en el vacío es $\lambda_0 = 589$ nm.

PROBLEMAS DE DESAFÍO

33.65 ••• Considere dos vibraciones con la misma amplitud y frecuencia, pero distinta fase, una a lo largo del eje *x*,

$$x = a\,\text{sen}(\omega t - \alpha)$$

y la otra a lo largo del eje *y*,

$$y = a\,\text{sen}(\omega t - \beta)$$

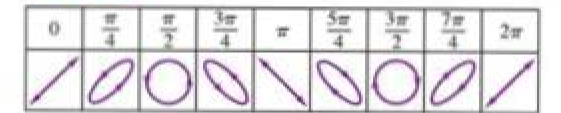
Estas se pueden escribir como sigue:

$$\frac{x}{a} = \text{sen}\,\omega t \cos\alpha - \cos\omega t\,\text{sen}\,\alpha \qquad (1)$$

$$\frac{y}{a} = \text{sen}\,\omega t \cos\beta - \cos\omega t\,\text{sen}\,\beta \qquad (2)$$

a) Multiplique la ecuación (1) por sen β, y la ecuación (2) por sen α, y luego reste las ecuaciones resultantes. *b*) Multiplique la ecuación (1) por cos β y la ecuación (2) por cos α, y después reste las ecuaciones que resultan. *c*) Eleve al cuadrado y sume los resultados de los incisos *a*) y *b*). *d*) Obtenga la ecuación $x^2 + y^2 - 2xy\cos\delta = a^2\,\text{sen}^2\,\delta$, donde $\delta = \alpha - \beta$. *e*) Use el resultado anterior para justificar cada uno de los diagramas de la figura P33.65. En la figura el ángulo dado es la diferencia de fase entre dos movimientos armónicos simples con las mismas frecuencia y amplitud, uno horizontal (sobre el eje *x*) y el otro vertical (sobre el eje *y*). Así, la figura muestra el movimiento resultante de la superposición de los dos movimientos armónicos perpendiculares.

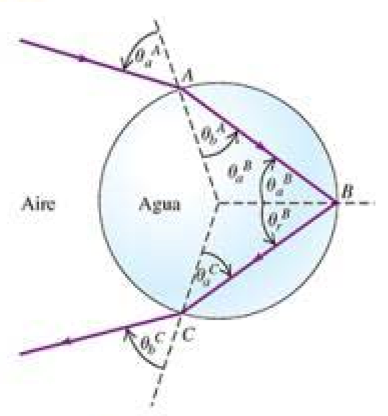
Figura **P33.65**



33.66 ••• CALC Un arcoíris se produce por la reflexión de la luz solar en gotas esféricas de agua en el aire. La figura P33.66 muestra un rayo que se refracta en una gota en el punto *A*, se refleja en la superficie pos-

terior de la gota en el punto B y se refracta de regreso al aire en el punto C. Los ángulos de incidencia y refracción, θ_a y θ_b, se muestran en los puntos A y C, y los ángulos de incidencia y reflexión θ_a y θ_r se muestran en el punto B. *a*) Demuestre que $\theta_a{}^B = \theta_b{}^A$, $\theta_a{}^C = \theta_b{}^A$ y $\theta_b{}^C = \theta_a{}^A$. *b*) Demuestre que el ángulo en radianes entre el rayo antes de entrar a la gota en A y después de salir en C (la desviación angular total del rayo) es $\Delta = 2\theta_a{}^A - 4\theta_b{}^A + \pi$. (*Sugerencia:* Determine las desviaciones angulares que ocurren en A, B y C, y súmelas para obtener Δ). *c*) Con base en la ley de Snell, escriba Δ en términos de $\theta_a{}^A$ y n, el índice de refracción del agua en la gota. *d*) Un arcoíris se formará cuando la desviación angular Δ sea *estacionaria* en el ángulo de incidencia $\theta_a{}^A$, es decir, cuando $d\Delta/d\theta_a{}^A = 0$. Si esta condición se satisface, todos los rayos con ángulos de incidencia cercanos a $\theta_a{}^A$ serán enviados de regreso en la misma dirección y producirán una zona brillante en el cielo. Sea θ_1 el valor de $\theta_a{}^A$ en el que esto ocurre. Demuestre que $\cos^2\theta_1 = \frac{1}{3}(n^2 - 1)$. (*Sugerencia:* Le será de ayuda la fórmula de derivación $d(\text{arcsen}\, u(x))/dx = (1 - u^2)^{-1/2}(du/dx)$]. *e*) El índice de refracción en el agua es 1.342 para la luz violeta y 1.330 para la luz roja. Utilice los resultados de los incisos *c*) y *d*) para obtener θ_1 y Δ para la luz violeta y para la roja. ¿Concuerdan sus resultados con los ángulos que se muestran en la figura 33.20*d*? Cuando usted observa un arcoíris, ¿qué color aparece más alto sobre el horizonte, el rojo o el violeta?

Figura **P33.66**



33.67 ••• **CALC** Un *arcoíris secundario* se forma cuando la luz incidente experimenta dos reflexiones internas en una gota esférica de agua, como se aprecia en la figura 33.20*e*. (Véase el problema de desafío 33.66). *a*) En términos del ángulo de incidencia $\theta_a{}^A$ y el índice de refracción n de la gota, ¿cuál es la desviación angular Δ del rayo? Es decir, ¿cuál es el ángulo entre el rayo antes de que entre a la gota y después de que sale de esta? *b*) ¿Cuál es el ángulo de incidencia θ_2 para el que la derivada de Δ con respecto al ángulo de incidencia $\theta_a{}^A$ es igual a cero? *c*) Los índices de refracción para la luz roja y la violeta en el agua están dados en el inciso *e*) del problema de desafío 33.66. Utilice los resultados de los incisos *a*) y *b*) para obtener θ_2 y Δ para la luz violeta y para la roja. ¿Concuerdan sus resultados con los ángulos que se ilustran en la figura 33.20*e*? Cuando usted observa un arcoíris secundario, ¿cuál color está más alto sobre el horizonte, el rojo o el violeta? Explique su respuesta.

Respuestas

Pregunta inicial del capítulo

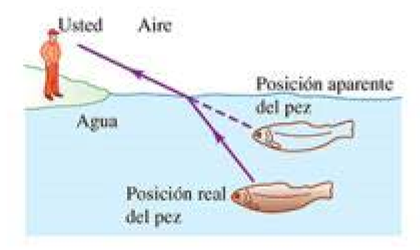


Este es el mismo efecto que se ilustra en la figura 33.31. Las herramientas de dibujo están colocadas entre dos filtros polarizadores cuyos ejes de polarización son perpendiculares. En los sitios en que el plástico transparente está sometido a esfuerzo, se vuelve birrefringente; es decir, la luz viaja a través de él con una rapidez que depende de su polarización. El resultado es que la luz que sale del plástico tiene una polarización distinta que la de la luz que entra. Un punto en el plástico se ve brillante si la luz que sale tiene la misma polarización que el segundo filtro polarizador. La cantidad de birrefringencia depende de la longitud de onda de la luz, así como de la cantidad de esfuerzo que se ejerce sobre el plástico, por lo que en diferentes lugares del plástico se observan distintos colores.

Preguntas de las secciones Evalúe su comprensión

33.1 Respuesta: iii. Las ondas viajan más lejos en la dirección y que en las otras direcciones en una cantidad de tiempo dada, de manera que los frentes de onda están alargados en la dirección y.

33.2 Respuestas: *a*) ii, *b*) iii. Como se aprecia en la figura, los rayos de luz que provienen del pez se desvían alejándose de la normal cuando



pasan del agua ($n = 1.33$) al aire ($n = 1.00$). Como resultado, el pez parece estar más cerca de la superficie del agua de lo que realmente está. Por lo tanto, se debe apuntar el arpón *más abajo* de la posición aparente del pez. Si se utiliza un rayo láser, se debe apuntar *hacia* la posición aparente del pez: el haz de luz láser seguiría la misma trayectoria que va de usted al pez que la luz ordinaria que va del pez a usted (aunque en sentido opuesto).

33.3 Respuestas: i, ii. La reflexión interna total ocurre solo si se cumplen dos condiciones: n_b debe ser menor que n_a, y el ángulo crítico $\theta_{\text{crít}}$ (donde sen $\theta_{\text{crít}} = n_b/n_a$) debe ser más pequeño que el ángulo de incidencia θ_a. En los primeros dos casos se satisfacen ambas condiciones: los ángulos críticos son **i.** $\theta_{\text{crít}} = \text{sen}^{-1}(1/1.33) = 48.8°$ y **ii.** $\theta_{\text{crít}} = \text{sen}^{-1}(1.33/1.52) = 61.0°$, los dos son más pequeños que $\theta_a = 70°$. En el tercer caso, $n_b = 1.52$ es mayor que $n_a = 1.33$, por lo que la reflexión interna total no puede ocurrir a ningún ángulo de incidencia.

33.5 Respuesta: ii. La luz solar reflejada en las ventanas del edificio alto está parcialmente polarizada en la dirección vertical, ya que cada ventana se encuentra en un plano vertical. El filtro Polaroid enfrente de la lente está orientado con su eje de polarización perpendicular a la dirección de polarización dominante de la luz reflejada.

33.7 Respuesta: ii. El principio de Huygens se aplica a las ondas de todas clases, incluidas las sonoras. Por consiguiente, esta situación es exactamente la que se ilustra en la figura 33.36, donde el material *a* representa el aire caliente, el material *b* representa el aire frío en el que las ondas viajan con más lentitud, y la interfase entre los materiales representa el frente de aire. El norte se encuentra hacia la parte superior de la figura y el este hacia la derecha, así que la figura 33.36 indica que los rayos (los cuales señalan la dirección de propagación) se desvían hacia el este.

Problema práctico

Respuesta: 1.93×10^8 m/s

34 ÓPTICA GEOMÉTRICA

OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

Al estudiar este capítulo, usted aprenderá:

- Cómo un espejo plano forma una imagen.
- Por qué los espejos cóncavos y convexos forman diferentes tipos de imágenes.
- Cómo se forman imágenes mediante una interfase curva entre dos materiales transparentes.
- Qué aspectos de una lente determinan el tipo de imagen que produce.
- Qué determina el campo de visión de una lente de cámara.
- Qué provoca diversos trastornos en la visión humana, y cómo se pueden corregir.
- El principio de la lente de aumento simple.
- Cómo funcionan los microscopios y los telescopios.



? ¿Cómo funcionan las lentes de aumento? ¿A qué distancia del objeto que se examina ofrecen la visión más nítida?

Nuestro reflejo en el espejo del baño, la imagen de la Luna a través de un telescopio, las figuras geométricas que se observan en un caleidoscopio: todos son ejemplos de *imágenes*. En cada caso, el objeto que miramos parece estar en un lugar diferente de su posición real: nuestro reflejo está del otro lado del espejo, la Luna parece estar más cercana cuando la vemos a través de un telescopio, y los objetos que se observan en un caleidoscopio parecen encontrarse en muchos lugares al mismo tiempo. En todos los casos, los rayos de luz provenientes de un punto de un objeto se desvían por reflexión o refracción (o una combinación de ambas), de tal forma que convergen hacia un punto denominado *punto de imagen*, o parecen divergir con respecto a este. Nuestro objetivo en este capítulo es ver cómo ocurre esto y explorar los diferentes tipos de imágenes que se forman mediante dispositivos ópticos simples.

Para comprender las imágenes y su formación, solo necesitamos el modelo de rayos de la luz, las leyes de reflexión y refracción, y conocimientos elementales de geometría y trigonometría. El papel fundamental que desempeña la geometría en nuestro análisis es la razón por la que se da el nombre de *óptica geométrica* al estudio de la formación de imágenes mediante rayos luminosos. Comenzaremos nuestro análisis con uno de los dispositivos ópticos de formación de imágenes más sencillos: un espejo plano. Proseguiremos con el estudio de cómo se forman las imágenes con los espejos curvos, las superficies refractivas y las lentes delgadas. Nuestros resultados constituirán los cimientos para entender muchos de los instrumentos ópticos que conocemos, entre ellos, las lentes de cámara fotográfica, las lentes de aumento, el ojo humano, los microscopios y los telescopios.



ActivPhysics 15.4: Geometric Optics: Plane Mirrors

34.1 Reflexión y refracción en una superficie plana

Antes de analizar el significado del término imagen, necesitamos definir el concepto de **objeto** como se utiliza en óptica. Por *objeto* entendemos todo aquello desde donde radian rayos de luz. La luz podría ser emitida por el objeto si este es *luminoso*, como el filamento incandescente de una bombilla eléctrica. Por otro lado, la luz podría ser

emitida por una fuente distinta (como una lámpara o el Sol) y luego reflejarse en el objeto; un ejemplo de ello es la luz que llega a nuestros ojos desde las páginas de este libro. La figura 34.1 muestra rayos luminosos que radian en todas direcciones desde un objeto situado en un punto *P*. Para que un observador vea este objeto directamente, no debe haber obstrucción alguna entre el objeto y los ojos del observador. Observe que los rayos luminosos provenientes del objeto alcanzan los ojos izquierdo y derecho del observador a diferentes ángulos; el cerebro del observador procesa estas diferencias para inferir la *distancia* que hay entre el observador y el objeto.

El objeto de la figura 34.1 es un **objeto puntual** carente de extensión física. Los objetos reales con longitud, anchura y altura se llaman **objetos extensos**. Para comenzar, consideraremos solo un objeto puntual idealizado, ya que siempre podemos pensar en un objeto extenso como aquel constituido por un gran número de objetos puntuales.

Suponga que algunos de los rayos provenientes del objeto inciden en una superficie reflectante plana y lisa (figura 34.2). Esta podría ser la superficie de un material con un índice de refracción diferente, la cual refleja parte de la luz incidente, o una superficie metálica pulida que refleja casi el 100% de la luz que incide sobre ella. En todos los casos, dibujaremos la superficie reflectante como una línea negra con un área sombreada tras ella, como en la figura 34.2. Los espejos de baño tienen una lámina de vidrio delgada, que se encuentra frente a la superficie reflectante y la protege; despreciaremos los efectos de esta lámina delgada.

De acuerdo con la ley de reflexión, todos los rayos que inciden en la superficie se reflejan a un ángulo con respecto a la normal igual al ángulo de incidencia. Puesto que la superficie es plana, la normal tiene la misma dirección en todos los puntos de la superficie, y se tiene una reflexión *especular*. Una vez que los rayos se han reflejado, su dirección es la misma que si hubieran provenido del punto *P′*. Al punto *P* se le llama *punto de objeto*, en tanto que el punto *P′* es el *punto de imagen* correspondiente; se dice que la superficie reflectante forma una **imagen** del punto *P*. Un observador que ve únicamente los rayos reflejados en la superficie, y que no sabe que está viendo un reflejo, *piensa* que el origen de los rayos se encuentra en el punto de imagen *P′*. El punto de imagen es, por consiguiente, un medio conveniente para describir la dirección de los diversos rayos reflejados, del mismo modo que el punto de objeto *P* describe la dirección de los rayos que llegan a la superficie *antes* de la reflexión.

Si la superficie de la figura 34.2 *no* fuera lisa, la reflexión sería *difusa*, y los rayos provenientes de distintas partes de la superficie seguirían direcciones no correlacionadas (véase la figura 33.6*b*). En este caso, no habría un punto de imagen definido *P′*, de donde todos los rayos reflejados parecen emanar. No podemos ver nuestro reflejo sobre una superficie metálica opaca, porque su superficie es áspera; al pulir el metal su superficie se alisa, hay reflexión especular y se hace visible una imagen reflejada.

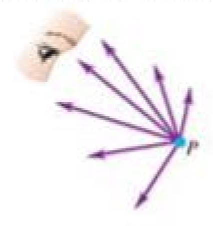
Una superficie plana *refractiva* también forma una imagen, como se muestra en la figura 34.3. Los rayos provenientes del punto *P* se refractan en la interfase entre dos materiales ópticos. Cuando los ángulos de incidencia son pequeños, la dirección final de los rayos después de la refracción es la misma que si hubieran provenido del punto *P′*, como se muestra, y también en este caso llamamos a *P′ punto de imagen*. En la sección 33.2 describimos cómo este efecto hace que los objetos que están bajo el agua parezcan más próximos a la superficie de lo que están en realidad (véase la figura 33.9).

En las figuras 34.2 y 34.3 los rayos no pasan realmente por el punto de imagen *P′*. De hecho, si el espejo de la figura 34.2 fuera opaco, no habría luz alguna en su lado derecho. Si los rayos salientes no pasan en realidad por el punto de imagen, se dice que la imagen es una **imagen virtual**. Más adelante veremos casos donde los rayos salientes *pasan* efectivamente por un punto de imagen; en tal caso, la imagen resultante recibe el nombre de **imagen real**. Las imágenes que se forman en una pantalla de proyección, en la película fotográfica de una cámara y en la retina del ojo son imágenes reales.

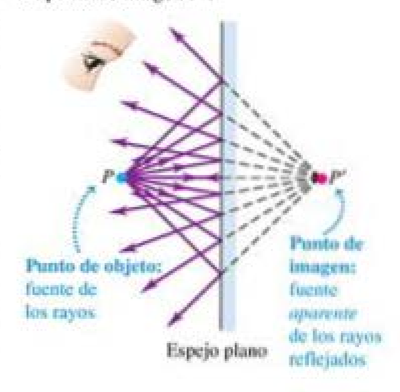
Formación de imágenes mediante un espejo plano

Concentrémonos por ahora en las imágenes que se producen por *reflexión*; más adelante en este mismo capítulo regresaremos a la refracción. Para determinar la ubicación precisa de la imagen virtual *P′* que un espejo plano forma de un objeto situado en *P*, utilizaremos la construcción que se presenta en la figura 34.4. La figura muestra dos rayos que divergen a partir de un punto de objeto *P* situado a una distancia *s* a la

34.1 Los rayos luminosos radian desde un objeto puntual *P* en todas direcciones.

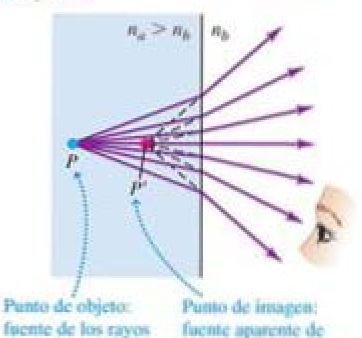


34.2 Los rayos luminosos provenientes del objeto situado en el punto *P* se reflejan en un espejo plano. Los rayos reflejados que penetran en el ojo se ven como si provinieran del punto de imagen *P′*.

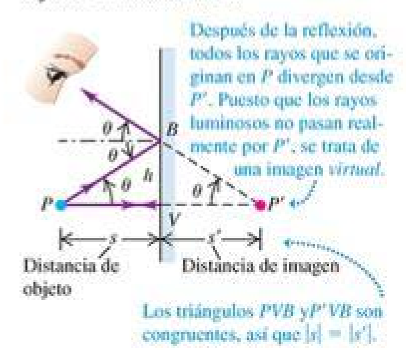


34.3 Los rayos luminosos provenientes del objeto situado en el punto *P* se refractan en la interfase plana. Los rayos refractados que penetran en el ojo se ven como si provinieran del punto de imagen *P′*.

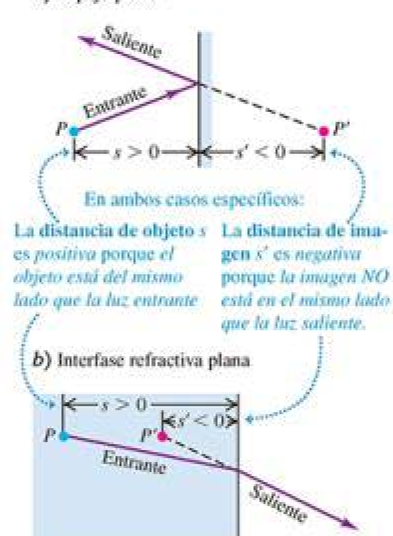
Cuando $n_a > n_b$, *P′* está más próximo a la superficie que *P*; para $n_a < n_b$, se cumple lo opuesto.



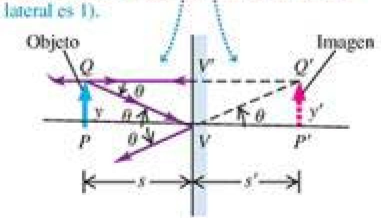
34.4 Construcción para encontrar la ubicación de la imagen formada por un espejo plano. El punto de imagen P' está tan atrás del espejo como el punto de objeto P está delante de él.



34.5 En ambas situaciones, la distancia de objeto s es positiva (regla 1) y la distancia de imagen s' es negativa (regla 2).



34.6 Construcción para calcular la altura de una imagen formada por reflexión en una superficie reflectante plana.



izquierda de un espejo plano. Llamamos a s la **distancia de objeto**. El rayo PV incide normalmente en el espejo (es decir, es perpendicular a la superficie del espejo), y regresa siguiendo su trayectoria original.

El rayo PB forma un ángulo θ con PV; incide en el espejo a un ángulo de incidencia θ y se refleja formando un ángulo igual con la normal. Si prolongamos hacia atrás los dos rayos reflejados, estos se intersecan en el punto P', a una distancia s' detrás del espejo. Llamamos a s' la **distancia de imagen**. La línea entre P y P' es perpendicular al espejo. Los dos triángulos PVB y $P'VB$ son congruentes; por lo tanto, P y P' están a la misma distancia del espejo, y s y s' tienen igual magnitud. El punto de imagen P' está situado exactamente en posición opuesta al punto del objeto P, tan *distante* de la cara posterior del espejo como el punto del objeto se encuentra de su cara anterior.

Podemos repetir la construcción de la figura 34.4 con respecto a cada rayo que diverge desde P. La dirección de *todos* los rayos reflejados salientes es la misma que habría si cada uno hubiera tenido su origen en el punto P', lo cual confirma que P' es la *imagen* de P. No importa dónde se encuentre el observador, siempre verá la imagen en el punto P'.

Reglas de signos

Antes de seguir adelante, conviene presentar algunas reglas generales de signos. Estas quizá parezcan innecesariamente complicadas en relación con el caso sencillo de una imagen formada por un espejo plano; no obstante, nos proponemos expresar las reglas de una forma que sea aplicable a *todas* las situaciones que encontraremos más adelante. Estas incluyen la formación de imágenes por una superficie reflectante o refractiva, plana o esférica, o por un par de superficies refractivas que forman una lente. Las reglas son las siguientes:

1. **Regla de signos para la distancia de objeto:** Cuando el objeto está del mismo lado de la superficie reflectante o refractiva que la luz entrante, la distancia de objeto s es positiva; en caso contrario, es negativa.
2. **Regla de signos para la distancia de imagen:** Cuando la imagen está del mismo lado de la superficie reflectante o refractiva que la luz saliente, la distancia de imagen s' es positiva; en caso contrario, es negativa.
3. **Regla de signos para el radio de curvatura de una superficie esférica:** Cuando el centro de curvatura C está del mismo lado que la luz saliente, el radio de curvatura es positivo; en caso contrario, es negativo.

La figura 34.5 ilustra las reglas 1 y 2 para dos situaciones diferentes. En el caso de un espejo, los lados entrante y saliente son siempre el mismo; por ejemplo, en las figuras 34.2, 34.4 y 34.5*a*, ambos están del lado izquierdo. En el caso de las superficies refractivas de las figuras 34.3 y 34.5*b*, los lados entrante y saliente están a los lados izquierdo y derecho, respectivamente, de la interfase entre los dos materiales. (Observe que otros libros podrían utilizar reglas diferentes).

En las figuras 34.4 y 34.5*a* la distancia de objeto s es *positiva* porque el punto de objeto P está en el lado entrante (el lado izquierdo) de la superficie reflectante. La distancia de imagen s' es *negativa* porque el punto de imagen P' *no* está en el lado saliente (el lado izquierdo) de la superficie. La relación entre las distancias de objeto y de imagen s y s' es simplemente

$$s = -s' \qquad \text{(espejo plano)} \tag{34.1}$$

En el caso de una superficie reflectante o refractiva plana, el radio de curvatura es infinito y no es una magnitud particularmente interesante ni útil; en realidad, en estos casos no necesitamos la tercera regla de signos. Sin embargo, esta regla será de gran importancia más adelante, cuando estudiemos la formación de imágenes por superficies reflectantes y refractivas *curvas* en este mismo capítulo.

Imagen de un objeto extenso: Espejo plano

Ahora consideraremos un objeto *extenso* de tamaño finito. Para simplificar, se suele considerar un objeto de una sola dimensión, como una flecha delgada, orientado paralelamente a la superficie reflectante; un ejemplo es la flecha PQ de la figura 34.6. La distancia de la cabeza a la cola de una flecha orientada de este modo es su *altura*; en

la figura 34.6 la altura es y. La imagen que forma un objeto extenso como este es una imagen extensa; a cada punto del objeto corresponde un punto de la imagen. Se muestran dos de los rayos provenientes de Q; *todos* los rayos que proceden de Q parecen divergir desde su punto de imagen Q' después de la reflexión. La imagen de la flecha es la línea $P'Q'$, cuya altura es y'. Otros puntos del objeto PQ tienen puntos de imagen situados entre P' y Q'. Los triángulos PQV y $P'Q'V$ son congruentes; por ello, el objeto PQ y la imagen $P'Q'$ tienen igual tamaño y orientación, y $y = y'$.

La proporción de la altura de la imagen con respecto a la altura del objeto, y'/y, en *cualquier* situación de formación de imágenes es el **aumento lateral** m; es decir,

$$m = \frac{y'}{y} \qquad \text{(aumento lateral)} \tag{34.2}$$

De esta manera, en el caso de un espejo plano, el aumento lateral m es la unidad. Cuando nos miramos en un espejo plano, nuestra imagen es del mismo tamaño que nuestro cuerpo.

En la figura 34.6 la flecha imagen apunta en la *misma* dirección que la flecha objeto; decimos que la imagen está **derecha**. En este caso, y y y' tienen el mismo signo, y el aumento lateral m es positivo. La imagen que forma un espejo plano siempre es derecha, por lo que y y y' tienen la misma magnitud y el mismo signo; de acuerdo con la ecuación (34.2), el aumento lateral de un espejo plano siempre es $m = +1$. Más adelante encontraremos situaciones donde la imagen está **invertida**, es decir, la flecha imagen apunta en dirección *opuesta* a la de la flecha objeto. En el caso de una imagen invertida, y y y' tienen signos *opuestos*, y el aumento lateral m es *negativo*.

El objeto de la figura 34.6 tiene una sola dimensión. La figura 34.7 muestra un objeto *tri*dimensional y su imagen virtual tridimensional formada por un espejo plano. El objeto y la imagen guardan la misma relación que una mano izquierda y una mano derecha.

34.7 La imagen formada por un espejo plano es virtual, derecha e inversa. Es del mismo tamaño que el objeto.

Una imagen formada por un espejo plano es inversa de atrás hacia delante: el pulgar imagen $P'R'$ y el pulgar objeto PR apuntan en direcciones opuestas (uno hacia el otro).

Objeto

Imagen

CUIDADO **Reflexiones en un espejo plano** En este momento, quizás usted se pregunte por qué un espejo plano invierte las imágenes izquierda y derecha, pero no de arriba y de abajo. ¡Esta pregunta es muy engañosa! Como se ve en la figura 34.7, la imagen de arriba a abajo $P'Q'$ y la imagen de izquierda a derecha $P'S'$ son paralelas a sus objetos y no están invertidas de modo alguno. Solo la imagen de adelante hacia atrás $P'R'$ está invertida con respecto a PR. Por lo tanto, lo más correcto es afirmar que un espejo plano invierte *de atrás hacia adelante*. Para comprobar esta relación entre objeto e imagen, apunte sus pulgares a lo largo de PR y $P'R'$; sus índices a lo largo de PQ y $P'Q'$, y sus dedos medios a lo largo de PS y $P'S'$. Cuando un objeto y su imagen están relacionados de esta manera, se dice que la imagen es **inversa**; esto significa que *solo* se ha invertido la dimensión de adelante hacia atrás.

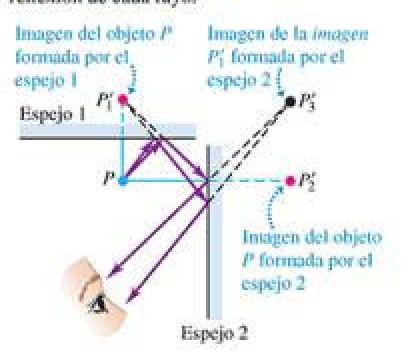
34.8 La imagen formada por un espejo plano es inversa.



La imagen invertida de un objeto tridimensional formada por un espejo plano es del mismo *tamaño* que el objeto en todas sus dimensiones. Cuando las dimensiones transversales del objeto y de la imagen están en la misma dirección, la imagen es derecha. Así, un espejo plano siempre forma una imagen derecha, aunque inversa. La figura 34.8 ilustra este aspecto.

Una propiedad importante de todas las imágenes formadas por superficies reflectantes o refractivas es que una *imagen* formada por una superficie o un dispositivo óptico puede servir como el *objeto* de una segunda superficie o dispositivo. La figura 34.9 muestra un ejemplo sencillo. El espejo 1 forma una imagen P_1' del punto de objeto P, y el espejo 2 forma otra imagen P_2', cada una del modo como hemos explicado. Además, la imagen P_1' formada por el espejo 1 sirve como objeto para el espejo 2, el cual forma entonces una imagen de este objeto en el punto P_3', como se muestra. Asimismo, el espejo 1 toma la imagen P_2' formada por el espejo 2 como objeto y forma una imagen de ella. Dejamos al lector la demostración de que este punto de imagen también está en P_3'. La idea de que una imagen formada por un dispositivo puede actuar como el objeto de un segundo dispositivo es de gran importancia en la óptica geométrica. La aplicaremos más adelante en este capítulo para localizar la imagen formada por dos refracciones sucesivas en superficies curvas de una lente. Esta idea nos ayudará a comprender la formación de imágenes por combinaciones de lentes, como en un microscopio o en un telescopio de refracción.

34.9 Las imágenes P_1' y P_2' se forman por reflexión simple de cada rayo proveniente de un objeto situado en P. La imagen P_3' localizada tratando cualquiera de las otras imágenes como objeto, se forma por doble reflexión de cada rayo.



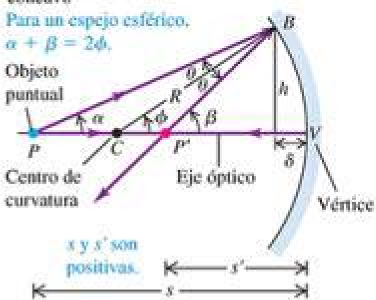
Evalúe su comprensión de la sección 34.1 Si usted camina directamente hacia un espejo plano con rapidez v, ¿con qué rapidez se aproxima su imagen hacia usted? **i.** Más lentamente que v; **ii.** igual que v; **iii.** más rápido que v, pero más lento que $2v$; **iv.** $2v$; **v.** más rápido que $2v$.



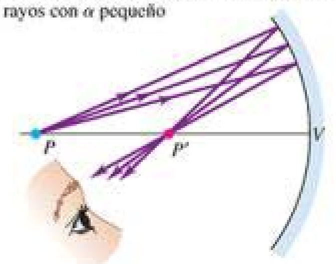
34.2 Reflexión en una superficie esférica

34.10 *a*) Un espejo esférico cóncavo forma una imagen real de un objeto puntual P que está sobre el eje óptico del espejo. *b*) El ojo observa algunos de los rayos salientes y los percibe como si provinieran de P'.

a) Construcción para encontrar la posición P' de la imagen formada por un espejo esférico cóncavo



b) La aproximación paraxial es válida para los rayos con α pequeño



Todos los rayos provenientes de P tienen un ángulo α pequeño y se intersecan en P', formando una imagen real.

Un espejo plano forma una imagen del mismo tamaño que el objeto. No obstante, los espejos tienen numerosas aplicaciones donde se requiere que la imagen y el objeto sean de diferente tamaño. Un espejo de aumento para aplicar maquillaje proporciona una imagen *más grande* que el objeto, y los espejos de vigilancia (que se utilizan en los comercios para identificar a los ladrones) forman una imagen *más pequeña* que el objeto. También hay aplicaciones de espejos en las cuales es deseable una imagen *real*, de modo que los rayos luminosos pasen en efecto por el punto de imagen P'. Por sí solo, un espejo plano no puede realizar ninguna de estas tareas. Por ello, se utilizan espejos *curvos*.

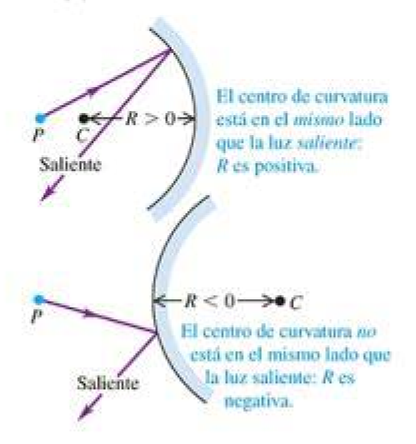
Imagen de un objeto puntual: Espejo esférico

Consideremos el caso especial (y fácil de analizar) de formación de imágenes con un espejo *esférico*. La figura 34.10*a* muestra un espejo esférico con radio de curvatura R, con su lado cóncavo hacia la luz incidente. El **centro de curvatura** de la superficie (el centro de la esfera de la cual forma parte la superficie) está en C, y el **vértice** del espejo (el centro de la superficie del espejo) se encuentra en V. La recta CV recibe el nombre de **eje óptico**. El punto P es un punto de objeto que se encuentra sobre el eje óptico; por el momento, supondremos que la distancia de P a V es mayor que R.

El rayo PV, que pasa por C, incide de forma normal en el espejo y se refleja sobre sí mismo. El rayo PB, a un ángulo α con respecto al eje, incide en el espejo en B, donde los ángulos de incidencia y de reflexión son θ. El rayo reflejado interseca el eje en el punto P'. Dentro de poco, demostraremos que *todos* los rayos provenientes de P intersecan el eje en el *mismo* punto P', como en la figura 34.10*b*, siempre y cuando el ángulo α sea pequeño. El punto P' es, entonces, la *imagen* del punto de objeto P. A diferencia de los rayos reflejados de la figura 34.1, los rayos reflejados de la figura 34.10*b* se intersecan realmente en el punto P', y luego divergen a partir de P', *como si* se hubieran originado en ese punto. Por consiguiente, P' es una imagen *real*.

Con la finalidad de apreciar la utilidad de una imagen real, suponga que el espejo está en una habitación oscura, donde la única fuente de luz es un objeto luminoso situado en P. Si se coloca un trozo pequeño de película fotográfica en P', todos los rayos luminosos provenientes del punto P que se reflejen en el espejo incidirán en el mismo punto P' de la película; una vez revelada, la película mostrará una sola mancha brillante que representa una imagen nítidamente enfocada del objeto en el punto P. En este principio se basan casi todos los telescopios astronómicos, los cuales utilizan grandes espejos cóncavos para obtener fotografías de objetos celestes. Con un espejo *plano* como el de la figura 34.2, colocar un trozo de película en el punto de imagen P' sería una pérdida de tiempo; los rayos luminosos nunca pasan realmente por el punto de imagen, y en la película no se registrará la imagen. Las imágenes reales son *indispensables* en fotografía.

34.11 La regla de signos para el radio de un espejo esférico.



Determinemos ahora la ubicación del punto de imagen real P' de la figura 34.10*a* y sometamos a prueba la aseveración de que todos los rayos provenientes de P se intersecan en P' (siempre y cuando el ángulo que forman con el eje óptico sea pequeño). La distancia de objeto, medida desde el vértice V, es s; la distancia de imagen, también medida desde V, es s'. Los signos de s, s' y el radio de curvatura R están determinados por las reglas de signos listadas en la sección 34.1. El punto de objeto P está del mismo lado que la luz incidente, por lo que, de acuerdo con la primera regla de signos, s es positiva. El punto de imagen P' está del mismo lado que la luz reflejada, de modo que, de acuerdo con la segunda regla de signos, la distancia de imagen s' también es positiva. El centro de curvatura C está del mismo lado que la luz reflejada, así que, según la tercera regla de signos, R es positivo; R siempre es positivo cuando la reflexión ocurre en el lado *cóncavo* de una superficie (figura 34.11).

Ahora utilicemos el siguiente teorema de geometría plana: un ángulo externo de un triángulo es igual a la suma de los dos ángulos internos opuestos. Aplicando este teorema a los triángulos PBC y $P'BC$ de la figura 34.10*a*, tenemos que

$$\phi = \alpha + \theta \qquad \beta = \phi + \theta$$

Eliminando θ entre estas ecuaciones se obtiene

$$\alpha + \beta = 2\phi \tag{34.3}$$

Ahora podemos calcular la distancia de imagen s'. Sea h la altura del punto B con respecto al eje óptico, y δ la distancia corta de V al pie de esta línea vertical. Escribimos entonces expresiones de las tangentes de α, β y ϕ, recordando que s, s' y R son cantidades positivas:

$$\tan\alpha = \frac{h}{s - \delta} \qquad \tan\beta = \frac{h}{s' - \delta} \qquad \tan\phi = \frac{h}{R - \delta}$$

Estas ecuaciones trigonométricas no se resuelven de forma tan sencilla como las ecuaciones algebraicas correspondientes a un espejo plano. Sin embargo, *si el ángulo α es pequeño*, los ángulos β y ϕ también lo son. La tangente de un ángulo mucho menor que un radián es casi igual al ángulo mismo (medido en radianes), de modo que podemos sustituir tan α por α, y así sucesivamente, en las ecuaciones anteriores. Asimismo, si α es pequeño, podemos ignorar la distancia δ en comparación con s', s y R. Así, en el caso de ángulos pequeños tenemos las siguientes relaciones aproximadas:

$$\alpha = \frac{h}{s} \qquad \beta = \frac{h}{s'} \qquad \phi = \frac{h}{R}$$

Al sustituir estas ecuaciones en la (34.3) y dividiendo entre h, se obtiene una relación general entre s, s' y R:

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{2}{R} \qquad \text{(relación objeto-imagen, espejo esférico)} \tag{34.4}$$

Esta ecuación no contiene el ángulo α. Por lo tanto, *todos* los rayos provenientes de P que forman ángulos suficientemente pequeños con el eje se intersecan en P' después de reflejarse; esto comprueba lo que antes afirmamos. Dichos rayos, casi paralelos al eje y próximos a él, se llaman **rayos paraxiales**. (El término **aproximación paraxial** se suele aplicar a las aproximaciones que hemos descrito). Debido a que todos estos rayos reflejados convergen en el punto de imagen, los espejos cóncavos también se conocen como *espejos convergentes*.

Es preciso entender con claridad que la ecuación (34.4), así como muchas relaciones similares que deduciremos más adelante en este capítulo y en el siguiente, es solo *aproximadamente* correcta. Es resultado de un cálculo que incluye aproximaciones, y solo es válida con respecto a rayos paraxiales. Si se aumenta el ángulo α que un rayo forma con el eje óptico, el punto P' donde el rayo interseca el eje óptico se acerca un poco más al vértice, en comparación con el caso de un rayo paraxial. En consecuencia, un espejo esférico, a diferencia de un espejo plano, no forma una imagen puntual precisa de un objeto puntual; la imagen se "difumina". Esta propiedad de los espejos esféricos se llama **aberración esférica**. Cuando se fabricó el espejo primario del Telescopio Espacial Hubble (figura 34.12*a*), tuvo diminutas incorrecciones en su forma, las cuales llevaron a una decepcionante aberración esférica (figura 34.12*b*). Los resultados del telescopio mejoraron notablemente después de la instalación de óptica correctiva (figura 34.12*c*).

Si el radio de curvatura se hace infinito ($R = \infty$), el espejo se vuelve *plano*, y la ecuación (34.4) se reduce a la ecuación (34.1) de una superficie reflectante plana.

Punto focal y distancia focal

Cuando el punto del objeto P está muy lejos del espejo esférico ($s = \infty$), los rayos entrantes son paralelos. (La estrella de la figura 34.12*c* es un ejemplo de un objeto distante de este tipo). De acuerdo con la ecuación (34.4), la distancia de imagen s' viene dada en este caso por

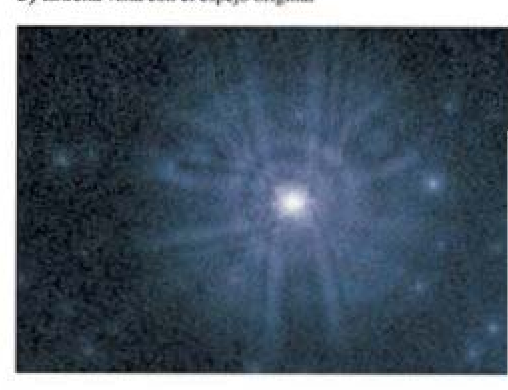
$$\frac{1}{\infty} + \frac{1}{s'} = \frac{2}{R} \qquad s' = \frac{R}{2}$$

34.12 ***a*), *b*)** Poco después de que el Telescopio Espacial Hubble se colocó en órbita en 1990, se descubrió que al espejo cóncavo primario (también llamado *espejo objetivo*) le faltaba profundidad en la medida de $\frac{1}{50}$ del grosor de un cabello humano, y esto dio lugar a una aberración esférica de la imagen de la estrella que se trataba de enfocar. ***c*)** Luego de la instalación de una óptica correctiva en 1993, fue posible eliminar casi por completo los efectos de la aberración esférica.

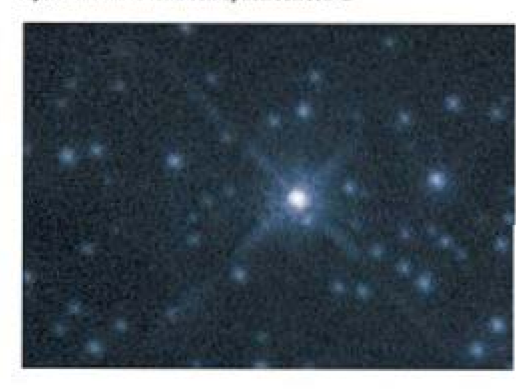
***a*)** El espejo primario con diámetro de 2.4 m del Telescopio Espacial Hubble



***b*)** Estrella vista con el espejo original

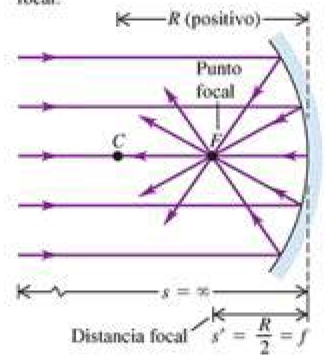


***c*)** La misma estrella con óptica correctiva

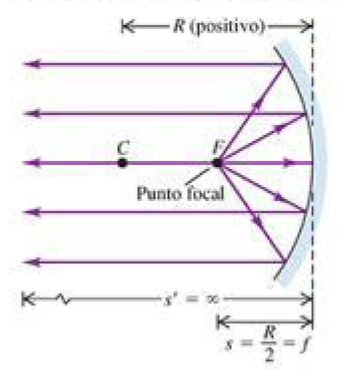


34.13 El punto focal y la distancia focal de un espejo cóncavo.

a) Todos los rayos paralelos incidentes en un espejo esférico se reflejan a través del punto focal.



b) Los rayos divergentes del punto focal se reflejan para formar rayos paralelos salientes.



Esta situación se ilustra en la figura 34.13*a*. El haz de rayos paralelos incidentes converge, después de reflejarse en el espejo, en un punto F situado a una distancia $R/2$ del vértice del espejo. El punto F donde los rayos paralelos incidentes convergen se llama **punto focal** o **foco**; por eso, decimos que estos rayos se enfocan. La distancia del vértice al punto focal, que se indica con f, recibe el nombre de **distancia focal**. Vemos que f se relaciona con el radio de curvatura R como sigue:

$$f = \frac{R}{2} \quad \text{(distancia focal de un espejo esférico)} \tag{34.5}$$

En la figura 34.13*b* se muestra la situación opuesta. Ahora el *objeto* se encuentra en el punto focal F, por lo que la distancia de objeto es $s = f = R/2$. La distancia de imagen s' está dada una vez más por la ecuación (34.4):

$$\frac{2}{R} + \frac{1}{s'} = \frac{2}{R} \qquad \frac{1}{s'} = 0 \qquad s' = \infty$$

Con el objeto en el punto focal, los rayos reflejados de la figura 34.13*b* son paralelos al eje óptico; se encuentran solo en un punto infinitamente alejado del espejo, por lo que la imagen está en el infinito.

De esta manera, el punto focal F de un espejo esférico tiene las siguientes propiedades: **1.** todo rayo entrante paralelo al eje óptico se refleja a través del punto focal, y **2.** todo rayo entrante que pasa por el punto focal se refleja paralelamente al eje óptico. En el caso de espejos esféricos, estos enunciados se cumplen solo cuando los rayos son paraxiales. En el caso de espejos parabólicos, estos enunciados son *exactamente* válidos; por ello, se prefieren espejos parabólicos en la construcción de telescopios astronómicos. Se utilizan espejos esféricos o parabólicos en linternas y faros para dar a la luz de la bombilla la forma de un haz paralelo. Ciertas centrales de energía solar utilizan una serie de espejos planos para simular un espejo cóncavo aproximadamente esférico; los espejos captan la luz solar y la dirigen hacia el punto focal, donde se encuentra una caldera de vapor. (Los conceptos de punto focal y distancia focal también son aplicables a las lentes, como veremos en la sección 34.4).

Por lo regular, expresaremos la relación entre las distancias de objeto y de imagen de un espejo [ecuación (34.4)] en términos de la distancia focal f:

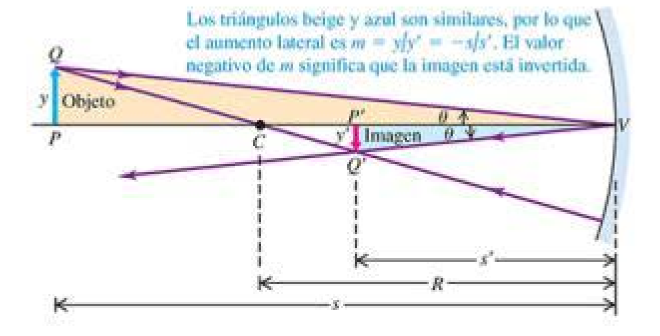
$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{f} \quad \text{(relación objeto-imagen, espejo esférico)} \tag{34.6}$$

Imagen de un objeto extenso: Espejo esférico

Suponga ahora que se tiene un objeto de tamaño *finito*, representado por la flecha PQ en la figura 34.14, perpendicular al eje óptico CV. La imagen de P formada por rayos paraxiales está en P'. La distancia de objeto correspondiente al punto Q es casi idéntica a la correspondiente al punto P, por lo que la imagen $P'Q'$ es casi recta y perpendicular al eje. Observe que las flechas objeto e imagen son de distinto tamaño (y y y', respectivamente) y de orientación opuesta. En la ecuación (34.2) definimos el *aumento lateral* m como la razón del tamaño de imagen y' con respecto al tamaño de objeto y:

$$m = \frac{y'}{y}$$

34.14 Construcción para determinar posición, orientación y altura de una imagen formada por un espejo esférico cóncavo.



Como los triángulos PVQ y $P'VQ'$ de la figura 34.14 son *semejantes*, también tenemos la relación $y/s = -y'/s'$. El signo negativo es necesario porque el objeto y la imagen están en lados opuestos del eje óptico; si y es positiva, y' es negativa. Por lo tanto,

$$m = \frac{y'}{y} = -\frac{s'}{s} \quad \text{(aumento lateral, espejo esférico)} \qquad (34.7)$$

Si m es positiva, la imagen es derecha en comparación con el objeto; si m es negativa, la imagen está *invertida* con respecto al objeto, como en la figura 34.14. En el caso de un espejo *plano*, $s = -s'$, por lo que $y' = y$ y $m = +1$; puesto que m es positiva, la imagen es derecha, y como $|m| = 1$, la imagen es del mismo tamaño que el objeto.

CUIDADO **El aumento lateral puede ser menor que 1** Aunque la razón del tamaño de la imagen con respecto al tamaño del objeto se llama *aumento lateral*, la imagen formada por un espejo o una lente puede ser mayor, menor o del mismo tamaño que el objeto. Si es más pequeña, entonces el valor absoluto del aumento lateral es menor que la unidad: $|m| < 1$. La imagen que forma el espejo de un telescopio astronómico o una lente de cámara es, por lo regular, *mucho* más pequeña que el objeto. Por ejemplo, la imagen de la estrella brillante de la figura 34.12*c* mide apenas unos cuantos milímetros de ancho, en tanto que la estrella misma tiene un diámetro de cientos de miles de kilómetros.

En nuestro análisis de los espejos cóncavos hemos considerado hasta ahora solo objetos que se encuentran *afuera* del punto focal o en este, de modo que la distancia de objeto s es mayor que o igual a la distancia focal (positiva) f. En este caso el punto de imagen está del mismo lado del espejo que los rayos salientes, y la imagen es real e invertida. Si se coloca un objeto *más adentro* del punto focal de un espejo cóncavo, de modo que $s < f$, la imagen resultante es *virtual* (esto es, el punto de imagen está en el lado opuesto del espejo con respecto al objeto), *derecha* y *más grande* que el objeto. Los espejos que se utilizan para aplicar maquillaje (a los que hicimos referencia al principio de esta sección) son espejos cóncavos; al utilizarlos, la distancia del rostro al espejo es menor que la distancia focal, y se observa una imagen derecha ampliada. Se pueden probar estos enunciados acerca de los espejos cóncavos aplicando las ecuaciones (34.6) y (34.7) (véase el ejercicio 34.11). También podremos verificar estos resultados más adelante en esta sección, una vez que hayamos aprendido ciertos métodos gráficos para relacionar las posiciones y los tamaños del objeto y de la imagen.

MasteringPHYSICS

ActivPhysics 15.5: Spherical Mirrors: Ray Diagrams
ActivPhysics 15.6: Spherical Mirrors: The Mirror Equation
ActivPhysics 15.7: Spherical Mirrors: Linear Magnification
ActivPhysics 15.8: Spherical Mirrors: Problems

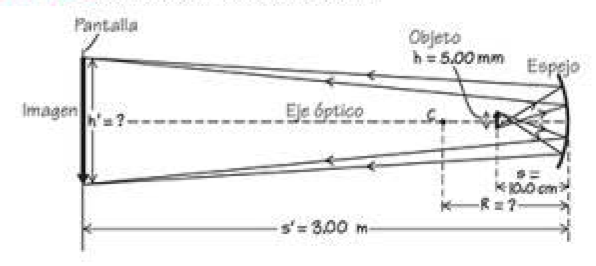
Ejemplo 34.1 Formación de imagen por un espejo cóncavo I

Un espejo cóncavo forma una imagen del filamento de una lámpara de reflector que está a 10.0 cm delante del espejo, sobre una pared situada a 3.00 m del espejo. *a*) ¿Cuáles son el radio de curvatura y la distancia focal del espejo? *b*) ¿Cuál es el aumento lateral? ¿Cuál es la altura de la imagen, si la altura del objeto es de 5.00 mm?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: La figura 34.15 es nuestro diagrama. Las incógnitas son el radio de curvatura R, la distancia focal f, el aumento lateral m y la altura de la imagen y'. Se conocen las distancias del espejo al objeto (s) y del espejo a la imagen (s'). Se despeja R en la ecuación (34.4) y después se utiliza la ecuación (34.5) para encontrar f. La ecuación (34.7) da por resultado tanto a m como a y'.

34.15 Nuestro esquema de este problema.



EJECUTAR: *a*) Tanto el objeto como la imagen están del lado cóncavo del espejo (el lado reflectante), por lo que tanto s como s' son positivas; tenemos $s = 10.0$ cm y $s' = 300$ cm. Resolvemos la ecuación (34.4) para encontrar R,

$$\frac{1}{10.0\text{ cm}} + \frac{1}{300\text{ cm}} = \frac{2}{R}$$

$$R = 2\left(\frac{1}{10.0\text{ cm}} + \frac{1}{300\text{ cm}}\right)^{-1} = 19.4\text{ cm}$$

La distancia focal del espejo es $f = R/2 = 9.7$ cm.

b) De acuerdo con la ecuación (34.7), el aumento lateral es

$$m = -\frac{s'}{s} = -\frac{300\text{ cm}}{10.0\text{ cm}} = -30.0$$

Puesto que m es negativa, la imagen es invertida. La altura de la imagen es 30.0 veces la altura del objeto, esto es, (30.0)(5.00 mm) = 150 mm.

Continúa

EVALUAR: El diagrama indica que la imagen está invertida; nuestro cálculo concuerda. Observe que el objeto (en $s = 10.0$ cm) se encuentra inmediatamente afuera con respecto al punto focal ($f = 9.7$ cm). Esto es muy parecido a lo que se hace en los faros de un automóvil. Si se coloca el filamento cerca del punto focal, el espejo cóncavo produce un haz de rayos casi paralelos.



Ejemplo conceptual 34.2 Formación de imagen por un espejo cóncavo II

En el ejemplo 34.1, suponga que la mitad inferior de la superficie reflectante del espejo está cubierta de hollín no reflectante. ¿Qué efecto tendrá esto en la imagen del filamento?

SOLUCIÓN

Sería común suponer que en este caso la imagen mostraría solo la mitad del filamento. De hecho, la imagen sigue mostrando el filamento *completo*. La explicación es evidente si se examina la figura 34.10*b*. Los rayos luminosos que provienen de cualquier punto de objeto P se reflejan en *todas* las partes del espejo y convergen en el punto de imagen P' correspondiente. Si parte de la superficie del espejo se torna no reflectante o se elimina por completo, los rayos luminosos provenientes de la superficie reflectante restante continúan formando una imagen de todas las partes del objeto.

El único efecto de la reducción del área reflectante es que la imagen *se atenúa* porque llega menos energía luminosa al punto de imagen. Si el área reflectante del espejo se reduce a la mitad, la imagen tendrá la mitad del brillo original. Y a la inversa, al *aumentar* el área reflectante, la imagen se vuelve más brillante. Para formar imágenes razonablemente brillantes de estrellas distantes, los telescopios astronómicos utilizan espejos de hasta varios metros de diámetro (véase la figura 34.12*a*).

Espejos convexos

En la figura 34.16*a* el lado *convexo* de un espejo esférico está de frente hacia la luz incidente. El centro de curvatura está en el lado opuesto a los rayos salientes; de acuerdo con la tercera regla de signos de la sección 34.1, R es negativo (véase la figura 34.11). El rayo PB se refleja, con ángulos de incidencia y reflexión iguales a θ. El rayo reflejado, proyectado hacia atrás, interseca el eje en P'. Como en el caso del espejo cóncavo, *todos* los rayos provenientes de P que se reflejan en el espejo divergen a partir del mismo punto P', siempre y cuando el ángulo α sea pequeño. Por consiguiente, P' es la imagen de P. La distancia de objeto s es positiva, la distancia de imagen s' es negativa, y el radio de curvatura R es *negativo* en el caso de un espejo *convexo*.

La figura 34.16*b* muestra dos rayos que divergen a partir de la punta de la flecha PQ y de la imagen virtual $P'Q'$ de esta flecha. El mismo procedimiento que seguimos en el caso de un espejo cóncavo permite demostrar que, en el caso de un espejo convexo,

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{2}{R}$$

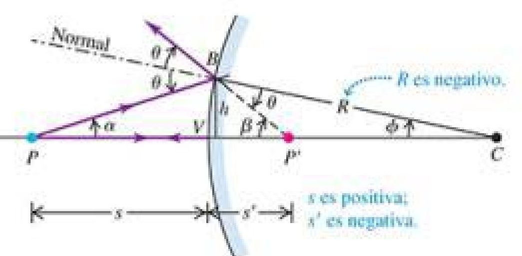
y el aumento lateral es

$$m = \frac{y'}{y} = -\frac{s'}{s}$$

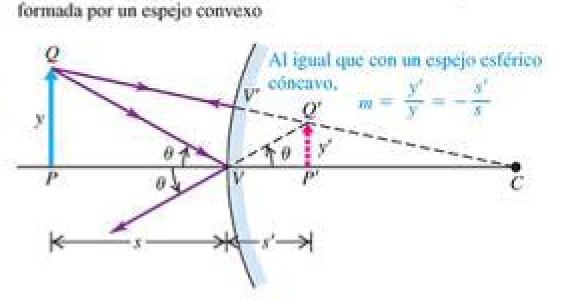
34.16 Formación de imagen por un espejo convexo.

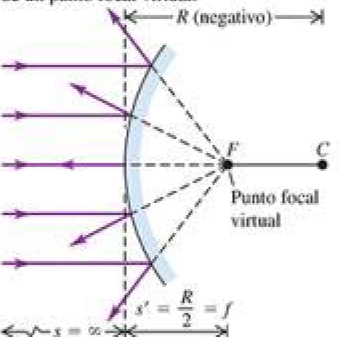


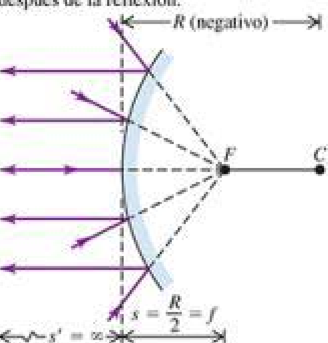
a) Construcción para determinar la posición de una imagen formada por un espejo convexo



b) Construcción para determinar el aumento de una imagen formada por un espejo convexo







34.17 El punto focal y la distancia focal de un espejo convexo.

Estas expresiones son exactamente equivalentes a las ecuaciones (34.4) y (34.7) correspondientes a un espejo cóncavo. Por lo tanto, si aplicamos nuestras reglas de signos de modo congruente, las ecuaciones (34.4) y (34.7) son válidas tanto con espejos cóncavos como convexos.

Cuando R es negativo (espejo convexo), los rayos entrantes que son paralelos al eje óptico no se reflejan a través del punto focal F. En cambio, divergen como si provinieran del punto F situado a una distancia f *detrás* del espejo, como se muestra en la figura 34.17*a*. En este caso, f es la distancia focal, y F recibe el nombre de *punto focal virtual*. La distancia de imagen s' correspondiente es negativa, así que tanto f como R son negativos, y la ecuación (34.5), $f = R/2$, se cumple con espejos tanto convexos como cóncavos. En la figura 34.17*b* los rayos entrantes convergen como si fueran a encontrarse en el punto focal virtual F, y se reflejan paralelamente al eje óptico.

En síntesis, las ecuaciones (34.4) a (34.7), las relaciones básicas de formación de imágenes por espejos esféricos, son válidas con respecto a espejos tanto cóncavos como convexos, siempre y cuando se apliquen las reglas de signos de forma congruente.

Ejemplo 34.3 Problema de imagen de Santa Claus

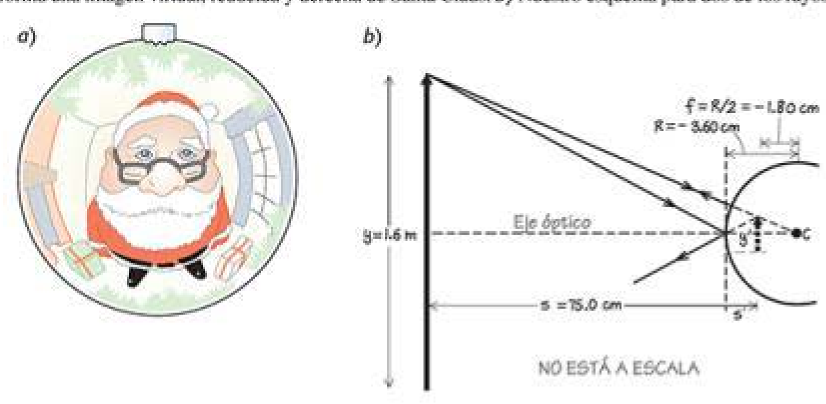


Para saber si se ha ensuciado de hollín, Santa Claus examina su reflejo en una esfera plateada brillante de un árbol de Navidad que está a 0.750 m de distancia (figura 34.18*a*). El diámetro de la esfera es de 7.20 cm. Las obras de referencia más conocidas indican que Santa Claus es un "viejo elfo muy jovial", por lo que estimamos su estatura en 1.6 m. ¿En dónde aparece, y cuál es la altura de la imagen de Santa Claus que forma la esfera? ¿La imagen es derecha o invertida?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: La figura 34.18*b* ilustra la situación. Santa Claus es el objeto, y la superficie del adorno más próxima a él actúa como espejo convexo. Las relaciones entre distancia de objeto, distancia de imagen, distancia focal y aumento son las correspondientes a los espejos cóncavos, siempre y cuando las reglas de signos se apliquen

34.18 *a*) La esfera forma una imagen virtual, reducida y derecha de Santa Claus. *b*) Nuestro esquema para dos de los rayos que forman la imagen.



Continúa

de forma congruente. El radio de curvatura y la distancia focal de un espejo convexo son *negativos*. La distancia de objeto es $s = 0.750\ \text{m} = 75.0\ \text{cm}$, y la estatura de Santa Claus es $y = 1.6\ \text{m}$. Se resuelve la ecuación (34.6) para calcular la distancia de imagen s', y después la ecuación (34.7) para determinar el aumento lateral m y, por ende, la altura y' de la imagen. El signo de m indica si la imagen es derecha o invertida.

EJECUTAR: El radio del espejo (la mitad del diámetro) es $R = -(7.20\ \text{cm})/2 = -3.60\ \text{cm}$, y la distancia focal es $f = R/2 = -1.80\ \text{cm}$. De acuerdo con la ecuación (34.6),

$$\frac{1}{s'} = \frac{1}{f} - \frac{1}{s} = \frac{1}{-1.80\ \text{cm}} - \frac{1}{75.0\ \text{cm}}$$

$$s' = -1.76\ \text{cm}$$

Puesto que s' es negativa, la imagen está detrás del espejo, es decir, del lado opuesto a la emisión de luz (figura 34.18*b*), y es virtual. La imagen está aproximadamente a medio camino entre la superficie anterior del adorno y su centro.

La ecuación (34.7) permite determinar el aumento lateral m:

$$m = \frac{y'}{y} = -\frac{s'}{s} = -\frac{-1.76\ \text{cm}}{75.0\ \text{cm}} = 0.0234$$

$$y' = my = (0.0234)(1.6\ \text{m}) = 3.8 \times 10^{-2}\text{m} = 3.8\ \text{cm}$$

EVALUAR: Nuestro diagrama indica que la imagen está derecha, ya que tanto m como y' son positivas; nuestros cálculos concuerdan. Cuando la distancia de objeto s es positiva, un espejo convexo *siempre* forma una imagen derecha, virtual, disminuida e invertida. Por esta razón, se utilizan espejos convexos en las intersecciones con poca visibilidad, para vigilancia en tiendas y como espejos retrovisores de "gran ángulo" en automóviles y camiones. (Muchos de estos espejos llevan la leyenda "los objetos que se ven en este espejo están más cerca de lo que parece").

Métodos gráficos para espejos

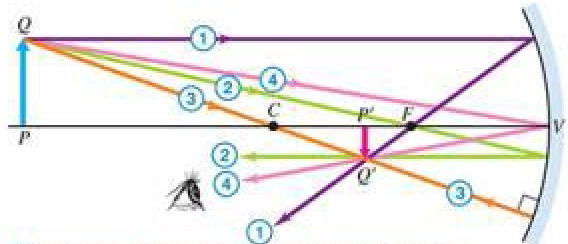
En los ejemplos 34.1 y 34.3 aplicamos las ecuaciones (34.6) y (34.7) para determinar la posición y el tamaño de las imágenes formadas por un espejo. También podemos establecer las propiedades de la imagen mediante un sencillo método *gráfico*. Este método consiste en encontrar el punto de intersección de unos cuantos rayos específicos que divergen a partir de un punto del objeto (como el punto Q de la figura 34.19) y se reflejan en el espejo. Entonces (despreciando las aberraciones), *todos* los rayos provenientes de este punto de objeto que inciden en el espejo se intersecarán en el mismo punto. Para esta construcción siempre se elige un punto de objeto que *no* esté sobre el eje óptico. En la figura 34.19 se muestran cuatro rayos que por lo general se dibujan con facilidad. Estos se conocen como **rayos principales**.

1. *Un rayo paralelo al eje*, después de reflejarse, pasa por el punto focal F de un espejo cóncavo o parece provenir del punto focal (virtual) de un espejo convexo.
2. *Un rayo que pasa por el punto focal F (o que avanza hacia este)* se refleja paralelamente al eje.
3. *Un rayo a lo largo del radio* que pasa por el centro de curvatura C, o se aleja de él, interseca la superficie en dirección normal y se refleja de regreso por su trayectoria original.
4. *Un rayo que incide en el vértice V* se refleja, formando ángulos iguales con el eje óptico.

34.19 Método gráfico para localizar la imagen formada por un espejo esférico. Los colores de los rayos sirven solo como identificación; no se refieren a colores específicos de la luz.

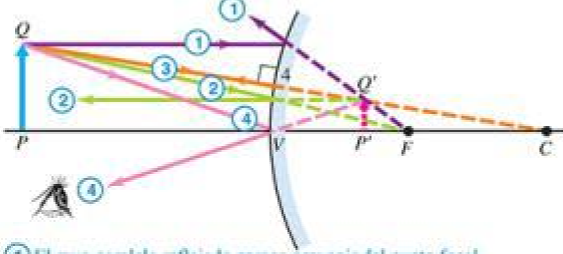


a) Rayos principales para un espejo cóncavo



① El rayo paralelo al eje se refleja a través del punto focal.
② El rayo que pasa por el punto focal se refleja paralelo al eje.
③ El rayo que pasa por el centro de curvatura interseca la superficie en dirección normal y se refleja a lo largo de su trayectoria original.
④ El rayo hacia el vértice se refleja simétricamente tomando como base el eje óptico.

b) Rayos principales para un espejo convexo



① El rayo paralelo reflejado parece provenir del punto focal.
② El rayo hacia el punto focal se refleja paralelo al eje.
③ Al igual que con el espejo cóncavo: el rayo radial al centro de curvatura interseca la superficie en dirección normal y se refleja a lo largo de su trayectoria original.
④ Al igual que con el espejo cóncavo, el rayo hacia el vértice se refleja simétricamente tomando como base el eje óptico.

Una vez que hemos encontrado la posición del punto de imagen por medio de la intersección de dos cualesquiera de estos rayos principales (1, 2, 3, 4), podemos dibujar el trayecto de cualquier otro rayo del punto de objeto al mismo punto de imagen.

CUIDADO **Los rayos principales no son los únicos rayos** Aunque hemos destacado los rayos principales, de hecho, *cualquier* rayo proveniente del objeto que incida en el espejo pasará por el punto de imagen (en el caso de una imagen real) o parecerá que se emite desde el punto de imagen (en el caso de una imagen virtual). Por lo regular, basta con trazar los rayos principales, pues son todo lo que se necesita para localizar la imagen.

Estrategia para resolver problemas 34.1 Formación de imágenes con espejos



IDENTIFICAR *los conceptos relevantes:* Existen dos formas distintas y complementarias de resolver problemas relacionados con la formación de imágenes con espejos. Una de ellas emplea ecuaciones, en tanto que la otra implica dibujar un diagrama de rayos principales. La solución satisfactoria de un problema se basa en *ambos* métodos.

PLANTEAR *el problema:* Identificar las incógnitas. Una de ellas es probablemente la distancia focal, la distancia de objeto o la distancia de imagen con las otras dos cantidades dadas.

EJECUTAR *la solución* como sigue:

1. Dibuje un diagrama de rayos principales grande y claro si tiene suficiente información.
2. Oriente su diagrama con los rayos entrantes dirigidos de izquierda a derecha. Dibuje solo los rayos principales; codifíquelos con colores como en la figura 34.19. Si es posible, utilice papel para gráficas o cuadriculado. ¡Utilice una regla y mida las distancias minuciosamente! Un dibujo a mano libre *no* le dará buenos resultados.
3. Si sus rayos principales no convergen en un punto de imagen real, quizá sea necesario prolongarlos directamente hacia atrás, para localizar un punto de imagen virtual, como en la figura 34.19*b*. Es recomendable dibujar las extensiones con líneas discontinuas.
4. Mida el diagrama resultante para obtener las magnitudes de las incógnitas.
5. Resuelva la ecuación (34.6) para determinar las incógnitas, $1/s + 1/s' = 1/f$, y la ecuación de aumento lateral, ecuación (34.7), cuando sea pertinente. Aplique las reglas de signos dadas en la sección 34.1 para las distancias de objeto y de imagen, el radio de curvatura y las alturas del objeto y de la imagen.
6. Utilice las reglas de los signos para interpretar los resultados que deduzca de sus diagramas de rayos y cálculos. Observe que las *mismas* reglas de los signos (de la sección 34.1) funcionan para los cuatro casos en este capítulo: reflexión y refracción de superficies planas y esféricas.

EVALUAR *su respuesta:* Compruebe sus resultados empleando tanto diagramas como ecuaciones para corroborar la posición y el tamaño de la imagen, y para verificar si esta es real o virtual.

Ejemplo 34.4 Espejo cóncavo con diferentes distancias de objeto



Un espejo cóncavo tiene un radio de curvatura con un valor absoluto de 20 cm. Encuentre por medios gráficos la imagen de un objeto en forma de una flecha perpendicular al eje del espejo a cada una de las siguientes distancias de objeto: *a*) 30 cm, *b*) 20 cm, *c*) 10 cm y *d*) 5 cm. Compruebe la construcción *calculando* el tamaño y el aumento lateral de cada imagen.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Debemos usar *tanto* métodos gráficos *como* cálculos para obtener la imagen formada por un espejo. El espejo es cóncavo, por lo tanto, su radio de curvatura es $R = +20$ cm y su distancia focal es $f = R/2 = +10$ cm. Nuestras incógnitas son la distancia de imagen s' y los aumentos laterales m correspondientes a los cuatro casos con distancias de objeto s cada vez más pequeñas. En cada caso, despejamos s' en la ecuación (34.6) y utilizamos $m = -s'/s$ para encontrar m.

EJECUTAR: En la figura 34.20 se muestran los diagramas de rayos principales correspondientes a los cuatro casos. Estudie detenidamente cada uno de estos diagramas y confirme que cada rayo numerado está dibujado de acuerdo con las reglas especificadas ("Métodos gráficos para espejos"). Vale la pena destacar varios aspectos. Primero, en el caso *b*) las distancias de objeto y de imagen son iguales. No se puede dibujar el rayo 3 porque un rayo proveniente de Q que pasa por el centro de curvatura C no incide en el espejo. No se puede dibujar el rayo 2 en *c*) porque un rayo que va de Q hacia F tampoco incide en el espejo. En este caso, los rayos salientes son paralelos, lo que corresponde a una distancia de imagen infinita. En el caso *d*) los rayos salientes divergen; es necesario prolongarlos hacia atrás para encontrar el punto desde el cual parecen divergir, es decir, el *punto de imagen virtual* Q'. El caso que se ilustra en *d*) corresponde a la observación general de que un objeto situado por dentro del punto focal de un espejo cóncavo produce una imagen virtual.

Las mediciones de las figuras, empleando las escalas adecuadas, dan las siguientes distancias de imagen aproximadas: *a*) 15 cm; *b*) 20 cm; *c*) ∞ o $-\infty$ (porque los rayos salientes son paralelos y no convergen a ninguna distancia finita); *d*) −10 cm. Para *calcular* estas distancias, se despeja s' en la ecuación (34.6) utilizando $f = 10$ cm:

$$a)\ \frac{1}{30\text{ cm}} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{10\text{ cm}} \qquad s' = 15\text{ cm}$$

$$b)\ \frac{1}{20\text{ cm}} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{10\text{ cm}} \qquad s' = 20\text{ cm}$$

$$c)\ \frac{1}{10\text{ cm}} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{10\text{ cm}} \qquad s' = \infty\ (\text{o } -\infty)$$

$$d)\ \frac{1}{5\text{ cm}} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{10\text{ cm}} \qquad s' = -10\text{ cm}$$

Los signos de s' nos indican que en *a*) y *b*) la imagen es real, mientras que en *d*), es virtual.

Continúa

Los aumentos laterales medidos en las figuras son aproximadamente *a*) $-\frac{1}{2}$; *b*) -1; *c*) ∞ o $-\infty$; *d*) +2. A partir de la ecuación (34.7), se tiene

$$a)\ m = -\frac{15\ \text{cm}}{30\ \text{cm}} = -\frac{1}{2}$$

$$b)\ m = -\frac{20\ \text{cm}}{20\ \text{cm}} = -1$$

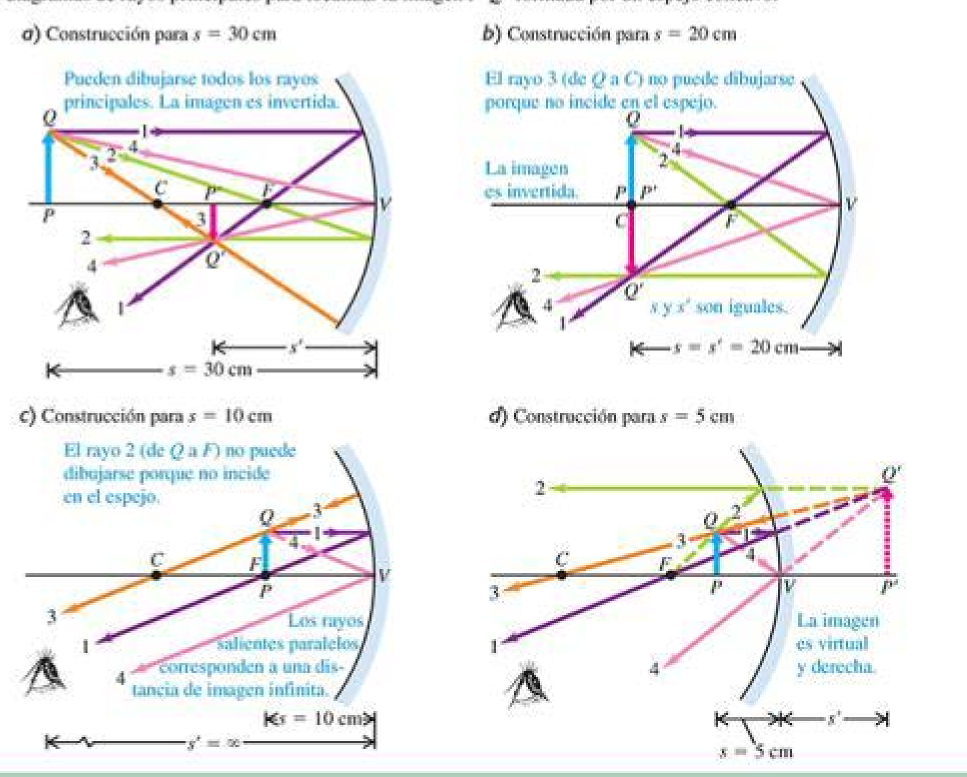
$$c)\ m = -\frac{\infty\ \text{cm}}{10\ \text{cm}} = -\infty\ (\text{o} +\infty)$$

$$d)\ m = -\frac{-10\ \text{cm}}{5\ \text{cm}} = +2$$

Los signos de m nos indican que la imagen está invertida en los casos *a*) y *b*), y es derecha en el caso *d*).

EVALUAR: Observe la tendencia de los resultados en los cuatro casos. Cuando el objeto está lejos del espejo, como en la figura 34.20*a*, la imagen es más pequeña que el objeto, invertida y real. A medida que la distancia de objeto s disminuye, la imagen se aleja del espejo y aumenta de tamaño (figura 34.20*b*). Cuando el objeto está en el punto focal, la imagen se encuentra en el infinito (figura 34.20*c*). Si el objeto se desplaza por dentro del punto focal, la imagen se torna más grande que el objeto, es derecha y virtual (figura 34.20*d*). Podrá confirmar estas conclusiones mirando objetos reflejados en el lado cóncavo de una cuchara metálica.

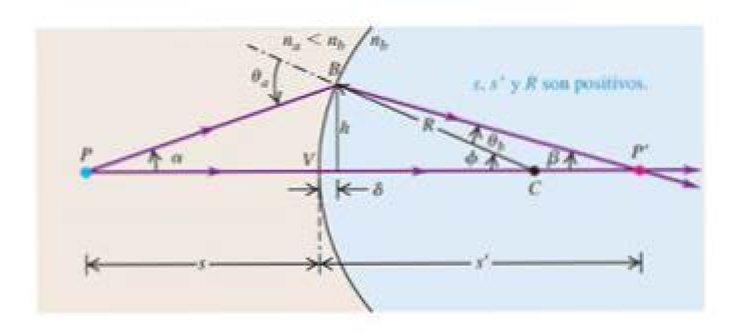
34.20 Uso de diagramas de rayos principales para localizar la imagen $P'Q'$ formada por un espejo cóncavo.



Evalúe su comprensión de la sección 34.2 Los espejos de tocador se diseñan de modo que nuestra imagen aparezca al derecho y aumentada. *a*) ¿El espejo es cóncavo o convexo? *b*) Para ver una imagen aumentada, ¿qué distancia debería haber entre el espejo y nuestro rostro (la distancia focal f)? **i.** $|f|$; **ii.** menor que $|f|$; **iii.** mayor que $|f|$.

34.3 Refracción en una superficie esférica

Como vimos en la sección 34.1, se forman imágenes por refracción lo mismo que por reflexión. Para comenzar, consideremos la refracción en una superficie esférica, es decir, en una interfase esférica entre dos materiales ópticos con diferente índice de refracción. Este análisis es aplicable directamente a ciertos sistemas ópticos reales, como el ojo humano. Asimismo, constituye un peldaño hacia el análisis de las lentes, que normalmente tienen *dos* superficies esféricas (o casi esféricas).



34.21 Construcción para encontrar la posición del punto de imagen P' de un objeto puntual P, formado por refracción en una superficie esférica. Los materiales a la izquierda y a la derecha de la interfase tienen índices de refracción n_a y n_b, respectivamente. En el caso que aquí se muestra, $n_a < n_b$.

Imagen de un objeto puntual: Superficie refractiva esférica

En la figura 34.21 una superficie esférica de radio R forma una interfase entre dos materiales con índices de refracción diferentes n_a y n_b. La superficie forma una imagen P' de un punto de objeto P; nos proponemos averiguar cuál es la relación entre las distancias de objeto y de imagen (s y s'). Aplicaremos las reglas de signos que utilizamos en el caso de los espejos esféricos. El centro de curvatura C está del lado saliente de la superficie; por lo tanto, R es positivo. El rayo PV incide en el vértice V, es perpendicular a la superficie (esto es, al plano tangente a la superficie en el punto de incidencia V), y penetra en el segundo material sin desviarse. El rayo PB, que forma un ángulo α con el eje, incide a un ángulo θ_a con respecto a la normal, y se refracta a un ángulo θ_b. Estos rayos se intersecan en P', a una distancia s' a la derecha del vértice. El dibujo de la figura corresponde al caso $n_a < n_b$. Las distancias de objeto y de imagen son positivas.

Probaremos que si el ángulo α es pequeño, *todos* los rayos provenientes de P se intersecan en el mismo punto P', por lo que P' es la *imagen real* de P. Emplearemos en gran medida el mismo método que aplicamos a los espejos esféricos en la sección 34.2. Una vez más, aplicaremos el teorema según el cual el ángulo externo de un triángulo es igual a la suma de los dos ángulos internos opuestos; la aplicación de esto a los triángulos PBC y $P'BC$ da lo siguiente:

$$\theta_a = \alpha + \phi \qquad \phi = \beta + \theta_b \tag{34.8}$$

De acuerdo con la ley de refracción,

$$n_a \operatorname{sen}\theta_a = n_b \operatorname{sen}\theta_b$$

Asimismo, las tangentes de α, β y ϕ son

$$\tan\alpha = \frac{h}{s+\delta} \qquad \tan\beta = \frac{h}{s'-\delta} \qquad \tan\phi = \frac{h}{R-\delta} \tag{34.9}$$

En el caso de rayos paraxiales, θ_a y θ_b son pequeños en comparación con un radián, y podemos tomar el ángulo mismo (medido en radianes) como aproximación del seno y de la tangente de cualquiera de estos ángulos. La ley de refracción da entonces

$$n_a\theta_a = n_b\theta_b$$

Combinando esto con la primera de las ecuaciones (34.8), se obtiene

$$\theta_b = \frac{n_a}{n_b}(\alpha + \phi)$$

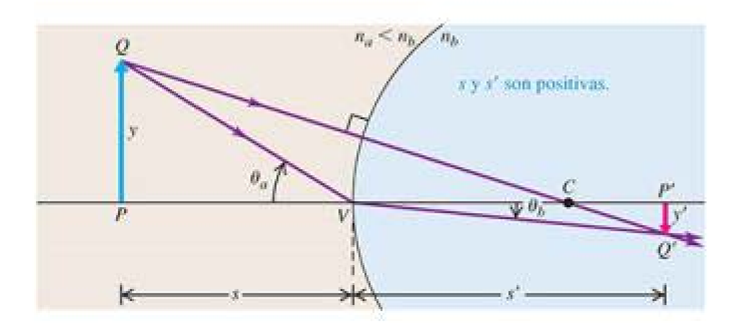
La sustitución de esto en la segunda de las ecuaciones (34.8) da

$$n_a\alpha + n_b\beta = (n_b - n_a)\phi \tag{34.10}$$

Ahora aplicamos las aproximaciones $\tan\alpha = \alpha$, etcétera, en las ecuaciones (34.9) y también despreciamos la distancia pequeña δ; esas ecuaciones se transforman entonces en

$$\alpha = \frac{h}{s} \qquad \beta = \frac{h}{s'} \qquad \phi = \frac{h}{R}$$

34.22 Construcción para encontrar la altura de una imagen formada por refracción en una superficie esférica. En el caso que aquí se muestra, $n_a < n_b$.



Por último, sustituimos estas en la ecuación (34.10) y sacamos por división el factor común h:

$$\frac{n_a}{s} + \frac{n_b}{s'} = \frac{n_b - n_a}{R} \qquad \text{(relación objeto-imagen, superficie refractiva esférica)} \tag{34.11}$$

Esta ecuación no contiene el ángulo α, de manera que la distancia de imagen es la misma con respecto a *todos* los rayos paraxiales que emanan de P; esto prueba nuestra aseveración de que P' es la imagen de P.

Para obtener el aumento lateral m correspondiente a esta situación, utilizaremos la construcción de la figura 34.22. Dibujamos dos rayos a partir del punto Q, uno que pasa por el centro de curvatura C y otro que incide en el vértice V. De los triángulos PQV y $P'Q'V$,

$$\tan\theta_a = \frac{y}{s} \qquad \tan\theta_b = \frac{-y'}{s'}$$

y de acuerdo con la ley de refracción,

$$n_a \operatorname{sen}\theta_a = n_b \operatorname{sen}\theta_b$$

Para ángulos pequeños,

$$\tan\theta_a = \operatorname{sen}\theta_a \qquad \tan\theta_b = \operatorname{sen}\theta_b$$

y, por último,

$$\frac{n_a y}{s} = -\frac{n_b y'}{s'} \qquad \text{o}$$

$$m = \frac{y'}{y} = -\frac{n_a s'}{n_b s} \qquad \text{(aumento lateral, superficie refractiva esférica)} \tag{34.12}$$

Las ecuaciones (34.11) y (34.12) son aplicables a superficies refractivas tanto convexas como cóncavas, siempre y cuando se apliquen las reglas de signos de forma congruente. No importa si n_b es mayor o menor que n_a. Para comprobar estos enunciados, construya diagramas como las figuras 34.21 y 34.22 que correspondan a los tres casos siguientes: **i.** $R > 0$ y $n_a > n_b$, **ii.** $R < 0$ y $n_a < n_b$ y **iii.** $R < 0$ y $n_a > n_b$. Después, en cada caso, deduzca de nuevo las ecuaciones (34.11) y (34.12) a partir de su diagrama.

Veamos una nota final sobre la regla de signos aplicable al radio de curvatura R de una superficie. Con respecto a la superficie reflectante convexa de la figura 34.16, consideramos R como negativo, pero la superficie *refractiva* convexa de la figura 34.21 tiene un valor *positivo* de R. Esto quizá parezca incongruente, pero no lo es. La regla es que R es positivo si el centro de curvatura C está del lado saliente de la superficie, y negativo si C está del otro lado. En el caso de la superficie refractiva convexa de la figura 34.16, R es negativo porque el punto C está a la derecha de la superficie, pero los rayos salientes están a la izquierda. En el caso de la superficie refractiva convexa de la figura 34.21, R es positivo porque tanto C como los rayos salientes están a la derecha de la superficie.

La refracción en superficies curvas es una de las razones por las que los jardineros evitan regar las plantas a mediodía. Cuando la luz solar entra en una gota de agua que reposa sobre una hoja (figura 34.23), los rayos luminosos se refractan unos hacia otros, como en las figuras 34.21 y 34.22. En consecuencia, la luz solar que incide en la hoja está más concentrada y puede causar daño.



34.23 Los rayos luminosos se refractan al atravesar las superficies curvas de estas gotitas de agua.

Un caso especial importante de superficie refractiva esférica es una superficie *plana* entre dos materiales ópticos. Esto corresponde a establecer que $R = \infty$ en la ecuación (34.11). En este caso,

$$\frac{n_a}{s} + \frac{n_b}{s'} = 0 \qquad \text{(superficie refractiva plana)} \qquad (34.13)$$

Para calcular el aumento lateral m correspondiente al presente caso, combinamos esta ecuación con la relación general, ecuación (34.12), para obtener este sencillo resultado:

$$m = 1$$

Es decir, la imagen que forma una superficie refractiva *plana* siempre tiene el mismo tamaño lateral que el objeto, y siempre es derecha.

Un ejemplo de formación de imagen por una superficie refractiva plana es la apariencia de una pajilla o de un remo de canoa parcialmente sumergidos. Visto desde ciertos ángulos, el objeto parece tener un doblez muy evidente en la superficie del agua porque la parte sumergida aparenta encontrarse a solo unas tres cuartas partes de su distancia real debajo de la superficie. (Comentamos acerca de la apariencia de un objeto sumergido en la sección 33.2; véase la figura 33.9).

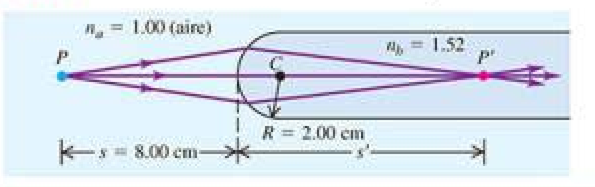
Ejemplo 34.5 Formación de imágenes por refracción I

Una varilla de vidrio cilíndrica, rodeada de aire (figura 34.24), tiene un índice de refracción de 1.52. Se pulió un extremo para formar una superficie hemisférica con radio $R = 2.00$ cm. Un objeto pequeño se coloca sobre el eje de la varilla, 8.00 cm a la izquierda del vértice. *a*) Calcule la distancia de imagen y *b*) el aumento lateral.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Este problema utiliza las ideas de refracción en una superficie curva. Nuestras incógnitas son la distancia de imagen s' y el aumento lateral m. Aquí el material a es aire ($n_a = 1.00$) y el material b es el vidrio del que se compone la varilla ($n_b = 1.52$). Sabemos que $s = 8.00$ cm; el radio de la superficie esférica es positivo ($R = +2.00$ cm) porque el centro de curvatura está del lado saliente de la superficie. Despejaremos s' en la ecuación (34.11), y usaremos la ecuación (34.12) para encontrar m.

34.24 La varilla de vidrio en aire forma una imagen real.



EJECUTAR: *a*) De acuerdo con la ecuación (34.11),

$$\frac{1.00}{8.00 \text{ cm}} + \frac{1.52}{s'} = \frac{1.52 - 1.00}{+2.00 \text{ cm}}$$
$$s' = +11.3 \text{ cm}$$

b) A partir de la ecuación (34.12),

$$m = -\frac{n_a s'}{n_b s} = -\frac{(1.00)(11.3 \text{ cm})}{(1.52)(8.00 \text{ cm})} = -0.929$$

EVALUAR: Como la distancia de imagen s' es positiva, la imagen se forma 11.3 cm a la *derecha* del vértice (en el lado saliente), como se muestra en la figura 34.24. El valor de m indica que la imagen es un poco más pequeña que el objeto y está invertida. Si el objeto fuera una flecha de 1.000 mm de altura que apunta hacia arriba, la imagen sería una flecha de 0.929 mm de altura que apunta hacia abajo.

Ejemplo 34.6 Formación de imágenes por refracción II



La varilla de vidrio del ejemplo 34.5 se sumerge en agua, la cual tiene un índice de refracción $n = 1.33$ (figura 34.25). *a*) La distancia de objeto es de nuevo 8.00 cm. Encuentre la distancia de imagen y el aumento lateral.

SOLUCIÓN

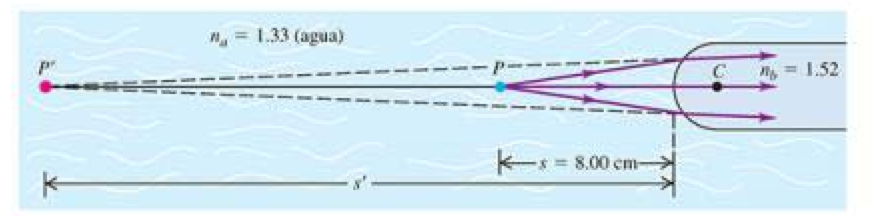
IDENTIFICAR y PLANTEAR: La situación es la misma que en el ejemplo 34.5, excepto que ahora $n_a = 1.33$. De nuevo utilizamos las ecuaciones (34.11) y (34.12) para determinar s' y m, respectivamente.

EJECUTAR: De acuerdo con la ecuación (34.11), en el ejemplo 34.5, se tiene

$$\frac{1.33}{8.00 \text{ cm}} + \frac{1.52}{s'} = \frac{1.52 - 1.33}{+2.00 \text{ cm}}$$
$$s' = -21.3 \text{ cm}$$

Continúa

34.25 Cuando está inmersa en agua, la varilla de vidrio forma una imagen virtual.



En este caso, el aumento lateral es

$$m = -\frac{(1.33)(-21.3\ \text{cm})}{(1.52)(8.00\ \text{cm})} = +2.33$$

EVALUAR: El valor negativo de s' significa que, una vez que la superficie refracta los rayos, estos no convergen sino que *parecen* divergir a partir de un punto situado 21.3 cm *a la izquierda* del vértice. Vimos un caso similar en la reflexión de luz en un espejo convexo; en ambos casos, describimos el resultado como una *imagen virtual*. La imagen vertical está derecha (porque m es positivo) y es 2.33 veces más grande que el objeto.

Ejemplo 34.7 Profundidad aparente de una alberca



Si mira hacia abajo en una piscina que tiene 2.00 m de profundidad, ¿cuál es la profundidad aparente?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: En la figura 34.26 se ilustra la situación. La superficie del agua actúa como una superficie de refracción plana. Para determinar la profundidad aparente de la piscina, imaginemos una flecha PQ pintada en la parte inferior. La superficie refractante de la piscina forma una imagen virtual $P'Q'$ de esta flecha. Resolvemos la ecuación (34.13) para encontrar la profundidad de imagen s'; esa es la profundidad aparente de la piscina.

EJECUTAR: La distancia de objeto es la profundidad real de la alberca: $s = 2.00$ m. El material a es el agua ($n_a = 1.33$) y el material b es el aire ($n_b = 1.00$). De acuerdo con la ecuación (34.13),

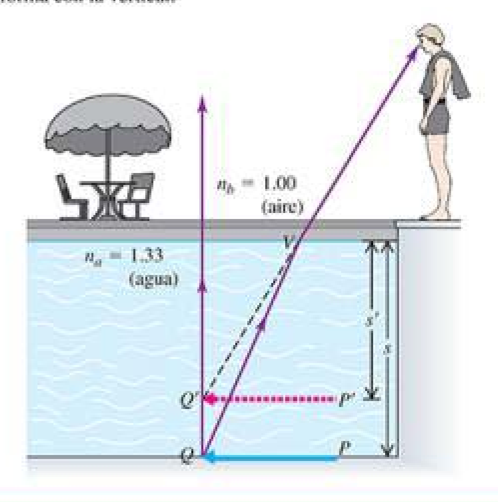
$$\frac{n_a}{s} + \frac{n_b}{s'} = \frac{1.33}{2.00\ \text{m}} + \frac{1.00}{s'} = 0$$

$$s' = -1.50\ \text{m}$$

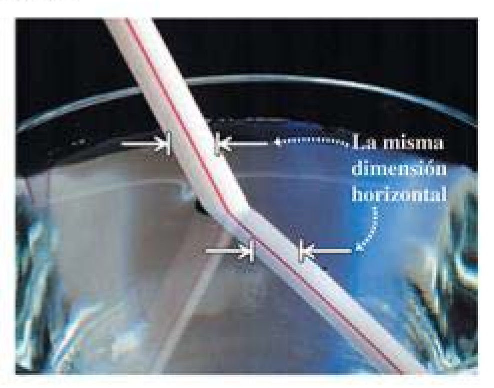
La distancia de imagen es negativa. De acuerdo con las reglas de signos de la sección 34.1, esto significa que la imagen es virtual y está del lado entrante de la superficie refractiva, es decir, del mismo lado que el objeto o bajo el agua. La profundidad aparente es de 1.50 m, esto es, solo el 75% de la profundidad real.

EVALUAR: Recuerde que el aumento lateral correspondiente a una superficie refractiva plana es $m = 1$. Por lo tanto, la imagen $P'Q'$ de la flecha tiene la misma *longitud horizontal* que la flecha real PQ (figura 34.27). Solo la profundidad es diferente de la de PQ.

34.26 La flecha $P'Q'$ es la imagen virtual de la flecha PQ que está bajo el agua. Para mayor claridad, se exageraron los ángulos que el rayo forma con la vertical.



34.27 La parte sumergida de esta pajilla parece estar a una profundidad menor (más cerca de la superficie) de lo que realmente está.



Evalúe su comprensión de la sección 34.3 Las gotitas de agua de la figura 34.23 tienen un radio de curvatura R y un índice de refracción $n = 1.33$. ¿Forman una imagen del Sol sobre la hoja?

34.4 Lentes delgadas

MasteringPHYSICS
PhET: Geometric Optics
ActivPhysics 15.9: Thin Lens Ray Diagram
ActivPhysics 15.10: Converging Thin Lenses
ActivPhysics 15.11: Diverging Thin Lenses

El dispositivo óptico más conocido y de uso más extendido (después del espejo plano) es la *lente*. Una lente es un sistema óptico con dos superficies refractivas. La lente más simple tiene dos superficies *esféricas* suficientemente próximas entre sí como para que podamos despreciar la distancia entre ellas (el espesor de la lente); a este dispositivo se le llama **lente delgada**. Si usted utiliza anteojos o lentes de contacto para leer, entonces está viendo estas palabras a través de un par de lentes delgadas. Podemos analizar detalladamente las lentes delgadas con base en los resultados obtenidos en la sección 34.3, con respecto a la refracción en una sola superficie esférica. Sin embargo, pospondremos este análisis para más adelante en esta sección, con la finalidad de analizar primero las propiedades de las lentes delgadas.

Propiedades de las lentes

Una lente de la forma que se muestra en la figura 34.28 tiene la propiedad de que, cuando la atraviesa un haz de rayos paralelos al eje, los rayos convergen en un punto F_2 (figura 34.28*a*) y forman una imagen real en ese punto. Las lentes de este tipo se llaman **lentes convergentes**. Asimismo, los rayos que pasan por el punto F_1 emergen de la lente en forma de un haz de rayos paralelos (figura 34.28*b*). Los puntos F_1 y F_2 son lo que se conoce como *puntos focales* primero y segundo, y la distancia f (medida desde el centro de la lente) es la *distancia focal*. Observe las semejanzas entre los dos puntos focales de una lente convergente y el único punto focal de un espejo cóncavo (figura 34.13). Como en el caso de los espejos cóncavos, la distancia focal de una lente convergente se define como una cantidad *positiva*, y las lentes de esta clase se conocen también como *lentes positivas*.

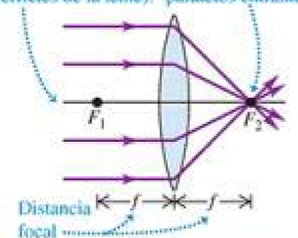
La recta horizontal central de la figura 34.28 se denomina *eje óptico*, como en el caso de los espejos esféricos. Los centros de curvatura de las dos superficies esféricas se encuentran sobre el eje óptico y lo definen. Las dos distancias focales de la figura 34.28, ambas identificadas como f, *siempre son iguales* en el caso de una lente delgada, aun cuando los dos lados tienen diferente curvatura. Más adelante en la presente sección deduciremos este resultado, un tanto sorprendente, cuando deduzcamos la relación entre f, el índice de refracción de la lente y los radios de curvatura de sus superficies.

34.28 F_1 y F_2 son los puntos focales primero y segundo de una lente convergente delgada. El valor numérico de f es positivo.

a)

Eje óptico (pasa por los centros de curvatura de ambas superficies de la lente).

Segundo punto focal: el punto en que convergen los rayos paralelos entrantes.



Distancia focal ←f→←f→

- Medida a partir del centro de la lente
- Siempre es la misma a ambos lados de la lente
- Es positiva para una lente convergente delgada

b)

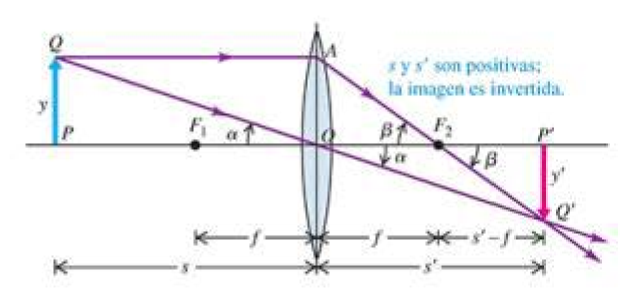
Primer punto focal: los rayos que divergen desde este punto salen de la lente de forma paralela al eje.

F_1 F_2

←f→←f→

Imagen de un objeto extenso: Lentes convergentes

Al igual que un espejo cóncavo, una lente convergente forma imágenes de los objetos extensos. La figura 34.29 muestra cómo determinar la posición y el aumento lateral de una imagen formada por una lente convergente delgada. Con base en la misma notación y reglas de signos que hemos utilizado, sean s y s' las distancias de objeto y de imagen, respectivamente, y sean y y y' las alturas del objeto y de la imagen. El rayo QA, paralelo al eje óptico antes de la refracción, pasa por el segundo punto focal F_2 después de refractarse. El rayo QOQ' pasa directamente por el centro de la lente sin desviarse, ya que en el centro las dos superficies son paralelas y (suponemos) están muy próximas entre sí. Hay refracción donde el rayo entra y sale del material, pero no existe un cambio neto de dirección.



34.29 Construcción para obtener la posición de la imagen que forma una lente delgada. Para destacar la suposición de que la lente es muy delgada, se muestra el rayo QAQ' como si se doblara en el plano medio de la lente, no en las dos superficies, y el rayo QOQ' se muestra como línea recta.

Los dos ángulos identificados como α en la figura 34.29 son iguales. Por consiguiente, los dos triángulos rectángulos PQO y $P'Q'O$ son *semejantes*, y las razones de los lados correspondientes son iguales. Por lo tanto,

$$\frac{y}{s} = -\frac{y'}{s'} \quad \text{o} \quad \frac{y'}{y} = -\frac{s'}{s} \tag{34.14}$$

(La razón del signo negativo es que la imagen está abajo del eje óptico y y' es negativa). Además, los ángulos identificados como β son iguales, y los dos triángulos rectángulos OAF_2 y $P'Q'F_2$ son semejantes, así que

$$\frac{y}{f} = -\frac{y'}{s' - f} \quad \text{o}$$

$$\frac{y'}{y} = -\frac{s' - f}{f} \tag{34.15}$$

Ahora igualamos las ecuaciones (34.14) y (34.15), dividimos entre s' y reorganizamos para obtener

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{f} \quad \text{(relación objeto-imagen, lente delgada)} \tag{34.16}$$

Este análisis también proporciona el aumento lateral $m = y'/y$ correspondiente a la lente; de acuerdo con la ecuación (34.14),

$$m = -\frac{s'}{s} \quad \text{(aumento lateral, lente delgada)} \tag{34.17}$$

El signo negativo indica que cuando s y s' son positivas, como en la figura 34.29, la imagen es *invertida*, y los signos de y y y' son opuestos.

Las ecuaciones (34.16) y (34.17) son las ecuaciones fundamentales de las lentes delgadas. Son *exactamente* iguales a las ecuaciones correspondientes de los espejos esféricos [ecuaciones (34.6) y (34.7)]. Como veremos, las reglas de signos que seguimos en el caso de los espejos esféricos también son aplicables a las lentes. En particular, considere una lente con una distancia focal positiva (una lente convergente). Cuando un objeto está por fuera del primer punto focal F_1 de esta lente (es decir, cuando $s > f$), la distancia de imagen s' es positiva (esto es, la imagen está del mismo lado que los rayos salientes); esta imagen es real e invertida, como se muestra en la figura 34.29. Un objeto colocado más adentro del primer punto focal de una lente convergente, de modo que $s < f$, forma una imagen con un valor negativo de s'; esta imagen se encuentra del mismo lado de la lente que el objeto, y es virtual, derecha y más grande que este. Estos enunciados se pueden comprobar algebraicamente por medio de las ecuaciones (34.16) y (34.17); también los verificaremos en la próxima sección, usando métodos gráficos análogos a los que se presentaron en la sección 34.2 aplicados a espejos.

La figura 34.30 muestra cómo una lente forma una imagen tridimensional de un objeto tridimensional. El punto R está más cerca de la lente que el punto P. De acuerdo con la ecuación (34.16), el punto de imagen R' está más alejado de la lente que el punto de imagen P', y la imagen $P'R'$ apunta en la misma dirección que el objeto PR. Las flechas $P'S'$ y $P'Q'$ están al revés con respecto a PS y PQ.

34.30 La imagen $S'P'Q'R'$ de un objeto tridimensional $SPQR$ no se voltea con una lente.

Comparemos la figura 34.30 con la 34.7, la cual muestra la imagen formada por un *espejo* plano. Observemos que la imagen formada por la lente es invertida, pero *no* es inversa de adelante hacia atrás a lo largo del eje óptico. Es decir, si el objeto es una mano izquierda, su imagen también es una mano izquierda. Podemos verificar esto apuntando el pulgar izquierdo a lo largo de *PR*, el índice izquierdo a lo largo de *PQ* y el dedo medio izquierdo a lo largo de *PS*. Luego giramos la mano 180° con el pulgar como eje; esto hace coincidir los dedos con $P'Q'$ y $P'S'$. En otras palabras, una imagen *invertida* es equivalente a una imagen que se ha girado 180° en torno al eje de la lente.

Lentes divergentes

Hasta ahora hemos analizado lentes *convergentes*. La figura 34.31 muestra una **lente divergente**; el haz de rayos paralelos que incide en esta lente *diverge* después de refractarse. La distancia focal de una lente divergente es una cantidad negativa, y las lentes de este tipo se conocen también como *lentes negativas*. Los puntos focales de una lente negativa están invertidos en relación con los de una lente positiva. El segundo punto focal, F_2, de una lente negativa es el punto a partir del cual los rayos que originalmente son paralelos al eje *parecen divergir* después de refractarse, como en la figura 34.31*a*. Los rayos incidentes que convergen hacia el primer punto focal F_1, como en la figura 34.31*b*, emergen de la lente paralelos a su eje. Compare esto con la sección 34.2 y podrá ver que una lente divergente tiene la misma relación con una lente convergente, que la que un espejo convexo tiene con un espejo cóncavo.

Las ecuaciones (34.16) y (34.17) son aplicables a lentes *tanto* positivas *como* negativas. En la figura 34.32 se muestran los diversos tipos de lentes, tanto convergentes como divergentes. Conviene hacer una observación importante: *toda lente que sea más gruesa en su centro que en sus bordes es una lente convergente con f positiva; y toda lente que sea más gruesa en sus bordes que en su centro es una lente divergente con f negativa* (siempre y cuando la lente tenga un índice de refracción mayor que el material circundante). Podemos probar esto mediante la *ecuación del fabricante de lentes*, cuya deducción constituye nuestra siguiente tarea.

Ecuación del fabricante de lentes

Ahora deduciremos la ecuación (34.16) con más detenimiento y, al mismo tiempo, deduciremos la *ecuación del fabricante de lentes*, la cual establece la relación entre la distancia focal *f*, el índice de refracción *n* de la lente y los radios de curvatura R_1 y R_2 de las superficies de la lente. Aplicaremos el principio de que una imagen formada por una superficie reflectante o refractiva puede servir como el objeto de una segunda superficie reflectante o refractiva.

Comenzaremos con el problema de carácter algo más general de dos interfases esféricas que separan tres materiales con índices de refracción n_a, n_b y n_c, como se muestra en la figura 34.33. Las distancias de objeto y de imagen correspondientes a la primera superficie son s_1 y s'_1, y las que corresponden a la segunda superficie son s_2 y s'_2. Supondremos que la lente es delgada, de modo que la distancia *t* entre las dos superficies es pequeña en comparación con las distancias de objeto y de imagen y, por lo tanto, se pueden despreciar. Este es normalmente el caso de las lentes de anteojos (figura 34.34). En tales condiciones, s_2 y s'_1 tienen igual magnitud pero signo opuesto. Por ejemplo, si la primera imagen está del lado saliente de la primera superficie, s'_1 es positiva. Pero cuando la vemos como un objeto de la segunda superficie, la primera imagen *no* está del lado entrante de esa superficie. Por lo tanto, podemos afirmar que $s_2 = -s'_1$.

Necesitamos aplicar la ecuación de una sola superficie, ecuación (34.11), dos veces, una por cada superficie. Las ecuaciones resultantes son

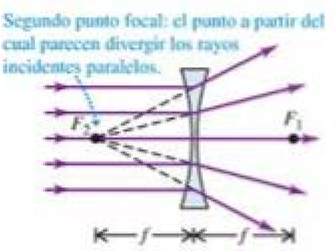
$$\frac{n_a}{s_1} + \frac{n_b}{s'_1} = \frac{n_b - n_a}{R_1}$$

$$\frac{n_b}{s_2} + \frac{n_c}{s'_2} = \frac{n_c - n_b}{R_2}$$

Ordinariamente, los materiales primero y tercero son aire o vacío, así que establecemos que $n_a = n_c = 1$. El segundo índice n_b es el de la lente, al cual llamaremos simplemente *n*. Sustituyendo estos valores y la relación $s_2 = -s'_1$, obtenemos:

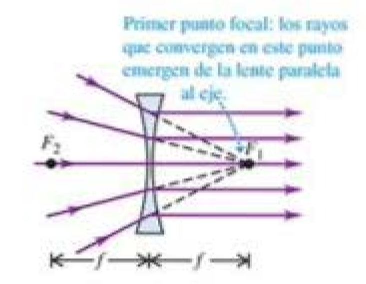
34.31 F_2 y F_1 son los puntos focales segundo y primero de una lente delgada divergente, respectivamente. El valor numérico de *f* es negativo.

a)



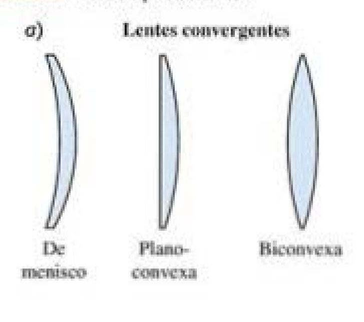
Para lentes delgadas divergentes, *f* es negativa.

b)

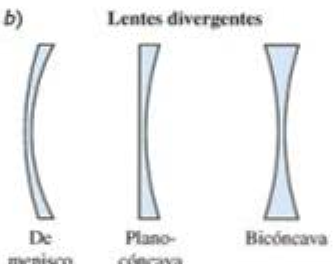


34.32 Varios tipos de lentes.

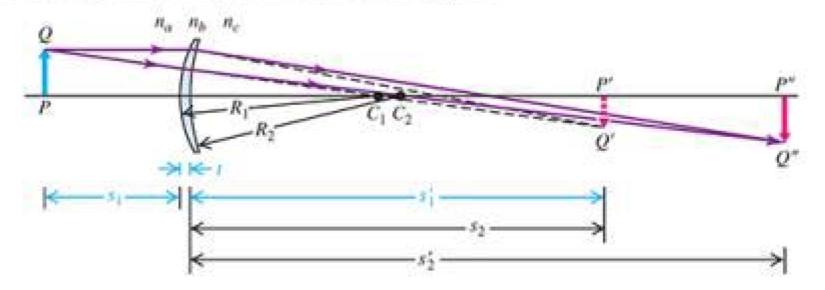
a) **Lentes convergentes**



b) **Lentes divergentes**



34.33 La imagen formada por la primera superficie de una lente sirve como el objeto de la segunda superficie. Las distancias s_1' y s_2 se toman como iguales; esta es una buena aproximación si el grosor t de la lente es pequeño.



34.34 Estos lentes de anteojos satisfacen la aproximación de la lente delgada; su espesor es pequeño en comparación con las distancias de objeto y de imagen.



$$\frac{1}{s_1} + \frac{n}{s_1'} = \frac{n-1}{R_1}$$

$$-\frac{n}{s_1'} + \frac{1}{s_2'} = \frac{1-n}{R_2}$$

Para obtener una relación entre la posición inicial del objeto s_1 y la posición final de la imagen s_2', sumamos estas dos ecuaciones. Con ello se elimina el término n/s_1' y se obtiene

$$\frac{1}{s_1} + \frac{1}{s_2'} = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$$

Por último, considerando la lente como una sola unidad, llamamos a la distancia de objeto simplemente s en vez de s_1, y llamamos a la distancia final de imagen s' en vez de s_2'. Al efectuar estas sustituciones, tenemos que

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) \qquad (34.18)$$

Ahora comparamos esto con la otra ecuación de lentes delgadas, ecuación (34.16). Vemos que las distancias de objeto y de imagen s y s' aparecen exactamente en los mismos lugares en ambas ecuaciones y que la distancia focal f viene dada por

$$\frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) \quad \text{(ecuación del fabricante de lentes para una lente delgada)} \qquad (34.19)$$

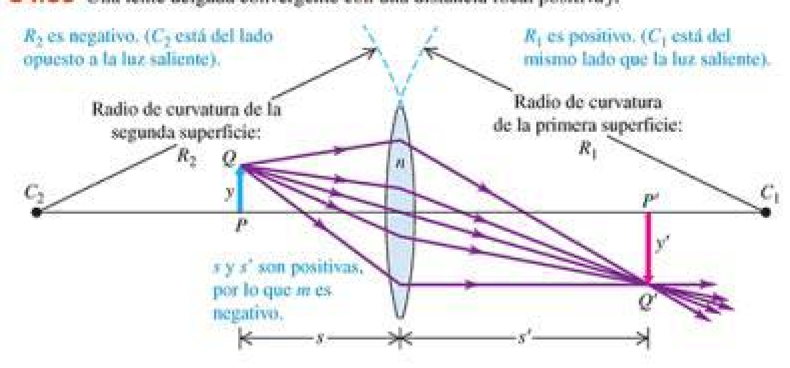
Esta es la **ecuación del fabricante de lentes**. Al deducir de nuevo la relación entre distancia de objeto, distancia de imagen y distancia focal para una lente delgada, al mismo tiempo hemos deducido también una expresión de la distancia focal f de una lente en términos de su índice de refracción n, y de los radios de curvatura R_1 y R_2 de sus superficies. Con esto se puede demostrar que todas las lentes de la figura 34.32*a* son convergentes y tienen distancias focales positivas, y que todas las lentes de la figura 34.32*b* son divergentes con distancias focales negativas.

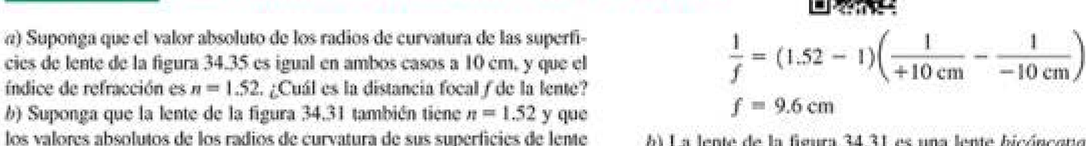
Se aplican todas las reglas de signos de la sección 34.1 a las ecuaciones (34.18) y (34.19). Por ejemplo, en la figura 34.35, s, s' y R_1 son positivos, pero R_2 es negativo.

No es difícil generalizar la ecuación (34.19) a la situación donde la lente está inmersa en un material con un índice de refracción mayor que la unidad. Lo invitamos a obtener la ecuación del fabricante de lentes para esta situación más general.

¡Hacemos hincapié en que la aproximación paraxial es en efecto una aproximación! Los rayos que forman ángulos suficientemente grandes con el eje óptico de una lente esférica no se enfocan en el mismo lugar que los rayos paraxiales; este problema es el mismo de aberración esférica que asedia los *espejos* esféricos (véase la sección 34.2). Para evitar esta y otras limitaciones de las lentes esféricas delgadas, en los instrumentos ópticos de precisión se utilizan lentes de forma más complicada.

34.35 Una lente delgada convergente con una distancia focal positiva f.





Ejemplo 34.8 Determinación de la distancia focal de una lente

a) Suponga que el valor absoluto de los radios de curvatura de las superficies de lente de la figura 34.35 es igual en ambos casos a 10 cm, y que el índice de refracción es $n = 1.52$. ¿Cuál es la distancia focal f de la lente? *b*) Suponga que la lente de la figura 34.31 también tiene $n = 1.52$ y que los valores absolutos de los radios de curvatura de sus superficies de lente también son iguales a 10 cm. ¿Cuál es la distancia focal de esta lente?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Se nos pide calcular la distancia focal f de *a*) una lente que es convexa por ambos lados (figura 34.35) y de *b*) una lente que es cóncava por ambas caras (figura 34.31). En ambos casos se resuelve la ecuación del fabricante de lentes, ecuación (34.19), para determinar f. Aplicamos las reglas de los signos de la sección 34.1 a los radios de curvatura R_1 y R_2 para tomar en cuenta si las superficies son convexas o cóncavas.

EJECUTAR: *a*) La lente de la figura 34.35 es *biconvexa*. El centro de curvatura de la primera superficie (C_1) está en el lado saliente de la lente, por lo que R_1 es positivo, y el centro de curvatura de la segunda superficie (C_2) está en el lado *entrante*, por lo que R_2 es negativo. Por lo tanto, $R_1 =$ +10 cm, $R_2 = -10$ cm. Entonces, a partir de la ecuación (34.19),

$$\frac{1}{f} = (1.52 - 1)\left(\frac{1}{+10\text{ cm}} - \frac{1}{-10\text{ cm}}\right)$$

$$f = 9.6\text{ cm}$$

b) La lente de la figura 34.31 es una lente *bicóncava*. El centro de curvatura de la primera superficie está del lado *entrante* de la lente, por lo tanto, R_1 es negativo, y el centro de curvatura de la segunda superficie está del lado saliente, así que R_2 es positivo. Por lo tanto, en este caso $R_1 = -10$ cm, $R_2 = +10$ cm. De nuevo, con base en la ecuación (34.19),

$$\frac{1}{f} = (1.52 - 1)\left(\frac{1}{-10\text{ cm}} - \frac{1}{+10\text{ cm}}\right)$$

$$f = -9.6\text{ cm}$$

EVALUAR: En el inciso *a*) la distancia focal es *positiva*, así que se trata de una lente convergente; esto es razonable, pues la lente es más gruesa en el centro que en los bordes. En el inciso *b*) la distancia focal es *negativa*, de modo que se trata de una lente divergente; esto también es razonable, pues la lente es más gruesa en los bordes que en el centro.

Métodos gráficos para lentes

Se puede encontrar la posición y el tamaño de una imagen formada por una lente delgada usando un método gráfico muy parecido al que se aplicó en la sección 34.2 a los espejos esféricos. También en este caso se dibujan unos cuantos rayos especiales, llamados *rayos principales*, que divergen a partir de un punto del objeto que *no* está sobre el eje óptico. La intersección de estos rayos, después de que han atravesado la lente, determina la posición y el tamaño de la imagen. Al utilizar este método gráfico, consideraremos que la desviación de cada rayo ocurre en su totalidad en el plano medio de la lente, como se muestra en la figura 34.36. Esto concuerda con la suposición de que la distancia entre las superficies de la lente es insignificante.

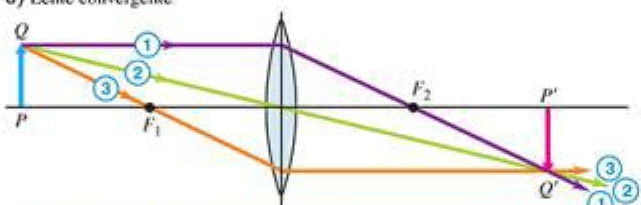
Los tres rayos principales cuyas trayectorias normalmente son fáciles de trazar en el caso de las lentes se muestran en la figura 34.36:

1. *Un rayo paralelo al eje* emerge de la lente en una dirección que pasa por el segundo punto focal F_2 de una lente convergente, o que parece provenir del segundo punto focal de una lente divergente.
2. *Un rayo que pasa por el centro de la lente* no se desvía en grado apreciable; en el centro de la lente las dos superficies son paralelas; por lo tanto, este rayo emerge prácticamente con el mismo ángulo que tenía al entrar y a lo largo de la misma recta.
3. *Un rayo que pasa por el primer punto focal* F_1 *(o avanza hacia este)* emerge paralelo al eje.

34.36 Método gráfico para localizar una imagen formada por una lente delgada. Los colores de los rayos sirven solo como identificación; no se refieren a colores específicos de la luz. (Compare con la figura 34.19 para espejos esféricos).

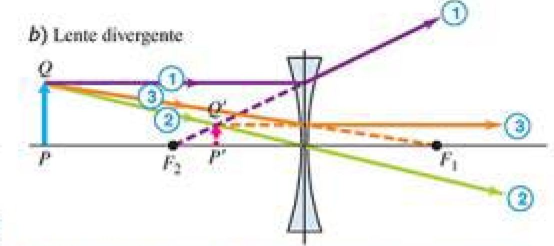


a) Lente convergente



(1) El rayo incidente paralelo se refracta para pasar por el segundo punto focal F_2.
(2) El rayo que pasa por el centro de la lente no se desvía considerablemente.
(3) El rayo que pasa por el primer punto focal F_1 emerge paralelo al eje.

b) Lente divergente



(1) Después de refractarse, parece que el rayo incidente paralelo proviene del segundo punto focal F_2.
(2) El rayo que pasa por el centro de la lente no se desvía considerablemente.
(3) El rayo que apunta al primer punto focal F_1 emerge paralelo al eje.

Cuando la imagen es real, la posición del punto de imagen está determinada por la intersección de dos cualesquiera de los rayos 1, 2 y 3 (figura 34.36*a*). Cuando la imagen es virtual, se prolongan hacia atrás los rayos salientes divergentes, hasta su punto de intersección para encontrar el punto de imagen (figura 34.36*b*).

CUIDADO **Los rayos principales no son los únicos rayos** Considere que *cualquier* rayo proveniente del objeto que incida en la lente pasará por el punto de imagen (si la imagen es real) o parecerá que es emitido desde el punto de imagen (si la imagen es virtual). (Hicimos un comentario análogo acerca de la formación de imágenes por espejos en la sección 34.2). Hemos destacado los rayos principales porque son los únicos que necesitamos dibujar para localizar la imagen.



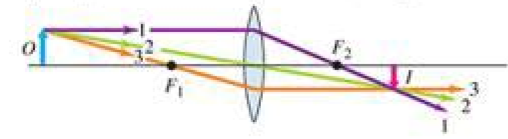
Video Tutor Demo

La figura 34.37 muestra diagramas de rayos principales correspondientes a una lente convergente con diversas distancias de objeto. Le sugerimos estudiar cada uno de estos diagramas con mucho detenimiento, comparando cada rayo numerado con la descripción anterior.

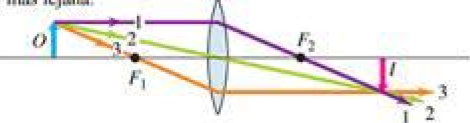
34.37 Formación de imágenes por una lente delgada convergente a diversas distancias de objeto. Se numeraron los rayos principales. (Compare con la figura 34.20 para un espejo esférico cóncavo).



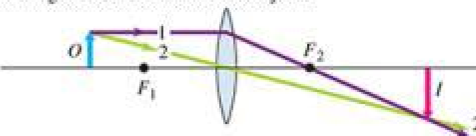
a) El objeto *O* está afuera del punto focal; la imagen *I* es real.



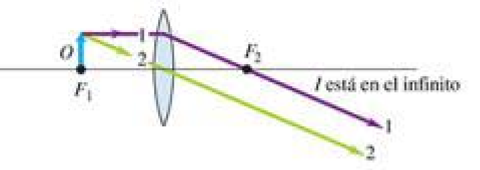
b) El objeto *O* está más cerca del punto focal; la imagen *I* es real y más lejana.



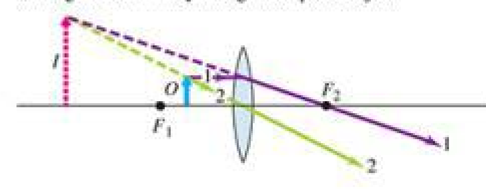
c) El objeto *O* está aún más cerca del punto focal; la imagen *I* es real e incluso más lejana.



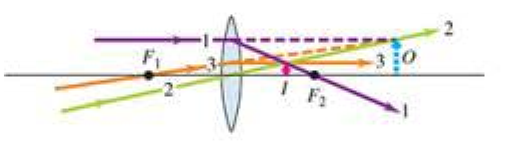
d) El objeto *O* está en el punto focal; la imagen *I* está en el infinito.



e) El objeto *O* está adentro del punto focal; la imagen *I* es virtual y más grande que el objeto.



f) Un objeto virtual *O* (los rayos luminosos *convergen* en la lente).



Los incisos *a*), *b*) y *c*) de la figura 34.37 ayudan a explicar lo que ocurre al enfocar una cámara fotográfica. Para que una fotografía esté bien enfocada, la película debe estar en la posición de la imagen real que forma la lente de la cámara. La distancia de imagen aumenta conforme el objeto se aproxima, por lo que se retira más la película detrás de la lente (es decir, se aleja la lente frente a la película). En la figura 34.37*d* el objeto está en el punto focal; no se puede dibujar el rayo 3 porque no atraviesa la lente. En la figura 34.37*e* la distancia de objeto es menor que la distancia focal. Los rayos salientes son divergentes y la imagen es *virtual*; se localiza su posición prolongando los rayos salientes hacia atrás, así que la distancia de imagen s' es negativa. Observe asimismo que la imagen es derecha y más grande que el objeto. (Veremos la utilidad de esto en la sección 34.6). La figura 34.37*f* corresponde a un *objeto virtual*. Los rayos entrantes no divergen a partir de un objeto real, sino que *convergen* como si fueran a encontrarse en la punta del objeto virtual *O* del lado derecho; en este caso, la distancia de objeto s es negativa. La imagen es real y se encuentra entre la lente y el segundo punto focal. Se presenta esta situación si los rayos que inciden en la lente de la figura 34.37*f* emergen de otra lente convergente situada a la izquierda de la figura (no se muestra).

Estrategia para resolver problemas 34.2 Formación de imágenes por lentes delgadas



IDENTIFICAR *los conceptos relevantes:* La Estrategia para resolver problemas 34.1 (sección 34.2) para espejos es igualmente aplicable a las lentes delgadas, y conviene repasarla ahora. Como en el caso de los espejos, los problemas de formación de imágenes por lentes se deben resolver por medio de ecuaciones y *también* de un diagrama de rayos principales.

PLANTEAR *el problema:* Como siempre, establezca las incógnitas.

EJECUTAR *la solución como sigue:*

1. Dibuje un gran diagrama de rayos principales si cuenta con información suficiente, usando papel para gráficas o papel cuadriculado. Oriente sus diagramas de modo que los rayos entrantes se propaguen de izquierda a derecha. Trace los rayos con una regla y mida las distancias minuciosamente.
2. Dibuje los rayos principales de modo que cambien de dirección en el plano medio de la lente, como se muestra en la figura 34.36. Para una lente hay solo tres rayos principales (comparados con los cuatro que corresponden a un espejo). Dibuje los tres siempre que sea posible; la intersección de dos cualesquiera de ellos determina la ubicación de la imagen, pero el tercero podría no pasar por el mismo punto.
3. Si los rayos principales salientes divergen, se extienden hacia atrás para encontrar el punto de imagen virtual en el lado *entrante* de la lente, como se muestra en la figura 34.27*e*.
4. Resuelva las ecuaciones (34.16) y (34.17), según corresponda, para las incógnitas. Asegúrese de usar cuidadosamente las reglas de los signos de la sección 34.1.
5. La *imagen* de una primera lente o de un espejo puede servir como *objeto* para una segunda lente o espejo. Al buscar las distancias del objeto y de la imagen para esta imagen intermedia, asegúrese de incluir la distancia entre los dos elementos (lentes y/o espejos) correctamente.

EVALUAR *su respuesta:* Los resultados calculados deben ser coherentes con los resultados del diagrama de rayos. Compruebe que dan la misma posición y el tamaño de la imagen, y que concuerdan con el hecho de que la imagen es real o virtual.

Ejemplo 34.9 Ubicación de la imagen y aumento con una lente convergente



Utilice diagramas de rayos para encontrar la posición de la imagen y el aumento para un objeto situado en cada una de las siguientes distancias de una lente convergente con una distancia focal de 20 cm: *a*) 50 cm; *b*) 20 cm; *c*) 15 cm; *d*) −40 cm. Compruebe sus resultados calculando la posición y el aumento lateral de la imagen usando las ecuaciones (34.16) y (34.17), respectivamente.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Se nos da la distancia focal $f = 20$ cm y cuatro valores de la distancia de objeto s. Las incógnitas son las correspondientes distancia de imagen s' y aumentos laterales m. Se despeja s' en la ecuación (34.16), y se encuentra m a partir de la ecuación (34.17), $m = -s'/s$.

EJECUTAR: Las figuras 34.37*a*, *d*, *e* y *f*, respectivamente, muestran los diagramas de rayos adecuados. Debe poder reproducir estos sin hacer referencias a las figuras. Midiendo estos diagramas se obtienen los resultados aproximados: $s' = 35$ cm, $-\infty$, −40 cm y 15 cm, y $m = -\frac{2}{3}$, $+\infty$, +3 y $+\frac{1}{3}$, respectivamente.

Calculando las distancias de imagen a partir de la ecuación (34.16):

$$a)\ \frac{1}{50\text{ cm}} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{20\text{ cm}} \qquad s' = 33.3\text{ cm}$$

$$b)\ \frac{1}{20\text{ cm}} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{20\text{ cm}} \qquad s' = \pm\infty$$

$$c)\ \frac{1}{15\text{ cm}} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{20\text{ cm}} \qquad s' = -60\text{ cm}$$

$$d)\ \frac{1}{-40\text{ cm}} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{20\text{ cm}} \qquad s' = 13.3\text{ cm}$$

Los resultados gráficos son razonablemente cercanos a estos, excepto en el inciso *c*); la exactitud del diagrama de la figura 34.37*e* es limitada porque los rayos prolongados hacia atrás tienen casi la misma dirección.

De acuerdo con la ecuación (34.17),

$$a)\ m = -\frac{33.3\text{ cm}}{50\text{ cm}} = -\frac{2}{3} \qquad b)\ m = -\frac{\pm\infty\text{ cm}}{20\text{ cm}} = \pm\infty$$

$$c)\ m = -\frac{-60\text{ cm}}{15\text{ cm}} = +4 \qquad d)\ m = -\frac{13.3\text{ cm}}{-40\text{ cm}} = +\frac{1}{3}$$

Continúa

EVALUAR: Observe que la distancia de imagen s' es positiva en los incisos *a*) y *d*), pero negativa en *c*). Esto tiene sentido: la imagen es real en los incisos *a*) y *d*), pero es virtual en *c*). Los rayos luminosos que emergen de la lente en el inciso *b*) son paralelos y nunca convergen; por lo tanto, se puede considerar que la imagen está en $+\infty$ o en $-\infty$.

Los valores de aumento m nos indican que la imagen es invertida en el inciso *a*) y derecha en los incisos *c*) y *d*), de acuerdo con los diagramas de rayos principales. El valor infinito del aumento en el inciso *b*) es otra forma de decir que la imagen se forma a una distancia infinita.

Ejemplo 34.10 Formación de imágenes por una lente divergente



Un haz de rayos paralelos se ensancha después de pasar a través de una lente divergente delgada, como si todos los rayos provinieran de un punto situado a 20.0 cm del centro de la lente. Usted se propone utilizar esta lente para formar una imagen virtual derecha que tenga $\frac{1}{3}$ de la altura del objeto. *a*) ¿Dónde se debería colocar el objeto? ¿Dónde se formará la imagen? *b*) Dibuje un diagrama de rayos principales.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: El resultado con rayos paralelos muestra que la distancia focal es $f = -20$ cm. Se busca un aumento lateral $m = +\frac{1}{3}$ (positivo porque la imagen debe ser derecha). Nuestras incógnitas son la distancia de objeto s y la distancia de imagen s'. En el inciso *a*) resolvemos la ecuación de aumento, ecuación (34.17), para determinar s' en función de s; entonces usamos la relación objeto-imagen, ecuación (34.16), para encontrar s y s' individualmente.

EJECUTAR: *a*) De acuerdo con la ecuación (34.17), $m = +\frac{1}{3} = -s'/s$, por lo tanto, $s' = -s/3$. Si se inserta este resultado en la ecuación (34.16), y se resuelve para determinar la distancia de objeto s:

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{-s/3} = \frac{1}{s} - \frac{3}{s} = -\frac{2}{s} = \frac{1}{f}$$

$$s = -2f = -2(-20.0\text{ cm}) = 40.0\text{ cm}$$

El objeto estaría a 40.0 cm de la lente. La distancia de imagen será

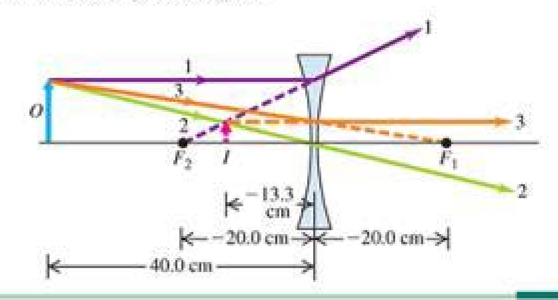
$$s' = -\frac{s}{3} = -\frac{40.0\text{ cm}}{3} = -13.3\text{ cm}$$

La distancia de imagen es negativa; por lo tanto, el objeto y la imagen están del mismo lado de la lente.

b) La figura 34.38 es el diagrama de rayos principales correspondiente a este problema, con los rayos numerados del mismo modo que en la figura 34.36*b*.

EVALUAR: El lector debe estar en condiciones de dibujar un diagrama de rayos principales como el que se muestra en la figura 34.38 sin hacer referencia a la figura. A partir de su diagrama, puede confirmar nuestros resultados en el inciso *a*) para las distancias de objeto y de imagen. También podrá verificar los resultados para s y s' sustituyéndolos de nuevo en la ecuación (34.16).

34.38 Diagrama de rayos principales de una imagen formada por una lente delgada divergente.



Ejemplo 34.11 Imagen de una imagen



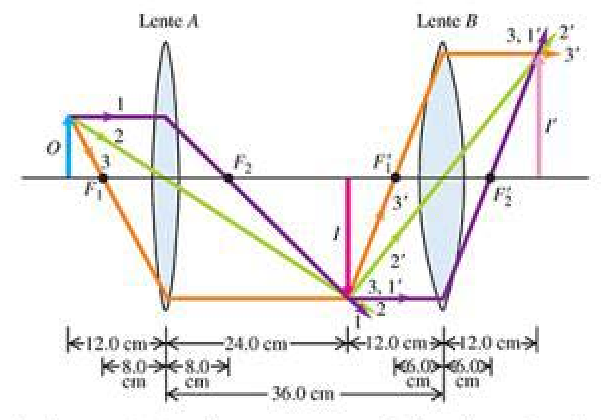
Las lentes convergentes A y B, de longitudes focales de 8.0 y 6.0 cm, respectivamente, se colocan con 36.0 cm de separación. Ambas lentes tienen el mismo eje óptico. Un objeto de 8.0 cm de altura se coloca a 12.0 cm a la izquierda de la lente A. Determine la posición, el tamaño y la orientación de la imagen creada por las dos lentes combinadas. (Se utilizan combinaciones de este tipo en los telescopios y microscopios, los cuales se estudiarán en la sección 34.7).

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: La situación se ilustra en la figura 34.39. El objeto O se encuentra por fuera del primer punto focal F_1 de la lente A; por lo tanto, esta lente produce una imagen real I. Los rayos luminosos que inciden en la lente B divergen a partir de esta imagen real, como si I fuera un objeto material. De este modo, la imagen I actúa como *objeto* para la lente B. Nuestro objetivo es establecer las propiedades de la imagen I' formada por la lente B. Utilizaremos tanto cálculos como métodos gráficos para resolver esto.

EJECUTAR: En la figura 34.39 hemos trazado los rayos principales 1, 2 y 3 a partir de la punta de la flecha del objeto O para encontrar la posición de la imagen I, y los rayos principales 1′, 2′ y 3′ a partir de la cabeza de I, con la finalidad de calcular la posición de la imagen I' formada por la lente B (aunque los rayos 2′ y 3′ no existen realmente en este caso).

34.39 Diagrama de rayos principales correspondiente a una combinación de dos lentes convergentes. La primera lente (A) forma una imagen real del objeto. Esta imagen real actúa como objeto de la segunda lente (B).



La imagen se invierte *dos veces*, una por cada lente, de modo que la segunda imagen I' tiene la misma orientación que el objeto original.

Primero es necesario encontrar la posición y el tamaño de la primera imagen *I*. Aplicando la ecuación (34.16), $1/s + 1/s' = 1/f$, a la lente *A* se tiene

$$\frac{1}{12.0\text{ cm}} + \frac{1}{s'_{I,A}} = \frac{1}{8.0\text{ cm}} \qquad s'_{I,A} = +24.0\text{ cm}$$

La primera imagen *I* está 24.0 cm a la derecha de la lente *A*. El aumento lateral es $m_A = -(24.0\text{ cm})/(12.0\text{ cm}) = -2.00$; por lo tanto, la imagen *I* está invertida y tiene el doble de la altura del objeto *O*.

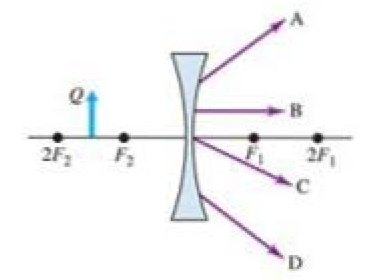
La imagen *I* es 36.0 cm − 24.0 cm = 12.0 cm a la izquierda de la lente *B*; así que la distancia de objeto para la lente *B* es de +12.0 cm. Entonces, aplicando la ecuación (34.16) a la lente *B* se obtiene

$$\frac{1}{12.0\text{ cm}} + \frac{1}{s'_{I',B}} = \frac{1}{6.0\text{ cm}} \qquad s'_{I',B} = +12.0\text{ cm}$$

La imagen final *I'* está 12.0 cm a la derecha de la lente *B*. El aumento que produce la lente es $m_B = -(12.0\text{ cm})/(12.0\text{ cm}) = -1.00$.

EVALUAR: El valor de m_B significa que la imagen final *I'* es del mismo tamaño que la primera, pero su orientación es opuesta. El aumento total es $m_A m_B = (-2.00)(-1.00) = +2.00$. Por lo tanto, la imagen final *I'* es (2.00)(8.00 cm) = 16 cm de altura y tiene la misma orientación que el objeto original *O*, como se muestra en la figura 34.39.

Evalúe su comprensión de la sección 34.4 Una lente divergente y un objeto están dispuestos como se indica en la figura de la derecha. ¿Cuáles de los rayos, A, B, C y D, podrían salir del punto *Q* en la parte superior del objeto?

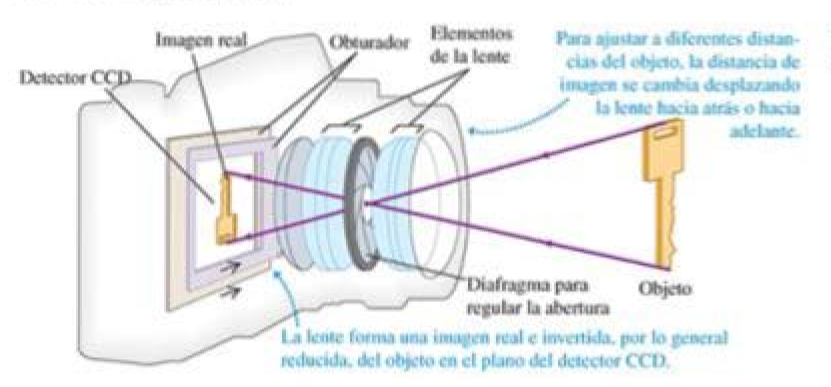


34.5 Cámaras fotográficas

El concepto de *imagen*, que es tan fundamental para comprender los sistemas simples de espejos y lentes, desempeña un papel igualmente importante en el análisis de los instrumentos ópticos (también conocidos como *dispositivos ópticos*). Entre los dispositivos ópticos más comunes se cuentan las cámaras fotográficas, las cuales forman una imagen de un objeto y la registran ya sea por medios electrónicos o sobre una película.

Los elementos básicos de una **cámara fotográfica** son una caja hermética a la luz (*cámara* significa habitación o recinto), una lente convergente, un obturador para abrir la lente durante un intervalo de tiempo definido y un medio de registro sensible a la luz (figura 34.40). En una cámara digital, se usa un detector electrónico llamado dispositivo de carga acoplada CCD (por las siglas de *charge coupled device*); en una cámara más antigua se utiliza película fotográfica. La lente forma una imagen real invertida del objeto que se fotografía sobre el medio de registro. Las lentes de cámara fotográfica de alta calidad tienen varios elementos, lo cual permite corregir parcialmente diversas *aberraciones*, entre ellas la dependencia del índice de refracción con respecto a la longitud de onda y las limitaciones que impone la aproximación paraxial.

Cuando la cámara está *enfocada* correctamente, la posición del medio de registro coincide con la posición de la imagen real formada por la lente. La fotografía resultante será entonces lo más nítida posible. Con una lente convergente, la distancia de imagen aumenta conforme disminuye la distancia de objeto (véase las figuras 34.41*a*, 34.41*b* y 34.41*c* y el análisis de la sección 34.4). Por consiguiente, cuando la cámara se "enfoca", la lente se acerca a la película en el caso de un objeto distante, y se aleja de ella si el objeto está cerca.



34.40 Elementos fundamentales de una cámara digital.

34.41 *a*), *b*), *c*) Tres fotografías tomadas con la misma cámara y desde el mismo punto de un jardín público de Boston, utilizando lentes con distancias focales $f = 28$, 105 y 300 mm. Al aumentar la distancia focal, se incrementa de forma proporcional el tamaño de la imagen. *d*) Cuanto más grande sea el valor de f, menor será el ángulo de visión. Los ángulos que aquí se muestran corresponden a una cámara con área de imagen de 24×36 mm (correspondiente a una película de 35 mm) y se refieren al ángulo de visión a lo largo de la dimensión diagonal de la película.

a) $f = 28$ mm



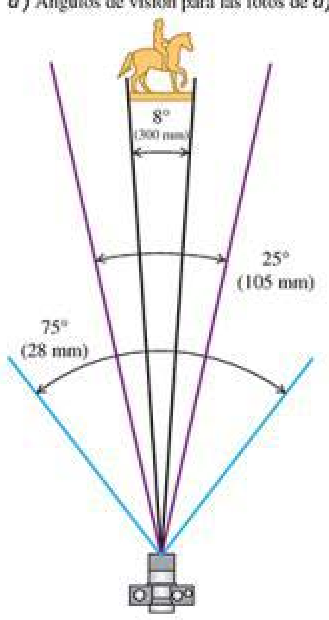
b) $f = 105$ mm



c) $f = 300$ mm



d) Ángulos de visión para las fotos de *a*) a *c*)



Lentes de cámara: Distancia focal

La elección de la distancia focal f de una lente de cámara depende del tamaño de la película y del ángulo de visión deseado. La figura 34.41 muestra tres fotografías tomadas en película de 35 mm con la misma cámara y en la misma posición, aunque con lentes de distancia focal distinta. Una lente de distancia focal larga, llamada lente *telefoto*, ofrece un ángulo de visión pequeño y una imagen grande de un objeto distante (como la estatua de la figura 34.41*c*); una lente de distancia focal corta brinda una imagen pequeña y un ángulo de visión amplio (como en la figura 34.41*a*), y recibe el nombre de lente *gran angular*. Para entender este comportamiento, recuerde que la distancia focal es la distancia de la lente a la imagen cuando el objeto está infinitamente lejos. En general, con *cualquier* distancia de objeto, una lente de distancia focal más larga proporciona una mayor distancia de imagen. Esto también aumenta la altura de la imagen; como se analizó en la sección 34.4, el valor absoluto de la proporción de la altura de la imagen y' con respecto a la altura del objeto y (el *aumento lateral*) es igual a la razón de la distancia de imagen s' con respecto a la distancia de objeto s [ecuación 34.17)]:

$$m = \frac{y'}{y} = -\frac{s'}{s}$$

Con una lente de distancia focal corta, la proporción s'/s es pequeña, y un objeto distante forma solamente una imagen pequeña. Cuando se utiliza una lente de distancia focal larga, la imagen de este mismo objeto puede cubrir en su totalidad el área de la película. Así pues, cuanto mayor sea la distancia focal, más estrecho será el ángulo de visión (figura 34.41*d*).

Lentes de cámara: Número f

Para que la película registre la imagen de manera adecuada, la energía luminosa total por unidad de área que llega a la película (la "exposición") debe estar dentro de ciertos límites. Esto se regula mediante el *obturador* y la *abertura de la lente*. El obturador regula el intervalo de tiempo durante el cual entra luz a través de la lente. Por lo regular, esto se puede ajustar por etapas que corresponden a factores de aproximadamente 2, en muchos casos desde 1 s hasta $\frac{1}{1000}$ s.

La intensidad de la luz que alcanza la película es proporcional al área vista por la lente de la cámara y al área efectiva de la lente. El tamaño del área que la lente "observa" es proporcional al cuadrado del ángulo de visión de la lente y, por lo tanto, es aproximadamente proporcional a $1/f^2$. El área efectiva de la lente se regula mediante una abertura de lente ajustable, o *diafragma*, que es un orificio casi circular de diámetro variable D; por lo tanto, el área efectiva es proporcional a D^2. Combinando estos factores, vemos que la intensidad de luz que la película recibe con una lente en particular es proporcional a D^2/f^2. Por lo común, los fotógrafos expresan la capaci-

dad colectora de luz de una lente en términos de la proporción f/D, conocida como el **número f** de la lente:

$$\text{Número } f = \frac{\text{Distancia focal}}{\text{Diámetro de abertura}} = \frac{f}{D} \qquad (34.20)$$

Por ejemplo, de una lente con una distancia focal $f = 50$ mm y un diámetro de abertura $D = 25$ mm, se dice que tiene un número f de 2, o "una abertura de $f/2$". La intensidad de luz que llega a la película es *inversamente* proporcional al cuadrado del número f.

En el caso de una lente con abertura de diámetro variable, si se incrementa el diámetro por un factor de $\sqrt{2}$ el número f cambia por un factor de $1/\sqrt{2}$ y se duplica la intensidad en la película. Por lo general, las aberturas ajustables tienen escalas marcadas con números sucesivos (también llamados *pasos de f*) relacionados por factores de $\sqrt{2}$, como

$$f/2 \quad f/2.8 \quad f/4 \quad f/5.6 \quad f/8 \quad f/11 \quad f/16$$

y así sucesivamente. Los números más grandes representan aberturas y exposiciones más pequeñas, y cada etapa corresponde a un factor de 2 en términos de intensidad (figura 34.42). La *exposición* real (la cantidad total de luz que llega a la película) es proporcional tanto al área de la abertura como al tiempo de exposición. Por ejemplo, las combinaciones $f/4$ y $\frac{1}{500}$ s, $f/5.6$ y $\frac{1}{250}$ s y $f/8$ y $\frac{1}{125}$ s corresponden todas a una misma exposición.

Lentes *zoom* y proyectores

A menudo muchos fotógrafos utilizan una *lente zoom*, que no es una sola lente sino un conjunto complejo de varios elementos de lente que proporcionan una distancia focal continuamente variable, a lo largo de un intervalo de hasta 10 a 1. Las figuras 34.43*a* y 34.43*b* representan un sistema simple con distancia focal variable, y la figura 34.43*c* muestra una lente *zoom* típica para cámara réflex de objetivo único. Las lentes *zoom* ofrecen una variedad de tamaños de imagen de un objeto en particular. Mientras la distancia focal cambia, mantener la imagen enfocada y un número f constante es un problema demasiado complejo de diseño óptico. Cuando se modifica la distancia focal de una lente *zoom* típica, dentro de la lente se mueven dos grupos de elementos, y se abre y cierra un diafragma.

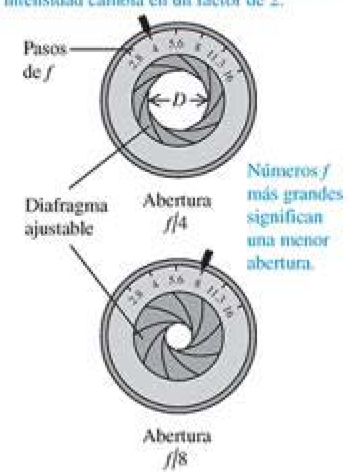
Un *proyector* para mirar diapositivas, imágenes digitales o películas cinematográficas funciona en gran medida como una cámara fotográfica a la inversa. En un proyector de cine, una lámpara ilumina la película, la cual actúa como objeto de la lente de proyección. La lente forma una imagen real, ampliada e invertida de la película sobre la pantalla de proyección. Debido a que la imagen está invertida, la película pasa por el proyector de cabeza para que la imagen aparezca derecha en la pantalla.

Aplicación Inversión de una imagen invertida

Una lente de la cámara forma una imagen invertida en el detector electrónico de la cámara sensible a la luz. Entonces el software interno de la cámara invierte la imagen para que aparezca de nuevo al derecho en la pantalla de la cámara. Algo similar sucede con la vista del ser humano: la imagen formada en la retina del ojo está invertida, pero el "software" del cerebro endereza la imagen para que uno vea el mundo con la orientación correcta.

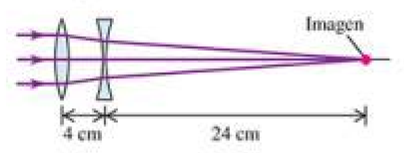


34.42 Lente de cámara con diafragma ajustable.

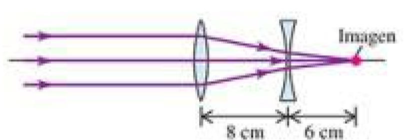


34.43 Una lente *zoom* simple emplea una lente convergente y una lente divergente en sucesión. *a*) Cuando las dos lentes están cerca entre sí, la combinación se comporta como una sola lente con distancia focal larga. *b*) Si se desplazan las dos lentes separándose, la combinación se comporta como una lente con distancia focal corta. *c*) Lente *zoom* representativa para cámara réflex de objetivo único; contiene 12 elementos dispuestos en cuatro grupos.

a) Disposición de lente *zoom* para una distancia focal larga



b) Disposición de lente *zoom* para una distancia focal corta



c) Una lente *zoom* práctica





Ejemplo 34.12 Exposiciones fotográficas

Una lente telefoto común para cámara de 35 mm tiene una distancia focal de 200 mm y una escala de pasos f de $f/2.8$ a $f/22$. *a*) ¿Cuál es la escala correspondiente de diámetros de abertura? *b*) ¿Cuál es el rango correspondiente de intensidad de imagen en la película?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: El inciso *a*) de este problema utiliza la relación entre distancia focal f, diámetro de abertura D y número f para una lente. El inciso *b*) usa la relación entre intensidad y diámetro de abertura. Se aplica la ecuación (34.20) para relacionar el diámetro D (la incógnita) con el número f y la distancia focal $f = 200$ mm. La intensidad de la luz que llega a la película es proporcional a D^2/f^2; como f es la misma en todos los casos, se concluye que, en este, la intensidad es proporcional a D^2, el cuadrado del diámetro de abertura.

EJECUTAR: *a*) De acuerdo con la ecuación (34.20), la escala de diámetros abarca de

$$D = \frac{f}{\text{Número } f} = \frac{200 \text{ mm}}{2.8} = 71 \text{ mm}$$

a

$$D = \frac{200 \text{ mm}}{22} = 9.1 \text{ mm}$$

b) Puesto que la intensidad es proporcional a D^2, la razón entre la intensidad en $f/2.8$ y la intensidad en $f/22$ es

$$\left(\frac{71 \text{ mm}}{9.1 \text{ mm}}\right)^2 = \left(\frac{22}{2.8}\right)^2 = 62 \qquad \text{(aproximadamente } 2^6\text{)}$$

EVALUAR: Si el tiempo de exposición correcto en $f/2.8$ es de $\frac{1}{1000}$ s, entonces en $f/22$ es de $(62)\left(\frac{1}{1000}\text{ s}\right) = \frac{1}{16}$ s para compensar la menor intensidad. En general, cuanto menor es la abertura y más grande es el número f, más largo será el tiempo de exposición necesario. No obstante, muchos fotógrafos prefieren utilizar aberturas pequeñas, con la finalidad de que solo se utilice la parte central de la lente para formar la imagen. Esto minimiza las aberraciones que se producen cerca de los bordes de la lente y permite obtener las imágenes más nítidas posibles.

Evalúe su comprensión de la sección 34.5 Cuando se utiliza con película de 35 mm (área de imagen: 24 × 36 mm), una lente con $f = 50$ mm proporciona un ángulo de visión de 45° y se describe como una "lente normal". En cambio, cuando se emplea con un detector CCD que mide 5 × 5 mm, esta misma lente es **i.** una lente gran angular; **ii.** una lente normal; **iii.** una lente telefoto.





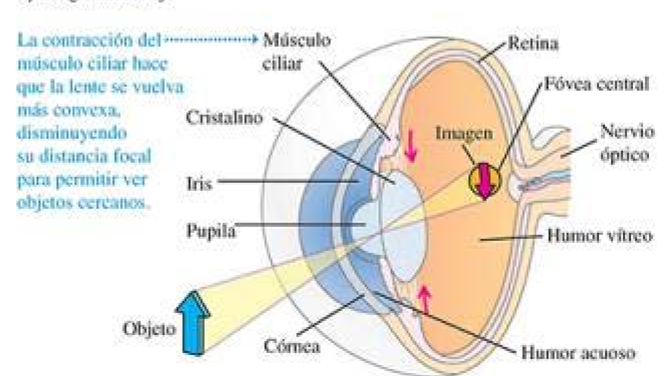
PhET: Color Vision

34.6 El ojo

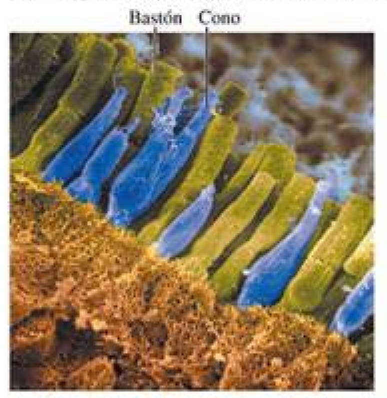
El comportamiento óptico del ojo es similar al de una cámara. En la figura 34.44*a* se muestran las partes fundamentales del ojo humano considerado como sistema óptico. El ojo es de forma casi esférica y mide aproximadamente 2.5 cm de diámetro. La parte frontal tiene una curvatura un poco más marcada y está cubierta por una membrana dura y transparente llamada *córnea.* La región que está detrás de la córnea contiene un líquido llamado *humor acuoso*. En seguida viene el *cristalino*, una cápsula que contiene una gelatina fibrosa, dura en el centro y cada vez más suave hacia la periferia. La lente del cristalino se mantiene en su lugar gracias a ligamentos que lo sujetan al músculo ciliar, el cual lo circunda. Detrás del cristalino, el ojo está lleno de una

34.44 *a*) El ojo. *b*) En la retina hay dos tipos de celdas sensibles a la luz. Los bastones son más sensibles a la luz que los conos, pero solo los conos son sensibles a diferencias de color. Un ojo humano típico contiene alrededor de 1.3×10^8 bastones y aproximadamente 7×10^6 conos.

a) Diagrama del ojo



b) Micrografía de barrido electrónico que muestra bastones y conos de la retina con colores distintos



gelatina acuosa un poco viscosa conocida como *humor vítreo*. Los índices de refracción tanto del humor acuoso como del humor vítreo son de alrededor de 1.336, casi iguales al del agua. Aunque el cristalino no es homogéneo, tiene un índice promedio de 1.437, no muy diferente de los índices de los humores acuoso y vítreo. En consecuencia, la mayor parte de la refracción de la luz que penetra en el ojo ocurre en la superficie externa de la córnea.

La refracción en la córnea y en las superficies del cristalino produce una *imagen real* del objeto que se mira. Esta imagen se forma en la *retina* (sensible a la luz) que recubre la superficie interna posterior del ojo. La retina desempeña el mismo papel que la película en una cámara. Los *bastones* y los *conos* de la retina actúan como una serie de fotoceldas en miniatura (figura 34.44*b*); perciben la imagen y la transmiten a través del *nervio óptico* hasta el cerebro. La mayor agudeza visual se da en una región central pequeña llamada *fóvea central*, de alrededor de 0.25 mm de diámetro.

En frente del cristalino está el *iris*. Este contiene una abertura de diámetro variable llamada *pupila*, la cual se abre y se cierra para adaptarse a la intensidad cambiante de la luz. También los receptores de la retina tienen mecanismos de adaptación a la intensidad.

Para que un objeto se vea con nitidez, la imagen se debe formar exactamente donde se encuentra la retina. El ojo se ajusta a las diferentes distancias de objeto s modificando la distancia focal f de su lente; la distancia entre el cristalino y la retina, que corresponde a s', no cambia. (Compare esto con la manera de enfocar una cámara, donde la distancia focal es fija, en tanto que se modifica la distancia entre la lente y la película). En el ojo normal, un objeto situado en el infinito está enfocado nítidamente cuando el músculo ciliar se encuentra relajado. Para permitir la formación de imágenes nítidas de objetos más cercanos en la retina, aumenta la tensión del músculo ciliar que rodea el cristalino, se contrae el músculo ciliar, se arquea el cristalino, y se disminuyen los radios de curvatura de sus superficies; esto reduce la distancia focal. Dicho proceso se llama *acomodación*.

Los extremos del rango donde es posible la visión definida se conocen como el *punto lejano* y el *punto cercano* del ojo. El punto lejano del ojo normal se encuentra en el infinito. La posición del punto cercano depende del grado en que el músculo ciliar puede aumentar la curvatura del cristalino. El ámbito de acomodación disminuye gradualmente con la edad, porque el cristalino crece a lo largo de la vida de los seres humanos (es alrededor de un 50% más grande a la edad de 60 años que a los 20) y los músculos ciliares son menos capaces de deformar un cristalino más grande. Por tal razón, el punto cercano se aleja poco a poco a medida que uno envejece. Este alejamiento del punto cercano recibe el nombre de *presbicia*. La tabla 34.1 muestra la posición aproximada del punto cercano en una persona promedio de diversas edades. Por ejemplo, un ser humano promedio de 50 años de edad no puede enfocar un objeto situado a menos de 40 cm del ojo.

Tabla 34.1 Retroceso del punto cercano con el paso de la edad

Edad (años)	Punto cercano (cm)
10	7
20	10
30	14
40	22
50	40
60	200

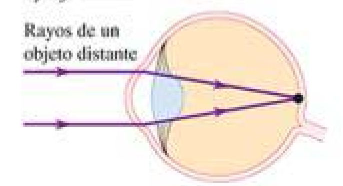
Defectos de la visión

Varios defectos comunes de la visión son resultado de relaciones de distancia incorrectas en el ojo. Un ojo normal forma en la retina una imagen de un objeto situado en el infinito cuando el ojo se encuentra relajado (figura 34.45*a*). En el ojo *miope* (corto de vista), el globo ocular es excesivamente largo de adelante hacia atrás, en comparación con el radio de curvatura de la córnea (o la córnea presenta una curvatura demasiado pronunciada), y los rayos provenientes de un objeto situado en el infinito se enfocan delante de la retina (figura 34.45*b*). El objeto más distante del cual se puede formar una imagen en la retina está entonces más próximo que el infinito. En el ojo *hipermétrope* (problemas de visión a distancias cortas), el globo ocular es demasiado corto o la córnea no tiene la curvatura suficiente, por lo que la imagen de un objeto infinitamente distante se forma detrás de la retina (figura 34.45*c*). El ojo miope produce *demasiada* convergencia en un haz de rayos paralelos como para formar una imagen en la retina; en el ojo hipermétrope, la convergencia es *insuficiente*.

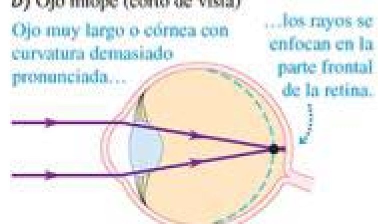
Todos estos defectos se remedian con el uso de lentes correctivas (anteojos o lentes de contacto). El punto cercano de un ojo tanto présbita como hipermétrope está *más alejado* del ojo que lo normal. Para ver claramente un objeto a la distancia normal de lectura (que ordinariamente se supone de 25 cm), se necesita una lente que forme una imagen virtual del objeto en el punto cercano o más allá de él. Esto se con-

34.45 Errores de refracción en *a*) un ojo normal, *b*) un ojo miope (corto de vista) y *c*) un ojo hipermétrope (problemas de visión a distancias cortas) observando un objeto muy distante. La curva azul punteada indica la posición de la retina que se requiere.

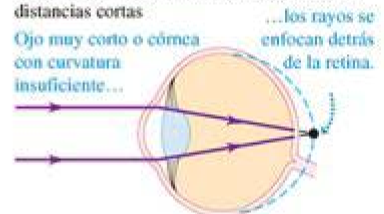
a) Ojo normal



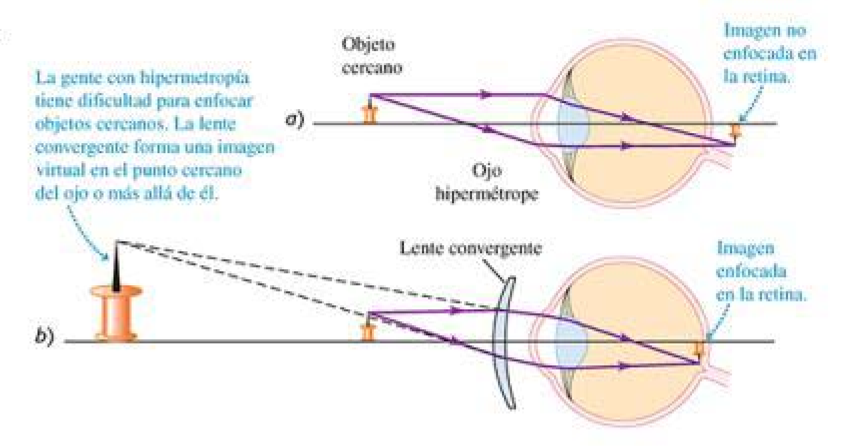
b) Ojo miope (corto de vista)



c) Ojo hipermétrope (problemas de visión a distancias cortas



34.46 *a*) Ojo hipermétrope sin corrección. *b*) Una lente positiva (convergente) proporciona la convergencia adicional necesaria para que un ojo hipermétrope enfoque la imagen en la retina.



Aplicación Enfoque en el reino animal

Se ha encontrado que en los seres humanos y en otros mamíferos el cristalino y el músculo ciliar son solo dos de varios mecanismos de enfoque utilizados por los animales. Los pájaros pueden cambiar la forma no solo de su cristalino, sino también de la superficie de la córnea. En los animales acuáticos la superficie de la córnea no es muy útil para enfocar porque su índice de refracción es similar al del agua. Por lo tanto, el enfoque se produce completamente por la lente, que es casi esférica. En el enfoque de los peces se emplea un músculo para mover el cristalino hacia adentro o hacia afuera. Las ballenas y los delfines logran el mismo efecto mediante el llenado o vaciado de una cámara de fluido ubicada detrás del cristalino para moverlo hacia adentro o hacia afuera.



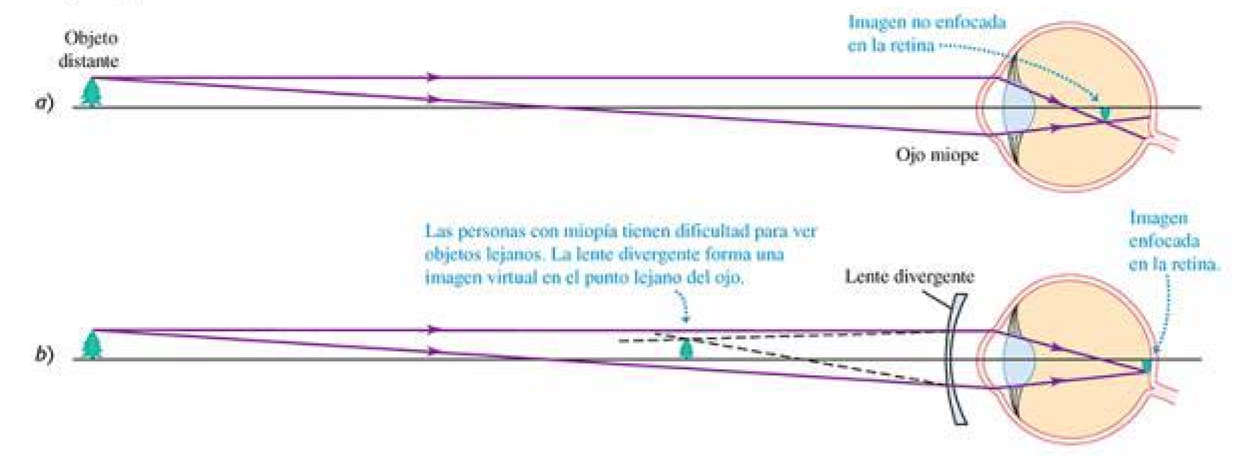
sigue por medio de una lente convergente (positiva), como se muestra en la figura 34.46. La lente aleja efectivamente el objeto del ojo, hasta un punto donde se puede formar una imagen nítida en la retina. Asimismo, para corregir el ojo miope se utiliza una lente divergente (negativa) para llevar la imagen más cerca del ojo que el objeto real, como se muestra en la figura 34.47.

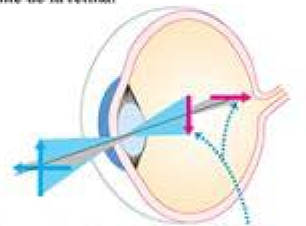
El *astigmatismo* es un tipo de defecto diferente, en el cual la superficie de la córnea no es esférica, sino que tiene una curvatura más pronunciada en un plano que en otro. En consecuencia, tal vez la imagen de las líneas horizontales se forma en un plano diferente que la imagen de las líneas verticales (figura 34.48*a*). El astigmatismo puede hacer imposible, por ejemplo, enfocar con claridad las barras horizontales y verticales de una ventana al mismo tiempo.

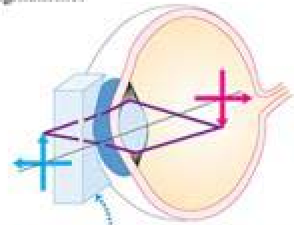
El astigmatismo se corrige mediante una lente de superficie *cilíndrica*. Por ejemplo, suponga que la curvatura de la córnea en un plano horizontal es la correcta para enfocar los rayos provenientes del infinito en la retina, pero la curvatura en el plano vertical es demasiado grande para formar una imagen nítida en la retina. Cuando una lente cilíndrica con su eje horizontal se coloca delante del ojo, la lente no altera los rayos en un plano horizontal, pero la divergencia adicional de los rayos en un plano vertical hace que estos se enfoquen nítidamente sobre la retina (figura 34.48*b*).

Las lentes para corregir la visión se describen habitualmente en términos de su **potencia**, la cual se define como el recíproco de la distancia focal expresada en metros. La unidad de potencia es la **dioptría**. De esta manera, una lente con $f = 0.50$ m tiene una potencia de 2.0 dioptrías, $f = -0.25$ corresponde a -4.0 dioptrías, y así sucesivamente. Los números indicados en una receta de anteojos por lo regular son potencias

34.47 *a*) Ojo miope sin corrección. *b*) Una lente negativa (divergente) separa aún más los rayos para compensar la convergencia excesiva del ojo miope.







34.48 Un tipo de ojo astigmático y cómo se corrige.

expresadas en dioptrías. Cuando se busca corregir tanto astigmatismo como miopía o hipermetropía, se indican tres números: uno correspondiente a la potencia esférica, otro a la potencia cilíndrica y un ángulo que describe la orientación del eje del cilindro.



Ejemplo 34.13 Corrección de hipermetropía

El punto cercano de cierto ojo hipermétrope está a 100 cm delante del ojo. Determine la distancia focal y la potencia de una lente de contacto que permitirá al usuario ver con claridad un objeto situado a 25 cm delante del ojo.

SOLUCIÓN

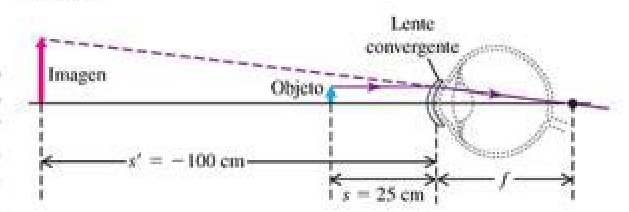
IDENTIFICAR y PLANTEAR: En la figura 34.49 se ilustra la situación. Se busca que la lente forme una imagen virtual del objeto en el punto cercano del ojo, a 100 cm delante de él. La lente de contacto (cuyo grosor se considera despreciable) está en la superficie de la córnea, por lo que la distancia de objeto es $s = 25$ cm. La imagen virtual está en la parte entrante de la lente de contacto, así que la distancia a la imagen es $s' = -100$ cm. Se utiliza la ecuación (34.16) para determinar la distancia focal requerida f de la lente de contacto; la correspondiente potencia es $1/f$.

EJECUTAR: De acuerdo con la ecuación (34.16),

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{+25\text{ cm}} + \frac{1}{-100\text{ cm}}$$

$$f = +33\text{ cm}$$

34.49 Empleo de una lente de contacto para corregir hipermetropía. Para mayor claridad, el ojo y la lente de contacto se muestran mucho más grandes que la escala de la figura; el diámetro de 2.5 cm del ojo en realidad es mucho menor que la distancia focal f de la lente de contacto.



Se necesita una lente convergente con distancia focal $f = 33$ cm. La potencia correspondiente es de $1/(0.33\text{ m}) = +3.0$ dioptrías.

EVALUAR: En este ejemplo se utiliza una lente de contacto para corregir la hipermetropía. Si se hubieran empleado anteojos, habría sido necesario tener en cuenta la separación entre el ojo y la lente de los anteojos, y se necesitaría una potencia algo diferente (véase el ejemplo 34.14).



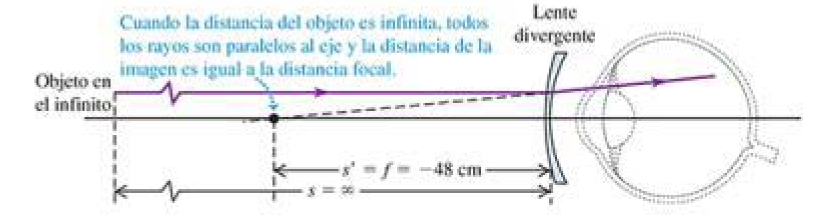
Ejemplo 34.14 Corrección de miopía

El punto lejano de cierto ojo con miopía está a 50 cm delante del ojo. Encuentre la distancia focal y la potencia de la lente de anteojos que permitan al usuario ver claramente un objeto en el infinito. Supongamos que la lente se utiliza a 2 cm delante del ojo.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: La figura 34.50 muestra la situación. El punto lejano de un ojo con miopía está más cerca que el infinito. Para

34.50 Uso de anteojos para corregir la miopía. Para mayor claridad, el ojo y la lente de los anteojos se muestran mucho más grandes que la escala de la figura.



Continúa

ver nítidamente objetos situados más allá del punto lejano, se necesita una lente que forme una imagen virtual de tales objetos no más lejos que el punto lejano. Suponga que la imagen virtual del objeto situado en el infinito se forma en el punto lejano, a 50 cm delante del ojo (48 cm delante de la lente de anteojos). Entonces, cuando la distancia de objeto $s = \infty$, se busca la distancia a la imagen $s' = -48$ cm. Como en el ejemplo 34.13, la distancia focal necesaria se calcula con base en los valores de s y s'.

EJECUTAR: De acuerdo con la ecuación (34.16),

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{\infty} + \frac{1}{-48\text{ cm}}$$

$$f = -48\text{ cm}$$

Se necesita una lente *divergente* con una distancia focal $f = -48$ cm y potencia $1/(-0.48\text{ m}) = -2.1$ dioptrías.

EVALUAR: En cambio, si se utilizara una lente de *contacto*, se necesitaría una $f = -50$ cm y una potencia de -2.0 dioptrías. ¿Sabe usted por qué?

Evalúe su comprensión de la sección 34.6 Cierta lente de anteojos es delgada en el centro, aún más delgada en sus bordes superior e inferior, y relativamente gruesa en sus bordes izquierdo y derecho. ¿Qué defectos de visión se intenta corregir con esta lente? **i.** Hipermetropía para objetos orientados tanto vertical como horizontalmente; **ii.** miopía para objetos orientados tanto vertical como horizontalmente; **iii.** hipermetropía para objetos orientados verticalmente y miopía para objetos orientados horizontalmente; **iv.** hipermetropía para objetos orientados horizontalmente y miopía para objetos orientados verticalmente. ❙

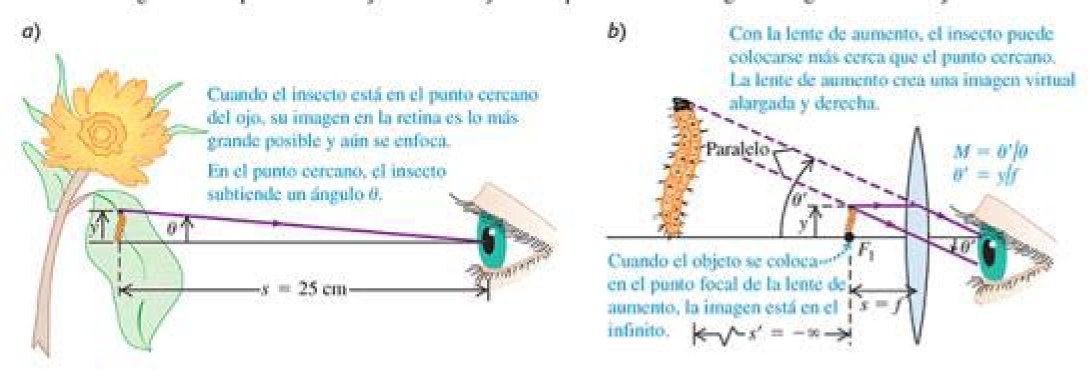
34.7 La lente de aumento

El tamaño aparente de un objeto está determinado por el tamaño de su imagen en la retina. En el ojo sin aditamentos, este tamaño depende del *ángulo* θ que subtiende el objeto en el ojo, conocido como su **tamaño angular** (figura 34.51*a*).

Para observar de cerca un objeto pequeño, como un insecto o un cristal, lo acercamos al ojo para que el ángulo subtendido y la imagen retiniana sean lo más grandes posible. Sin embargo, el ojo no puede enfocar nítidamente objetos más próximos que el punto cercano; por lo tanto, el tamaño angular de un objeto es máximo (es decir, subtiende el ángulo de visión más grande posible) cuando se encuentra en el punto cercano. En el siguiente análisis supondremos un observador promedio, para quien el punto cercano está a 25 cm del ojo.

Una lente convergente permite formar una imagen virtual más grande y más alejada del ojo que el objeto mismo, como se muestra en la figura 34.51*b*. En estas condiciones, es posible acercar más el objeto al ojo, y el tamaño angular de la imagen puede ser considerablemente más grande que el tamaño angular del objeto a 25 cm sin la lente. Una lente que se utiliza de este modo recibe el nombre de **lente de aumento**, también conocida como *vidrio de aumento* o *lupa simple*. La imagen virtual se ve con máxima comodidad cuando se encuentra en el infinito, de modo que el músculo ciliar del ojo esté relajado, lo cual significa que el objeto se coloca en el punto focal F_1 de la lente de aumento. En el análisis que sigue supondremos que este es el caso.

34.51 *a*) El tamaño angular θ es máximo cuando el objeto está en el punto cercano. *b*) La lente de aumento forma una imagen virtual en el infinito. Esta imagen virtual aparece ante el ojo como un objeto real que subtiende un ángulo más grande θ' en el ojo.



En la figura 34.51*a* el objeto está en el punto cercano, donde subtiende un ángulo θ en el ojo. En la figura 34.51*b* una lente de aumento delante del ojo forma una imagen en el infinito, y el ángulo subtendido por la lente de aumento es θ'. La utilidad de la lente de aumento queda expresada por la proporción del ángulo θ' (con la lente de aumento) con respecto al ángulo θ (sin la lente de aumento). Esta proporción se conoce como el **aumento angular** M:

$$M = \frac{\theta'}{\theta} \qquad \text{(aumento angular)} \qquad (34.21)$$

CUIDADO **Aumento angular contra aumento lateral** No confunda el aumento *angular* M con el aumento *lateral* m. El aumento angular es la razón del tamaño *angular* de una imagen con respecto al tamaño angular del objeto correspondiente; el aumento lateral se refiere a la razón de la *altura* de la imagen con respecto a la altura del objeto correspondiente. En la situación de la figura 34.51*b*, el aumento angular es de aproximadamente 3×, porque el insecto subtiende un ángulo aproximadamente tres veces más grande que el de la figura 34.51*a*; por lo tanto, el insecto se ve aproximadamente tres veces más grande. El aumento *lateral* $m = -s'/s$ de la figura 34.51*b* es *infinito* porque la imagen virtual está en el infinito, ¡pero eso no significa que el insecto se vea infinitamente grande a través de la lente de aumento! (Por ello, no intentamos dibujar un insecto infinitamente grande en la figura 34.51*b*). Cuando se utiliza una lente de aumento, M es útil, pero m no lo es.

Para encontrar el valor de M, primero suponemos que los ángulos son lo suficientemente pequeños como para que cada ángulo (en radianes) sea igual a su seno y a su tangente. Con base en la figura 34.51*a*, y trazando el rayo de la figura 34.51*b* que atraviesa sin desviarse el centro de la lente, encontramos que θ y θ' (en radianes) son

$$\theta = \frac{y}{25\text{ cm}} \qquad \theta' = \frac{y}{f}$$

Combinando estas expresiones con la ecuación (34.21):

$$M = \frac{\theta'}{\theta} = \frac{y/f}{y/25\text{ cm}} = \frac{25\text{ cm}}{f} \qquad \text{(aumento angular de una lente de aumento simple)} \qquad (34.22)$$

Parecería que es posible agrandar el aumento angular tanto como se desee reduciendo la distancia focal f. De hecho, las aberraciones de una lente simple biconvexa establecen un límite de M entre aproximadamente 3× y 4×. Si se corrigen estas aberraciones, se puede alcanzar un aumento angular de hasta 20×. Cuando se necesita un aumento aún mayor, por lo general se utiliza un microscopio compuesto, el cual estudiaremos en la siguiente sección.

Evalúe su comprensión de la sección 34.7 Usted examina una gema utilizando una lente de aumento. Si cambia esta por otra lente de aumento con el doble de distancia focal, **i.** tendrá que mantener el objeto a una distancia del doble y el aumento angular también será del doble; **ii.** tendrá que mantener el objeto a una distancia del doble y el aumento angular será de $\frac{1}{2}$; **iii.** tendrá que mantener el objeto a $\frac{1}{2}$ de la distancia y el aumento angular será del doble; **iv.** tendrá que mantener el objeto a $\frac{1}{2}$ de la distancia y el aumento angular también será de $\frac{1}{2}$.

34.8 Microscopios y telescopios



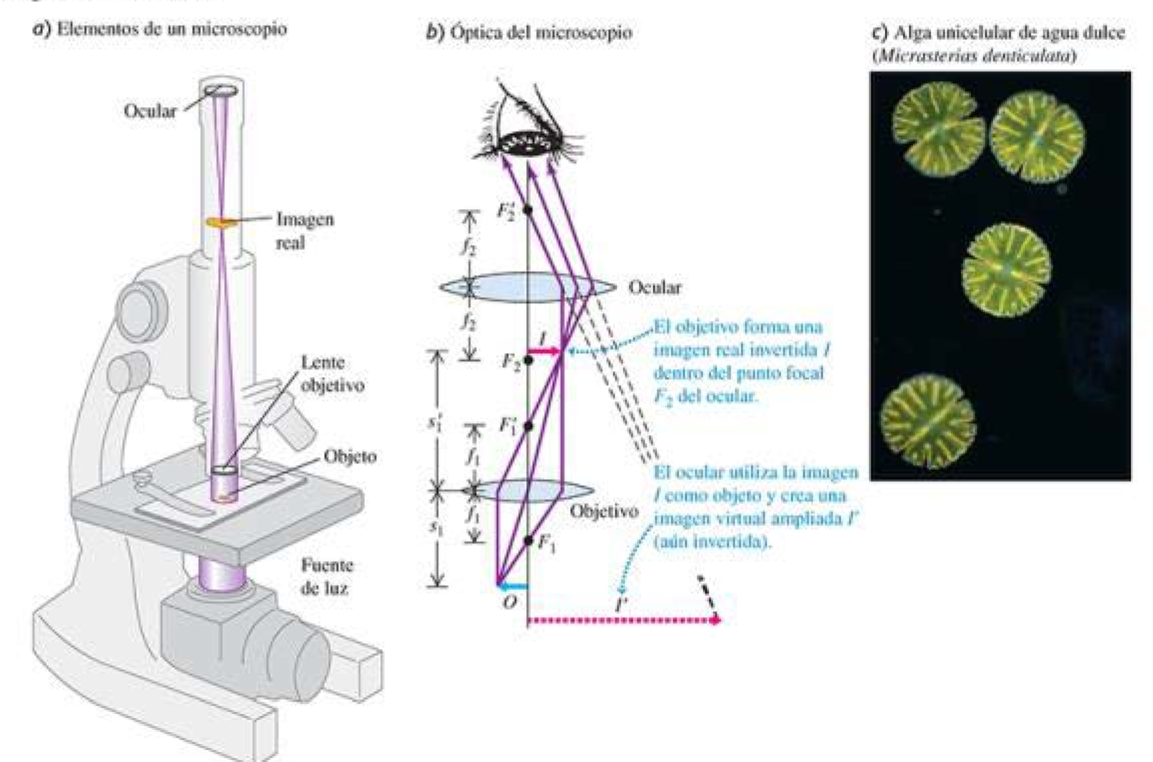
ActivPhysics 15.12: Two-Lens Optical Systems

Las cámaras, los anteojos y las lentes de aumento utilizan una sola lente para formar la imagen. Dos dispositivos ópticos importantes que utilizan *dos* lentes son el microscopio y el telescopio. En estos dispositivos una lente primaria, u *objetivo*, forma una imagen real, y una lente secundaria, u *ocular*, sirve como lente de aumento para formar una imagen virtual ampliada.

Microscopios

Cuando se necesita un aumento mayor que el obtenido con una lente de aumento simple, el instrumento que se utiliza normalmente es el **microscopio**, también conocido

34.52 *a*) Elementos de un microscopio. *b*) El objeto *O* se coloca inmediatamente por fuera del primer punto focal del objetivo (para mayor claridad, se exageró la distancia s_1). *c*) Esta imagen de microscopio muestra organismos unicelulares de aproximadamente 2×10^{-4} m (0.2 mm) de diámetro. Los microscopios ópticos comunes permiten distinguir características tan pequeñas como 2×10^{-7} m, que son comparables con la longitud de onda de la luz.



como *microscopio compuesto*. En la figura 34.52*a* se muestran los elementos básicos de un microscopio. Para analizar este sistema, aplicamos el principio de que una imagen formada por un elemento óptico, como una lente o un espejo, puede servir como objeto de un segundo elemento. Empleamos este principio en la sección 34.4, cuando dedujimos la ecuación de lentes delgadas por aplicación repetida de la ecuación de refracción en una sola superficie; lo utilizamos de nuevo en el ejemplo 34.11 (sección 34.4), donde se usó la imagen formada por una lente como objeto de una segunda lente.

El objeto *O* que examinaremos se coloca inmediatamente después del primer punto focal F_1 del **objetivo**, que es una lente convergente que forma una imagen real y ampliada *I* (figura 34.52*b*). En un instrumento diseñado de manera correcta, esta imagen se encuentra inmediatamente hacia adentro con respecto al primer punto focal F_1' de una segunda lente convergente llamada **ocular**. (Dejamos en sus manos descubrir por qué la imagen debe estar inmediatamente *por adentro* de F_1'; véase el problema 34.108). El ocular funciona como lente de aumento simple, como se explicó en la sección 34.7, y se forma una imagen virtual final I' de *I*. La posición de I' se puede encontrar en cualquier punto entre los puntos cercano y lejano del ojo. Tanto el objetivo como el ocular de un microscopio real son lentes compuestas corregidas en alto grado y con varios elementos ópticos; para simplificar, no obstante, aquí los mostramos como lentes delgadas simples.

En una lente de aumento simple, lo que importa al mirar a través de un microscopio es el aumento *angular M*. El aumento angular total del microscopio compuesto es el producto de dos factores. El primero de ellos es el aumento *lateral* m_1 del objetivo, que determina el tamaño lineal de la imagen real *I*; el segundo factor es el aumento *angular* M_2 del ocular, que relaciona el tamaño angular de la imagen virtual vista a través del ocular con el tamaño angular que la imagen real *I* tendría si se la viera *sin* el ocular. El primero de estos factores está dado por

$$m_1 = -\frac{s_1'}{s_1} \qquad (34.23)$$

donde s_1 y s_1' son las distancias de objeto y de imagen, respectivamente, correspondientes a la lente objetivo. En condiciones ordinarias el objeto está muy cerca del punto focal, y la distancia de imagen resultante s_1' es muy grande en comparación con la distancia focal f_1 de la lente objetivo. Por consiguiente, s_1 es aproximadamente igual a f_1, y podemos escribir $m_1 = -s_1'/f_1$.

La imagen real I está cerca del punto focal F_1' del ocular; por lo tanto, para obtener el aumento angular del ocular aplicamos la ecuación (34.22): $M_2 = (25\text{ cm})/f_2$, donde f_2 es la distancia focal del ocular (considerado como lente simple). El aumento angular total M del microscopio compuesto (aparte de un signo negativo, que habitualmente se pasa por alto) es el producto de dos aumentos:

$$M = m_1 M_2 = \frac{(25\text{ cm})s_1'}{f_1 f_2} \qquad \text{(aumento angular de un microscopio)} \qquad (34.24)$$

donde s_1', f_1 y f_2 se miden en centímetros. La imagen final es invertida con respecto al objeto. Por lo regular, los fabricantes de microscopios especifican los valores de m_1 y M_2 de los componentes del microscopio, en vez de las distancias focales del objetivo y del ocular.

La ecuación (34.24) revela que es posible incrementar el aumento angular de un microscopio utilizando un objetivo de distancia focal más corta f_1, con lo cual se incrementan m_1 y el tamaño de la imagen real I. Casi todos los microscopios ópticos tienen una "torreta" giratoria con tres o más objetivos de diferente distancia focal, con lo cual es posible ver el mismo objeto a diferentes aumentos. Además, el ocular debe tener una distancia focal f_2 corta para aumentar al máximo el valor de M.

Para tomar una fotografía con un microscopio (llamada *fotomicrografía* o *micrografía*), se retira el ocular y se coloca una cámara fotográfica, de manera que la imagen real I llegue al detector CCD o a la película. La figura 34.52*c* muestra tal fotografía. En este caso, lo que importa es el aumento *lateral* del microscopio, el cual se obtiene con la ecuación (34.23).

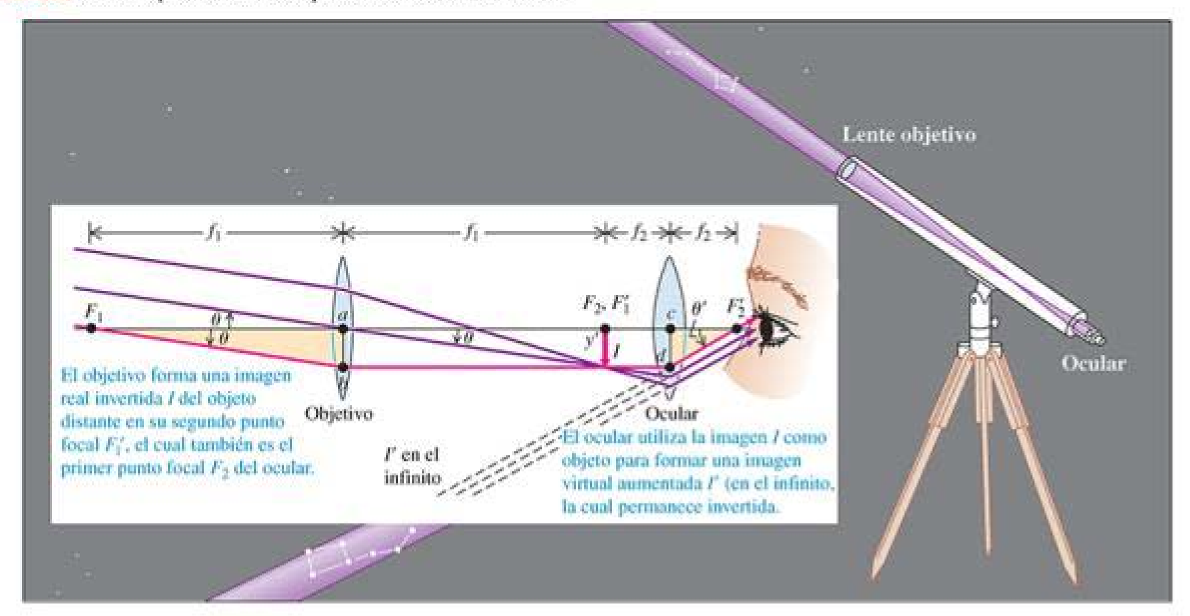
Telescopios

El sistema óptico de un **telescopio** es semejante al de un microscopio compuesto. En ambos instrumentos, la imagen formada por un objetivo se observa a través de un ocular. La diferencia fundamental es que el telescopio se utiliza para ver objetos grandes situados a enormes distancias, y el microscopio sirve para ver objetos pequeños muy cercanos. Otra diferencia es que muchos telescopios utilizan como objetivo un espejo curvo, no una lente.

En la figura 34.53 se presenta un *telescopio astronómico*. Debido a que este telescopio emplea una lente como objetivo, se le conoce como *telescopio de refracción* o *refractor*. La lente objetivo forma una imagen real reducida I del objeto. Esta imagen es el objeto para la lente ocular, la cual forma una imagen virtual ampliada de I. Los objetos que se observan con un telescopio por lo regular están tan lejos del instrumento, que la primera imagen I se forma casi exactamente en el segundo punto focal de la lente objetivo. Si la imagen final I' formada por el ocular se encuentra en el infinito (para ser vista con la máxima comodidad por un ojo normal), la primera imagen también debe estar en el primer punto focal del ocular. La distancia entre objetivo y ocular, que es la longitud del telescopio, es por ende la *suma* de las distancias focales del objetivo y del ocular: $f_1 + f_2$.

El aumento angular M de un telescopio se define como la razón del ángulo que subtiende en el ojo la imagen final I' con respecto al ángulo que subtiende el objeto en el ojo (sin aditamento). Podemos expresar esta razón en términos de las distancias focales del objetivo y del ocular. En la figura 34.53 el rayo que pasa por F_1, el primer punto focal del objetivo, y por F_2', el segundo punto focal del ocular, se destaca en color rojo. El objeto (que no se muestra) subtiende un ángulo θ en el objetivo, y subtendería prácticamente el mismo ángulo en el ojo sin aditamento. Asimismo, puesto que el ojo del observador se encuentra inmediatamente a la derecha del punto focal F_2', el ángulo que subtiende la imagen final en el ojo es casi igual al ángulo θ'. Como

34.53 Sistema óptico de un telescopio astronómico de refracción.



bd es paralela al eje óptico, las distancias *ab* y *cd* son iguales entre sí y también a la altura y' de la imagen real *I*. Debido a que los ángulos θ y θ' son pequeños, sus tangentes son una buena aproximación de su valor. Con base en los triángulos rectángulos F_1ab y $F_2'cd$,

$$\theta = \frac{-y'}{f_1} \qquad \theta' = \frac{y'}{f_2}$$

y el aumento angular *M* es

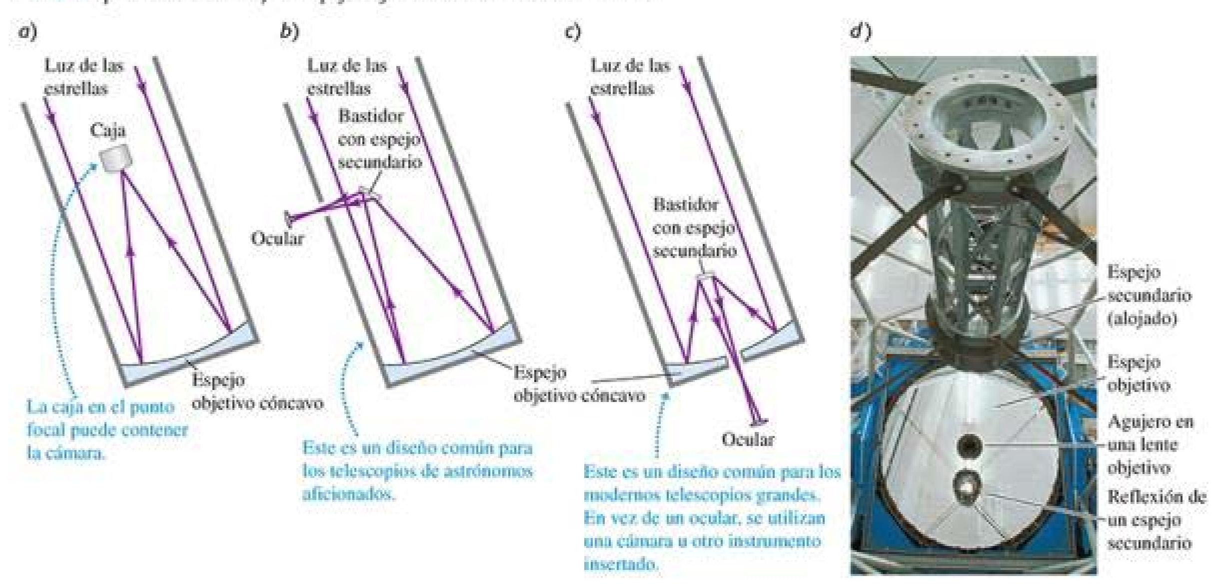
$$M = \frac{\theta'}{\theta} = -\frac{y'/f_2}{y'/f_1} = -\frac{f_1}{f_2} \qquad \text{(aumento angular de un telescopio)} \qquad (34.25)$$

El aumento angular *M* de un telescopio es igual a la proporción de la distancia focal del objetivo con respecto a la del ocular. El signo negativo indica que la imagen final es invertida. La ecuación (34.25) muestra que, para lograr un buen aumento angular, un *telescopio* debería tener una distancia focal de objetivo f_1 *larga*. En cambio, la ecuación (34.24) indica que un *microscopio* debe tener una distancia focal de objetivo *corta*. Sin embargo, un objetivo de telescopio con distancia focal larga también debe tener un diámetro *D* grande, para que el número *f*, es decir, f_1/D, no sea demasiado grande; como se describió en la sección 34.5, un número *f* grande significa una imagen tenue de escasa intensidad. Por lo general, los telescopios no tienen objetivos intercambiables; en cambio, el aumento se modifica utilizando distintos oculares de diferente distancia focal f_2. Como en el caso del microscopio, los valores pequeños de f_2 proporcionan aumentos angulares más grandes.

Una imagen invertida no representa una desventaja en la observación astronómica. Sin embargo, cuando usamos un telescopio o unos binoculares —que son en esencia un par de telescopios montados uno al lado de otro—, para ver objetos en la Tierra, queremos que la imagen esté derecha. En los binoculares de prisma, esto se consigue reflejando la luz varias veces a lo largo del trayecto del objetivo al ocular. El efecto combinado de estas reflexiones es voltear la imagen tanto en sentido horizontal como vertical. Normalmente, los binoculares se describen mediante dos números separados por un signo de multiplicación; por ejemplo: 7×50. El primer número es el aumento angular *M*; y el segundo, el diámetro de las lentes objetivo (en milímetros). El diámetro ayuda a establecer la capacidad colectora de luz de las lentes objetivo y, con ello, el brillo de la imagen.

En el *telescopio de reflexión* (figura 34.54*a*) la lente objetivo se sustituye por un espejo cóncavo. En los telescopios grandes este sistema ofrece muchas ventajas. Los

34.54 *a*), *b*), *c*) Tres diseños para telescopios de reflexión. *d*) Esta fotografía corresponde al interior del telescopio Gemini North, que utiliza el diseño que se describe en *c*). El espejo objetivo tiene 8 metros de diámetro.



espejos están inherentemente libres de aberraciones cromáticas (dependencia de la distancia focal con respecto a la longitud de onda), y las aberraciones esféricas (asociadas con la aproximación paraxial) son más fáciles de corregir que en el caso de las lentes. En algunos casos la superficie reflectante es parabólica en vez de esférica. No es necesario que el material del espejo sea transparente, y puede ser más rígido que una lente, que debe sostenerse solo por sus bordes.

Los telescopios de reflexión más grandes del mundo, los telescopios Keck en la cima del Mauna Kea en Hawai, tienen cada uno un espejo de 10 m de diámetro total compuesto de 36 elementos reflectores hexagonales individuales.

Un desafío en el diseño de telescopios de reflexión es que la imagen se forme delante del espejo objetivo, en una región que recorran los rayos entrantes. Isaac Newton ideó una solución a este problema. Un espejo secundario plano orientado a 45° del eje óptico hace que la imagen se forme en un orificio del lado del telescopio, donde se puede ampliar con un ocular (figura 34.54*b*). Otra solución consiste en usar un espejo secundario que hace que la luz enfocada pase por un orificio en el espejo objetivo (figura 34.54*c*). Los grandes telescopios de investigación, al igual que los telescopios de aficionados, emplean este diseño (figura 34.54*d*).

Al igual que con el microscopio, cuando se utiliza un telescopio para obtener fotografías, se quita el ocular y se coloca película fotográfica o un detector CCD en la posición de la imagen real que forma el objetivo. (Ciertas "lentes" de distancia focal larga para fotografía son en realidad telescopios de reflexión utilizados de este modo). La mayoría de los telescopios que se emplean en la investigación astronómica nunca se usan con ocular.

Evalúe su comprensión de la sección 34.8 ¿Qué proporciona un aumento lateral del máximo valor absoluto: **i.** la lente objetivo de un microscopio (figura 34.52); **ii.** la lente objetivo de un telescopio de refracción (figura 34.53), o **iii.** no se da la información suficiente para saberlo?

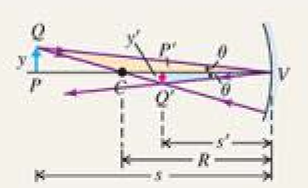


Reflexión o refracción sobre una superficie plana: Cuando divergen rayos a partir de un punto de objeto P y son reflejados o refractados, la dirección de los rayos salientes es la misma que si hubieran divergido desde un punto P' conocido como punto de imagen. Si convergen en realidad en P' y divergen nuevamente más allá de ese punto, P' es una imagen real de P; si solo parecen divergir a partir de P', se trata de una imagen virtual. Las imágenes pueden ser derechas o invertidas.

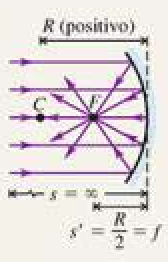


Aumento lateral: En cualquier situación de reflexión o refracción, el aumento lateral m se define como la razón de la altura de la imagen y' con respecto a la altura del objeto y. Cuando m es positivo, la imagen es derecha; y cuando m es negativo, la imagen es invertida.

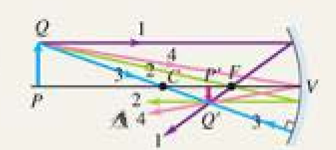
$$m = \frac{y'}{y} \quad (34.2)$$



Punto focal y distancia focal: El punto focal de un espejo es el punto donde los rayos paralelos convergen después de reflejarse en un espejo cóncavo, o bien, el punto desde el que parecen divergir después de reflejarse en un espejo convexo. Los rayos que divergen a partir del punto focal de un espejo cóncavo son paralelos después de reflejarse; los rayos que convergen hacia el punto focal de un espejo convexo también son paralelos después de reflejarse. La distancia del punto focal al vértice se llama distancia focal y se expresa con f. Los puntos focales de una lente se definen de modo análogo.



Relación entre las distancias de objeto y de imagen: En la tabla que sigue se resumen las fórmulas de distancia de objeto s y distancia de imagen s' correspondientes a espejos planos y esféricos, y superficies refractivas individuales. La ecuación referente a una superficie plana se obtiene de la ecuación correspondiente aplicable a una superficie esférica, estableciendo que $R = \infty$. (Véase los ejemplos 34.1 a 34.7).



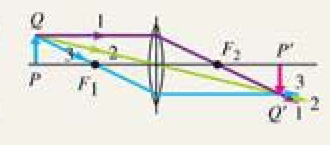
	Espejo plano	Espejo esférico	Superficie refractiva plana	Superficie refractiva esférica
Distancias de objeto y de imagen	$\frac{1}{s}+\frac{1}{s'}=0$	$\frac{1}{s}+\frac{1}{s'}=\frac{2}{R}=\frac{1}{f}$	$\frac{n_a}{s}+\frac{n_b}{s'}=0$	$\frac{n_a}{s}+\frac{n_b}{s'}=\frac{n_b-n_a}{R}$
Aumento lateral	$m=-\frac{s'}{s}=1$	$m=-\frac{s'}{s}$	$m=-\frac{n_a s'}{n_b s}=1$	$m=-\frac{n_a s'}{n_b s}$

Las relaciones entre objeto e imagen deducidas en este capítulo son válidas solo con respecto a rayos cercanos y casi paralelos al eje óptico, llamados rayos paraxiales. Los rayos no paraxiales no convergen de forma precisa en un punto de imagen. El efecto recibe el nombre de aberración esférica.

Lentes delgadas: La relación entre objeto e imagen, dada por la ecuación (34.16), es la misma en el caso de una lente delgada que en el de un espejo esférico. La ecuación (34.19), la ecuación del fabricante de lentes, relaciona la distancia focal de una lente con su índice de refracción y los radios de curvatura de sus superficies. (Véase los ejemplos 34.8 a 34.11).

$$\frac{1}{s}+\frac{1}{s'}=\frac{1}{f} \quad (34.16)$$

$$\frac{1}{f}=(n-1)\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right) \quad (34.19)$$

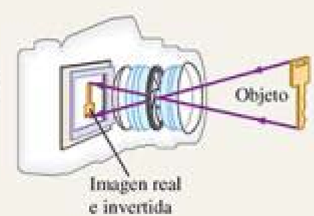


Reglas de signos: Las siguientes reglas de signos se aplican a todas las superficies reflectantes y refractivas tanto planas como esféricas.

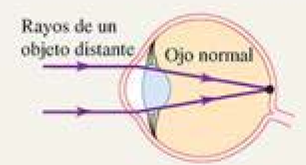
- $s > 0$ cuando el objeto está del lado entrante de la superficie (objeto real); $s < 0$ en caso contrario.
- $s' > 0$ cuando la imagen está del lado saliente de la superficie (imagen real); $s' < 0$ en caso contrario.
- $R > 0$ cuando el centro de curvatura está del lado saliente de la superficie; $R < 0$ en caso contrario.
- $m > 0$ cuando la imagen es derecha; $m < 0$ cuando es invertida.

Cámaras fotográficas: Una cámara fotográfica forma una imagen real, invertida y reducida del objeto que se fotografía sobre una superficie sensible a la luz. La cantidad de luz que incide en la superficie se regula mediante la rapidez del obturador y la abertura. La intensidad de esta luz es inversamente proporcional al cuadrado del número f de la lente. (Véase el ejemplo 34.12).

$$\text{Número } f = \frac{\text{Distancia focal}}{\text{Diámetro de abertura}} = \frac{f}{D} \qquad (34.20)$$

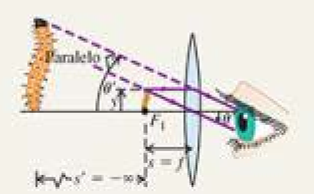


El ojo: En el ojo, la refracción en la superficie de la córnea forma una imagen real en la retina. El ajuste por las diversas distancias de objeto se lleva a cabo oprimiendo el cristalino (la lente) para que se arquee y, de este modo, disminuya su distancia focal. Un ojo con miopía es demasiado largo en relación con su cristalino; un ojo hipermétrope es demasiado corto. La potencia de una lente correctiva, en dioptrías, es el recíproco de la distancia focal en metros. (Véase los ejemplos 34.13 y 34.14).

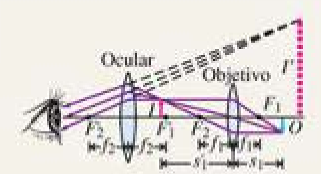


Lente de aumento simple: La lente de aumento simple crea una imagen virtual, cuyo tamaño angular θ' es mayor que el tamaño angular θ del objeto mismo a una distancia de 25 cm, la mínima distancia nominal para una visión cómoda. El aumento angular M de una lente de aumento simple es la proporción del tamaño angular de la imagen virtual con respecto al tamaño angular del objeto a esta distancia.

$$M = \frac{\theta'}{\theta} = \frac{25\text{ cm}}{f} \qquad (34.22)$$



Microscopios y telescopios: En un microscopio compuesto, la lente objetivo forma una primera imagen en el cañón del instrumento, y el ocular forma una imagen virtual final (que suele encontrarse en el infinito) de la primera imagen. El telescopio funciona con base en el mismo principio, pero el objeto está muy alejado. En un telescopio de reflexión, la lente objetivo se sustituye por un espejo cóncavo, el cual elimina las aberraciones cromáticas.



PROBLEMA PRÁCTICO Formación de imagen por una copa de vino



Una copa de vino de pared gruesa se puede considerar como una esfera hueca de vidrio con un radio exterior de 4.00 cm y un radio interior de 3.40 cm. El índice de refracción del vidrio de la copa es 1.50. *a*) Un haz de rayos de luz paralelos entra en el lado de la copa vacía a lo largo de un radio horizontal. ¿Dónde, si es que así es, se puede formar una imagen? *b*) La copa se llena con vino blanco ($n = 1.37$). ¿Dónde se forma la imagen?

GUÍA DE SOLUCIÓN

Vea el área de estudio MasteringPhysics® para consultar una solución con Video Tutor.



IDENTIFICAR y PLANTEAR

1. La copa *no* es una lente delgada, por lo que no se puede utilizar la fórmula de lentes delgadas. En cambio, se debe pensar en las superficies interior y exterior de las paredes de la copa como superficies esféricas refractantes. La imagen formada por una superficie sirve como el objeto de la siguiente superficie.
2. Elija la ecuación adecuada que relacione las distancias de imagen y de objeto para una superficie de refracción esférica.

EJECUTAR

3. Para la copa vacía, cada superficie refractante tiene vidrio por un lado y el aire por el otro. Encuentre la posición de la imagen formada por la primera superficie, la pared exterior de la copa. Use esto como el objeto para la segunda superficie (la pared interna del mismo lado de la copa) y encuentre la posición de la segunda imagen. (*Sugerencia:* Asegúrese de considerar el espesor de la pared de la copa).
4. Continúe con el proceso del paso 3. Considere las refracciones en las superficies interior y exterior del vidrio en el lado opuesto de la copa, y encuentre la posición de la imagen final. (*Sugerencia:* Asegúrese de considerar la distancia entre los dos lados de la copa).
5. Repita los pasos 3 y 4 para el caso en que la copa esté llena de vino.

EVALUAR

6. ¿Las imágenes son reales o virtuales? ¿Cómo lo sabe?

Problemas

Para tareas asignadas por el profesor, visite www.masteringphysics.com 

•, ••, •••: Problemas de dificultad creciente. **PA**: Problemas acumulativos que incorporan material de capítulos anteriores. **CALC**: Problemas que requieren cálculo. **BIO**: Problemas de ciencias biológicas.

PREGUNTAS PARA ANÁLISIS

P34.1 Un espejo esférico se corta horizontalmente por la mitad. ¿Se formará una imagen con la mitad inferior del espejo? Si es así, ¿dónde se formará la imagen?

P34.2 Con respecto a la situación que se muestra en la figura 34.3, ¿la distancia de imagen s' es positiva o negativa? ¿La imagen es real o virtual? Explique sus respuestas.

P34.3 Las leyes de la óptica también se aplican a las ondas electromagnéticas invisibles para el ojo. Se utiliza una antena de televisión por satélite para detectar ondas de radio provenientes de satélites en órbita. ¿Por qué se utiliza una superficie reflectante curva (un "plato") como antena? La antena siempre es cóncava, nunca convexa; ¿por qué? El receptor de radio propiamente dicho se coloca sobre un brazo y se suspende delante del disco. ¿A qué distancia frente al disco se debe colocar?

P34.4 Explique por qué es infinita la distancia focal de un espejo *plano*, y cuál es el significado de que el punto focal esté en el infinito.

P34.5 Si se sumerge en agua un espejo esférico, ¿cambia su distancia focal? Explique su respuesta.

P34.6 ¿Entre qué límites de posiciones del objeto, un espejo esférico cóncavo forma una imagen real? ¿Y un espejo esférico convexo?

P34.7 Cuando una habitación tiene espejos en dos paredes opuestas, se puede ver una serie infinita de reflejos. Analice este fenómeno en términos de imágenes. ¿Por qué se ven más tenues las imágenes distantes?

P34.8 En el caso de un espejo esférico, si $s = f$, entonces $s' = \infty$, y el aumento lateral m es infinito. ¿Esto tiene sentido? Si lo tiene, ¿qué significa?

P34.9 Tal vez usted haya observado un pequeño espejo convexo junto al cajero automático del banco. ¿Por qué es un espejo convexo, y no uno plano o cóncavo? ¿Qué consideraciones determinan su radio de curvatura?

P34.10 Un estudiante afirma que, en un día soleado, puede hacer fuego utilizando solo los rayos solares y un espejo cóncavo. ¿Cómo se logra esto? ¿Es relevante el concepto de imagen? ¿Se puede hacer lo mismo con un espejo convexo? Explique su respuesta.

P34.11 Una persona mira su reflejo en el lado cóncavo de una cuchara reluciente. ¿El reflejo está derecho o invertido? ¿Influye la distancia entre el rostro y la cuchara? ¿Y si la persona se mira en el lado convexo? (¡Haga la prueba!).

P34.12 En el ejemplo 34.4 (sección 34.2) parece haber una ambigüedad con respecto al caso $s = 10$ cm, en cuanto a si s' es $+\infty$, o bien $-\infty$, y si la imagen está derecha o invertida. ¿Cómo se resuelve esto? ¿O no es posible?

P34.13 Suponga que en la situación del ejemplo 34.7 de la sección 34.3 (véase la figura 34.26), una flecha vertical de 2.00 m de alto se pinta en el costado de la alberca bajo la superficie del agua. De acuerdo con el cálculo del ejemplo, a la persona que se muestra en la figura 34.26 le parecería que esta flecha tiene 1.50 m de largo. No obstante, el análisis que sigue a la ecuación (34.13) indica que el aumento correspondiente a una superficie plana refractiva es $m = 1$, lo que sugiere que a la persona le parecería que la flecha mide 2.00 m de largo. ¿Cómo resolvería usted esta aparente contradicción?

P34.14 En la parte inferior del espejo lateral del lado del pasajero de un automóvil se lee: "Los objetos en el espejo están más cerca de lo que parece". ¿Esto es verdadero? ¿Por qué?

P34.15 ¿Cómo se puede hacer rápidamente una medición aproximada de la distancia focal de una lente convergente? ¿Se podría aplicar el mismo método a una lente divergente? Explique su respuesta.

P34.16 La distancia focal de una lente simple depende del color (longitud de onda) de la luz que la atraviesa. ¿Por qué? ¿Es posible que una lente tenga una distancia focal positiva con ciertos colores y negativa con otros? Explique su respuesta.

P34.17 Cuando una lente convergente se sumerge en agua, ¿aumenta o disminuye su distancia focal en comparación con el valor en el aire? Explique su respuesta.

P34.18 Una burbuja esférica de aire puede funcionar como lente. ¿Se trata de una lente convergente o divergente? ¿Cuál es la relación entre su distancia focal y su radio?

P34.19 ¿Una imagen formada por una superficie reflectante o refractiva puede servir como objeto para una segunda reflexión o refracción? ¿Importa el hecho de que la primera imagen sea real o virtual? Explique su respuesta.

P34.20 Si se coloca un pedazo de película fotográfica donde se encuentra una imagen real, la película registra la imagen. ¿Se puede lograr esto con una imagen virtual? ¿Cómo se podría registrar una imagen virtual?

P34.21 De acuerdo con el análisis de la sección 34.2, los rayos luminosos son reversibles. ¿Siguen siendo válidas las fórmulas de la tabla del resumen de este capítulo, si se intercambian el objeto y la imagen? ¿Qué implica la reversibilidad con respecto a la *forma* de las diversas fórmulas?

P34.22 Usted entró a un concurso de supervivencia, el cual incluye construir un telescopio de emergencia burdo; para ello, le proporcionan dos cajas grandes con lentes. ¿Qué par de lentes elegiría? ¿Cómo las identificaría con rapidez?

P34.23 **BIO** No podemos ver con claridad bajo el agua a simple vista, pero *sí* podemos hacerlo si nos ponemos una careta o gafas protectoras (con aire entre los ojos y la careta o las gafas). ¿A qué se debe la diferencia? ¿Sería posible ver bajo el agua con ayuda de unos anteojos (con agua entre los ojos y los anteojos)? Si es así, ¿las lentes deben ser convergentes o divergentes? Explique su respuesta.

P34.24 Usted toma una lente y la cubre de manera que solo pueda pasar luz por la mitad inferior de esta. ¿Cómo se compara la imagen formada por la lente cubierta con la imagen que formaba antes de cubrirse?

EJERCICIOS

Sección 34.1 Reflexión y refracción en una superficie plana

34.1 • Una vela de 4.85 cm de alto está 39.2 cm a la izquierda de un espejo plano. ¿Dónde se encuentra la imagen formada por el espejo, y cuál es la altura de esta?

34.2 • La imagen de un árbol cubre exactamente la longitud de un espejo plano de 4.00 cm de alto, cuando el espejo se sostiene a 35.0 cm del ojo. El árbol está a 28.0 m del espejo. ¿Cuál es su altura?

34.3 • Un lápiz de 9.0 cm de largo se mantiene perpendicular a la superficie de un espejo plano con la punta del lápiz a 12.0 cm de la superficie del espejo y el extremo de la goma de borrar a 21.0 cm de la superficie del espejo. ¿Cuál es la longitud de la imagen del lápiz que se forma por el espejo? ¿Qué extremo de la imagen está más cerca de la superficie del espejo: la punta del lápiz o el extremo de la goma de borrar?

Sección 34.2 Reflexión en una superficie esférica

34.4 • Un espejo cóncavo tiene un radio de curvatura de 34.0 cm. *a*) ¿Cuál es su distancia focal? *b*) Si se sumerge el espejo en agua (índice de refracción: 1.33), ¿cuál será su distancia focal?

34.5 • Se coloca un objeto de 0.600 cm de altura 16.5 cm a la izquierda del vértice de un espejo esférico cóncavo, cuyo radio de curvatura es de 22.0 cm. *a*) Dibuje un diagrama de rayos principales para mostrar la formación de la imagen. *b*) Determine la posición, el tamaño, la orientación y la naturaleza (real o virtual) de la imagen.

34.6 • Repita el ejercicio 34.5 aplicado ahora a un espejo convexo.

34.7 •• El diámetro de Marte es de 6794 km y su distancia mínima con respecto a la Tierra es de 5.58×10^7 km. Considere que Marte se encuentra a esa distancia y determine el diámetro de la imagen del planeta que forma un espejo esférico y cóncavo de telescopio con una distancia focal de 1.75 m.

34.8 •• Un objeto está a 24.0 cm del centro de un adorno esférico de vidrio plateado de árbol de Navidad con un diámetro de 6.00 cm. ¿Cuáles son la posición y el aumento de su imagen?

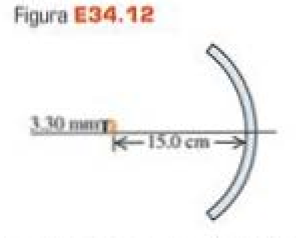
34.9 • Se coloca una moneda junto al lado convexo de un delgado cascarón esférico de vidrio, cuyo radio de curvatura es de 18.0 cm. Se forma una imagen de 1.5 cm de alto de la moneda, 6.00 cm detrás del cascarón de vidrio. ¿Dónde está ubicada la moneda? Determine el tamaño, la orientación y la naturaleza (real o virtual) de la imagen.

34.10 • Usted sostiene un tazón de ensalada esférico de 90 cm frente a su cara, con el fondo del tazón hacia usted. El tazón es de metal pulido con un radio de curvatura de 35 cm. *a*) ¿Dónde se localiza la imagen de su nariz de 2.0 cm de largo? *b*) ¿Cuáles son el tamaño, la orientación y la naturaleza (real o virtual) de la imagen?

34.11 • *a*) Demuestre que la ecuación (34.6) se puede escribir como $s' = sf/(s - f)$ y que, por lo tanto, el aumento lateral, dado por la ecuación (34.7), se puede expresar como $m = f/(f - s)$. *b*) Un espejo esférico cóncavo tiene una distancia focal $f = +14.0$ cm. ¿Cuál es la distancia distinta de cero del objeto desde el vértice del espejo si la imagen tiene la misma altura que el objeto? En este caso, ¿la imagen es derecha o invertida? *c*) Un espejo esférico convexo tiene $f = -8.00$ cm. ¿Cuál es la distancia distinta de cero del objeto desde el vértice del espejo si la altura de la imagen es la mitad de la altura del objeto?

34.12 • El cascarón delgado de vidrio que se ilustra en la figura E34.12 tiene una forma esférica con un radio de curvatura de 12.0 cm, y sus dos superficies pueden actuar como espejos. Una semilla de 3.30 mm de alto se coloca a 15.0 cm desde el centro del espejo a lo largo del eje óptico, como se muestra en la figura. *a*) Calcule la posición y altura de la imagen de esta semilla. *b*) Supongamos ahora que el cascarón se invierte. Encuentre la posición y altura de la imagen de la semilla.

Figura **E34.12**



34.13 • **Espejo de dentista.** Un dentista utiliza un espejo curvo para inspeccionar la dentadura en el maxilar superior de la boca de sus pacientes. Suponga que el dentista quiere que se forme una imagen derecha con un aumento de 2.00, cuando el espejo está a 1.25 cm de una pieza dental. (Resuelva este problema como si el objeto y la imagen estuvieran a lo largo de una recta). *a*) ¿Qué tipo de espejo (cóncavo o convexo) se necesita? Utilice un diagrama de rayos para responder sin efectuar ningún cálculo. *b*) ¿Cuáles deben ser la distancia focal y el radio de curvatura de este espejo? *c*) Dibuje un diagrama de rayos principales para comprobar su respuesta al inciso *b*).

34.14 • Un espejo esférico cóncavo para afeitarse tiene un radio de curvatura de 32.0 cm. *a*) ¿Cuál es el aumento del rostro de una persona cuando está 12.0 cm a la izquierda del vértice del espejo? *b*) ¿Dónde está la imagen? ¿La imagen es real o virtual? *c*) Dibuje un diagrama de rayos principales para mostrar la formación de la imagen.

Sección 34.3 Refracción en una superficie esférica

34.15 • Una partícula de tierra está incrustada a 3.50 cm bajo la superficie de una plancha de hielo ($n = 1.309$). ¿Cuál es su profundidad aparente vista a una incidencia normal?

34.16 •• Un tanque cuyo fondo es un espejo se llena con agua a una profundidad de 20 cm. Un pez pequeño flota inmóvil a 7.0 cm bajo la superficie del agua. *a*) ¿Cuál es la profundidad aparente del pez visto a una incidencia normal? *b*) ¿Cuál es la profundidad aparente de la imagen del pez vista a una incidencia normal?

34.17 • Una persona que nada a 0.80 m por debajo de la superficie del agua en una piscina mira el trampolín que está directamente arriba y ve la imagen de este último, que se forma por la refracción en la superficie del agua. Esta imagen está a una altura de 5.20 m arriba del nadador. ¿Cuál es la altura real del trampolín arriba de la superficie del agua?

34.18 • Una persona está sobre un trampolín de 3.00 m arriba de la superficie del agua en una piscina. La persona mira un centavo que está en el fondo de la piscina directamente debajo, y ve la moneda a una distancia de 8.00 m de ella. ¿Cuál es la profundidad del agua en este punto?

34.19 •• **Pecera esférica.** Un pequeño pez tropical se encuentra en el centro de una pecera esférica, cuyo diámetro es de 28.0 cm y está llena de agua. *a*) Determine la posición aparente y el aumento del pez para un observador situado afuera de la pecera. Desprecie el efecto de las paredes delgadas de la pecera. *b*) Una amiga aconsejó a la dueña de la pecera mantener esta lejos de la luz solar directa para no cegar al pez, el cual podría llegar nadando al punto focal de los rayos paralelos provenientes del Sol. ¿El punto focal está efectivamente adentro de la pecera?

34.20 • El extremo izquierdo de una larga varilla de vidrio de 6.00 cm de diámetro tiene una superficie hemisférica convexa de 3.00 cm de radio. El índice de refracción del vidrio es de 1.60. Encuentre la posición de la imagen de un objeto colocado en aire sobre el eje de la varilla a las siguientes distancias a la izquierda del vértice del extremo curvo: *a*) infinitamente lejos, *b*) 12.0 cm y *c*) 2.00 cm.

34.21 •• Se sumerge en aceite la varilla del ejercicio 34.20 ($n = 1.45$). Un objeto situado a la izquierda de la varilla en el eje de esta formará una imagen en un punto que se encuentra a 1.20 m en el interior de la varilla. ¿Qué tan lejos del extremo izquierdo de la varilla debe estar colocado el objeto para formar la imagen?

34.22 •• El extremo izquierdo de una larga varilla de vidrio de 8.00 cm de diámetro, con un índice de refracción de 1.60, se esmerila y pule para formar una superficie hemisférica convexa con un radio de 4.00 cm. Un objeto con forma de flecha, de 1.50 mm de altura y en ángulo recto al eje de la varilla, está situado sobre el eje 24.0 cm a la izquierda del vértice de la superficie convexa. Calcule la posición y la altura de la imagen de la flecha formada por los rayos paraxiales que inciden en la superficie convexa. ¿La imagen está derecha o invertida?

34.23 •• Repita el ejercicio 34.22, en este caso con el extremo de la varilla pulido para formar una superficie hemisférica *cóncava* con un radio de 4.00 cm.

34.24 •• Se sumerge en un líquido la varilla del ejercicio 34.23. Un objeto situado a 14.0 cm del vértice del extremo izquierdo de la varilla y sobre su eje forma una imagen en un punto que se encuentra a 9.00 cm del vértice en el interior del líquido. ¿Cuál es el índice de refracción del líquido?

Sección 34.4 Lentes delgadas

34.25 • Se coloca un insecto, que mide 3.75 mm de largo, 22.5 cm a la izquierda de una lente delgada planoconvexa. La superficie izquierda de esta lente es plana, la superficie derecha tiene un radio de curvatura de 13.0 cm, y el índice de refracción del material del que está hecha la lente es de 1.70. *a*) Calcule la ubicación y el tamaño de la imagen del insecto que forma esta lente. ¿La imagen es real o virtual? ¿Derecha o invertida? *b*) Repita el inciso *a*) para el caso en que la lente está al revés.

34.26 • Una lente forma una imagen de un objeto, el cual está a 16.0 cm de la lente. La imagen está a 12.0 cm de la lente del mismo lado que el objeto. *a*) ¿Cuál es la distancia focal de la lente? ¿Esta es convergente o divergente? *b*) Si el objeto mide 8.50 mm de altura, ¿cuál será la altura de la imagen? ¿Está derecha o invertida? *c*) Dibuje un diagrama de rayos principales.

34.27 • Una lente convergente de menisco (véase la figura 34.32*a*) con un índice de refracción de 1.52 tiene superficies esféricas, cuyos radios son de 7.00 y 4.00 cm. ¿Cuál es la posición de la imagen de un objeto colocado a 24.0 cm a la izquierda de la lente? ¿Cuál es su aumento?

34.28 • Una lente convergente con una distancia focal de 90.0 cm forma una imagen de un objeto real de 3.20 cm de altura, que se encuentra a la izquierda de la lente. La imagen tiene 4.50 cm de altura y está invertida. ¿Dónde se encuentra el objeto, y dónde la imagen, con respecto a la lente? ¿La imagen es real o virtual?

34.29 •• Una lente convergente forma una imagen de un objeto real de 8.00 mm de alto. La imagen está a 12.0 cm a la izquierda de la lente, mide 3.40 cm de alto y es derecha. ¿Cuál es la distancia focal de la lente? ¿Dónde se localiza el objeto?

34.30 • Una diapositiva fotográfica está a la izquierda de una lente, la cual proyecta una imagen de la diapositiva sobre una pared situada a 6.00 m a la derecha de la diapositiva. La imagen es 80.0 veces más grande que la diapositiva. *a*) ¿A qué distancia de la lente se encuentra la diapositiva? *b*) ¿La imagen está derecha o invertida? *c*) ¿Cuál es la distancia focal de la lente? *d*) ¿Esta es convergente o divergente?

34.31 •• Una delgada lente biconvexa tiene superficies con radios de curvatura iguales que miden 2.50 cm. Al observar a través de esta lente, se puede ver que forma una imagen de un árbol muy lejano a una distancia de 1.87 cm de la lente. ¿Cuál es el índice de refracción de la lente?

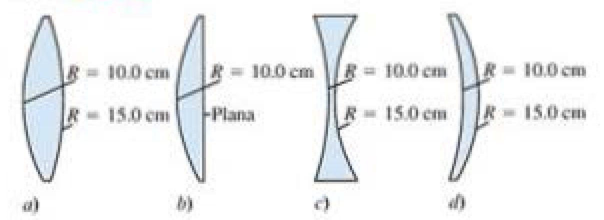
34.32 • BIO **El cristalino del ojo.** El cristalino del ojo humano es una lente biconvexa hecha de material que tiene un índice de refracción de 1.44 (aunque este varía). Su distancia focal en el aire es de aproximadamente 8.0 mm, que también varía. Vamos a suponer que los radios de curvatura de sus dos superficies tienen la misma magnitud. *a*) Determine el radio de curvatura de la lente. *b*) Si un objeto de 16 cm de altura se coloca a 30.0 cm del cristalino, ¿dónde lo enfocaría el ojo y cuál sería la altura de la imagen? ¿Esta imagen es real o virtual? ¿Está derecha o invertida? (*Nota:* Los resultados obtenidos no son estrictamente exactos debido a que el cristalino está inmerso en fluidos que tienen índices de refracción diferentes del índice del aire).

34.33 • BIO **La córnea como una lente simple.** La córnea se comporta como una lente delgada de distancia focal de aproximadamente 1.8 cm, aunque esto varía un poco. El material del que está hecho tiene un índice de refracción de 1.38, y su superficie frontal es convexa, con un radio de curvatura de 5.0 mm. *a*) Si esta distancia focal está en el aire, ¿cuál es el radio de curvatura de la cara posterior de la córnea? *b*) La distancia más cercana con la que una persona normal puede enfocar un objeto (llamada el punto cercano) es de aproximadamente 25 cm, aunque esto varía considerablemente con la edad. ¿Dónde podría la córnea enfocar la imagen de un objeto de 8.0 mm de altura en el punto cercano? *c*) ¿Cuál es la altura de la imagen en el inciso *b*)? ¿Esta imagen es real o virtual? ¿Está derecha o invertida? (*Nota:* Los resultados obtenidos aquí no son estrictamente exactos, porque, por un lado, la córnea tiene un fluido con un índice de refracción diferente del índice del aire).

34.34 • Una lente convergente con una distancia focal de 7.00 cm forma una imagen de un objeto real de 4.00 mm de altura que está a la izquierda de la lente. La imagen es de 1.30 cm de alto y derecha. ¿Dónde están ubicados el objeto y la imagen? ¿La imagen es real o virtual?

34.35 • Para cada una de las lentes delgadas que se muestran en la figura E34.35, calcule la posición de la imagen de un objeto que está a 18.0 cm a la izquierda de la lente. El material de la lente tiene un índice de refracción de 1.50, y el radio de curvatura muestra solo las magnitudes.

Figura **E34.35**



34.36 • Una lente convergente con una distancia focal de 12.0 cm forma una imagen virtual de 8.00 mm de altura, 17.0 cm a la derecha de la lente. Calcule la posición y el tamaño del objeto. ¿La imagen es derecha o invertida? ¿El objeto y la imagen están del mismo lado o en lados opuestos de la lente? Dibuje un diagrama de rayos principales de esta situación.

34.37 • Repita el ejercicio 34.36 aplicado al caso de una lente divergente con una distancia focal de −48.0 cm.

34.38 • Un objeto está 16.0 cm a la izquierda de una lente, la cual forma una imagen de 36.0 cm a su derecha. *a*) ¿Cuál es la distancia focal de la lente? ¿Esta es convergente o divergente? *b*) Si el objeto mide 8.00 mm de altura, ¿cuál es la altura de la imagen? ¿Está derecha o invertida? *c*) Dibuje un diagrama de rayos principales.

34.39 •• **Combinación de lentes I.** Un objeto de 1.20 cm de altura está 50.0 cm a la izquierda de una lente convergente con distancia focal de 40.0 cm. La segunda lente convergente, que tiene una distancia focal de 60.0 cm, se encuentra 300.0 cm a la derecha de la primera lente a lo largo del mismo eje óptico. *a*) Determine la ubicación y la altura de la imagen (llámela I_1) formada por la lente con una distancia focal de 40.0 cm. *b*) I_1 es ahora el objeto de la segunda lente. Encuentre la ubicación y la altura de la imagen producida por la segunda lente. Esta es la imagen final producida por la combinación de lentes.

34.40 •• **Combinación de lentes II.** Repita el problema 34.39 usando las mismas lentes, excepto por los cambios siguientes: *a*) La segunda lente es una lente *divergente* que tiene una distancia focal de magnitud 60.0 cm. *b*) La primera lente es *divergente* y tiene una distancia focal de 40.0 cm. *c*) Ambas lentes son lentes divergentes que tienen longitudes focales de las mismas *magnitudes* que en el problema 34.39.

34.41 •• **Combinación de lentes III.** Dos lentes delgadas con una distancia focal de 12.0 cm, la primera divergente y la segunda convergente, se encuentran a 9.0 cm de separación. Un objeto de 2.5 mm de altura se coloca a 20.0 cm a la izquierda de la primera lente (divergente). *a*) ¿A qué distancia de la primera lente se forma la imagen final? *b*) ¿La imagen final es real o virtual? *c*) ¿Cuál es la altura de la imagen final? ¿Está derecha o invertida? (*Sugerencia:* Vea los dos problemas anteriores).

Sección 34.5 Cámaras fotográficas

34.42 • Usted desea proyectar la imagen de una diapositiva en una pantalla a 9.00 m de la lente de un proyector de diapositivas. *a*) Si la diapositiva se coloca a 15.0 cm de la lente, ¿qué distancia focal de lente se requiere? *b*) Si las dimensiones de la imagen en una diapositiva en color de 35 mm son 24 × 36 mm, ¿cuál es el tamaño mínimo que se requiere de la pantalla del proyector para acomodar la imagen?

34.43 •• Una lente de cámara tiene una distancia focal de 200 mm. ¿A qué distancia de la lente debe estar el sujeto de la fotografía, si la lente está a 20.4 cm de la película?

34.44 • Cuando se enfoca una cámara, la lente se aleja o se acerca con respecto a la película. Si usted toma una fotografía de su amigo, quien se encuentra de pie a 3.90 m de la lente, con una cámara que tiene una lente cuya distancia focal es de 85 mm, ¿a qué distancia de la lente está la película? ¿Cabe la imagen completa de su amigo, que tiene una estatura de 175 cm, en una película de 24 × 36 mm?

34.45 • La figura 34.41 muestra fotografías de una misma escena tomadas con una misma cámara con lentes de diferente distancia focal.

Si el objeto está a 200 m de la lente, ¿cuál es la magnitud del aumento lateral con una lente cuya distancia focal es de *a*) 28 mm, *b*) 105 mm y *c*) 300 mm?

34.46 • Un fotógrafo toma una fotografía de una aeronave Boeing 747 (longitud: 70.7 m) cuando esta vuela directamente sobre su cabeza a una altitud de 9.50 km. La lente tiene una distancia focal de 5.00 m. ¿Cuál es la longitud de la imagen de la aeronave en la película?

34.47 • **Elección de una lente de cámara.** El tamaño de imagen de una película fotográfica ordinaria de 35 mm es de 24 × 36 mm. Las distancias focales de las lentes disponibles para cámaras de 35 mm son típicamente de 28, 35, 50 (la lente "normal"), 85, 100, 135, 200 y 300 mm, entre otras. ¿Cuál de estas lentes se debería utilizar para fotografiar los siguientes objetos, suponiendo que cada uno debe ocupar la mayor parte del área de la fotografía? *a*) Un edificio de 240 m de altura y 160 m de ancho a una distancia de 600 m. *b*) Una casa rodante de 9.6 m de largo a una distancia de 40.0 m.

34.48 • **Lente *zoom*.** Considere el modelo simple de la lente *zoom* que se muestra en la figura 34.43*a*. La lente convergente tiene una distancia focal $f_1 = 12$ cm; y la lente divergente, una distancia focal $f_2 = -12$ cm. La separación entre las lentes es de 4 cm, como se muestra en la figura 34.43*a*. *a*) En el caso de un objeto distante, ¿dónde está la imagen de la lente convergente? *b*) La imagen de la lente convergente sirve como objeto de la lente divergente. ¿Cuál es la distancia de objeto que corresponde a la lente divergente? *c*) ¿Dónde se encuentra la imagen final? Compare su respuesta con la figura 34.43*a*. *d*) Repita los incisos *a*), *b*) y *c*) con respecto a la situación que se muestra en la figura 34.43*b*, donde la separación entre las lentes es de 8 cm.

34.49 •• La distancia focal de una lente de cámara es de 180.0 mm y su diámetro de abertura es de 16.36 mm. *a*) ¿Cuál es el número *f* de la lente? *b*) Si la exposición correcta de cierta escena es de $\frac{1}{30}$ s a $f/11$, ¿cuál es la exposición correcta a $f/2.8$?

34.50 •• Recuerde que la intensidad de la luz que llega a la película de una cámara fotográfica es proporcional al área efectiva de la lente. La cámara *A* tiene una lente con diámetro de abertura de 8.00 mm y fotografía un objeto usando el tiempo de exposición correcto de $\frac{1}{30}$ s. ¿Qué tiempo de exposición debería utilizarse con la cámara *B* al fotografiar el mismo objeto con la misma película, si la cámara tuviera una lente con diámetro de abertura de 23.1 mm?

34.51 • **Fotografía.** Una cámara de 35 mm tiene una lente normal con una distancia focal de 50 mm y puede enfocar objetos entre 45 cm y el infinito. *a*) ¿La lente de esta cámara es cóncava o convexa? *b*) La cámara se enfoca haciendo girar la lente, con lo cual esta se desplaza en el cuerpo de la cámara y cambia su distancia con respecto a la película. ¿En qué intervalo de distancias entre la lente y el plano de la película se debe desplazar la lente para enfocarla correctamente entre los límites de 45 cm y el infinito?

Sección 34.6 El ojo

34.52 •• BIO **Curvatura de la córnea.** En un modelo simplificado del ojo humano, los humores acuoso y vítreo y el cristalino tienen todos un índice de refracción de 1.40, y toda la refracción tiene lugar en la córnea, cuyo vértice está a 2.60 cm de la retina. ¿Cuál debería ser el radio de curvatura de la córnea, para que la imagen de un objeto situado a 40.0 cm del vértice de la córnea esté enfocado en la retina?

34.53 •• BIO *a*) ¿Dónde se encuentra el punto cercano de un ojo al que se ha prescrito una lente de contacto con una potencia de +2.75 dioptrías? *b*) ¿Dónde se encuentra el punto lejano de un ojo al que se ha prescrito una lente de contacto con una potencia de −1.30 dioptrías para hipermetropía?

34.54 • BIO **Lentes de contacto.** Las lentes de contacto se colocan justo en el globo del ojo, por lo que la distancia del ojo a un objeto (o imagen) es la misma que la distancia de la lente a dicho objeto (o imagen). Una persona determinada puede ver los objetos distantes también, pero su punto cercano está a 45.0 cm de sus ojos, y no a 25.0 cm, como es usual. *a*) ¿Esta persona es miope o hipermétrope? *b*) ¿Qué tipo de lente (convergente o divergente) necesita para corregir su visión? *c*) Si las lentes correctoras serán lentes de contacto, ¿qué distancia focal de la lente necesita y cuál es su potencia en dioptrías?

34.55 •• BIO **Anteojos comunes.** Los anteojos comunes se usan enfrente del ojo y por lo general a 2.0 cm enfrente del globo ocular. Suponga que la persona en el problema 34.54 prefiere usar anteojos comunes en lugar de lentes de contacto. ¿Qué distancia focal de lente se necesita para corregir su visión, y cuál es su potencia en dioptrías?

34.56 • BIO Una persona puede ver claramente de cerca, pero no puede enfocar objetos más allá de 75.0 cm. Opta por lentes de contacto para corregir su visión. *a*) ¿Es miope o hipermétrope? *b*) ¿Qué tipo de lente (convergente o divergente) se necesita para corregir su visión? *c*) ¿Qué distancia focal de lente de contacto se necesita, y cuál es su potencia en dioptrías?

34.57 •• BIO Si el individuo del problema 34.56 elige anteojos comunes en vez de lentes de contacto, ¿qué potencia de lente (en dioptrías) necesita para corregir su visión si las lentes están a 2.0 cm delante de los ojos?

Sección 34.7 La lente de aumento

34.58 •• Una lente delgada con una distancia focal de 6.00 cm se utiliza como lupa simple. *a*) ¿Qué aumento angular se puede obtener con la lente, si el objeto está en el punto focal? *b*) Cuando se examina un objeto a través de la lente, ¿cuánto se puede aproximar a la lente? Suponga que la imagen que el ojo ve está en el punto cercano, a 25.0 cm del ojo, y que la lente está muy cerca del ojo.

34.59 • La distancia focal de una lupa simple es de 8.00 cm. Suponga que la lente de aumento es una lente delgada muy próxima al ojo. *a*) ¿A qué distancia delante de la lente de aumento se debe colocar el objeto para que la imagen se forme en el punto cercano del observador, a 25.0 cm frente a su ojo? *b*) Si el objeto tiene 1.00 mm de altura, ¿cuál será la altura de su imagen formada por la lente de aumento?

34.60 • Se desea observar a un insecto de 2.00 mm de longitud a través de una lente de aumento. Si el insecto va a estar en el punto focal de la lente de aumento, ¿qué distancia focal proporcionará a la imagen del insecto un tamaño angular de 0.025 radianes?

Sección 34.8 Microscopios y telescopios

34.61 • Cierto microscopio cuenta con objetivos cuya distancia focal es de 16, 4 y 1.9 mm, y con oculares que proporcionan aumentos angulares de 5× y 10×. Cada objetivo forma una imagen a 120 mm más allá de su segundo punto focal. Determine *a*) el máximo aumento angular total factible y *b*) el mínimo aumento angular total factible.

34.62 •• **Definición de un microscopio.** La imagen formada por un objetivo de microscopio con una distancia focal de 5.00 mm está a 160 mm de su segundo punto focal. El ocular tiene una distancia focal de 26.0 mm. *a*) ¿Cuál es el aumento angular del microscopio? *b*) En su punto cercano, el ojo a simple vista puede distinguir dos puntos individualmente, si están separados por una distancia de 0.10 mm. ¿Cuál es la separación mínima entre dos puntos que este microscopio puede definir?

34.63 •• La distancia focal del ocular de cierto microscopio es de 18.0 mm. La distancia focal del objetivo es de 8.00 mm. La distancia entre el objetivo y el ocular es de 19.7 cm. La imagen final formada por el ocular está en el infinito. Trate todas las lentes como delgadas. *a*) ¿Cuál es la distancia del objetivo al objeto que se observa? *b*) ¿Cuál es la magnitud del aumento lineal que el objetivo produce? *c*) ¿Cuál es el aumento angular total del microscopio?

34.64 •• El ocular de un telescopio de refracción (véase la figura 34.53) tiene una distancia focal de 9.00 cm. La distancia entre el objetivo y el ocular es de 1.80 m, y la imagen final está en el infinito. ¿Cuál es el aumento angular del telescopio?

34.65 •• Se construye un telescopio con dos lentes con distancias focales de 95.0 y 15.0 cm; la lente de 95.0 cm es el objetivo. Tanto el objeto que se observa como la imagen final están en el infinito. *a*) Determine el aumento angular del telescopio. *b*) Calcule la altura de la imagen que el objetivo forma de un edificio de 60.0 m de altura que está a 3.00 km de distancia. *c*) ¿Cuál es el tamaño angular de la imagen final vista por un ojo muy próximo al ocular?

34.66 •• Desde el Observatorio Lick se observa Saturno por medio de un telescopio de refracción (distancia focal del objetivo, 18 m). Si el diámetro de la imagen de Saturno que produce el objetivo es de 1.7 mm, ¿qué ángulo subtiende Saturno cuando se le observa desde la Tierra?

34.67 •• Se va a construir un telescopio de reflexión (figura E34.67) con un espejo esférico cuyo radio de curvatura es de 1.30 m y un ocular con una distancia focal de 1.10 cm. La imagen final está en el infinito. *a*) ¿Cuál debe ser la distancia entre el ocular y el vértice del espejo, si se supone que el objeto está en el infinito? *b*) ¿Cuál será el aumento angular?

Figura **E34.67**



PROBLEMAS

34.68 • ¿Dónde se debe colocar un objeto delante de un espejo cóncavo de radio *R*, de modo que la imagen sea derecha y $2\frac{1}{2}$ veces más grande que el objeto? ¿Dónde se encuentra la imagen?

34.69 • Si se aleja corriendo de un espejo plano a 3.60 m/s, ¿con qué rapidez se aleja su imagen de usted?

34.70 • Se coloca un objeto entre dos espejos planos dispuestos en ángulo recto entre sí, a una distancia d_1 de la superficie de uno de los espejos y a una distancia d_2 del otro. *a*) ¿Cuántas imágenes se forman? Muestre la ubicación de las imágenes en un diagrama. *b*) Dibuje la trayectoria de los rayos del objeto al ojo de un observador.

34.71 •• ¿De qué tamaño es el espejo vertical plano más pequeño en el que una mujer de estatura *h* puede ver su imagen completa?

34.72 • Una bombilla luminosa está a 3.00 m de una pared. Se va a utilizar un espejo cóncavo para proyectar una imagen de la bombilla sobre la pared, de tal modo que la imagen sea 2.25 veces más grande que el objeto. ¿A qué distancia de la pared debe estar el espejo? ¿Cuál debe ser su radio de curvatura?

34.73 •• Un espejo cóncavo debe formar una imagen del filamento de una lámpara de faro de automóvil sobre una pantalla situada a 8.00 m del espejo. La altura del filamento es de 6.00 mm, y la imagen debe tener 24.0 cm de altura. *a*) ¿A qué distancia delante del vértice del espejo se debe colocar el filamento? *b*) ¿Cuál debe ser el radio de curvatura del espejo?

34.74 •• **Espejo retrovisor.** Un espejo del lado del pasajero de su auto es convexo y tiene un radio de curvatura cuya magnitud es de 18.0 cm. *a*) Se observa otro auto que está detrás del suyo, a 9.00 m del espejo, y que se ve en el espejo del lado del pasajero. Si este auto tiene 1.5 m de altura, ¿cuál es la altura de la imagen? *b*) El espejo lleva una advertencia con respecto a que los objetos que se ven en él están más cerca de lo que parece. ¿A qué se debe esto?

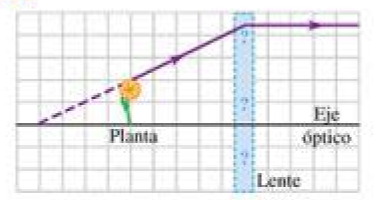
34.75 • Suponga que el filamento de la lámpara del ejemplo 34.1 (sección 34.2) se lleva a una posición a 8.0 cm delante del espejo. *a*) ¿Dónde se encuentra ahora la imagen? ¿Es real o virtual? *b*) ¿Cuál es la altura de la imagen? ¿Está derecha o invertida? *c*) En el ejemplo 34.1, el filamento está a 10.0 cm delante del espejo, y se forma una imagen del filamento sobre un muro a 3.00 m del espejo. Si el filamento está a 8.0 cm del espejo, ¿se puede colocar una pared de modo que se forme una imagen sobre él? En caso afirmativo, ¿dónde se debe colocar la pared? En caso negativo, ¿por qué?

34.76 •• Una capa de benceno ($n = 1.50$) de 4.20 cm de espesor flota sobre agua ($n = 1.33$) cuya profundidad es de 6.50 cm. ¿Cuál es la distancia aparente de la superficie superior del benceno al fondo de la capa de agua, vista con una incidencia normal?

34.77 •• **PA CALC** Usted conduce su automóvil por la autopista a 25 m/s, cuando echa un vistazo al espejo lateral del pasajero (un espejo convexo con radio de curvatura de 150 cm) y advierte que un camión se acerca a usted. Si la imagen del camión se acerca al vértice del espejo a una rapidez de 1.9 m/s, cuando el camión está a 2.0 m de distancia, ¿con qué rapidez se desplaza el camión en relación con la autopista?

34.78 •• La figura P34.78 muestra una pequeña planta ubicada cerca de una lente delgada. El rayo que se ilustra es uno de los rayos principales de la lente. Cada cuadro equivale a 2.0 cm a lo largo de la dirección horizontal, pero la dirección vertical no está a la misma escala. Utilice la información del diagrama para responder las siguientes preguntas: *a*) A partir solo del rayo que se muestra, determine qué tipo de lente es esta (convergente o divergente). *b*) ¿Cuál es la distancia focal de la lente? *c*) Localice la imagen dibujando los otros dos rayos principales. *d*) Calcule dónde debería estar la imagen y compare este resultado con la solución gráfica en el inciso *c*).

Figura **P34.78**



34.79 •• **Cámara estenopeica.** Una cámara estenopeica es tan solo una caja rectangular con un diminuto orificio en una de sus caras. La película se coloca en la cara opuesta a este orificio y es ahí donde se forma la imagen. La cámara forma una imagen *sin* una lente. *a*) Dibuje claramente un diagrama de rayos, para mostrar cómo es que una cámara estenopeica puede formar una imagen en la película sin utilizar una lente. (*Sugerencia:* Imagine que coloca un objeto fuera del agujero, y luego dibuje los rayos que pasan a través de este hacia el lado opuesto de la caja). *b*) Cierta cámara estenopeica es una caja con caras cuadradas de 25 cm por lado, 20.0 cm de profundidad, y el orificio en el medio de una de las caras de 25×25 cm. Si la cámara se utiliza para fotografiar un voraz pollo que mide 18 cm de altura y que está a 1.5 m enfrente de la cámara, ¿qué tan grande es la imagen del ave en la película? ¿Cuál es el aumento de esta cámara?

34.80 ••• Se enfoca un microscopio sobre la superficie superior de una placa de vidrio. En seguida se coloca una segunda placa sobre la primera. Para enfocar la superficie inferior de la segunda placa, es necesario elevar el microscopio 0.780 mm. Para enfocar la superficie superior, es preciso elevarlo otros 2.50 mm. Calcule el índice de refracción de la segunda placa.

34.81 •• ¿Cuál debería ser el índice de refracción de una esfera transparente para que los rayos paraxiales que salen de un objeto infinitamente distante se enfoquen en el vértice de la superficie opuesta al punto de incidencia?

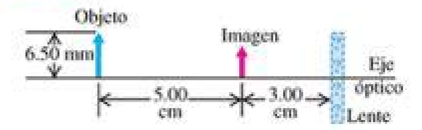
34.82 •• **Una varilla de vidrio.** Se esmerilan y se pulen ambos extremos de una varilla de vidrio con un índice de refracción de 1.60, para formar superficies hemisféricas convexas. En el extremo izquierdo el radio de curvatura es de 6.00 cm, y en el extremo derecho, de 12.0 cm. La longitud de la varilla entre los vértices es de 40.0 cm. Para la superficie del extremo izquierdo, el objeto es una flecha que se encuentra 23.0 cm a la izquierda del vértice de esta superficie. La flecha tiene 1.50 mm de altura y forma un ángulo recto con el eje. *a*) ¿Qué constituye el objeto para la superficie del extremo derecho de la varilla? *b*) ¿Cuál es la distancia de objeto con respecto a esta superficie? *c*) ¿El objeto para

esta superficie es real o virtual? *d*) ¿Cuál es la posición de la imagen final? *e*) ¿La imagen final es real o virtual? ¿Está derecha o invertida con respecto al objeto original? *f*) ¿Cuál es la altura de la imagen final?

34.83 •• La varilla del problema 34.82 se acorta a una distancia de 25.0 cm entre sus vértices; las curvaturas de sus extremos no cambian. Como en el problema 34.82, para la superficie del extremo izquierdo, el objeto es una flecha que se encuentra 23.0 cm a la izquierda del vértice de esta superficie. La flecha tiene 1.50 mm de altura y forma un ángulo recto con el eje. *a*) ¿Cuál es la distancia de objeto con respecto a la superficie del extremo derecho de la varilla? *b*) ¿El objeto de esta superficie es real o virtual? *c*) ¿Cuál es la posición de la imagen final? *d*) ¿La imagen final es real o virtual? ¿Está derecha o invertida con respecto al objeto original? *e*) ¿Cuál es la altura de la imagen final?

34.84 • La figura P34.84 muestra un objeto y su imagen formada mediante una lente delgada. *a*) ¿Cuál es la distancia focal de la lente y qué tipo de lente es (convergente o divergente)? *b*) ¿Cuál es la altura de la imagen? ¿Es real o virtual?

Figura **P34.84**



34.85 • La figura P34.85 ilustra un objeto y su imagen formada mediante una lente delgada. *a*) ¿Cuál es la distancia focal de la lente y qué tipo de lente es (convergente o divergente)? *b*) ¿Cuál es la altura de la imagen? ¿Es real o virtual?

Figura **P34.85**



34.86 ••• A una varilla transparente de 30.0 cm de largo se le hace un corte plano en un extremo. El otro extremo se redondea para formar una superficie hemisférica con un radio de 10.0 cm. Un objeto pequeño se encuentra incrustado dentro de la varilla a lo largo del eje de esta y equidistante de sus extremos, a 15.0 cm del extremo plano y a 15.0 cm del vértice del extremo curvo. Al observar desde el extremo plano de la varilla, la profundidad aparente del objeto es de 9.50 cm con respecto al extremo plano. ¿Cuál es la profundidad aparente vista desde el extremo curvo?

34.87 • BIO **Foco del ojo.** La córnea del ojo tiene un radio de curvatura de aproximadamente 0.50 cm, y el humor acuoso detrás de él tiene un índice de refracción de 1.35. El espesor de la córnea por sí solo es suficientemente pequeño como para despreciar su magnitud. La profundidad del ojo de una persona común es de cerca de 25 mm. *a*) ¿Cuál tendría que ser el radio de curvatura de la córnea para que, por sí sola, pudiera enfocar en la retina la imagen de una montaña distante? Considere que la retina se encuentra en la parte posterior del ojo, opuesta a la córnea. *b*) Si la córnea enfocara la montaña correctamente en la retina como se describió en el inciso *a*), ¿también enfocaría en la retina el texto en la pantalla de una computadora, si esa pantalla estuviera a 25 cm enfrente del ojo? Si no, ¿dónde enfocaría ese texto: enfrente o detrás de la retina? *c*) Si la córnea tiene un radio de curvatura de 5.0 mm aproximadamente, ¿dónde se enfocaría en realidad la montaña? ¿La imagen estaría enfrente o detrás de la retina? ¿Esto nos permite comprender por qué el ojo necesita ayuda de una lente para completar la tarea de enfocar?

34.88 ••• A una varilla transparente de 50.0 cm de largo y con un índice de refracción de 1.60 se le practica un corte plano en el extremo derecho. El extremo izquierdo se redondea para formar una superficie hemisférica con un radio de 15.0 cm. Se coloca un objeto sobre el eje de la varilla a 12.0 cm a la izquierda del vértice del extremo hemisférico. *a*) ¿Cuál es la posición de la imagen final? *b*) ¿Cuál es su aumento?

34.89 ••• Los extremos de una varilla de vidrio con un índice de refracción de 1.55 se esmerilan y se pulen para formar superficies hemisféricas de 6.00 cm de radio. Cuando se coloca un objeto sobre el eje de la varilla, 25.0 cm a la izquierda del extremo izquierdo, la imagen final se forma 65.0 cm a la derecha del extremo derecho. ¿Cuál es la longitud de la varilla medida entre los vértices de las dos superficies hemisféricas?

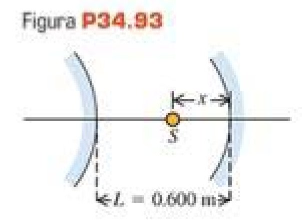
34.90 • Los radios de curvatura de las superficies de una lente convergente delgada de menisco son $R_1 = +12.0$ cm y $R_2 = +28.0$ cm. El índice de refracción es de 1.60. *a*) Calcule la posición y el tamaño de la imagen de un objeto con forma de flecha de 5.00 mm de altura, perpendicular al eje de la lente, 45.0 cm a la izquierda de la lente. *b*) Se coloca una segunda lente convergente, de la misma distancia focal, 3.15 m a la derecha de la primera. Determine la posición y el tamaño de la imagen final. ¿La imagen final está derecha o invertida con respecto al objeto original? *c*) Repita el inciso *b*), pero ahora considere que la segunda lente se encuentra 45.0 cm a la derecha de la primera.

34.91 • Un objeto a la izquierda de una lente se proyecta por medio de esta sobre una pantalla ubicada a 30.0 cm a la derecha de la lente. Cuando la lente se mueve 4.00 cm hacia la derecha, la pantalla debe moverse 4.00 cm hacia la izquierda para volver a enfocar la imagen. Determine la distancia focal de la lente.

34.92 • Un objeto se coloca a 18.0 cm de una pantalla. *a*) ¿En cuáles dos puntos entre el objeto y la pantalla se puede colocar una lente convergente con una distancia focal de 3.00 cm para obtener una imagen en la pantalla? *b*) ¿Cuál es el aumento de la imagen para cada posición de la lente?

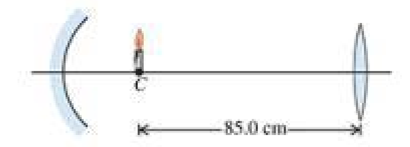
34.93 •• Se colocan sobre un mismo eje óptico un espejo convexo y un espejo cóncavo, separados por una distancia $L = 0.600$ m. La magnitud del radio de curvatura de cada espejo es de 0.360 m. Una fuente de luz se encuentra a una distancia x del espejo cóncavo, como se muestra en la figura P34.93. *a*) ¿Con qué distancia x los rayos de la fuente regresarán a esta, después de reflejarse primero en el espejo convexo y luego en el cóncavo? *b*) Repita el inciso *a*), pero ahora considerando que los rayos se reflejan primero en el espejo cóncavo y después en el convexo.

Figura **P34.93**



34.94 •• Como se muestra en la figura P34.94, la vela está en el centro de curvatura del espejo cóncavo, cuya distancia focal es de 10.0 cm. La lente convergente tiene una distancia focal de 32.0 cm y está 85.0 cm a la derecha de la vela. Se observa la vela mirando a través de la lente desde la derecha. La lente forma dos imágenes de la vela. La primera es producto de la luz que pasa directamente a través de la lente; la segunda, de la luz que se propaga de la vela al espejo, se refleja y luego pasa a través de la lente. *a*) Con respecto a cada una de estas dos imágenes, dibuje un diagrama de rayos principales para localizar la imagen. *b*) Con respecto a cada imagen, responda las siguientes preguntas: **i.** ¿Dónde está la imagen? **ii.** ¿La imagen es real o virtual? **iii.** ¿La imagen está derecha o invertida con respecto al objeto original?

Figura **P34.94**



34.95 ••• Se pule uno de los extremos de una larga varilla de vidrio para darle forma hemisférica convexa. Este vidrio tiene un índice de refracción de 1.55. Cuando se coloca una pequeña hoja de una planta a 20.0 cm enfrente del centro del hemisferio a lo largo del eje óptico, se forma una imagen dentro del vidrio a 9.12 cm de la superficie esférica. ¿Dónde se formaría la imagen si el vidrio ahora estuviera sumergido en agua (índice de refracción: 1.33), pero todo lo demás permaneciera igual?

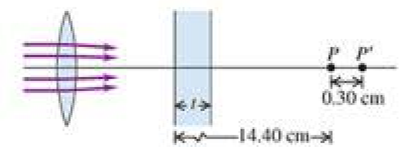
34.96 •• **Dos lentes en contacto.** *a*) Demuestre que, cuando se ponen *en contacto* dos lentes delgadas con distancias focales f_1 y f_2, la distancia focal f de la combinación esta dada por la relación

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}$$

b) Una lente convergente de menisco (véase la figura 34.32*a*) tiene un índice de refracción de 1.55, y los radios de curvatura de sus superficies son de 4.50 y 9.00 cm. La superficie cóncava se coloca hacia arriba y se llena de tetracloruro de carbono (CCl_4) que tiene $n = 1.46$. ¿Cuál es la distancia focal de la combinación de CCl_4 y vidrio?

34.97 ••• Los rayos de una lente convergen hacia una imagen puntual P situada a la derecha de la lente. ¿Qué espesor t debe tener un vidrio con un índice de refracción de 1.60, interpuesto entre la lente y P, para que la imagen se forme en P', 0.30 cm a la derecha de P? En la figura P34.97 se muestra la ubicación tanto del vidrio como de los puntos P y P'.

Figura **P34.97**



34.98 •• **Lente en un líquido.** Las lentes obedecen la ley de Snell: doblan los rayos de luz en cada superficie, en una medida determinada por el índice de refracción de la lente y el índice del medio en el que se encuentra la lente. *a*) La ecuación (34.19) supone que la lente está rodeada de aire. Considere, en cambio, una lente delgada inmersa en un líquido con un índice de refracción $n_{\text{líq}}$. Demuestre que la distancia focal f' viene dada en este caso por la ecuación (34.19) con $n/n_{\text{líq}}$ en vez de n. *b*) Una lente delgada con un índice n tiene una distancia focal f en un vacío. Con base en el resultado del inciso *a*), demuestre que, cuando esta lente se sumerge en un líquido con índice $n_{\text{líq}}$, tiene una nueva distancia focal dada por

$$f' = \left[\frac{n_{\text{líq}}(n-1)}{n - n_{\text{líq}}}\right] f$$

34.99 ••• Cuando se coloca un objeto a la distancia adecuada a la izquierda de cierta lente convergente, la imagen queda enfocada en una pantalla situada 30.0 cm a la derecha de la lente. Ahora se coloca una lente divergente 15.0 cm a la derecha de la lente convergente, y se encuentra que es necesario desplazar la pantalla otros 19.2 cm a la derecha para obtener una imagen nítida. ¿Cuál es la distancia focal de la lente divergente?

34.100 ••• Se dispone un espejo esférico convexo con una distancia focal de 24.0 cm de magnitud 20.0 cm a la izquierda de un espejo plano. Se coloca un objeto de 0.250 cm de altura a medio camino entre la superficie del espejo plano y el vértice del espejo esférico. El espejo esférico forma imágenes múltiples del objeto. ¿Dónde se localizan las dos imágenes del objeto formadas por el espejo esférico que se hallan más próximas a este, y cuál es la altura de cada imagen?

34.101 ••• Una plancha de vidrio de 3.50 cm de espesor, con un índice de refracción de 1.55 y caras planas paralelas, se sostiene con sus caras horizontales y su cara inferior a 6.00 cm arriba de una página impresa. Obtenga la posición de la imagen de la página formada por los rayos que forman un ángulo pequeño con la normal a la plancha.

34.102 •• Una lente delgada biconvexa y simétrica de vidrio, con un índice de refracción de 1.52, tiene una distancia focal en aire de 40.0 cm. La lente cierra herméticamente una abertura en el extremo izquierdo de un tanque lleno de agua. En el extremo derecho del tanque, opuesto a la lente, se encuentra un espejo plano a 90.0 cm de la lente. El índice de refracción del agua es de $\frac{4}{3}$. *a*) Calcule la posición de la imagen que forma el sistema de lente-agua-espejo de un objeto pequeño que se encuentra afuera del tanque, sobre el eje de la lente y a 70.0 cm a la izquierda de esta. *b*) ¿La imagen es real o virtual? *c*) ¿Está derecha o invertida? *d*) Si la altura del objeto fuera de 4.00 mm, ¿cuál sería la altura de la imagen?

34.103 • Su cámara fotográfica tiene una lente con una distancia focal de 35.0 mm y película de 36.0 mm de ancho. Al tomar una fotografía de un velero de 12.0 m de largo, observa que la imagen del bote ocupa solo $\frac{1}{4}$ de la anchura de la película. *a*) ¿A qué distancia está usted del velero? *b*) ¿A qué distancia tendría que colocarse usted para que la imagen del velero ocupe toda la anchura de la película?

34.104 •• BIO **¿Cuál es el objeto más pequeño que podemos ver?** El objeto más pequeño que se puede definir con nuestro ojo está limitado por el tamaño de las células receptoras de luz en la retina. Para que podamos distinguir cualquier detalle en un objeto, su imagen no puede ser más pequeña que una célula individual de la retina. Aunque el tamaño depende del tipo de célula (bastones o cono), un diámetro de unas cuantas micras (μm) es usual, cerca del centro del ojo. Vamos a modelar el ojo como una esfera de 2.50 cm de diámetro con una sola lente delgada en la parte del frente y la retina en la parte posterior, con células receptoras de luz de 5.0 μm de diámetro. *a*) ¿Cuál es el objeto más pequeño que se puede definir en un punto cercano de 25 cm? *b*) ¿Qué ángulo está subtendido por este objeto en el ojo? Exprese su respuesta en unidades de minutos (1° = 60 min) y compare con el valor experimental usual de cerca de 1.0 min. (*Nota:* Hay otras limitaciones, tales como la curvatura de la luz cuando pasa a través de la pupila, pero aquí desprécielas).

34.105 • Tres lentes delgadas, cada una con una distancia focal de 40.0 cm, están alineadas sobre un eje común; la separación entre lentes adyacentes es de 52.0 cm. Calcule la posición de la imagen de un objeto pequeño situado sobre el eje, 80.0 cm a la izquierda de la primera lente.

34.106 •• Una cámara fotográfica cuya lente tiene una distancia focal de 90 mm está enfocada en un objeto situado a 1.30 m de la lente. Para enfocar ahora un objeto que está a 6.50 m de la lente, ¿en cuánto es necesario modificar la distancia entre la lente y la película? Para enfocar el objeto más distante, ¿se debe alejar o acercar la lente a la película?

34.107 •• Al deducir la expresión del aumento angular, ecuación (34.22), se supuso un punto cercano de 25 cm. De hecho, el punto cercano cambia con la edad, como se muestra en la tabla 34.1. Para conseguir un aumento angular de 2.0×, ¿qué distancia focal debe emplear una persona con una edad de *a*) 10 años, *b*) 30 años, *c*) 60 años? *d*) Si una persona de 60 años utiliza la lente que proporciona un $M = 2.0$ a una persona de 10 años, ¿qué aumento angular obtendrá el observador de mayor edad? *e*) ¿Significa su respuesta al inciso *d*) que los observadores de mayor edad pueden ver imágenes más aumentadas que los observadores jóvenes? Explique su respuesta.

34.108 •• **Aumento angular.** Al deducir la ecuación (34.22) del aumento angular de una lente de aumento, se supuso que el objeto se encuentra en el punto focal de la lente de aumento, por lo que la imagen virtual se forma en el infinito. Suponga, en cambio, que se coloca el objeto de modo que la imagen virtual aparezca en el punto cercano de 25 cm de un observador promedio, el punto más próximo en el que este puede enfocar el objeto. *a*) ¿Dónde se debe colocar el objeto para conseguir esto? Exprese su respuesta en términos de la distancia focal f de la lente de aumento. *b*) ¿Qué ángulo θ' subtenderá un objeto de altura y en la posición identificada en el inciso *a*)? *c*) Encuentre el aumento angular M con el objeto en la posición determinada en el inciso *a*). El ángulo θ es el mismo que en la figura 34.51*a*, pues se refiere a la observación del objeto *sin* la lente de aumento. *d*) Si se emplea una lente convexa de $f = +10.0$ cm, ¿cuál es el valor de M con el objeto en la posición

identificada en el inciso *a*)? ¿Cuántas veces más grande es M en este caso, que cuando la imagen se forma en el infinito? *e*) En la descripción de un microscopio compuesto en la sección 34.8, se afirma que, en un instrumento proyectado de manera correcta, la imagen real que forma el objetivo se encuentra *inmediatamente por dentro* del primer punto focal F_1' del ocular. ¿Qué ventajas ofrece el hecho de que el objetivo forme una imagen inmediatamente por dentro de F_1', en comparación con una imagen formada precisamente en F_1'? ¿Qué ocurre si la imagen formada por el objetivo está *inmediatamente por fuera* de F_1'?

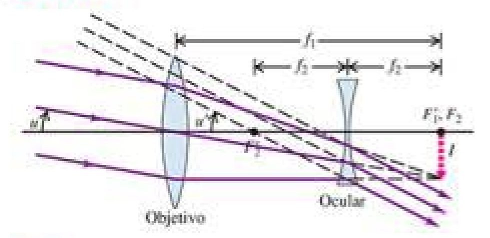
34.109 •• BIO En una forma de cirugía para cataratas, se sustituye el cristalino natural del paciente, que se ha enturbiado, por una lente artificial. Es posible elegir las propiedades refractivas de la lente de repuesto, de modo que el ojo de la persona enfoque los objetos distantes. Pero no existe acomodación, y se necesitan anteojos o lentes de contacto para ver de cerca. ¿Cuál es la potencia, en dioptrías, de las lentes de contacto correctivas que permiten a un individuo que se ha sometido a una cirugía de este tipo enfocar una página de un libro a una distancia de 24 cm?

34.110 •• BIO **Ojo miope.** Cierta persona muy miope es incapaz de enfocar nada que esté a más de 36.0 cm del ojo. Considere el modelo simplificado del ojo que se describe en el ejercicio 34.52. Si el radio de curvatura de la córnea es de 0.75 cm cuando el ojo está enfocando un objeto a 36.0 cm del vértice de la córnea y los índices de refracción son como se describe en el ejercicio 34.52, ¿cuál es la distancia del vértice de la córnea a la retina? ¿Qué indica esto acerca de la forma del ojo miope?

34.111 •• BIO Una persona con un punto cercano de 85 cm, pero excelente visión lejana, normalmente lleva anteojos correctores. Pero los pierde durante un viaje. Por fortuna, tiene su viejo par de repuesto. *a*) Si las lentes del viejo par tienen una potencia de +2.25 dioptrías, ¿cuál es su punto cercano (medido desde el ojo) cuando esté usando el viejo par de anteojos si estos se colocan a 2.0 cm delante de sus ojos? *b*) ¿Cuál sería su punto cercano si en vez de sus anteojos viejos fueran lentes de contacto?

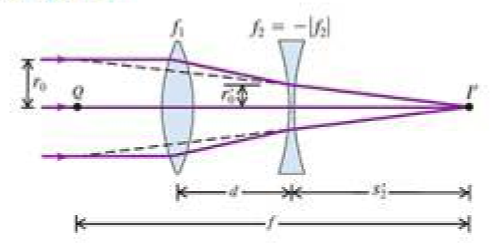
34.112 •• **El telescopio galileano.** La figura P34.112 es un diagrama de un *telescopio galileano*, o *gemelos de teatro*, con el objeto y su imagen final en el infinito. La imagen I sirve como objeto virtual para el ocular. La imagen final es virtual y derecha. *a*) Pruebe que el aumento angular es $M = -f_1/f_2$. *b*) Se va a construir un telescopio galileano con la misma lente objetivo que en el ejercicio 34.65. ¿Cuál debe ser la distancia focal del ocular, para que este telescopio tenga un aumento angular de la misma magnitud que el del ejercicio 34.65? *c*) Compare la longitud de los telescopios.

Figura **P34.112**



34.113 ••• **Distancia focal de una lente *zoom*.** La figura P34.113 muestra una versión simplificada de una lente *zoom*. La lente convergente tiene una distancia focal f_1, y la lente divergente, una distancia focal $f_2 = -|f_2|$. Las dos lentes están separadas por una distancia variable d que siempre es menor que f_1. Asimismo, la magnitud de la distancia focal de la lente divergente satisface la desigualdad $|f_2| > (f_1 - d)$. Para encontrar la distancia focal efectiva de la combinación de lentes, considere un haz de rayos paralelos de radio r_0 que entran en la lente convergente. *a*) Demuestre que el radio del haz de rayos disminuye hasta $r_0' = r_0(f_1 - d)/f_1$, en el punto donde penetra en la lente divergente. *b*) Demuestre que la imagen final I' se forma a una distancia $s_2' = |f_2|(f_1 - d)/(|f_2| - f_1 + d)$ a la derecha de la lente divergente. *c*) Si los rayos que emergen de la lente divergente y alcanzan el punto de imagen final se prolongan hacia atrás, a la izquierda de la lente divergente, terminarán expandiéndose hasta el radio original r_0 en algún punto Q. La distancia de la imagen final I' al punto Q es la *distancia focal efectiva* f de la combinación de lentes; si se sustituyera la combinación por una sola lente de distancia focal f colocada en Q, los rayos paralelos seguirían enfocándose en I'. Demuestre que la distancia focal efectiva es $f = f_1|f_2|/(|f_2| - f_1 + d)$. *d*) Si $f_1 = 12.0$ cm, $f_2 = -18.0$ cm y la separación d es ajustable entre cero y 4.0 cm, determine las distancias focales máxima y mínima de la combinación. ¿Con qué valor de d se tiene $f = 30.0$ cm?

Figura **P34.113**



34.114 • Cierto telescopio de reflexión, construido como se muestra en la figura E34.67, tiene un espejo esférico con un radio de curvatura de 96.0 cm y un ocular con una distancia focal de 1.20 cm. Si la magnitud del aumento angular es de 36 y el objeto se encuentra en el infinito, determine la posición del ocular y la posición y naturaleza (real o virtual) de la imagen final. (*Nota:* $|M|$ *no* es igual a $|f_1|/|f_2|$; por lo tanto, la imagen formada por el ocular *no* está en el infinito).

34.115 • Un microscopio con un objetivo cuya distancia focal es de 8.00 mm, y un ocular con una distancia focal de 7.50 cm, se utiliza para proyectar una imagen sobre una pantalla situada a 2.00 m del ocular. Sea de 18.0 cm la distancia de imagen del objetivo. *a*) ¿Cuál es el aumento lateral de la imagen? *b*) ¿Cuál es la distancia entre el objetivo y el ocular?

PROBLEMAS DE DESAFÍO

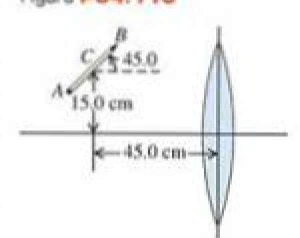
34.116 ••• La *aberración esférica* vuelve borrosa la imagen formada por un espejo esférico. Se debe a que los rayos paralelos que inciden en el espejo, lejos del eje óptico, se enfocan en un punto diferente que los rayos próximos al eje. Por lo regular, este problema se reduce al mínimo utilizando solo el centro del espejo esférico. *a*) Demuestre que, en el caso de un espejo esférico cóncavo, el foco se desplaza hacia el espejo conforme los rayos paralelos avanzan hacia el borde exterior del espejo. (*Sugerencia:* Deduzca una expresión analítica de la distancia del vértice al foco del rayo con respecto a un rayo paralelo en particular. Esta expresión debería darse en términos de **i.** el radio de curvatura R del espejo y **ii.** el ángulo θ entre el rayo incidente y una recta que une el centro de curvatura del espejo y el punto donde el rayo incide en el espejo). *b*) ¿Qué valor de θ provoca un cambio del 2% en la ubicación del foco, en comparación con la ubicación cuando θ es casi cero?

34.117 ••• CALC *a*) Con respecto a una lente de distancia focal f, calcule la distancia mínima posible entre el objeto y su imagen real. *b*) Trace la gráfica de la distancia entre el objeto y la imagen real, en función de la distancia entre el objeto y la lente. ¿Concuerda su gráfica con el resultado obtenido en el inciso *a*)?

34.118 ••• **Objeto en un ángulo.** Se coloca un lápiz de 16.0 cm de largo a un ángulo de 45.0°, con su centro 15.0 cm arriba del eje óptico y a 45.0 cm de una lente con una distancia focal de 20.0 cm, como se muestra en la figura P34.118. (Considere que la figura no está dibujada a escala). Suponga que el diámetro de la lente es suficientemente grande para que la aproximación paraxial sea válida. *a*) ¿Dónde está la imagen del lápiz? (Indique la ubicación de las imágenes de los puntos

A, *B* y *C* del objeto, que se encuentran en el borrador, la punta y el centro del lápiz, respectivamente). *b*) ¿Cuál es la longitud de la imagen (es decir, la distancia entre las imágenes de los puntos *A* y *B*)? *c*) Muestre en un dibujo la orientación de la imagen.

Figura **P34.118**



34.119 •••  **BIO** Las personas con visión normal no pueden enfocar los ojos bajo el agua, si no utilizan una careta o gafas protectoras y hay agua en contacto con sus ojos (véase la pregunta P34.23). *a*) ¿Por qué? *b*) Con base en el modelo simplificado del ojo que se describe en el ejercicio 34.52, ¿qué lente correctiva (especificada con base en su distancia focal medida en aire) se necesitaría para que una persona pudiera enfocar bajo el agua un objeto infinitamente distante? (Tenga cuidado: ¡La distancia focal de una lente bajo el agua *no* es la misma que en el aire! Véase el problema 34.98. Suponga que la lente correctiva tiene un índice de refracción de 1.62 y que la lente se utiliza en anteojos, no en gafas protectoras, por lo que hay agua a ambos lados de la lente. Suponga que los anteojos están a 2.00 cm delante del ojo).

Respuestas

Pregunta inicial del capítulo ?

Una lente de aumento (simple) produce una imagen virtual con un tamaño angular grande que está infinitamente alejada, de manera que usted puede verla enfocada con nitidez teniendo los ojos relajados. (Un cirujano que practique una microcirugía no se sentiría cómodo al tener tensión en sus ojos mientras trabaja). El objeto debería estar en el punto focal de la lente, así que el objeto y la lente están separados una distancia focal.

Preguntas de las secciones

Evalúe su comprensión

34.1 Respuesta: iv. Cuando usted se encuentra a una distancia *s* del espejo, su imagen está a una distancia *s* del otro lado del espejo, y la distancia entre usted y su imagen es de 2*s*. Al acercarse al espejo, la distancia 2*s* cambia dos veces más rápidamente que la distancia *s*; por lo tanto, su imagen se acerca a usted con una rapidez de 2*v*.

34.2 Respuestas: *a*) cóncavo, *b*) ii. Un espejo convexo siempre produce una imagen derecha, pero esa imagen es más pequeña que el objeto (véase la figura 34.16*b*). Por lo tanto, se debe usar un espejo cóncavo. La imagen será derecha y aumentada solo si la distancia del objeto (el rostro) al espejo es menor que la distancia focal del espejo, como en la figura 34.20*d*.

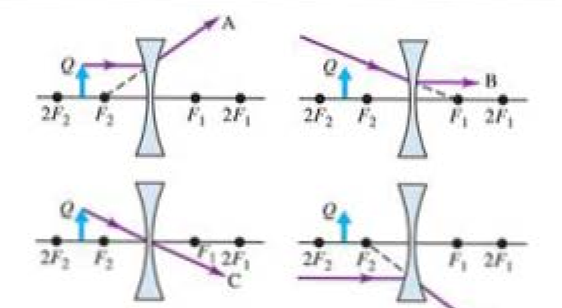
34.3 Respuesta: no El Sol está muy lejos; por lo tanto, la distancia de objeto es prácticamente infinita: $s = \infty$ y $1/s = 0$. El material *a* es aire ($n_a = 1.00$) y el material *b* es agua ($n_b = 1.33$); por ello, la posición de la imagen s' está dada por

$$\frac{n_a}{s} + \frac{n_b}{s'} = \frac{n_b - n_a}{R} \quad \text{o} \quad 0 + \frac{1.33}{s'} = \frac{1.33 - 1.00}{R}$$

$$s' = \frac{1.33}{0.33}R = 4.0R$$

La imagen se formaría a 4.0 radios de gota de la superficie anterior de la gota. Sin embargo, como cada gota es solo una parte de una esfera completa, la distancia de la cara anterior a la posterior de la gota es menor que 2*R*. Los rayos de luz solar nunca alcanzan el punto de imagen, y las gotas no forman una imagen del Sol sobre la hoja. Aunque los rayos no están enfocados en un punto, de cualquier manera están concentrados y pueden dañar la hoja.

34.4 Respuestas: A y C Cuando los rayos A y D se extienden hacia atrás, pasan por el punto focal F_2; así, antes de que pasaran por la lente, eran paralelos al eje óptico. Las figuras muestran que el rayo A emana del punto *Q*, pero el rayo D no. El rayo B es paralelo al eje óptico, por lo que antes de que pasara por la lente, se dirigía hacia el punto focal F_1. De esta manera, no puede llegar desde el punto *Q*. El rayo C pasa por el centro de la lente y, por ende, no se desvía por su pasaje; al trazar el rayo hacia atrás, se observa que emana del punto *Q*.



34.5 Respuesta: iii. El área de la imagen más pequeña del detector CCD significa que el ángulo de visión se ve disminuido por una distancia focal dada. Los objetos individuales forman imágenes del mismo tamaño en cualquier caso; cuando se utiliza una menor área sensible a la luz, menos imágenes se ajustan al área y se estrecha el campo de visión.

34.6 Respuesta: iii. Esta lente tiene el propósito de corregir un tipo de astigmatismo. A lo largo del eje vertical, la lente está configurada como una lente convergente, y a lo largo del eje horizontal, como lente divergente. Por lo tanto, el ojo es hipermétrope (véase la figura 34.46) con respecto a objetos orientados verticalmente, pero miope con respecto a objetos orientados en sentido horizontal (véase la figura 34.47). Sin corrección, el ojo enfoca los objetos verticales detrás de la retina, y los objetos horizontales, delante de ella.

34.7 Respuesta: ii. El objeto debe sostenerse en el punto focal, que se aleja al doble si se duplica la distancia focal *f*. La ecuación (24.22) indica que el aumento angular *M* es inversamente proporcional a *f*, así que duplicar la distancia focal hace que $M\frac{1}{2}$ sea más grande. Para mejorar el aumento, usted debería usar una lente de aumento con una distancia focal *más corta*.

34.8 Respuesta: i. La lente objetivo de un microscopio se diseña para aumentar imágenes de objetos pequeños, así que el valor absoluto de su aumento lateral *m* es mayor que 1. En cambio, la lente objetivo de un telescopio de refracción se diseña para hacer imágenes *reducidas*. Por ejemplo, la Luna tiene miles de kilómetros de diámetro, pero su imagen se puede ajustar a un detector CCD de unos cuantos centímetros de diámetro. Así, $|m|$ es mucho menor que 1 para el telescopio de refracción. (En ambos casos, *m* es negativo porque el objetivo forma una imagen invertida, que es la razón de que la pregunta requiera el valor absoluto de *m*).

Problema práctico

Respuestas: *a*) 29.9 cm a la izquierda de la copa.
b) 3.73 cm a la derecha de la copa.

35

INTERFERENCIA



? El agua jabonosa es incolora, pero cuando forma burbujas presenta colores intensos. ¿Cómo es que el espesor de las paredes de la burbuja determina los colores particulares que aparecen?

OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

Al estudiar este capítulo, usted aprenderá:

- Qué sucede cuando dos ondas se combinan, o interfieren, en el espacio.
- A interpretar el patrón formado por la interferencia de dos ondas luminosas coherentes.
- A calcular la intensidad en varios puntos de un patrón de interferencia.
- Cómo ocurre la interferencia cuando la luz se refleja en las dos superficies de una película delgada.
- La forma en que la interferencia hace posible la medición de distancias extremadamente pequeñas.

Una fea mancha negra de aceite en el pavimento se convierte en algo hermoso después de la lluvia, cuando el aceite refleja un arcoíris de colores. También se observan reflejos multicolores en las superficies de las burbujas de jabón y de los discos compactos. ¿Cómo es posible que objetos sin color produzcan estos llamativos colores?

En el estudio de las lentes, los espejos y los instrumentos ópticos, se usa el modelo de la *óptica geométrica*, en el que la luz se representa mediante *rayos*, líneas rectas que se desvían en una superficie reflectante o refractante. Pero muchos aspectos del comportamiento de la luz *no pueden* comprenderse aplicando el concepto de rayos. Ya hemos aprendido que la luz es, en esencia, una *onda*, y en ciertas situaciones tenemos que considerar de manera explícita sus propiedades ondulatorias. Si dos o más ondas de luz de la misma frecuencia se superponen en un punto, el efecto total depende de las *fases* de las ondas así como de su amplitud. Los patrones resultantes de luz son consecuencia de la naturaleza *ondulatoria* de la luz y no es posible entenderlos sobre la base de los rayos. Los efectos ópticos que dependen de la naturaleza ondulatoria de la luz se estudian en el ámbito de la **óptica física**.

En este capítulo veremos los fenómenos de *interferencia* que ocurren cuando se combinan dos ondas. Los colores observados en las películas de aceite y las burbujas de jabón son el resultado de la interferencia entre la luz reflejada en las superficies frontal y posterior de una capa delgada de aceite o una solución jabonosa. Los efectos que ocurren cuando están presentes *muchas* fuentes de ondas se conocen como fenómenos de *difracción*, y los estudiaremos en el capítulo 36. En ese capítulo veremos que los efectos de difracción ocurren siempre que una onda pasa a través de una abertura o alrededor de un obstáculo. Son importantes en las aplicaciones prácticas de la óptica física, como las rejillas de difracción, la difracción de rayos x y la holografía.

Si bien la luz es nuestro objetivo principal, la interferencia y la difracción ocurren con ondas de *cualquier* clase. Conforme avancemos, veremos aplicaciones de otros tipos de ondas, como las sonoras y las que se forman en el agua.

35.1 Interferencia y fuentes coherentes

Como vimos en el capítulo 15 (vol. 1), el término **interferencia** se refiere a cualquier situación en la que dos o más ondas se superponen en el espacio. Cuando esto ocurre, la onda total en cualquier punto y en cualquier instante está regida por el **principio de superposición**, que presentamos en la sección 15.6 en el contexto de ondas en una cuerda. Este principio también se aplica a las ondas electromagnéticas y es el más importante de toda la óptica física. El principio de superposición establece lo siguiente:

Cuando dos o más ondas se superponen, el desplazamiento resultante en cualquier punto y en cualquier instante se encuentra sumando los desplazamientos instantáneos que producirían en el punto las ondas individuales como si cada una se presentara sola.

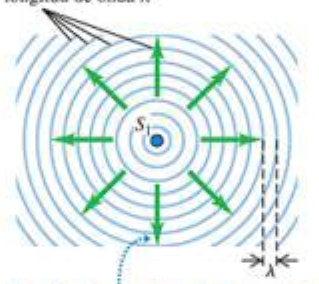
(Este principio podría no aplicarse en ciertas situaciones especiales, como en la propagación de las ondas electromagnéticas en un cristal. El análisis de estas situaciones se encuentra más allá de nuestro alcance).

El término "desplazamiento" se usa en un sentido general. Cuando se trata de ondas en la superficie de un líquido, se refiere al desplazamiento real de la superficie, hacia arriba o hacia abajo de su nivel normal. En el caso de las ondas sonoras, el término se refiere a un exceso o una deficiencia de presión. En el caso de las ondas electromagnéticas, por lo general se refiere a una componente específica del campo eléctrico o magnético.

Interferencia en dos o tres dimensiones

Ya hemos estudiado un caso importante de interferencia, en el que dos ondas idénticas que se propagan en sentidos opuestos se combinan y producen una *onda estacionaria*. En los capítulos 15 y 16 (vol. 1) vimos esto en el caso de las ondas transversales en una cuerda y de las ondas longitudinales en un fluido que llena un tubo; en la sección 32.5 describimos el mismo fenómeno en el caso de las ondas electromagnéticas. En todas estas situaciones, las ondas se propagan a lo largo de un solo eje, ya sea a lo largo de una cuerda, de un tubo lleno de fluido, o a lo largo de la dirección de propagación de una onda electromagnética plana. Pero las ondas luminosas pueden viajar (y de hecho viajan) en *dos* o *tres* dimensiones, igual que cualquier tipo de onda que se propaga en un medio en dos o tres dimensiones. En esta sección veremos lo que sucede cuando se combinan ondas que se propagan en dos o tres dimensiones desde un par de fuentes de onda idénticas.

35.1 Una "instantánea" de ondas sinusoidales con frecuencia f y longitud de onda λ que se propagan en todas direcciones desde una fuente S_1.



Los efectos de la interferencia se ven con más facilidad cuando se combinan ondas *sinusoidales* de una sola frecuencia f y longitud de onda λ. La figura 35.1 muestra una "instantánea" de una fuente *única* S_1 de ondas sinusoidales y algunos de los frentes de onda producidos por ella. La figura solo ilustra los frentes de onda que corresponden a las *crestas*, por lo que la separación entre frentes de onda sucesivos es de una longitud de onda. El material que rodea a S_1 es uniforme, de manera que la rapidez de la onda es la misma en todas direcciones y no hay refracción (y, por lo tanto, los frentes de onda no presentan ningún doblez). Si las ondas son bidimensionales, como las que se presentan en la superficie de un líquido, los círculos de la figura 35.1 representan frentes de onda circulares; si las ondas se propagan en tres dimensiones, los círculos representan frentes de onda esféricos que se propagan desde S_1.

En óptica, las ondas sinusoidales son características de la **luz monocromática** (la de un solo color). Si bien es muy fácil generar ondas de agua o sonoras de una sola frecuencia, las fuentes comunes de luz *no* emiten luz monocromática (de una sola frecuencia). Por ejemplo, las bombillas incandescentes y las flamas emiten una distribución continua de longitudes de onda. Por el momento, la fuente que más se acerca a ser monocromática de entre todas las que se dispone actualmente es el *láser*. Un ejemplo es el láser de helio-neón, que emite luz roja de 623.8 nm en un intervalo de longitud de onda de ± 0.000001 nm, o alrededor de una parte en 10^9. Cuando estudiemos los efectos de la interferencia y la difracción en este capítulo y el siguiente, supondremos que trabajamos con ondas monocromáticas (a menos que se especifique otra cosa).

Interferencia constructiva y destructiva

En la figura 35.2*a* se muestran dos fuentes idénticas de ondas monocromáticas, S_1 y S_2. Ambas producen ondas de la misma amplitud y la misma longitud de onda λ. Además,

las dos fuentes están permanentemente *en fase*; vibran al unísono. Esas fuentes podrían ser dos altavoces alimentados por el mismo amplificador, dos antenas de radio alimentadas por el mismo transmisor o dos pequeñas ranuras en una pantalla opaca, iluminada por la misma fuente de luz monocromática. Veremos que si no hubiera una relación de fase constante entre ambas fuentes, los fenómenos que vamos a estudiar no ocurrirían. Se dice que dos fuentes monocromáticas de la misma frecuencia y con una relación de fase constante definida (no necesariamente en fase) son **coherentes**. También se utiliza el término *ondas coherentes* (o, en el caso de las ondas luminosas, *luz coherente*) para referirse a las ondas emitidas por dos fuentes de ese tipo.

Si las ondas emitidas por las dos fuentes coherentes son *transversales*, como las ondas electromagnéticas, entonces también supondremos que las perturbaciones ondulatorias producidas por ambas fuentes tienen la misma *polarización* (es decir, se encuentran sobre la misma línea). Por ejemplo, en la figura 35.2*a*, las fuentes S_1 y S_2 podrían ser dos antenas de radio en forma de varillas largas orientadas en forma paralela al eje z (perpendicular al plano de la figura); en cualquier punto del plano xy las ondas producidas por las dos antenas tienen campos $\vec{E}$ con solo una componente z. Por eso, para describir cada onda solamente se necesita una función escalar; esto hace que el análisis sea mucho más fácil.

En la figura 35.2*a* colocamos las dos fuentes de igual amplitud, igual longitud de onda y (si las sondas son transversales) la misma polarización a lo largo del eje y, equidistantes del origen. Considere un punto a en el eje x. Por simetría, las dos distancias de S_1 a a y de S_2 a a son *iguales*, de manera que las ondas procedentes de las dos fuentes requieren tiempos iguales para viajar a a. Así, las ondas que salen en fase de S_1 y S_2 llegan en fase a a. Las dos ondas se suman y la amplitud total en a es el *doble* de la amplitud de cada onda individual. Esto se cumple para *cualquier* punto que se localice sobre el eje x.

De manera similar, la distancia de S_2 al punto b es exactamente dos longitudes de onda *mayor* que la distancia de S_1 a b. Una cresta de onda de S_1 llega a b exactamente dos ciclos antes que una cresta emitida al mismo tiempo en S_2, y de nuevo las dos ondas arriban en fase. Igual que en el punto a, la amplitud total es la suma de las amplitudes de las ondas de S_1 y S_2.

En general, cuando las ondas de dos o más fuentes llegan *en fase* a un punto, se refuerzan entre sí: la amplitud de la onda resultante es la *suma* de las amplitudes de las ondas individuales. Esto se llama **interferencia constructiva** (figura 35.2*b*). Sea r_1 la distancia que hay entre S_1 y cualquier punto P, y r_2 la distancia que hay entre S_2 y P. Para que en P ocurra la interferencia constructiva, la diferencia de las trayectorias $r_2 - r_1$ para las dos fuentes debe ser un múltiplo entero de la longitud de onda λ:

$$r_2 - r_1 = m\lambda \qquad (m = 0, \pm1, \pm2, \pm3, \ldots) \qquad \text{(interferencia constructiva, fuentes en fase)} \qquad (35.1)$$

En la figura 35.2*a*, los puntos a y b satisfacen la ecuación (35.1) con $m = 0$ y $m = +2$, respectivamente.

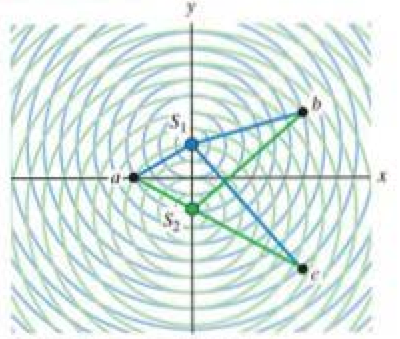
Algo diferente ocurre en el punto c en la figura 35.2*a*, donde la diferencia de trayectorias $r_2 - r_1 = -2.50\lambda$ tiene *la mitad de un número entero* de longitudes de onda. Las ondas provenientes de las dos fuentes llegan al punto c exactamente medio ciclo fuera de fase. La cresta de una onda llega al mismo tiempo que una cresta invertida (un "valle") de la otra onda (figura 35.2*c*). La amplitud resultante es la *diferencia* entre las dos amplitudes individuales. Si estas son iguales, entonces la amplitud total ¡es igual a *cero*! Esta cancelación o anulación parcial de las ondas individuales recibe el nombre de **interferencia destructiva**. La condición para que haya interferencia destructiva en la situación que se ilustra en la figura 35.2*a* es

$$r_2 - r_1 = \left(m + \tfrac{1}{2}\right)\lambda \quad (m = 0, \pm1, \pm2, \pm3, \ldots) \quad \text{(interferencia destructiva, fuentes en fase)} \qquad (35.2)$$

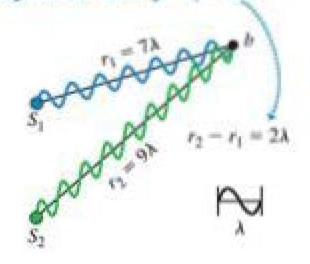
La diferencia de trayectorias en c en la figura 35.2*a* satisface la ecuación (35.2) con $m = -3$.

35.2 *a*) Una "instantánea" de ondas sinusoidales que se propagan a partir de dos fuentes coherentes S_1 y S_2. La interferencia constructiva ocurre en el punto a (equidistante de ambas fuentes) y *b*) en el punto b. *c*) En el punto c hay interferencia destructiva.

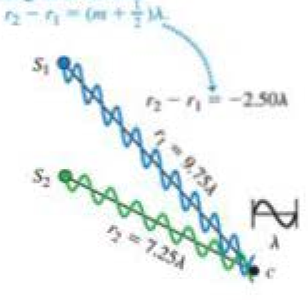
a) Dos fuentes de onda coherentes separadas por una distancia 4λ



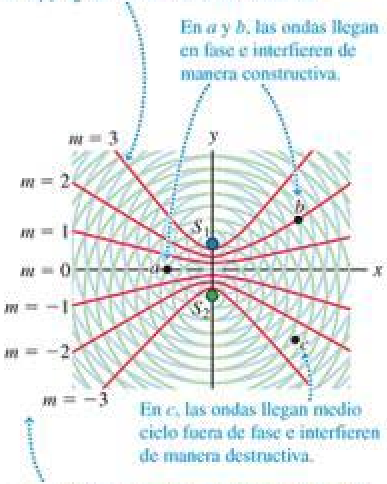
b) Condiciones para la interferencia constructiva: las ondas interfieren en forma constructiva si las longitudes de sus trayectorias difieren un número entero de longitudes de onda: $r_2 - r_1 = m\lambda$.



c) Condiciones para la interferencia destructiva: las ondas interfieren en forma destructiva si las longitudes de sus trayectorias difieren por un número semientero de longitudes de onda: $r_2 - r_1 = (m + \frac{1}{2})\lambda$.



35.3 Lo mismo que en la figura 35.2*a*, pero con curvas antinodales (curvas de amplitud máxima) en color rojo superpuestas. Todos los puntos en cada curva satisfacen la ecuación (35.1) con el valor de m que se indica. Las curvas nodales (que no se muestran) se encuentran entre cada par adyacente de curvas antinodales.



La figura 35.3 ilustra la misma situación que la figura 35.2*a*, pero con curvas rojas que señalan todos los puntos en donde ocurre interferencia *constructiva*. En cada curva, la diferencia de trayectorias $r_2 - r_1$ es igual a la longitud de onda multiplicada por un entero m, como en la ecuación (35.1). Estas curvas se llaman **curvas antinodales**, y son la analogía directa de los *antinodos* de los patrones de ondas estacionarias descritos en los capítulos 15 y 16 (vol. 1) y la sección 32.5. En una onda estacionaria formada por la interferencia entre ondas que se propagan en sentidos opuestos, los antinodos son puntos en los que la amplitud es máxima; del mismo modo, la amplitud de la onda en la situación ilustrada en la figura 35.3 es máxima a lo largo de las curvas antinodales. En esa figura no aparecen las **curvas nodales**, que son aquellas que denotan puntos en los que ocurre interferencia *destructiva*, de acuerdo con la ecuación (35.2); estas son análogas a los *nodos* en un patrón de onda estacionaria. En la figura 35.3, entre dos curvas antinodales adyacentes se presenta una curva nodal; una de estas curvas, que corresponde a $r_2 - r_1 = -2.50\lambda$, pasa por el punto c.

En ciertos casos, como el de dos altavoces o dos antenas transmisoras de radio, el patrón de interferencia es tridimensional. Imagine que hacemos girar las curvas de color de la figura 35.3 en torno al eje y; en este caso, la interferencia constructiva máxima ocurre en todos los puntos situados sobre las superficies de revolución resultantes.

CUIDADO **Los patrones de interferencia no son ondas estacionarias** Los patrones de interferencia en las figuras 35.2*a* y 35.3 *no* son ondas estacionarias, aunque tienen algunas similitudes con los patrones de ondas estacionarias descritos en los capítulos 15 y 16 (vol. 1) y la sección 32.5. En una onda estacionaria la interferencia ocurre entre dos ondas que se propagan en sentidos opuestos; *no* hay flujo de energía neto en ninguna dirección (la energía en la onda queda "estacionaria"). En las situaciones mostradas en las figuras 35.2*a* y 35.3 también hay un patrón estacionario de curvas nodales y antinodales, pero hay un flujo neto de energía *hacia afuera* de las dos fuentes. Todo lo que hace esa interferencia es "canalizar" el flujo de energía de manera que sea máximo a lo largo de las curvas antinodales, y mínimo a lo largo de las curvas nodales.

Para que se cumplan las ecuaciones (35.1) y (35.2), las dos fuentes deben tener la misma longitud de onda y *siempre* deben estar en fase. Estas condiciones son fáciles de satisfacer para las ondas sonoras. Pero con las ondas *luminosas* no hay forma práctica de lograr una relación de fase constante (coherencia) con dos fuentes independientes. Esto se debe al modo en que se emite la luz. En las fuentes ordinarias de luz, los átomos obtienen un exceso de energía por la agitación térmica o por el impacto con electrones acelerados. Un átomo "excitado" de ese modo comienza a radiar energía y continúa así hasta que pierde toda la energía posible, por lo común en un tiempo del orden de 10^{-8} s. Los numerosos átomos en una fuente radian por lo general en una relación de fase no sincronizada y aleatoria, y la luz que se emite desde *dos* fuentes como esta no tiene relación de fase definida.

Sin embargo, la luz procedente de una sola fuente se puede dividir de manera que partes de ella emerjan de dos o más regiones del espacio formando dos o más *fuentes secundarias*. Entonces, cualquier cambio de fase aleatorio en la fuente afecta estas fuentes secundarias por igual y no cambia sus fases *relativas*.

La característica distintiva de la luz de un *láser* es que la emisión de luz de muchos átomos está sincronizada en cuanto a frecuencia y fase. Como resultado, los cambios de fase aleatorios que mencionamos antes ocurren con mucho menor frecuencia. Las relaciones de fase definidas se conservan a lo largo de longitudes proporcionalmente mucho mayores en el haz, y la luz láser es bastante más coherente que la luz ordinaria.

Evalúe su comprensión de la sección 35.1 Considere un punto en la figura 35.3 sobre la parte positiva del eje y arriba de S_1. ¿El punto está sobre **i.** una curva antinodal; **ii.** una curva nodal, o **iii.** ninguna de las anteriores? (*Sugerencia:* Considere que la distancia entre S_1 y S_2 es 4λ).



35.2 Interferencia de la luz procedente de dos fuentes

El patrón de interferencia producido por dos fuentes coherentes de ondas de *agua* de la misma longitud de onda se aprecia fácilmente en un tanque de olas pequeñas con una capa de agua poco profunda (figura 35.4). Este patrón no es visible directamente cuando

la interferencia ocurre entre ondas de *luz*, ya que no es posible ver la luz que viaja a través de un medio uniforme. (Un rayo de luz del atardecer que entra a una habitación se hace visible gracias a la dispersión que generan las partículas de polvo en el aire).

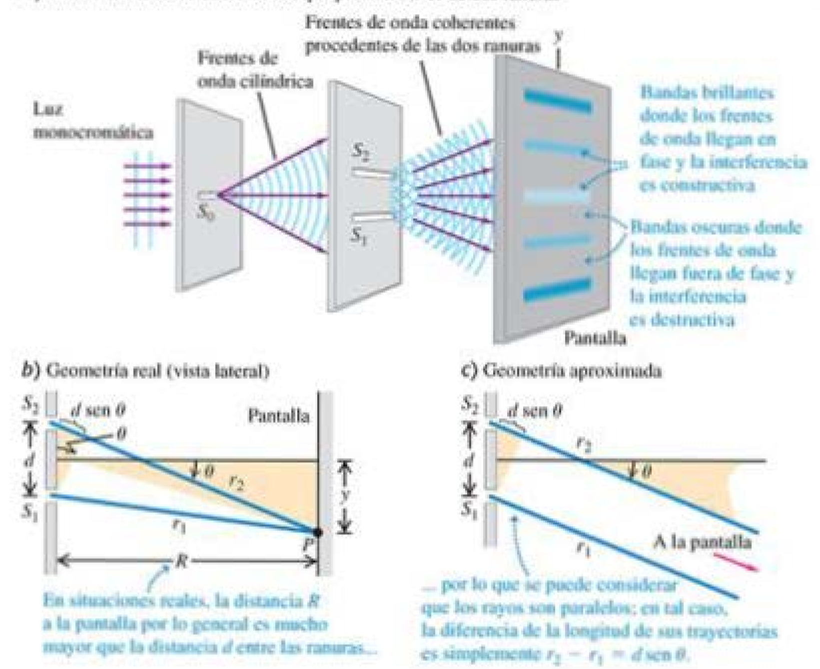
Uno de los primeros experimentos cuantitativos para poner de manifiesto la interferencia de la luz de dos fuentes fue realizado por el científico inglés Thomas Young en 1800. En este capítulo y otros posteriores haremos referencia varias veces a ese experimento, así que es importante entenderlo en detalle. En la figura 35.5*a* se muestra en perspectiva el aparato de Young. Una fuente (que no se muestra) emite luz monocromática; sin embargo, esta luz no es adecuada para usarla en un experimento de interferencia porque las emisiones desde diferentes partes de una fuente ordinaria no están sincronizadas. Para remediar esto, se dirige la luz a una pantalla que tiene una ranura angosta, S_0, de 1 μm más o menos de ancho. La luz que sale de la ranura proviene solo de una pequeña región de la fuente luminosa, de manera que la ranura S_0 se comporta de manera muy parecida a la fuente idealizada que se ilustra en la figura 35.1. (En versiones modernas del experimento se utiliza un láser como fuente de luz coherente, por lo que no se necesita la ranura S_0). La luz que sale de S_0 ilumina una pantalla que tiene otras dos ranuras S_1 y S_2, cada una con un ancho aproximado de 1 μm y separadas por una distancia de algunas decenas o centenas de micrómetros. A partir de S_0 se propagan frentes de onda cilíndricos que llegan a S_1 y S_2 *en fase* porque recorren distancias iguales desde S_0. Por lo tanto, las ondas que *emergen* de las ranuras S_1 y S_2 también están en fase siempre, por lo que S_1 y S_2 son fuentes *coherentes*. La interferencia de las ondas de S_1 y S_2 genera un patrón en el espacio como el que aparece a la derecha de las fuentes en las figuras 35.2*a* y 35.3.

Para visualizar el patrón de interferencia, se coloca una pantalla de manera que la luz procedente de S_1 y S_2 incida sobre ella (figura 35.5*b*). La pantalla se iluminará con intensidad máxima en los puntos P en los que las ondas luminosas procedentes de las ranuras interfieren constructivamente, y será más oscura en los puntos donde la interferencia es destructiva.

Para simplificar el análisis del experimento de Young, suponemos que la distancia R de las ranuras a la pantalla es tan grande en comparación con la distancia d entre las ranuras, que las líneas de S_1 y S_2 a P son casi paralelas, como se aprecia en la figura 35.5*c*. Por lo general, este es el caso para experimentos con luz; es común que la separación entre las ranuras sea de unos cuantos milímetros, mientras que la pantalla está a un metro o más. Entonces, la diferencia de la longitud de las trayectorias está dada por



35.4 Los conceptos de interferencia constructiva y destructiva se aplican tanto a estas ondas en el agua como a las ondas luminosas y sonoras.



35.5 *a*) Experimento de Young para mostrar la interferencia de la luz que pasa por dos ranuras. En la pantalla aparece un patrón de áreas brillantes y oscuras (véase la figura 35.6). *b*) Análisis geométrico del experimento de Young. Para el caso que se ilustra, $r_2 > r_1$ y tanto y como θ son positivos. Si el punto P estuviera en el otro lado del centro de la pantalla, $r_2 < r_1$ y tanto y como θ serían negativos. *c*) Geometría aproximada cuando la distancia R a la pantalla es mucho mayor que la distancia d entre las ranuras.



PhET: Wave Interference
ActivPhysics 16.1: Two-Source Interference: Introduction
ActivPhysics 16.2: Two-Source Interference: Qualitative Questions
ActivPhysics 16.3: Two-Source Interference: Problems

$$r_2 - r_1 = d \operatorname{sen} \theta \qquad (35.3)$$

donde θ es el ángulo entre una línea desde las ranuras a la pantalla (en color azul, en la figura 35.5*c*) y la normal al plano de las ranuras (se ilustra con una línea delgada de color negro).

Interferencia constructiva y destructiva con dos ranuras

En la sección 35.1 vimos que la interferencia constructiva (reforzamiento) ocurre en aquellos puntos donde la diferencia de las trayectorias es un número entero de longitudes de onda, $m\lambda$, donde $m = 0, \pm1, \pm2, \pm3, \ldots$ Por lo tanto, las regiones brillantes en la pantalla de la figura 35.5*a* se presentan en ángulos θ en los que

$$d \operatorname{sen} \theta = m\lambda \qquad (m = 0, \pm1, \pm2, \ldots) \qquad \text{(interferencia constructiva, dos ranuras)} \qquad (35.4)$$

De manera similar ocurre la interferencia destructiva (cancelación) que forma las regiones oscuras en la pantalla en los puntos para los que la diferencia de las trayectorias es un número semientero de longitudes de onda, $\left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda$:

$$d \operatorname{sen} \theta = \left(m + \tfrac{1}{2}\right)\lambda \qquad (m = 0, \pm1, \pm2, \ldots) \qquad \text{(interferencia destructiva, dos ranuras)} \qquad (35.5)$$

35.6 Fotografía de las franjas de interferencia que se producen sobre la pantalla del experimento de Young de la doble ranura.

m (regiones brillantes con interferencia constructiva) — $m + 1/2$ (regiones oscuras con interferencia destructiva)

5, 4, 3, 2, 1, 0, −1, −2, −3, −4, −5 — 11/2, 9/2, 7/2, 5/2, 3/2, 1/2, −1/2, −3/2, −5/2, −7/2, −9/2, −11/2

Así, el patrón en la pantalla de las figuras 35.5*a* y 35.5*b* es una sucesión de bandas brillantes y oscuras, o **franjas de interferencia**, paralelas a las ranuras S_1 y S_2. En la figura 35.6 se muestra una fotografía de ese patrón. El centro del patrón es una banda brillante que corresponde a $m = 0$ en la ecuación (35.4); este punto de la pantalla es equidistante a las dos ranuras.

Es posible obtener una expresión para las posiciones de los centros de las bandas brillantes en la pantalla. En la figura 35.5*b*, y está medida desde el centro del patrón y corresponde a la distancia desde el centro de la figura 35.6. Sea y_m la distancia entre el centro del patrón ($\theta = 0$) al centro de la m-ésima banda brillante. Sea θ_m el valor correspondiente de θ; así que,

$$y_m = R \tan \theta_m$$

En experimentos como este, las distancias y_m a menudo son mucho más pequeñas que la distancia R entre las ranuras y la pantalla. Como θ_m es muy pequeño, $\tan \theta_m$ es casi igual a $\operatorname{sen} \theta_m$, y

$$y_m = R \operatorname{sen} \theta_m$$

Al combinar esto con la ecuación (35.4) se obtiene que *solamente para ángulos pequeños*,

$$y_m = R\frac{m\lambda}{d} \qquad \text{(interferencia constructiva en el experimento de Young)} \qquad (35.6)$$

Es posible medir R y d, así como las posiciones y_m de las franjas brillantes, por lo que este experimento permite una medición directa de la longitud de onda λ. El experimento de Young fue, de hecho, la primera medición directa de las longitudes de onda de la luz.

CUIDADO **La ecuación (35.6) solo es válida para ángulos pequeños** Si bien las ecuaciones (35.4) y (35.5) son válidas para cualquier ángulo, la (35.6) solamente es válida para ángulos *pequeños*. *Solo* puede usarse si la distancia R entre las ranuras y la pantalla es mucho mayor que la separación d entre las ranuras y si R es mucho más grande que la distancia y_m desde el centro del patrón de interferencia a la m-ésima franja brillante.

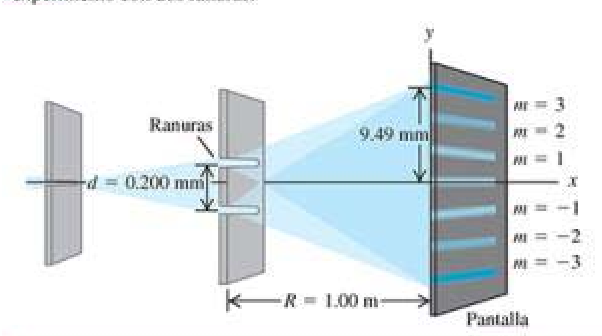
La distancia entre bandas brillantes adyacentes en el patrón es *inversamente* proporcional a la distancia d entre las ranuras. Cuanto más cerca estén las ranuras, más disperso será el patrón. Cuando las ranuras están muy separadas, las bandas del patrón están más próximas unas de otras.

Aunque hemos descrito el experimento realizado por Young con luz visible, los resultados dados en las ecuaciones (35.4) y (35.5) son válidos para *cualquier* tipo de onda, siempre y cuando la onda resultante de las dos fuentes coherentes se ubique en un punto que esté muy alejado en comparación con la separación d.

Ejemplo 35.1 Interferencia con dos ranuras



La figura 35.7 muestra un experimento de interferencia con dos ranuras separadas por una distancia de 0.200 mm, y la pantalla está a 1.00 m de las ranuras. La franja brillante $m = 3$ de la figura está a 9.49 mm de la franja central. Calcule la longitud de onda de la luz utilizada.



35.7 Medición de la longitud de onda de la luz a partir de un experimento con dos ranuras.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: La incógnita en este problema de interferencia con dos ranuras es la longitud de onda λ. Nos dan la separación de las ranuras $d = 0.200$ mm, la distancia de las ranuras a la pantalla $R = 1.00$ m y la distancia $y_3 = 9.49$ mm sobre la pantalla desde el centro del patrón de interferencia a la franja brillante $m = 3$. Se puede usar la ecuación (35.6) para calcular λ, ya que el valor de R es mucho mayor que los valores de d o y_3.

EJECUTAR: Se despeja λ de la ecuación (35.6) para el caso $m = 3$:

$$\lambda = \frac{y_m d}{mR} = \frac{(9.49 \times 10^{-3}\ \text{m})(0.200 \times 10^{-3}\ \text{m})}{(3)(1.00\ \text{m})}$$
$$= 633 \times 10^{-9}\ \text{m} = 633\ \text{nm}$$

EVALUAR: Esta franja brillante también podría corresponder a $m = -3$. ¿Puede usted demostrar que esto da el mismo resultado para λ?

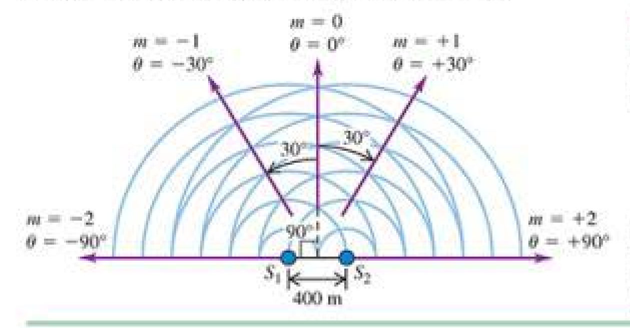
Ejemplo 35.2 Patrón de transmisión de una estación de radio



A menudo se desea emitir la mayor parte de la energía de un transmisor de radio en direcciones específicas en lugar de una transmisión uniforme en todas direcciones. Con frecuencia se usan pares o filas de antenas para producir el patrón de emisión deseado. Por ejemplo, considere dos antenas verticales idénticas separadas una distancia de 400 m, operando a 1500 kHz = 1.5×10^6 Hz (cerca del extremo superior de la banda de difusión de AM) y que oscilan en fase. A distancias mucho mayores que 400 m, ¿en qué direcciones es máxima la intensidad de las dos antenas?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Las antenas que se ilustran en la figura 35.8 corresponden a las fuentes S_1 y S_2 de la figura 35.5. Por lo tanto, se pueden aplicar a este problema las ideas de la interferencia con dos ranuras. Como la onda resultante es detectada a distancias mucho mayores que $d = 400$ m, se puede usar la ecuación (35.4) para dar las direcciones de la intensidad máxima, los valores de θ para los que la diferencia de las trayectorias es igual a cero o un número entero de longitudes de onda.



35.8 Dos antenas de transmisión de radio en fase. Las flechas color púrpura indican las direcciones de máxima intensidad. No se indican las ondas que se emiten hacia la mitad inferior de la figura.

EJECUTAR: La longitud de onda es $\lambda = c/f = 200$ m. De acuerdo con la ecuación (35.4), con $m = 0, \pm1$ y ±2, la intensidad máxima está dada por

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{m\lambda}{d} = \frac{m(200\ \text{m})}{400\ \text{m}} = \frac{m}{2} \qquad \theta = 0,\ \pm30°,\ \pm90°$$

En este ejemplo, los valores de m mayores que 2 o menores que -2 dan valores de sen θ mayores que 1 o menores que -1, lo cual es imposible. *No* hay una dirección para la que la diferencia de trayectorias sea de tres o más longitudes de onda. Por consiguiente, en este ejemplo los valores de m de ±3 o más allá de estas cifras carecen de significado.

EVALUAR: Podemos comprobar el resultado calculando los ángulos para la intensidad *mínima* usando la ecuación (35.5). Debe haber un mínimo de intensidad entre cada par de máximos de intensidad, tal como en la figura 35.6. Según la ecuación (35.5) con $m = -2, -1, 0$ y 1:

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{(m + \frac{1}{2})\lambda}{d} = \frac{m + \frac{1}{2}}{2} \qquad \theta = \pm14.5°,\ \pm48.6°$$

Estos ángulos están entre los ángulos correspondientes a máximos de intensidad, como debe ser. Los ángulos no son pequeños, de modo que los ángulos correspondientes a los mínimos *no* están exactamente en el punto medio entre los ángulos correspondientes a los máximos.

Evalúe su comprensión de la sección 35.2 Se dirige un láser de longitud de onda variable (cuya longitud de onda se ajusta mediante una perilla) a un par de ranuras muy cercanas entre sí. La luz que sale de las dos ranuras genera un patrón de interferencia sobre una pantalla, como el de la figura 35.6. Si se ajusta la longitud de onda de manera que la luz láser cambie de roja a azul, ¿cómo cambiará la distancia de separación entre las franjas brillantes? **i.** Aumenta; **ii.** disminuye; **iii.** no cambia; **iv.** no hay suficiente información para saberlo.



35.3 Intensidad en los patrones de interferencia

En la sección 35.2 aprendimos a determinar las posiciones de la intensidad máxima y mínima en un patrón de interferencia de dos fuentes. Ahora veremos cómo obtener la intensidad en *cualquier* punto del patrón. Para ello, tenemos que combinar los dos campos variables sinusoidales (de las dos fuentes) en el punto P del patrón de radiación, tomando en cuenta la diferencia de fase de las dos ondas en el punto P, que resulta de la diferencia de las trayectorias. Entonces, la intensidad es proporcional al cuadrado de la amplitud del campo eléctrico resultante, como vimos en el capítulo 32.

Para calcular la intensidad, supondremos que las dos funciones sinusoidales (correspondientes a las ondas de las dos fuentes) tienen igual amplitud E y que los campos $\vec{E}$ se encuentran a lo largo de la misma línea (tienen la misma polarización). Esto supone que las fuentes son idénticas y se ignora la pequeña diferencia de amplitud causada por las longitudes desiguales de las trayectorias (la amplitud disminuye al aumentar la distancia desde la fuente). De acuerdo con la ecuación (32.29), cada fuente por sí misma daría una intensidad $\frac{1}{2}\epsilon_0 cE^2$ en el punto P. Si las dos fuentes están en fase, entonces las ondas que llegan a P difieren en fase en una cantidad proporcional a la diferencia de las longitudes de sus trayectorias, $(r_2 - r_1)$. Si el ángulo de fase entre estas ondas que llegan es ϕ, entonces se utilizan las siguientes expresiones para los dos campos eléctricos superpuestos en P:

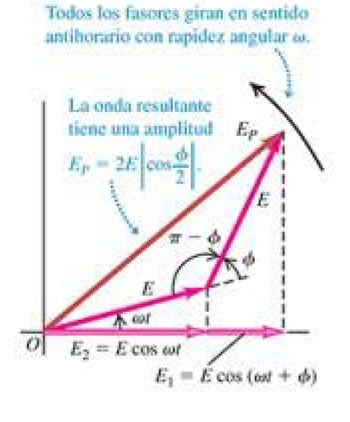
$$E_1(t) = E\cos(\omega t + \phi)$$
$$E_2(t) = E\cos\omega t$$

La superposición de los dos campos en P es una función sinusoidal con cierta amplitud E_p que depende de E y de la diferencia de fase ϕ. Primero trabajaremos en el cálculo de la amplitud E_p si E y ϕ son conocidos. Después calcularemos la intensidad I de la onda resultante, que es proporcional a $E_p{}^2$. Por último, relacionaremos la diferencia de fase ϕ con la diferencia de las trayectorias, que está determinada por la geometría de la situación.

Amplitud en la interferencia de dos fuentes

Para sumar dos funciones sinusoidales desfasadas, se utiliza la misma representación de *fasores* que se usó en el movimiento armónico simple (sección 14.2) y en voltajes y corrientes de circuitos de ca (sección 31.1). Le sugerimos que repase estas secciones ahora. Cada función sinusoidal está representada por un vector que gira (fasor) cuya proyección en el eje horizontal en cualquier momento representa el valor instantáneo de la función sinusoidal.

35.9 Diagrama de fasores de la superposición en el punto P de dos ondas de igual amplitud E con una diferencia de fase ϕ.



En la figura 35.9, E_1 es la componente horizontal del fasor que representa la onda proveniente de la fuente S_1, y E_2 es la componente horizontal del fasor de la onda procedente de S_2. Como se observa en el diagrama, ambos fasores tienen la misma magnitud E, pero E_1 está un ángulo ϕ *adelante* de E_2 en términos de fase. Los dos fasores giran en sentido antihorario con rapidez angular constante ω, y la suma de las proyecciones en el eje horizontal en cualquier momento da el valor instantáneo del campo total E en el punto P. Así, la amplitud E_p de la onda sinusoidal resultante en P es la magnitud del fasor rojo oscuro en el diagrama (identificado como E_p); este es la *suma vectorial* de los otros dos fasores. Para obtener E_p se usa la ley de los cosenos y la identidad trigonométrica $\cos(\pi - \phi) = -\cos\phi$.

$$E_P{}^2 = E^2 + E^2 - 2E^2\cos(\pi - \phi)$$
$$= E^2 + E^2 + 2E^2\cos\phi$$

Luego, empleando la identidad $1 + \cos\phi = 2\cos^2(\phi/2)$, se obtiene

$$E_P{}^2 = 2E^2(1 + \cos\phi) = 4E^2\cos^2\left(\frac{\phi}{2}\right)$$

$$E_P = 2E\left|\cos\frac{\phi}{2}\right| \quad \text{(amplitud en la interferencia con dos fuentes)} \quad (35.7)$$

Este resultado también se puede obtener sin usar fasores (véase el problema 35.50).

Cuando las dos ondas están en fase, $\phi = 0$ y $E_p = 2E$. Cuando están exactamente medio ciclo fuera de fase, $\phi = \pi$ rad $= 180°$, $\cos(\phi/2) = \cos(\pi/2) = 0$ y $E_p = 0$. Así, la superposición de dos ondas sinusoidales con la misma frecuencia y amplitud, pero con una diferencia de fase, produce una onda sinusoidal con la misma frecuencia y amplitud entre cero y el doble de las amplitudes individuales, dependiendo de la diferencia de fase.

Intensidad en la interferencia de dos fuentes

Para obtener la intensidad I en el punto P, recordemos de la sección 32.4 que I es igual a la magnitud promedio del vector de Poynting, S_{med}. En el caso de una onda sinusoidal con amplitud de campo eléctrico E_p, esta magnitud está dada por la ecuación (32.29) con E_p en lugar de $E_{máx}$. Así, podemos expresar la intensidad en cualquiera de las formas equivalentes que siguen:

$$I = S_{med} = \frac{E_P{}^2}{2\mu_0 c} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}}E_P{}^2 = \frac{1}{2}\epsilon_0 c E_P{}^2 \quad (35.8)$$

El contenido esencial de estas expresiones es que I es proporcional a $E_p{}^2$. Cuando se sustituye la ecuación (35.7) en la última expresión de la ecuación (35.8), se obtiene

$$I = \frac{1}{2}\epsilon_0 c E_P{}^2 = 2\epsilon_0 c E^2\cos^2\frac{\phi}{2} \quad (35.9)$$

En particular, la intensidad *máxima* I_0, que se presenta en los puntos donde la diferencia de fase es igual a cero ($\phi = 0$), es

$$I_0 = 2\epsilon_0 c E^2$$

Observe que la intensidad máxima I_0 es el *cuádruple* (no el doble) de la intensidad $\frac{1}{2}\epsilon_0 c E^2$ de cada fuente individual.

Al sustituir la expresión de I_0 en la ecuación (35.9) se puede expresar la intensidad I en cualquier punto de manera muy sencilla en términos de la intensidad máxima I_0:

$$I = I_0\cos^2\frac{\phi}{2} \quad \text{(intensidad en la interferencia de dos fuentes)} \quad (35.10)$$

Para algunos ángulos de fase ϕ, la intensidad es I_0, que es cuatro veces más grande que para una fuente individual de onda, pero para otros ángulos de fase la intensidad es igual a cero. Si promediamos la ecuación (35.10) considerando todas las diferencias de fase posibles, el resultado es $I_0/2 = \epsilon_0 c E^2$ [el promedio de $\cos^2(\phi/2)$ es $\frac{1}{2}$]. Esto es el doble de la intensidad de cada fuente individual, como era de esperarse. La salida total de energía de las dos fuentes no se ve alterada por los efectos de la interferencia, pero la energía se redistribuye (como se dijo en la sección 35.1).

Diferencia de fase y diferencia de trayectorias

Nuestra siguiente tarea es determinar cómo se relaciona la diferencia de fase ϕ entre los dos campos en el punto P. Sabemos que ϕ es proporcional a la diferencia de la longitud de las trayectorias desde las dos fuentes al punto P. Cuando la diferencia de las trayectorias es de una longitud de onda, la diferencia de fase es de un ciclo, y $\phi = 2\pi$ rad $= 360°$. Cuando la diferencia de trayectoria es $\lambda/2$, $\phi = \pi$ rad $= 180°$, y así

sucesivamente. Es decir, la razón de la diferencia de fase ϕ con respecto a 2π es igual a la razón de la diferencia de las trayectorias $r_2 - r_1$ con respecto a λ:

$$\frac{\phi}{2\pi} = \frac{r_2 - r_1}{\lambda}$$

Así, una diferencia de trayectoria $(r_2 - r_1)$ ocasiona una diferencia de fase dada por

$$\phi = \frac{2\pi}{\lambda}(r_2 - r_1) = k(r_2 - r_1) \quad \text{(diferencia de fase relacionada con la diferencia de las trayectorias)} \quad (35.11)$$

donde $k = 2\pi/\lambda$ es el *número de onda* presentado en la sección 15.3 (vol. 1).

Si el material en el espacio entre las fuentes y P es diferente del vacío, en la ecuación (35.11) debemos usar la longitud de onda *en el material*. Si el material tiene el índice de refracción n, entonces

$$\lambda = \frac{\lambda_0}{n} \quad \text{y} \quad k = nk_0 \quad (35.12)$$

donde λ_0 y k_0 son la longitud de onda y el número de onda, respectivamente, en el vacío.

Por último, si el punto P está muy lejos de las fuentes en comparación con su separación d, la diferencia de las trayectorias está dada por la ecuación (35.3):

$$r_2 - r_1 = d\,\text{sen}\,\theta$$

Al combinar esto con la ecuación (35.11), se obtiene

$$\phi = k(r_2 - r_1) = kd\,\text{sen}\,\theta = \frac{2\pi d}{\lambda}\text{sen}\,\theta \quad (35.13)$$

Cuando se sustituye esto en la ecuación (35.10), se obtiene

$$I = I_0\cos^2\left(\tfrac{1}{2}kd\,\text{sen}\,\theta\right) = I_0\cos^2\left(\frac{\pi d}{\lambda}\text{sen}\,\theta\right) \quad \text{(intensidad lejos de dos fuentes)} \quad (35.14)$$

Las direcciones de *máxima* intensidad se presentan cuando el coseno tiene los valores ±1, es decir, cuando

$$\frac{\pi d}{\lambda}\text{sen}\,\theta = m\pi \qquad (m = 0, \pm1, \pm2, \dots)$$

o bien,

$$d\,\text{sen}\,\theta = m\lambda$$

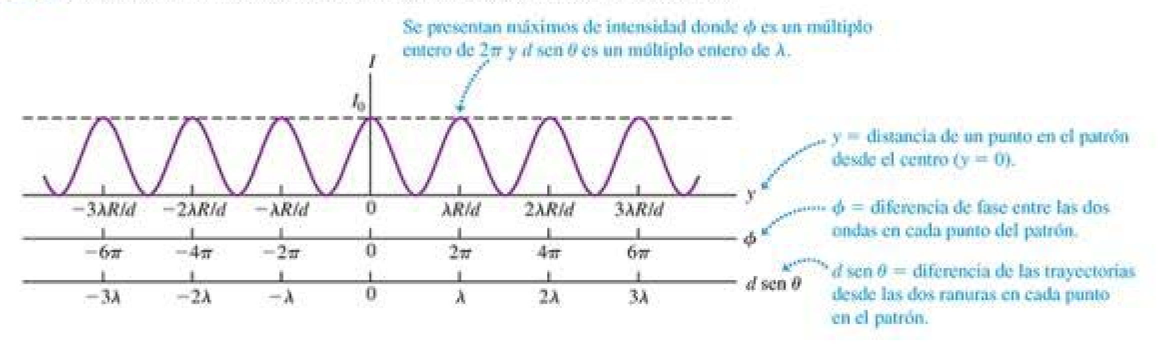
de acuerdo con la ecuación (35.4). También se puede obtener la ecuación (35.5) para las direcciones de intensidad cero a partir de la (35.14).

Como se dijo en la sección 35.2, en experimentos con la luz se visualiza el patrón de interferencia debido a dos ranuras utilizando una pantalla colocada a una distancia R de estas. Las posiciones en la pantalla se describen con la coordenada y, y las de las franjas brillantes están dadas por la ecuación (35.6), donde lo común es que $y \ll R$. En este caso, sen θ es aproximadamente igual a y/R, y se obtienen las siguientes expresiones para la intensidad en *cualquier* punto sobre la pantalla como función de y:

$$I = I_0\cos^2\left(\frac{kdy}{2R}\right) = I_0\cos^2\left(\frac{\pi dy}{\lambda R}\right) \quad \text{(intensidad en la interferencia con dos ranuras)} \quad (35.15)$$

La figura 35.10 muestra la gráfica de la ecuación (35.15); esto se puede comparar con el patrón registrado por la fotografía de la figura 35.6. Todos los máximos en la figura 35.10 tienen la misma intensidad, mientras que los de la figura 35.6 se desvanecen conforme se alejan del centro. En el capítulo 36 exploraremos las razones de esta variación en la intensidad de los máximos.

35.10 Distribución de la intensidad en el patrón de interferencia de dos ranuras idénticas.



Ejemplo 35.3 Arreglo de antenas de transmisión direccional

Suponga que se mueven de lugar las dos antenas de radio idénticas de la figura 35.8, y ahora están separadas solo por 10.0 m y la frecuencia de transmisión aumenta a f = 60.0 MHz. A una distancia de 700 m desde el punto medio entre las antenas y en la dirección $\theta = 0$ (figura 35.8), la intensidad es $I_0 = 0.020\ \mathrm{W/m^2}$. Para la misma distancia calcule *a*) la intensidad en la dirección $\theta = 4.0°$; *b*) la dirección cerca de $\theta = 0$ en la cual la intensidad es igual a $I_0/2$, y *c*) las direcciones en las que la intensidad es igual a cero.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Este problema se relaciona con la distribución de la intensidad en función del ángulo. Como la distancia de 700 m de las antenas al punto donde se mide la intensidad es mucho mayor que la distancia d = 10.0 m entre las antenas, las amplitudes de las ondas provenientes de las dos antenas son casi iguales. Por lo tanto, podemos utilizar la ecuación (35.14) para relacionar la intensidad I con el ángulo θ.

EJECUTAR: La longitud de onda es $\lambda = c/f = 5.00$ m. La distancia de separación d = 10.0 m entre las antenas es exactamente el doble de la longitud de onda (como en el caso del ejemplo 35.2), entonces, d/λ = 2.00 y la ecuación (35.14) se convierte en

$$I = I_0 \cos^2\left(\frac{\pi d}{\lambda}\,\mathrm{sen}\,\theta\right) = I_0 \cos^2[(2.00\pi\ \mathrm{rad})\,\mathrm{sen}\,\theta]$$

a) Cuando $\theta = 4.0°$,

$$I = I_0 \cos^2[(2.00\pi\ \mathrm{rad})\,\mathrm{sen}\,4.0°] = 0.82 I_0$$
$$= (0.82)(0.020\ \mathrm{W/m^2}) = 0.016\ \mathrm{W/m^2}$$

b) La intensidad I es igual a $I_0/2$ cuando el coseno que aparece en la ecuación (35.14) tiene el valor $\pm 1/\sqrt{2}$. Los ángulos más pequeños en los cuales ocurre esto son 2.00π sen $\theta = \pm\pi/4$ rad, por lo que sen $\theta = \pm(1/8.00) = \pm 0.125$ y $\theta = \pm 7.2°$.

c) La intensidad es igual a cero cuando $\cos[(2.00\pi\ \mathrm{rad})\mathrm{sen}\,\theta] = 0$. Esto ocurre cuando 2.00π sen $\theta = \pm\pi/2, \pm 3\pi/2, \pm 5\pi/2, \ldots$, o sen $\theta = \pm 0.250, \pm 0.750, \pm 1.25, \ldots$ Los valores de sen θ mayores que 1 no tienen ningún significado, de modo que las respuestas son

$$\theta = \pm 14.5°, \pm 48.6°$$

EVALUAR: La condición en el inciso *b*) es que $I = I_0/2$, por lo que $(2.00\pi\ \mathrm{rad})$sen $\theta = \pm\pi/4$ rad también se satisface cuando sen $\theta = \pm 0.375$, ± 0.625 o ± 0.875, de manera que $\theta = \pm 22.0°$, $\pm 38.7°$ o $\pm 61.0°$. (¿Podría usted comprobar esto?). Sin embargo, sería incorrecto incluir estos ángulos en la solución porque el problema pide el ángulo *cerca* de $\theta = 0$ en el que $I = I_0/2$. Estos valores adicionales de θ no son los que buscamos.

Evalúe su comprensión de la sección 35.3 Un experimento de interferencia con dos ranuras usa luz coherente con longitud de onda de 5.00×10^{-7} m. Ordene los siguientes puntos en el patrón de interferencia según la intensidad en cada uno, de la más alta a la más baja. **i.** Un punto que está 4.00×10^{-7} m más cerca de una ranura que de la otra; **ii.** un punto donde las ondas luminosas recibidas desde las dos ranuras están 4.00 rad fuera de fase; **iii.** un punto que está 7.50×10^{-7} m más cerca de una ranura que de la otra; **iv.** un punto donde las ondas de luz recibidas de las dos ranuras están 2.00 rad fuera de fase.

35.4 Interferencia en películas delgadas

Cuando la luz se refleja en una capa delgada de aceite que flota en agua o en una burbuja de jabón, es común ver bandas brillantes de colores (véase la fotografía de apertura del capítulo). Estos son los resultados de la interferencia. Las ondas luminosas se reflejan en las superficies frontal y posterior de esas finas películas y se produce interferencia constructiva entre las dos ondas reflejadas (con distintas longitudes

de trayectoria) en diferentes lugares con distintas longitudes de onda. La figura 35.11*a* muestra la situación. La luz que ilumina la cara superior de una película delgada con espesor *t* se refleja parcialmente en esa superficie (trayectoria *abc*). La luz *transmitida* a través de la superficie superior se refleja parcialmente en la superficie inferior (trayectoria *abdef*). Las dos ondas reflejadas llegan juntas al punto *P* en la retina del ojo. Dependiendo de la relación de fase, interferirán en forma constructiva o destructiva. Diferentes colores tienen distintas longitudes de onda, por lo que la interferencia puede ser constructiva para unos colores y destructiva para otros. Por esa razón se observan anillos o franjas de colores en la figura 35.11*b* (que muestra una fina capa de aceite que flota en agua) y en la fotografía que abre este capítulo (la cual muestra películas delgadas de una solución jabonosa que forma las paredes de la burbuja). Las formas complejas de los anillos de colores que aparecen en las fotografías son el resultado de las variaciones en el espesor de la película.

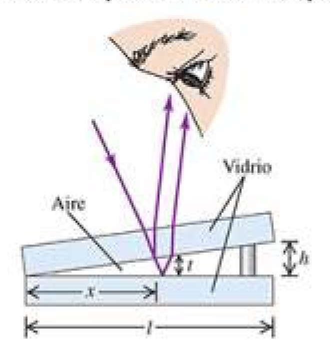


Interferencia en una película delgada y cambios de fase durante la reflexión

Veamos una situación simplificada en la que luz *monocromática* se refleja en dos superficies casi paralelas con incidencia casi normal. La figura 35.12 muestra dos placas de vidrio separadas por una delgada cuña, o película, de aire. Queremos considerar la interferencia entre las dos ondas de luz reflejadas en las superficies adyacentes a la cuña de aire, como se muestra. (También ocurren reflexiones en la cara superior de la placa de arriba y en la superficie inferior de la placa de abajo; para no complicar nuestro análisis, no las incluiremos). La situación es la misma que en la figura 35.11*a*, excepto que el espesor de la película (cuña) no es uniforme. La diferencia de las trayectorias entre las dos ondas es exactamente el doble del espesor *t* de la cuña de aire en cada punto. En los puntos en que $2t$ es un número entero de longitudes de onda, se espera que haya interferencia constructiva y una zona brillante; ahí donde hay un valor equivalente a un número semientero de longitudes de onda, es de esperar que la interferencia sea destructiva y que haya un área oscura. A lo largo de la línea donde las placas están en contacto, prácticamente *no* hay diferencia en las trayectorias, por lo que se espera una región brillante.

Cuando se efectúa el experimento, aparecen las franjas brillantes y oscuras, ¡pero están intercambiadas! A lo largo de la línea donde las placas están en contacto se halla una franja *oscura*, no una brillante. Esto sugiere que una u otra de las ondas reflejadas ha experimentado un cambio de fase de medio ciclo durante su reflexión. En ese caso, las dos ondas que se reflejan en la línea de contacto están medio ciclo fuera de fase aun cuando tengan la misma longitud de trayectoria.

35.12 Interferencia entre ondas luminosas que se reflejan en los dos lados de una cuña de aire que separa dos placas de vidrio. Se han exagerado los ángulos y el espesor de la cuña de aire para obtener mayor claridad; en el texto suponemos que la luz incide en la placa superior con dirección normal y que las distancias *h* y *t* son mucho menores que *l*.



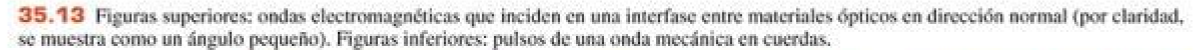
De hecho, este cambio de fase puede predecirse a partir de las ecuaciones de Maxwell y de la naturaleza electromagnética de la luz. Los detalles de la obtención se encuentran más allá de nuestro alcance, pero el resultado es el siguiente. Suponga que una onda de luz con amplitud de campo eléctrico E_i viaja en un material óptico con índice de refracción n_a. La onda incide en dirección normal en la interfase con otro material óptico con índice n_b. La amplitud E_r de la onda que se refleja en la interfase es proporcional a la amplitud E_i de la onda incidente, y está dada por

$$E_r = \frac{n_a - n_b}{n_a + n_b} E_i \qquad \text{(incidencia normal)} \qquad (35.16)$$

Este resultado demuestra que las amplitudes incidente y reflejada tienen el mismo signo cuando n_a es más grande que n_b, y signo contrario cuando n_b es mayor que n_a. Se distinguen tres casos, como se ilustra en la figura 35.13:

Figura 35.13a: Cuando $n_a > n_b$, la luz viaja con más lentitud en el primer material que en el segundo. En este caso, E_r y E_i tienen el mismo signo, y el corrimiento de fase de la onda reflejada en relación con la onda incidente es de cero. Esto es análogo a la reflexión de una onda mecánica transversal en una cuerda pesada en un punto en que está atada con otra cuerda más ligera o con un anillo que se puede mover en forma vertical sin fricción.

Figura 35.13b: Cuando $n_a = n_b$, la amplitud E_r de la onda reflejada es cero. La onda luminosa incidente no puede "ver" la interfase y *no* hay una onda reflejada.



35.13 Figuras superiores: ondas electromagnéticas que inciden en una interfase entre materiales ópticos en dirección normal (por claridad, se muestra como un ángulo pequeño). Figuras inferiores: pulsos de una onda mecánica en cuerdas.

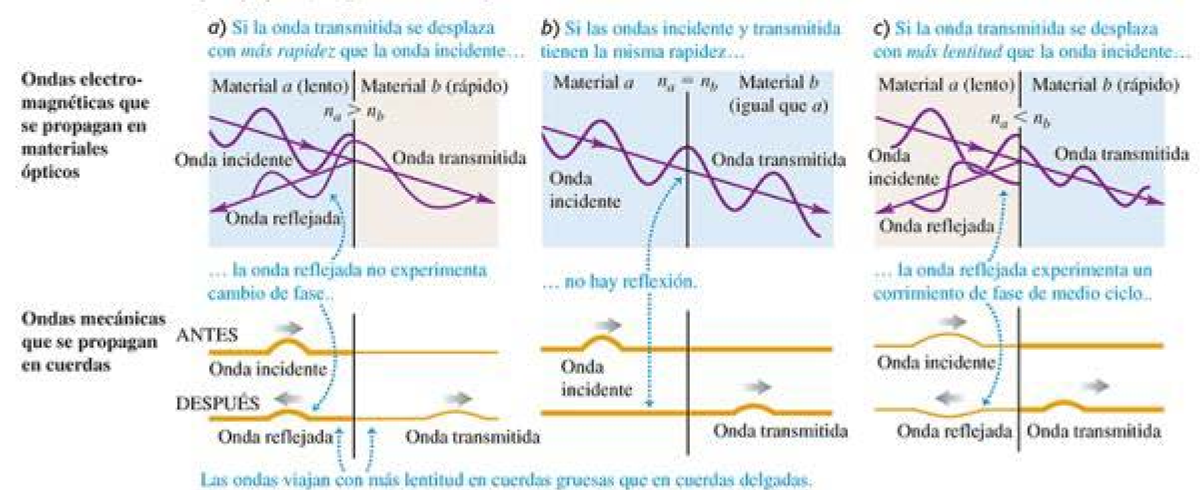


Figura 35.13c: Cuando $n_a < n_b$, la luz viaja con más lentitud en el segundo material que en el primero. En este caso, E_r y E_i tienen signos opuestos y el corrimiento de fase de la onda reflejada en relación con la onda incidente es π rad (180° o medio ciclo). Esto es análogo a la reflexión (con inversión) de una onda mecánica transversal en una cuerda ligera en un punto donde está atada a otra más pesada o a un soporte rígido.

Comparemos esto con la situación de la figura 35.12. En el caso de la onda reflejada por la superficie superior de la cuña de aire, n_a (vidrio) es mayor que n_b, por lo que esta onda tiene un corrimiento de fase igual a cero. En el caso de la onda reflejada por la superficie inferior, n_a (aire) es menor que n_b (vidrio), por lo que esta onda tiene un corrimiento de fase de medio ciclo. Las ondas reflejadas en la línea de contacto no tienen diferencia de trayectorias que den corrimientos de fase adicionales, e interfieren destructivamente; esto es lo que observamos. Se puede usar el principio anterior para demostrar que en el caso de una incidencia normal, la onda reflejada en el punto b en la figura 35.11a está desplazada medio ciclo, en tanto que la onda reflejada en d no lo está (si hay aire debajo de la película).

Este análisis se puede resumir en forma matemática. Si la película tiene espesor t, la luz tiene incidencia normal y longitud de onda λ en la película; si ninguna o si ambas ondas reflejadas en las dos superficies tienen un corrimiento de fase de medio ciclo por reflexión, las condiciones para que haya interferencia constructiva y destructiva son las siguientes:

$$2t = m\lambda \qquad (m = 0, 1, 2, \dots) \quad \text{(reflexión constructiva en película delgada, sin corrimiento relativo de fase)} \tag{35.17a}$$

$$2t = \left(m + \tfrac{1}{2}\right)\lambda \qquad (m = 0, 1, 2, \dots) \quad \text{(reflexión destructiva en película delgada, sin corrimiento relativo de fase)} \tag{35.17b}$$

Si *una* de las dos ondas tiene un corrimiento de fase de medio ciclo por reflexión, las condiciones para que haya interferencia constructiva y destructiva se invierten:

$$2t = \left(m + \tfrac{1}{2}\right)\lambda \qquad (m = 0, 1, 2, \dots) \quad \text{(reflexión constructiva en película delgada, con corrimiento relativo de fase de medio ciclo)} \tag{35.18a}$$

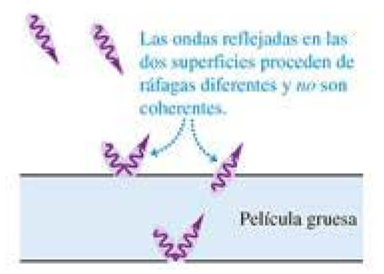
$$2t = m\lambda \qquad (m = 0, 1, 2, \dots) \quad \text{(reflexión destructiva en película delgada, con corrimiento relativo de fase de medio ciclo)} \tag{35.18b}$$

35.14 *a*) La luz que se refleja en una película delgada genera un patrón de interferencia estable, pero *b*) la luz que se refleja en una película gruesa no lo hace.

a) Luz reflejada en una película delgada



b) Luz reflejada en una película gruesa



Películas delgadas y gruesas

En nuestro análisis se hace hincapié en las películas *delgadas*; esto se debe a un principio que presentamos en la sección 35.1: para que dos ondas causen un patrón de interferencia estable, deben ser *coherentes*, con una relación de fase definida y constante. El Sol y las bombillas eléctricas emiten luz en una corriente de pequeñas ráfagas, cada una de las cuales mide solo unos cuantos micrómetros de longitud (1 micrómetro = 1 μm = 10^{-6} m). Si la luz se refleja en las dos superficies de una película delgada, las dos ondas reflejadas forman parte de la misma ráfaga (figura 35.14*a*). Por lo tanto, estas ondas son coherentes y la interferencia ocurre según hemos descrito. Sin embargo, si la película es demasiado gruesa, las dos ondas reflejadas pertenecerán a ráfagas diferentes (figura 35.14*b*). Entre distintas ráfagas de luz no hay una relación de fase definida, por lo que las dos ondas son incoherentes y no hay un patrón de interferencia fijo. Por eso vemos los colores de interferencia en la luz reflejada en la superficie resbalosa de una película de aceite con espesor de unos cuanto micrómetros (figura 35.11*b*), pero *no* vemos esos colores en la luz reflejada en el cristal de una ventana de vidrio que tiene unos cuantos milímetros de grueso (miles de veces mayor).

Estrategia para resolver problemas 35.1 Interferencia en películas delgadas



IDENTIFICAR *los conceptos relevantes:* Los problemas de películas delgadas implican la interferencia de dos ondas: una reflejada en la superficie frontal de la película y otra reflejada en la superficie posterior. Es común que se pida relacionar la longitud de onda, el espesor y el índice de refracción de la película.

PLANTEAR *el problema* de acuerdo con los siguientes pasos:
1. Elabore un dibujo que muestre la geometría de la película. Identifique los materiales adyacentes a la película; sus propiedades determinan si una o ambas ondas reflejadas tendrán un corrimiento de fase de medio ciclo.
2. Identifique la incógnita.

EJECUTAR *la solución* como sigue:
1. Aplique la regla de cambios de fase a cada onda reflejada: hay un corrimiento de fase de medio ciclo cuando $n_b > n_a$, y ninguno cuando $n_b < n_a$.
2. Si *ninguna* onda reflejada experimenta un corrimiento de fase, o si *ambas* lo experimentan, se usan las ecuaciones (35.17). Si solo una de las ondas reflejadas experimenta un corrimiento de fase, se usan las ecuaciones (35.18).
3. Despeje la incógnita de la ecuación resultante. Use en sus cálculos la longitud de onda $\lambda = \lambda_0/n$ de la luz *en la película*, donde n es el índice de refracción de la película. (En el caso del aire, $n = 1.000$, con una precisión de cuatro cifras).
4. Si se hacen preguntas acerca de la onda que se transmite a través de la película, recuerde que la intensidad mínima en la onda reflejada corresponde a la intensidad máxima *transmitida*, y viceversa.

EVALUAR *la respuesta:* Los resultados se interpretan analizando lo que pasaría si la longitud de onda cambiara o si la película tuviera un espesor diferente.

Ejemplo 35.4 Interferencia en película delgada I

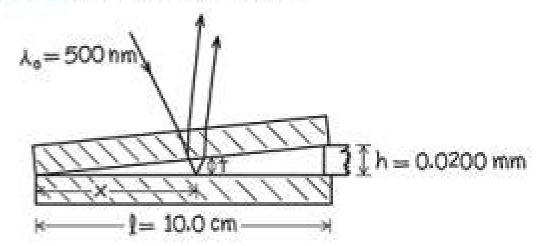


Suponga que las dos placas de vidrio de la figura 35.12 son dos portaobjetos de un microscopio que miden 10.0 cm de longitud. En un extremo están en contacto; por el otro están separados mediante un trozo de papel de 0.0200 mm de espesor. ¿Cuál es la separación de las franjas de interferencia que se observan por reflexión? ¿La franja en la línea de contacto es brillante u oscura? Suponga luz monocromática con longitud de onda en el aire de $\lambda = \lambda_0 = 500$ nm.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: La figura 35.15 ilustra la situación. Solo consideraremos la interferencia entre la luz reflejada en las superficies superior e inferior de la cuña de aire entre los portaobjetos. [La placa superior tiene un espesor relativamente grande, aproximadamente 1 mm por lo que se puede ignorar la interferencia entre la luz reflejada en

35.15 Diagrama para este problema.



las superficies superior e inferior (véase la figura 35.14*b*).] La luz viaja más lentamente en el vidrio de los portaobjetos que en el aire. Por consiguiente, la onda reflejada en la superficie superior de la cuña de aire no experimenta corrimiento de fase (véase la figura 35.13*a*), mientras que la onda reflejada en la superficie inferior presenta un corrimiento de fase de medio ciclo (véase la figura 35.13*c*).

EJECUTAR: Como solo una de las ondas reflejadas experimenta un corrimiento de fase, la condición para la interferencia *destructiva* (una franja oscura) es la ecuación (35.18*b*):

$$2t = m\lambda_0 \quad (m = 0, 1, 2, \dots)$$

Por triángulos semejantes en la figura 35.15, el espesor t de la cuña de aire en cada punto es proporcional a la distancia x con respecto a la línea de contacto:

$$\frac{t}{x} = \frac{h}{l}$$

Al combinar esto con la ecuación (35.18*b*) se obtiene

$$\frac{2xh}{l} = m\lambda_0$$

$$x = m\frac{l\lambda_0}{2h} = m\frac{(0.100\text{ m})(500 \times 10^{-9}\text{ m})}{(2)(0.0200 \times 10^{-3}\text{ m})} = m(1.25\text{ mm})$$

Las franjas oscuras sucesivas, correspondientes a $m = 1, 2, 3, \dots$, están separadas 1.25 mm. Al sustituir $m = 0$ en esta ecuación se obtiene $x = 0$, lo que corresponde al lugar de contacto entre los dos portaobjetos (en el lado izquierdo de la figura 35.15). Por consiguiente, en la línea de contacto hay una franja oscura.

EVALUAR: El resultado demuestra que la separación de las franjas es proporcional a la longitud de onda de la luz utilizada; las franjas estarían más separadas con luz roja (λ_0 mayor) que con luz azul (λ_0 menor). Si se emplea luz blanca, la luz que se refleja en cualquier punto sería una mezcla de longitudes de onda para la que ocurre interferencia constructiva; las longitudes de onda que interfieren destructivamente son débiles o inexistentes en la luz reflejada. (Este mismo efecto explica los colores que se observan cuando se ilumina una película de aceite con luz blanca, como en la figura 35.11*b*).

Ejemplo 35.5 Interferencia en película delgada II



En el ejemplo 35.4, suponga que las placas de vidrio tienen $n = 1.52$ y que el espacio entre ellas contiene agua ($n = 1.33$) en lugar de aire. ¿Qué sucede en esa situación?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: El índice de refracción de la cuña de agua es aún menor que el del vidrio en cualquiera de sus lados, de manera que los corrimientos de fase son los mismos que los del ejemplo 35.4. Se utiliza otra vez la ecuación (35.18*b*) para determinar las posiciones de las franjas oscuras; la única diferencia es que la longitud de onda λ en esta ecuación es ahora la longitud de onda en el agua en lugar de la del aire.

EJECUTAR: En la película de agua ($n = 1.33$), la longitud de onda es $\lambda = \lambda_0/n = (500\text{ nm})/1.33) = 376$ nm. Cuando se sustituye λ_0 por λ en la expresión del ejemplo 35.4 para la posición x de la m-ésima franja oscura, se ve que la separación de las franjas se reduce en el mismo factor de 1.33 y es igual a 0.940 mm. Sigue habiendo una franja oscura en la línea de contacto.

EVALUAR: ¿Ve usted que, para obtener la misma separación entre franjas del ejemplo 35.4, la dimensión h en la figura 35.15 tendría que reducirse a $(0.0200\text{ mm})/1.33 = 0.0150$ mm? Esto demuestra que lo que importa en la interferencia en películas delgadas es la *razón* t/λ entre el espesor y la longitud de onda de la película. [Esto se observa si se analizan las ecuaciones (35.17) y (35.18)].

Ejemplo 35.6 Interferencia en película delgada III



Suponga que, de las dos placas del ejemplo 35.4, la de arriba es de un material plástico con $n = 1.40$ y que la cuña está llena con una grasa de silicona con $n = 1.50$, mientras que la placa inferior es de un cristal denso con $n = 1.60$. ¿Qué ocurre en este caso?

SOLUCIÓN

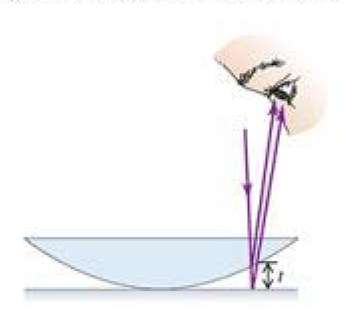
IDENTIFICAR y PLANTEAR: La geometría sigue siendo la que se muestra en la figura 35.15, pero ahora los corrimientos de fase de medio ciclo ocurren en *ambas* superficies de la cuña de grasa (véase la figura 35.13*c*). Por lo tanto, no hay un corrimiento de fase *relativo* y se debe usar la ecuación (35.17*b*) para obtener las posiciones de las franjas oscuras.

EJECUTAR: El valor de λ para usar en la ecuación (35.17*b*) es la longitud de onda en la grasa de silicona: $\lambda = \lambda_0/n = (500\text{ nm})/1.50 = 333$ nm. Es fácil demostrar que la separación de las bandas es de 0.833 mm. Observe que las dos ondas reflejadas en la línea de contacto están en fase (ambas experimentan el mismo corrimiento de fase), por lo que la línea de contacto se encuentra en una franja *brillante*.

EVALUAR: ¿Qué pasaría si se elimina con cuidado el portaobjetos de arriba del microscopio, de manera que la cuña con grasa mantuviera su forma? Todavía habría cambios de fase de medio ciclo en las superficies superior e inferior de la cuña, de manera que el patrón de franjas sería el mismo que cuando estaba presente el portaobjetos superior.

35.16 *a*) Película de aire entre una lente convexa y una superficie plana. El espesor de la película t aumenta a partir de cero a medida que nos alejamos del centro, y *b*) con luz monocromática produce una serie de anillos brillantes y oscuros que se alternan.

a) Lente convexa en contacto con un vidrio plano



b) Anillos de Newton: franjas circulares de interferencia



Anillos de Newton

La figura 35.16*a* muestra la superficie convexa de una lente en contacto con una placa de vidrio plano. Entre las dos superficies se forma una fina película de aire. Cuando se observa el conjunto con luz monocromática, se ven franjas de interferencia circulares (figura 35.16*b*). Newton se encargó de estudiarlas, por lo que se les conoce como **anillos de Newton**.

Se pueden usar las franjas de interferencia para comparar las superficies de dos partes ópticas colocando las dos en contacto y observando las franjas de interferencia. La figura 35.17 es una fotografía tomada durante el proceso de tallado de la lente para el objetivo de un telescopio. El disco grueso inferior, de diámetro más grande, es el de la forma maestra correcta, y el disco superior más pequeño es la lente bajo prueba. Las "curvas de nivel" son anillos de interferencia de Newton; cada una indica una distancia adicional de media longitud de onda entre la muestra y el maestro. A 10 líneas del punto central, la distancia entre las dos superficies es de cinco longitudes de onda, o alrededor de 0.003 mm. Este valor no es muy bueno; comúnmente, las lentes de alta calidad se pulen con una precisión de menos de una longitud de onda. La superficie del espejo primario del telescopio espacial Hubble se pulió a una precisión de menos de $\frac{1}{50}$ de longitud de onda. Por desgracia, se elaboró con especificaciones incorrectas, lo que generó uno de los errores más precisos en la historia de la tecnología óptica (véase la sección 34.2).

35.17 Superficie de la lente del objetivo de un telescopio sometida a inspección durante su manufactura.

El patrón de franjas indica falta de ajuste entre la lente y el maestro.

Maestro

Lente para probarse

Recubrimientos reflectantes y no reflectantes

Los **recubrimientos no reflectantes** para superficies de lentes se basan en la interferencia en películas delgadas. Sobre la superficie de la lente se deposita una capa o película delgada de material duro transparente con índice de refracción menor que el del vidrio, como se muestra en la figura 35.18. La luz se refleja en ambas superficies de la capa. En los dos casos la luz se refleja de un medio de índice mayor que el del medio en el que se propaga, por lo que ocurre el mismo cambio de fase en ambas reflexiones. Si el espesor de la película es la cuarta parte (un cuarto) de la longitud de onda *en la película* (se supone incidencia normal), la diferencia total de las trayectorias es de media longitud de onda. De esta forma, la luz reflejada en la primera superficie está medio ciclo fuera de fase con respecto a la luz reflejada en la segunda, y hay interferencia destructiva.

El espesor del recubrimiento no reflectante se puede hacer de un cuarto de longitud de onda solo para una longitud de onda en particular. Por lo general, esta se elige de la parte central amarillo verdosa del espectro ($\lambda = 550$ nm), para la que el ojo tiene mayor sensibilidad. Entonces hay un poco más de reflexión tanto en las longitudes de onda más largas (rojo) como en las más cortas (azul), y la luz reflejada tiene una tonalidad púrpura. De esta manera, la reflexión total en la superficie de una lente o un prisma se reduce del 4 al 5% a menos del 1%. Esto también aumenta la cantidad neta de luz que se *transmite* a través de la lente, ya que la luz que no se refleja se transmitirá. Se utiliza el mismo principio para minimizar la reflexión en las celdas solares fotovoltaicas de silicio ($n = 3.5$) mediante el empleo de una capa superficial delgada de monóxido de silicio (SiO, $n = 1.45$); esto ayuda a incrementar la cantidad de luz que realmente llega a las celdas solares.

35.18 Un recubrimiento no reflectante tiene un índice de refracción intermedio entre el del vidrio y el del aire.



Si se deposita sobre vidrio un material con espesor de un cuarto de longitud de onda e índice de refracción *mayor* que el del vidrio, entonces la reflexión *aumenta*, y el material depositado se conoce como **recubrimiento reflectante**. En este caso, hay un corrimiento de fase de medio ciclo en la interfase aire-película, pero no en la interfase película-vidrio, y las reflexiones en los dos lados de la película interfieren en forma constructiva. Por ejemplo, un recubrimiento con índice de refracción de 2.5 ocasiona que el 38% de la energía incidente se refleje, en comparación con el 4% que lo haría si no hubiera recubrimiento. Empleando capas múltiples de recubrimiento es posible lograr cerca del 100% de transmisión o reflexión para longitudes de onda particulares. Algunas aplicaciones prácticas de estos recubrimientos son la separación de colores en las cámaras de televisión y los "reflectores térmicos" infrarrojos de los proyectores cinematográficos, las celdas solares y los visores de los astronautas.



Ejemplo 35.7 Recubrimiento no reflectante

Un material de uso común para recubrir lentes es el fluoruro de magnesio (MgF_2), con $n = 1.38$. ¿Qué espesor debe tener un recubrimiento no reflectante para luz de 550 nm si se aplica a un vidrio con $n = 1.52$?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Este recubrimiento es del tipo mostrado en la figura 35.18. El espesor debe ser de un cuarto de la longitud de onda de esta luz *en el recubrimiento*.

EJECUTAR: La longitud de onda en el aire es $\lambda_0 = 550$ nm, por lo que su longitud de onda en el recubrimiento de MgF_2 es $\lambda = \lambda_0/n = (550 \text{ nm})/1.38 = 400$ nm. El recubrimiento debe tener un espesor de un cuarto de esto, es decir, $\lambda/4 = 100$ nm.

EVALUAR: Se trata de una película muy delgada, con espesor no mayor de algunas centenas de moléculas. Observe que este recubrimiento es *reflectante* para luz cuya longitud de onda es el *doble* del espesor del recubrimiento; entonces, la luz reflejada en la superficie inferior del recubrimiento viaja una longitud de onda más lejos que la luz que se refleja en la superficie superior, por lo que las dos ondas están en fase e interfieren de modo constructivo. Esto ocurre en el caso de luz con una longitud de onda de 200 nm en el MgF_2 y una longitud de onda de $(200 \text{ nm})(1.38) = 276$ nm en el aire. Esta es una longitud de onda correspondiente al ultravioleta (véase la sección 32.1), por lo que los diseñadores de lentes ópticas con recubrimientos no reflectantes no necesitan preocuparse por este aumento en la reflexión.

Evalúe su comprensión de la sección 35.4 Una delgada capa de benceno ($n = 1.501$) está sobre una lámina de fluorita ($n = 1.434$). Se ilumina desde arriba con luz cuya longitud de onda en el benceno es de 400 nm. ¿Cuál de los siguientes espesores posibles de la capa de benceno maximizará el brillo de la luz reflejada? **i.** 100 nm; **ii.** 200 nm; **iii.** 300 nm; **iv.** 400 nm.



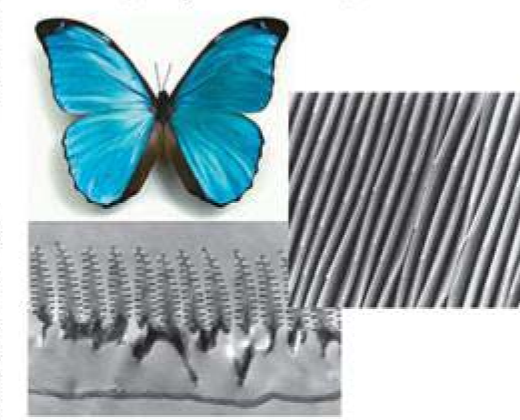
35.5 Interferómetro de Michelson

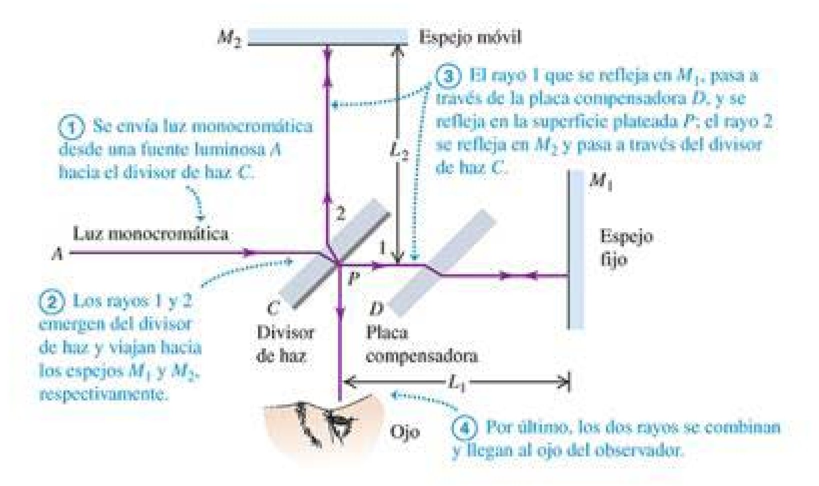
Un dispositivo experimental importante que utiliza la interferencia es el **interferómetro de Michelson**. Los interferómetros de Michelson se usan para efectuar mediciones precisas de longitudes de onda y de distancias muy pequeñas, como los diminutos cambios en el espesor de un axón cuando un impulso nervioso se propaga a lo largo de él. Igual que el experimento de Young con dos ranuras, un interferómetro de Michelson toma luz monocromática de una sola fuente y la divide en dos ondas que siguen trayectorias distintas. En el experimento de Young esto se hace enviando parte de la luz a través de una ranura y parte a través de otra; en el interferómetro de Michelson el equipo que se usa recibe el nombre de *divisor de haz*. En ambos experimentos la interferencia ocurre cuando se vuelven a combinar las dos ondas luminosas.

Cómo funciona el interferómetro de Michelson

En la figura 35.19 se muestran los componentes principales de un interferómetro de Michelson. Un rayo de luz de una fuente monocromática A incide en el divisor de haz C, que consiste en una placa de vidrio con un fino recubrimiento de plata en su lado derecho. Parte de la luz (rayo 1) pasa a través de la superficie plateada y la placa compensadora D, y se refleja en el espejo M_1. Después regresa a través de D y se refleja en la superficie plateada de C hacia el observador. El resto de la luz (rayo 2) se refleja en la superficie plateada en el punto P hacia el espejo M_2 y de regreso a través de C hacia el ojo del observador. El objetivo de la placa compensadora D es garantizar que

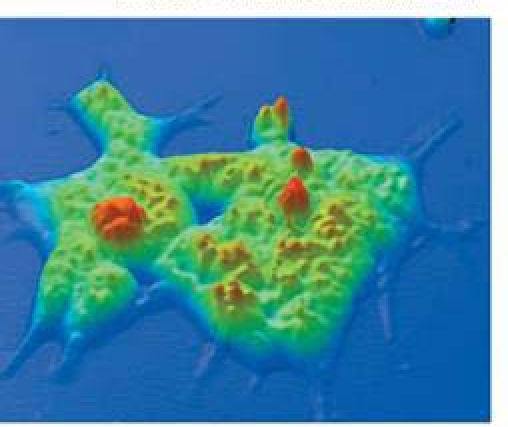
Aplicación Interferencia y las alas de una mariposa
Muchos de los colores brillantes en el reino animal se forman por *interferencia* y no con pigmentos. Las fotografías muestran a la mariposa *Morpho rhetenor* y las escamas microscópicas que cubren las superficies superiores de sus alas. Las escamas tienen abundantes rugosidades diminutas (fotografía de en medio), las cuales tienen rebordes espaciados regularmente (fotografía inferior) que funcionan como reflectores, de modo que las reflexiones interfieren constructivamente con la luz azul. La estructura de capas múltiples refleja el 70% de la luz azul que incide sobre ella, dando a las alas un aspecto brillante como de espejo. (Las orillas de las alas no tienen estas estructuras y son ligeramente marrones).





35.19 Esquema del interferómetro de Michelson. El observador mira un patrón de interferencia que es resultado de la diferencia de las longitudes de las trayectorias de los rayos 1 y 2.

Aplicación Escaneo de células con un interferómetro de Michelson
Esta imagen de color falso de una célula cancerosa de un colon humano se realizó con un microscopio que se montó a un interferómetro de Michelson. La célula está en un brazo del interferómetro y la luz que pasa a través de ella experimenta un corrimiento de fase que depende del espesor de la célula y de los orgánulos dentro de la misma. Entonces se puede usar un patrón de franjas para construir una vista tridimensional de la célula. Los científicos usan esta técnica para observar cómo se comportan diferentes tipos de células cuando se aguijonean con sondas microscópicas. Las células cancerosas resultan ser más "suaves" que las células normales, una diferencia que puede hacer más fácil la identificación de los racimos de células cancerosas.



los rayos 1 y 2 pasen a través del mismo espesor de vidrio; la placa D se corta de la misma pieza de vidrio que la placa C con la finalidad de que sus espesores sean idénticos dentro de un margen de una fracción de longitud de onda.

Todo el aparato que se aprecia en la figura 35.19 está montado en una estructura muy rígida, y la posición del espejo M_2 se ajusta con un tornillo micrométrico muy exacto. Si las distancias L_1 y L_2 son exactamente iguales y los espejos M_1 y M_2 se encuentran colocados en un ángulo recto exacto, la imagen virtual de M_1 formada por reflexión en la superficie plateada de la placa C coincide con la del espejo M_2. Si L_1 y L_2 *no* son exactamente iguales, la imagen de M_1 presentará un leve desplazamiento con respecto a M_2; y si los espejos no son exactamente perpendiculares, la imagen de M_1 forma un ángulo pequeño con M_2. Entonces, el espejo M_2 y la imagen virtual de M_1 desempeñan los mismos papeles que las dos superficies de una película delgada en forma de cuña (véase la sección 35.4), y la luz reflejada en estas superficies forma el mismo tipo de franjas de interferencia.

Suponga que el ángulo entre el espejo M_2 y la imagen virtual de M_1 es lo suficientemente grande para que haya cinco o seis franjas verticales en el campo visual. Si ahora movemos despacio el espejo M_2 ya sea hacia adelante o hacia atrás una distancia $\lambda/2$, la diferencia en las longitudes de las trayectorias entre los rayos 1 y 2 cambia en λ, y cada franja se mueve hacia la izquierda o hacia la derecha una distancia igual a la separación entre franjas. Si observamos las posiciones de las franjas a través de un telescopio con un ocular como mira y m franjas cruzan la mira al mover el espejo una distancia y, entonces

$$y = m\frac{\lambda}{2} \qquad \text{o bien,} \qquad \lambda = \frac{2y}{m} \tag{35.19}$$

Si m es de varios miles, la distancia y es suficientemente grande para medirse con exactitud, y es posible obtener un valor exacto para la longitud de onda λ. De manera alternativa, si se conoce la longitud de onda, se puede medir la distancia y con solo contar las franjas cuando se mueve M_2 esa distancia. De esta forma, es posible medir distancias del orden de una longitud de onda de luz con relativa facilidad.

Experimento de Michelson-Morley

La aplicación original del interferómetro de Michelson fue en el histórico **experimento de Michelson y Morley**. Antes de que se estableciera la teoría electromagnética de la luz, la mayoría de los físicos creían que la propagación de las ondas luminosas tenía lugar en un medio llamado **éter**, el cual se suponía que estaba presente en todo el espacio. En 1887 los científicos estadounidenses Albert Michelson y Edward Morley usaron el interferómetro de Michelson en un intento por detectar el movimiento de la Tierra a través del éter. Suponga que el interferómetro en la figura 35.19 se mueve de izquierda a derecha en relación con el éter. De acuerdo con la teoría del éter, esto ocasionaría cambios en la rapidez de la luz en las partes de la trayectoria que se indican

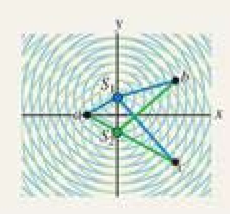
con líneas horizontales en la figura. Habría desplazamientos en las franjas en relación con las posiciones que estas tendrían si el instrumento estuviera en reposo en el éter. Entonces, cuando el instrumento completo se hizo girar 90°, las otras partes de las trayectorias se verían afectadas en forma similar, lo que produciría un desplazamiento de las franjas en la dirección opuesta.

Michelson y Morley esperaban que el movimiento de la Tierra a través del éter provocara un desplazamiento de las franjas de alrededor de cuatro décimos de franja cuando se hiciera girar el instrumento. El desplazamiento que se observó en realidad fue de menos de un centésimo de franja y, dentro de los límites de la incertidumbre experimental, parecía ser exactamente igual a cero. A pesar de su movimiento en órbita alrededor del Sol, la Tierra parecía estar *en reposo* en relación con el éter. Este resultado negativo desconcertó a los físicos hasta que Einstein desarrolló la teoría especial de la relatividad en 1905 (la que estudiaremos con detalle en el capítulo 37). Einstein postuló que la rapidez de una onda luminosa en el vacío tenía la misma magnitud c en relación con *todos* los marcos de referencia inerciales, sin importar cuál fuera la velocidad relativa de unos con respecto a otros. Se supo entonces que el supuesto éter no desempeñaba ningún papel, y el concepto fue desechado.

Evalúe su comprensión de la sección 35.5 Usted está observando un patrón de franjas en un interferómetro de Michelson, como el de la figura 35.19. Si usted cambia el índice de refracción (pero no el espesor) de la placa compensadora, ¿se modificará el patrón?



Interferencia y fuentes coherentes: La luz monocromática es aquella que tiene una sola frecuencia. La coherencia es una relación de fase definida y constante entre dos ondas. La superposición de ondas provenientes de dos fuentes coherentes de luz monocromática forma un patrón de interferencia. El principio de superposición establece que la perturbación total ondulatoria en un punto cualquiera es la suma de las perturbaciones debidas a las ondas individuales.



Interferencia de la luz de dos fuentes: Cuando dos fuentes están en fase, ocurre interferencia constructiva en puntos donde la diferencia en la longitud de las trayectorias desde las dos fuentes es igual a cero o un número entero de longitudes de onda; la interferencia destructiva tiene lugar en puntos donde la diferencia es un número semientero de longitudes de onda. Si dos fuentes que están separadas por una distancia d se encuentran muy alejadas de un punto P, y la recta entre las fuentes y P forma un ángulo θ con la recta perpendicular a la línea entre las fuentes, entonces la condición para que haya interferencia constructiva en P es la ecuación (35.4). La condición para que haya interferencia destructiva es la ecuación (35.5). Cuando θ es muy pequeño, la posición y_m de la m-ésima franja brillante en una pantalla colocada a una distancia R de las fuentes está dada por la ecuación (35.6). (Véase los ejemplos 35.1 y 35.2).

$$d\,\mathrm{sen}\,\theta = m\lambda \quad (m = 0, \pm1, \pm2, \ldots)$$
(interferencia constructiva) (35.4)

$$d\,\mathrm{sen}\,\theta = \left(m + \tfrac{1}{2}\right)\lambda$$
$(m = 0, \pm1, \pm2, \ldots)$ (35.5)
(interferencia destructiva)

$$y_m = R\frac{m\lambda}{d}$$ (35.6)
(franjas brillantes)



Intensidad en los patrones de interferencia: Cuando se superponen dos ondas sinusoidales con igual amplitud E y diferencia de fase ϕ, la amplitud resultante E_P y la intensidad I están dadas por las ecuaciones (35.7) y (35.10), respectivamente. Si las dos fuentes emiten en fase, la diferencia de fase ϕ en el punto P (localizado a una distancia r_1 de la fuente 1 y a una distancia r_2 de la fuente 2) es directamente proporcional a la diferencia de longitudes de las trayectorias $r_2 - r_1$. (Véase el ejemplo 35.3).

$$E_P = 2E\left|\cos\frac{\phi}{2}\right|$$ (35.7)

$$I = I_0\cos^2\frac{\phi}{2}$$ (35.10)

$$\phi = \frac{2\pi}{\lambda}(r_2 - r_1) = k(r_2 - r_1)$$ (35.11)



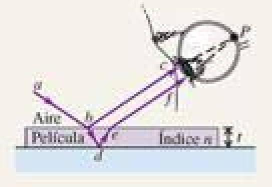
Interferencia en películas delgadas: Cuando se refleja luz en ambos lados de una película delgada de espesor t y no hay corrimiento de fase en ninguna de las superficies, se presenta interferencia constructiva entre las ondas reflejadas cuando $2t$ es igual a un número entero de longitudes de onda. Si en una superficie tiene lugar un corrimiento de fase de medio ciclo, esta es la condición para que haya interferencia destructiva. Durante la reflexión ocurre un corrimiento de fase de medio ciclo siempre que el índice de refracción del segundo material es mayor que el del primero. (Véase los ejemplos 35.4 a 35.7).

$$2t = m\lambda \quad (m = 0, 1, 2, \ldots)$$
(reflexión constructiva en una película delgada, sin corrimiento de fase relativo) (35.17a)

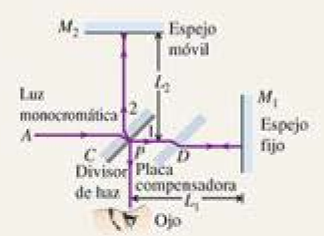
$$2t = \left(m + \tfrac{1}{2}\right)\lambda \quad (m = 0, 1, 2, \ldots)$$
(reflexión destructiva en una película delgada, sin corrimiento de fase relativo) (35.17b)

$$2t = \left(m + \tfrac{1}{2}\right)\lambda \quad (m = 0, 1, 2, \ldots)$$
(reflexión constructiva en una película delgada, con corrimiento de fase relativo de medio ciclo) (35.18a)

$$2t = m\lambda \quad (m = 0, 1, 2, \ldots)$$
(reflexión destructiva en una película delgada, con corrimiento de fase relativo de medio ciclo) (35.18b)



Interferómetro de Michelson: El interferómetro de Michelson utiliza una fuente de luz monocromática y se utiliza para medir longitudes de onda con gran precisión. Su objetivo original fue detectar el movimiento de la Tierra con respecto a un hipotético éter, el supuesto medio de propagación de las ondas electromagnéticas. El éter nunca se detectó y el concepto se abandonó; la rapidez de la luz es la misma con respecto a todos los observadores. Esto es parte del fundamento de la teoría especial de la relatividad.





PROBLEMA PRÁCTICO — Experimento con dos ranuras modificado

Un buque tanque derrama una gran cantidad de petróleo ($n = 1.45$) en el mar ($n = 1.33$). *a*) Si se observa al derrame desde arriba, ¿cuál es la longitud de onda predominante que se ve en un punto en el que el petróleo tiene un espesor de 380 nm? ¿De qué color es la luz? (*Sugerencia:* Consulte la tabla 32.1). *b*) En el agua debajo de la mancha aceitosa, ¿qué longitud de onda visible (medida en el aire) predomina en la luz transmitida en el mismo punto de la mancha que se describe en el inciso *a*)?

GUÍA DE SOLUCIÓN

Véase el área de estudio MasteringPhysics® para consultar una solución con Video Tutor.



IDENTIFICAR y PLANTEAR

1. La capa de petróleo actúa como una película delgada, de modo que se debe considerar la interferencia existente entre la luz que se refleja en las superficies superior e inferior del petróleo. Si una longitud de onda predomina en la luz *transmitida*, hay interferencia destructiva para esa longitud de onda en la luz *reflejada*.
2. Elija las ecuaciones adecuadas de interferencia que relacionan el espesor de la película de petróleo y la longitud de onda de la luz. Tenga en cuenta los índices de refracción del aire, petróleo y agua.

EJECUTAR

3. En el inciso *a*), calcule las longitudes de onda para las cuales existe interferencia constructiva vista desde arriba de la película. ¿Cuáles de ellas están en el espectro visible?
4. En el inciso *b*), obtenga la longitud de onda visible para la cual existe interferencia destructiva vista desde arriba de la película. (Esto garantiza que hay considerable luz transmitida de esa longitud de onda).

EVALUAR

5. Si un buzo debajo del agua dirige una luz hacia arriba a la parte inferior de la película de petróleo, ¿en qué longitudes de onda habría interferencia constructiva en la luz que se refleja hacia abajo?

Problemas

Para tareas asignadas por el profesor, visite www.masteringphysics.com



•, ••, •••: Problemas de dificultad creciente. **PA**: Problemas acumulativos que incorporan material de capítulos anteriores. **CALC**: Problemas que requieren cálculo. **BIO**: Problemas de ciencias biológicas.

PREGUNTAS PARA ANÁLISIS

P35.1 Se realiza un experimento de interferencia con dos ranuras, y las franjas se proyectan en una pantalla. Después, todo el aparato se sumerge en la alberca más cercana. ¿Cómo cambia el patrón de las franjas?

P35.2 ¿Podría efectuarse un experimento similar al que hizo Young con dos ranuras con el sonido? ¿Cómo se llevaría a cabo? ¿Importa que las ondas sonoras sean longitudinales y las electromagnéticas transversales? Explique su respuesta.

P35.3 A través de dos ranuras delgadas pasa luz monocromática coherente que se ve en una pantalla alejada. ¿Las franjas brillantes en la pantalla se encontrarán igualmente separadas? Si es así, ¿por qué? Si no, ¿cuáles están más cerca de estar igualmente separadas?

P35.4 En un patrón de interferencia de dos ranuras sobre una pantalla distante, ¿las franjas brillantes están a la mitad de la distancia que hay entre las franjas oscuras? ¿Siempre es esta una buena aproximación?

P35.5 Las luces de un automóvil distante, ¿formarían un patrón de interferencia de dos fuentes? Si así fuera, ¿cómo podría observarse? Si no, ¿por qué?

P35.6 Las dos fuentes S_1 y S_2 que se aprecian en la figura 35.3 emiten ondas de la misma longitud de onda λ y están en fase entre sí. Suponga que S_1 es una fuente más débil, por lo que las ondas emitidas por S_1 tienen la mitad de la amplitud de las que emite S_2. ¿Cómo afectaría esto las posiciones de las líneas antinodales y nodales? ¿Habría un reforzamiento total en los puntos situados en las curvas antinodales? ¿Habría cancelación total en los puntos situados en las curvas nodales? Explique sus respuestas.

P35.7 ¿Podría efectuarse con rayos gamma el experimento de Young con dos ranuras? Si no fuera posible, ¿por qué? Si se pudiera, analice las diferencias en el diseño experimental en comparación con el experimento con luz visible.

P35.8 Luz coherente de color rojo ilumina dos ranuras angostas separadas por una distancia de 25 cm. ¿Se observará un patrón de interferencia de doble ranura cuando la luz proveniente de las ranuras ilumina una pantalla? Explique su respuesta.

P35.9 Se iluminan con luz coherente de longitud de onda λ dos ranuras estrechas separadas por una distancia d. Si d es menor que cierto

valor mínimo, no se observan franjas oscuras. Explique lo que sucede. En términos de λ, indique cuál es este valor mínimo de d.

P35.10 Un compañero suyo, quien prefiere memorizar las ecuaciones en lugar de entenderlas, combina las ecuaciones (35.4) y (35.13) para "probar" que ϕ *solo* puede ser igual a $2\pi m$. ¿Cómo explicaría a este compañero que ϕ puede tener valores distintos de $2\pi m$?

P35.11 Si la luz monocromática que se ilustra en la figura 35.5*a* se sustituyera por luz blanca, ¿se vería sobre la pantalla un patrón de interferencia de dos ranuras? Explique su respuesta.

P35.12 Al usar el principio de superposición para calcular las intensidades en los patrones de interferencia, ¿se podrían sumar las intensidades de las ondas en lugar de sus amplitudes? Explique su respuesta.

P35.13 El vidrio de una ventana que tiene una fina película de agua sobre él refleja menos que cuando está perfectamente seco. ¿Por qué?

P35.14 Una película de jabón *muy* delgada ($n = 1.33$), cuyo espesor es mucho menor que una longitud de onda de la luz visible, se ve negra; parece que no refleja ninguna luz. ¿Por qué? En contraste, una capa igualmente delgada de agua jabonosa ($n = 1.33$) sobre vidrio ($n = 1.50$) parece muy brillante. ¿A qué se debe esta diferencia?

P35.15 En las películas delgadas puede ocurrir interferencia. ¿Por qué es importante que las películas sean *delgadas*? ¿Por qué no se obtienen estos efectos con una película relativamente *gruesa*? ¿Dónde se debe establecer la línea divisoria entre "delgada" y "gruesa"? Explique su razonamiento.

P35.16 Si se ilumina con luz blanca una cuña de aire como la que se ilustra en la figura 35.12, los colores que son débiles en la luz *reflejada* en cualquier punto a lo largo de la cuña son intensos en la luz *transmitida* a través de la cuña. Explique por qué sucede así.

P35.17 Se hace incidir con dirección normal luz monocromática sobre una película delgada. Hay interferencia destructiva para la luz reflejada, por lo que la intensidad de esta es muy baja. ¿Qué pasó con la energía de la luz incidente?

P35.18 Cuando se extiende una capa delgada de aceite sobre un charco de agua, la parte más delgada de la película se ve oscura en el patrón de interferencia resultante. ¿Qué nos dice esto acerca de las magnitudes relativas de los índices de refracción del aceite y del agua?

EJERCICIOS

Sección 35.1 Interferencia y fuentes coherentes

35.1 • Dos pequeños altavoces estereofónicos A y B que están separados 1.40 m envían ondas sonoras en fase, en todas direcciones, de 34 cm de longitud de onda. Una persona en el punto P que se encuentra equidistante de los dos altavoces, comienza a caminar de modo que siempre está a 1.50 m del altavoz B (figura E35.1). ¿En qué valores de x este individuo percibirá el sonido *a*) reforzado al máximo, y *b*) cancelado? Limite su solución a los casos donde $x \leq 1.50$ m.

Figura **E35.1**



35.2 •• Dos altavoces separados una distancia de 15.0 m producen ondas sonoras en fase con una frecuencia de 250.0 Hz en una habitación donde la rapidez del sonido es de 340.0 m/s. Una mujer se encuentra a la mitad de los altavoces. Las paredes y el techo de la habitación están cubiertos con material absorbente para eliminar la reflexión, y escucha con un solo oído para mejorar la precisión. *a*) ¿Qué es lo que oye: interferencia constructiva o destructiva? ¿Por qué? *b*) Ahora camina lentamente hacia uno de los altavoces. ¿A qué distancia del centro debe caminar antes de que el sonido que oye llegue a su intensidad mínima? *c*) ¿A qué distancia del centro debe caminar antes de oír por primera vez el sonido intenso al máximo?

35.3 •• Dos altavoces idénticos conectados al mismo amplificador producen ondas sonoras en fase de una sola frecuencia que puede modificarse en un intervalo de 300 a 600 Hz. La rapidez del sonido es de 340 m/s. Usted nota que en el lugar donde se encuentra, oye la intensidad mínima de sonido. *a*) Explique por qué oye la intensidad mínima de sonido. *b*) Si uno de los altavoces se mueve 39.8 cm hacia usted, el sonido que oye es la intensidad máxima. ¿Cuál es la frecuencia del sonido? *c*) ¿Qué tan cerca de usted, a partir de la posición del inciso *b*), se debe mover el altavoz a la siguiente posición donde usted oiga la intensidad máxima?

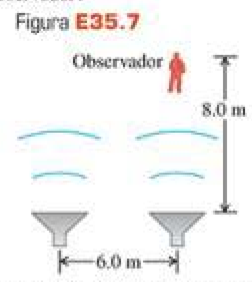
35.4 • **Interferencia de radio.** Dos antenas de radio A y B radian en fase. La antena B se encuentra a 120 m a la derecha de la antena A. Considere el punto Q a lo largo de la extensión de la línea que conecta ambas antenas, a una distancia horizontal de 40 m a la derecha de la antena B. Se puede variar la frecuencia y, por lo tanto, la longitud de onda de las ondas emitidas. *a*) ¿Cuál es la longitud de onda más larga para la que habrá interferencia destructiva en el punto Q? *b*) ¿Cuál es la longitud de onda más larga para la que habrá interferencia constructiva en el punto Q?

35.5 •• Una estación transmisora de radio opera a una frecuencia de 120 MHz y tiene dos antenas idénticas que radian en fase. La antena B está 9.00 m a la derecha de la antena A. Considere el punto P entre las antenas, a lo largo de la línea que las conecta, a una distancia horizontal x a la derecha de la antena A. ¿Para qué valores de x ocurrirá interferencia constructiva en el punto P?

35.6 • Dos fuentes de luz se pueden ajustar para que emitan luz monocromática de cualquier longitud de onda visible. Las dos fuentes coherentes están separadas por una distancia de 2.04 μm y alineadas con un observador, de manera que una fuente está 2.04 μm más lejos del observador que la otra. *a*) ¿Para qué longitudes de onda visibles (de 380 a 750 nm) el observador verá la luz más brillante debido a la interferencia constructiva? *b*) ¿Cómo se verían afectadas sus respuestas al inciso *a*) si las dos fuentes no estuvieran alineadas con el observador, pero mantuvieran un arreglo tal que una de ellas estuviera 2.04 μm más lejos del observador que la otra? *c*) ¿Para qué longitudes de onda de luz visible habría interferencia *destructiva* en la ubicación del observador?

35.7 • Dos altavoces emiten ondas sonoras idénticas con longitud de onda de 2.0 m en fase una con la otra, y un observador está ubicado como se indica en la figura E35.7. *a*) En la ubicación del observador, ¿cuál es la diferencia en las trayectorias de las ondas que salen de los dos altavoces? *b*) En el sitio en que se encuentra el observador, ¿las ondas sonoras interferirán de manera constructiva o destructiva, o de alguna forma intermedia entre constructiva y destructiva? *c*) Suponga que ahora el observador aumenta su distancia con respecto a los altavoces a 17.0 m, y permanece directamente frente al mismo altavoz de antes. Responda las preguntas de los incisos *a*) y *b*) para la nueva situación.

Figura **E35.7**



35.8 •• La figura 35.3 muestra el patrón de ondas producido por dos fuentes coherentes idénticas que emiten ondas con longitud de onda λ y que están separadas por una distancia $d = 4\lambda$. *a*) Explique por qué el eje y positivo por encima de S_1 constituye una curva antinodal con $m = +4$, y por qué el eje y negativo por debajo de S_2 constituye una curva antinodal con $m = -4$. *b*) Dibuje el patrón de ondas producido cuando la separación entre las fuentes se reduce a 3λ. En su dibujo, represente todas las curvas antinodales, es decir, aquellas en las que $r_2 - r_1 = m\lambda$. Identifique cada curva con su valor de m. *c*) En general, ¿qué es lo que determina los valores máximo (más positivo) y mínimo (más negativo) del entero m que identifica las líneas antinodales? *d*) Suponga que la separación entre las fuentes aumenta a 7λ. ¿Cuántas

curvas antinodales habrá? ¿A qué valores de m corresponden? Explique su razonamiento. (Para responder estas preguntas no tiene que hacer un dibujo).

Sección 35.2 Interferencia de la luz procedente de dos fuentes

35.9 • Se realiza el experimento de Young con luz de átomos de helio excitados ($\lambda = 502$ nm). Se miden con cuidado las franjas sobre una pantalla que está a 1.20 m de la doble ranura, y se determina que el centro de la vigésima franja (sin contar la franja brillante central) está a 10.6 mm del centro de la franja brillante central. ¿Cuál es la separación entre las dos ranuras?

35.10 •• Se iluminan dos ranuras con luz coherente cuya longitud de onda es de 450 nm. Sobre una pantalla situada a 1.80 m, la distancia entre las franjas oscuras es de 4.20 mm. ¿Cuál es la separación entre las ranuras?

35.11 •• Dos ranuras separadas por una distancia de 0.450 mm se colocan a 75.0 cm de una pantalla. ¿Cuál es la distancia entre la segunda y la tercera líneas oscuras del patrón de interferencia sobre la pantalla cuando las ranuras se iluminan con luz coherente cuya longitud de onda es de 500 nm?

35.12 •• Si el aparato completo del ejercicio 35.11 (ranuras, pantalla y el espacio intermedio) se sumerge en agua, ¿cuál es la distancia entre la segunda y tercera líneas oscuras?

35.13 •• Dos ranuras paralelas delgadas que están separadas 0.0116 mm son iluminadas por un rayo láser con longitud de onda de 585 nm. *a*) En una pantalla lejana muy grande, ¿cuál es el número *total* de franjas brillantes (aquellas que indican interferencia constructiva completa), incluyendo la franja central y las que están a ambos lados de esta? Resuelva este problema ¡sin calcular todos los ángulos! (*Sugerencia:* Pregúntese cuál es el valor más grande que puede tener sen θ. ¿Qué le dice esto acerca de cuál es el valor máximo de m?). *b*) ¿A qué ángulo con respecto a la dirección original del rayo se presentará la franja más distante de la franja brillante del centro?

35.14 • A través de dos ranuras muy angostas separadas por una distancia de 0.200 mm se hace pasar luz coherente con longitud de onda de 400 nm, y el patrón de interferencia se observa en una pantalla ubicada a 4.00 m de las ranuras. *a*) ¿Cuál es el ancho (en mm) del máximo central de interferencia? *b*) ¿Cuál es el ancho de la franja brillante de primer orden?

35.15 •• Dos ranuras muy angostas están separadas 1.80 μm y se colocan a 35.0 cm de una pantalla. ¿Cuál es la distancia entre la primera y segunda líneas oscuras del patrón de interferencia cuando las ranuras se iluminan con luz coherente de $\lambda = 550$ nm? [*Sugerencia:* Considere que el ángulo θ de la ecuación (35.5) *no* es pequeño].

35.16 •• A través de dos ranuras angostas separadas por una distancia de 0.300 mm pasa luz coherente que contiene dos longitudes de onda, 660 nm (rojo) y 470 nm (azul), y se observa el patrón de interferencia en una pantalla colocada a 5.00 m de las ranuras. ¿Cuál es la distancia en la pantalla entre las franjas brillantes de primer orden para las dos longitudes de onda?

35.17 •• Por dos ranuras muy angostas se hace pasar luz coherente con longitud de onda de 600 nm, y se observa el patrón de interferencia en una pantalla situada a 3.00 m de las ranuras. La franja brillante de primer orden está a 4.84 mm del centro de la franja brillante central. ¿Con qué longitud de onda de la luz se observará la franja oscura de primer orden en ese mismo punto de la pantalla?

35.18 •• Luz coherente con frecuencia de 6.32×10^{14} Hz pasa a través de dos finas ranuras e incide en una pantalla ubicada a 85.0 cm de las ranuras. Usted observa que la tercera franja brillante se presenta a ± 3.11 cm a cada lado de la franja brillante central. *a*) ¿Qué tan separadas están las dos ranuras? *b*) ¿A qué distancia de la franja brillante central se presentará la tercera franja oscura?

Sección 35.3 Intensidad en los patrones de interferencia

35.19 •• En un patrón de interferencia de dos ranuras, la intensidad en el pico del máximo central es I_0. *a*) En cierto punto del patrón en el que la diferencia de fase entre las ondas de las dos ranuras es de 60.0°, ¿cuál es la intensidad? *b*) ¿Cuál es la diferencia de las longitudes de las trayectorias para luz de 480 nm procedente de las dos ranuras en un punto en que el ángulo de fase es de 60.0°?

35.20 • Fuentes coherentes A y B emiten ondas electromagnéticas con longitud de onda de 2.00 cm. El punto P se halla a 4.86 m de A y a 5.24 m de B. ¿Cuál es la diferencia de fase en P entre estas dos ondas?

35.21 • Luz coherente con longitud de onda de 500 nm pasa a través de ranuras angostas separadas por una distancia de 0.340 mm. A una distancia grande de las ranuras, en comparación con su separación, ¿cuál es la diferencia de fase (en radianes) de la luz procedente de las dos ranuras a un ángulo de 23.0° con respecto a la línea central?

35.22 • Dos ranuras separadas 0.260 mm se colocan a 0.700 m de una pantalla y se las ilumina con luz coherente con longitud de onda de 660 nm. La intensidad en el centro del máximo central ($\theta = 0°$) es I_0. *a*) ¿Cuál es la distancia sobre la pantalla desde el centro del máximo central al primer mínimo? *b*) ¿Cuál es la distancia sobre la pantalla desde el centro del máximo central al punto donde la intensidad ha disminuido a $I_0/2$?

35.23 •• Los puntos A y B están separados por una distancia de 56.0 m a lo largo de una línea que va de este a oeste. En cada punto hay un radiotransmisor que emite una señal horizontal de 12.5 MHz. Estos transmisores están en fase uno con otro y emiten sus haces de manera uniforme en un plano horizontal. Se lleva un receptor a 0.500 km al norte de la línea AB y se coloca inicialmente en el punto C, directamente opuesto al punto medio de AB. El receptor se puede mover solo a lo largo de la dirección este-oeste, pero, debido a su sensibilidad limitada, siempre debe estar dentro de un rango de alcance en el que la intensidad de la señal que recibe del transmisor no sea menor de $\frac{1}{4}$ de su valor máximo. ¿Qué tan lejos del punto C (a lo largo de la línea este-oeste) se puede mover el receptor de manera que en todo momento capte la señal?

35.24 • Considere dos antenas separadas por una distancia de 9.00 m que radian en fase a 120 MHz, como se describe en el ejercicio 35.5. Un receptor colocado a 150 m de ambas antenas mide una intensidad I_0. El receptor se mueve de manera que está 1.8 m más cerca de una antena que de la otra. *a*) ¿Cuál es la diferencia de fase ϕ entre las dos ondas de radio producidas por esta diferencia en las trayectorias? *b*) En términos de I_0, ¿cuál es la intensidad medida por el receptor en su nueva posición?

Sección 35.4 Interferencia en películas delgadas

35.25 • ¿Cuál es la película más delgada de un recubrimiento con $n = 1.42$ sobre vidrio ($n = 1.52$) con la cual puede haber interferencia destructiva de la componente roja (650 nm) de un haz incidente de luz blanca en aire por reflexión?

35.26 •• **Vidrio no reflectante.** Cuando se observa una obra de arte que se halla tras un vidrio, es frecuente que la afecte la luz que se refleja en la parte frontal del vidrio (lo que se llama *resplandor*) y que dificulta apreciar la obra claramente. Una solución es recubrir la superficie exterior del vidrio con una película que anule parte del resplandor. *a*) Si el vidrio tiene un índice de refracción de 1.62 y como recubrimiento se utiliza TiO_2, el cual tiene un índice de refracción de 2.62, ¿cuál es el espesor mínimo de película que cancelará la luz de longitud de onda de 505 nm? *b*) Si este recubrimiento es demasiado delgado para usarse, ¿qué otros espesores también funcionarían? Obtenga solo los tres más delgados.

35.27 •• Se colocan dos piezas rectangulares de vidrio plano una sobre la otra y ambas en una mesa. Se coloca una tira delgada de papel entre ellas, en una orilla, de manera que se forma una cuña de aire muy delgada. Se iluminan las placas de vidrio con luz de una lámpara de vapor de mercurio con longitud de onda de 546 nm, que incide normalmente. Se forma un patrón de interferencia con 15.0 franjas por centímetro. Determine el ángulo de la cuña.

35.28 •• Una placa de vidrio de 9.00 cm de largo se pone en contacto con una segunda placa con la que forma un pequeño ángulo cuando

una tira de metal de 0.0800 mm de espesor se coloca en un extremo. El espacio entre las placas está lleno de aire. El vidrio es iluminado desde arriba con luz que tiene una longitud de onda de 656 nm en el aire. ¿Cuántas franjas de interferencia se observan por centímetro en la luz reflejada?

35.29 •• Una película uniforme de TiO_2, con espesor de 1036 nm e índice de refracción de 2.62, se esparce uniformemente sobre una superficie de vidrio *crown* con índice de refracción de 1.52. Luz con longitud de onda de 520.0 nm procedente del aire incide con dirección normal sobre la película. Se desea incrementar el espesor de esta película de manera que la luz reflejada se cancele. *a*) ¿Cuál es el espesor *mínimo* de TiO_2 que debe *agregarse* de manera que la luz reflejada se cancele como se pretende? *b*) Después de hacer el ajuste del inciso *a*), ¿cuál es la diferencia de las trayectorias entre la luz que se refleja en la parte superior de la película y la luz que la cancela después de viajar a través de la película? Exprese la respuesta en **i.** nanómetros y **ii.** longitudes de onda de la luz en la película de TiO_2.

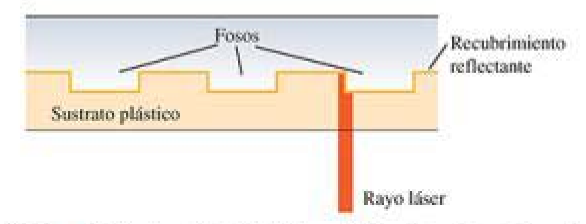
35.30 • Sobre la superficie de la ventana de un automóvil se coloca una película plástica con índice de refracción de 1.85 para incrementar la reflexión y mantener más fresco el interior del vehículo. El vidrio de la ventana tiene un índice de refracción de 1.52. *a*) ¿Cuál es el espesor mínimo que se requiere para que luz con longitud de onda de 550 nm se refleje en ambos lados de la película para interferir constructivamente? *b*) Es difícil fabricar e instalar recubrimientos tan delgados como el del inciso *a*). ¿Cuál es el espesor siguiente más grueso para el que también habría interferencia constructiva?

35.31 • Las paredes de una burbuja de jabón tienen aproximadamente el mismo índice de refracción que el del agua corriente, $n = 1.33$. Dentro y fuera de la burbuja hay aire. *a*) ¿Qué longitud de onda (en el aire) de luz visible se refleja con mayor intensidad en un punto localizado sobre una burbuja cuya pared mide 290 nm de espesor? ¿A qué color corresponde esto? (Véase la figura 32.4 y la tabla 32.1). *b*) Repita el inciso *a*) para un espesor de pared de 340 nm.

35.32 •• Luz procedente del aire con longitud de onda de 648 nm incide perpendicularmente sobre una película con espesor de 8.76 μm e índice de refracción de 1.35. Parte de la luz se refleja en la primera superficie de la película y otra parte entra a la película y se refleja en la segunda superficie, donde la película está de nuevo en contacto con el aire. *a*) ¿Cuántas ondas están contenidas en la trayectoria de esta segunda parte de la luz en su viaje completo a través de la película? *b*) ¿Cuál es la diferencia de fase entre estas dos partes de la luz cuando salen de la película?

35.33 •• **Reproductor de discos compactos.** Los discos compactos (CD) se leen por la parte de abajo mediante un láser semiconductor con longitud de onda de 790 nm que pasa a través de un sustrato plástico cuyo índice de refracción es de 1.8. Cuando el haz encuentra un foso, una parte del haz se refleja en este último y otra parte en la región plana que separa los fosos, de manera que los dos haces interfieren uno con el otro (figura E35.33). ¿Cuál debe ser la profundidad mínima de los fosos de manera que la parte del haz que se refleja en un foso cancele la parte del haz que se refleja en la región plana? (Esta cancelación es lo que permite que el aparato reconozca el comienzo y el final de un foso).

Figura **E35.33**



35.34 • ¿Cuál es la película de jabón más delgada (excluya el caso de espesor igual a cero) que aparece negra cuando se ilumina con luz cuya longitud de onda es de 480 nm? El índice de refracción de la película es 1.33, y en ambos lados de ella hay aire.

Sección 35.5 Interferómetro de Michelson

35.35 • ¿A qué distancia se debe mover el espejo M_2 (véase la figura 35.19) del interferómetro de Michelson de manera que 1800 franjas de luz láser de He-Ne ($\lambda = 633$ nm) se muevan a lo largo de una línea en el campo de visión?

35.36 • Jan utiliza primero un interferómetro de Michelson con luz de 606 nm de una lámpara de kriptón 86. Él aleja el espejo movible con respecto a sí mismo, y cuenta 818 franjas que cruzan una línea en su campo de visión. Después, Linda sustituye la lámpara de kriptón por luz filtrada de 502 nm de una lámpara de helio y desplaza el espejo móvil hacia ella. Linda también cuenta 818 franjas, pero estas cruzan la línea de su campo de visión en dirección opuesta a la observada por Jan. Suponga que tanto Jan como Linda contaron correctamente las 818 franjas. *a*) ¿Qué distancia movió el espejo cada uno? *b*) ¿Cuál es el desplazamiento resultante del espejo?

PROBLEMAS

35.37 ••• El radio de curvatura de la superficie convexa de una lente plano-convexa es de 68.4 cm. Se coloca el lado convexo hacia abajo sobre una placa de vidrio perfectamente plana que se ilumina desde arriba con luz roja cuya longitud de onda es de 580 nm. Determine el diámetro del segundo anillo brillante en el patrón de interferencia.

35.38 •• Los anillos de Newton se observan cuando una lente plano-convexa se coloca sobre una superficie plana de vidrio. Para una lente en particular con índice de refracción de $n = 1.50$ y una placa de vidrio con índice de $n = 1.80$, el diámetro del tercer anillo brillante es de 0.720 mm. Si ahora se llena con agua ($n = 1.33$) el espacio entre la lente y la placa, ¿cuál es el nuevo diámetro del anillo?

35.39 • BIO **Recubrimiento en las lentes de anteojos.** Las lentes de los anteojos se pueden recubrir en las superficies *interiores* para reducir la reflexión de la luz que se desvía hacia el ojo. Si los lentes son un medio de cristal (vidrio) con índice de refracción de 1.62 y el recubrimiento es de fluorita con índice de refracción de 1.432, *a*) ¿qué espesor mínimo de la película se necesita en la lente para eliminar la luz de 550 nm de longitud de onda reflejada hacia el ojo en incidencia normal? *b*) ¿Qué otras longitudes de onda de luz visible se cancelarán o se harán más intensas en la luz reflejada?

35.40 •• BIO **Ojos sensibles.** Después de un examen de la vista, usted se pone gotas en sus ojos sensibles. La córnea (la parte frontal del ojo) tiene un índice de refracción de 1.38, mientras que las gotas para los ojos tienen un índice de refracción de 1.45. Después de ponerse las gotas, sus amigos notan que sus ojos se ven rojos, porque la luz roja de 600 nm de longitud de onda se ha reforzado en la luz reflejada. *a*) ¿Cuál es el espesor mínimo de la película de gotas en su córnea? *b*) ¿Se han reforzado otras longitudes de onda cualesquiera de luz visible en la luz reflejada? ¿Se habrá cancelado alguna? *c*) Suponga que tenía lentes de contacto, de modo que las gotas para los ojos se quedan en ellos en lugar de las córneas. Si el índice de refracción del material de los lentes es de 1.50 y la capa de gotas para los ojos tiene el mismo espesor que en el inciso *a*), ¿qué longitudes de onda de luz visible se reforzarán? ¿Qué longitudes de onda se cancelarán?

35.41 •• Dos placas planas de vidrio con caras paralelas están sobre una mesa, una placa sobre otra. Cada placa tiene 11.0 cm de longitud y un índice de refracción de 1.55. Una hoja muy delgada de papel metálico se inserta bajo el extremo de la placa superior para elevarla ligeramente en ese extremo, de manera similar a la descrita en el ejemplo 35.4. Cuando usted mira las placas de vidrio desde arriba con luz blanca reflejada, observa que a 1.15 mm de la línea donde las placas están en contacto, la luz violeta de 400.0 nm de longitud de onda es más intensa en esta luz reflejada, pero no hay luz visible más intensa más cerca de la línea de contacto. *a*) ¿A qué distancia de la línea de contacto serán más

intensas por primera vez la luz verde (550 nm de longitud de onda) y la luz naranja (600.0 nm de longitud de onda)? *b*) ¿A qué distancia de la línea de contacto será más intensa otra vez la luz violeta, verde y naranja? *c*) ¿Qué espesor tiene la hoja metálica que mantiene separados los extremos de las placas?

35.42 •• En un arreglo similar al del problema 35.41, el vidrio tiene un índice de refracción de 1.53, cada placa tiene 8.00 cm de longitud, y el papel metálico tiene 0.015 mm de espesor. El espacio entre las placas está lleno de un gel cuyo índice de refracción no se conoce con precisión, pero se sabe que es mayor que el del vidrio. Cuando usted ilumina las placas desde arriba con una luz de longitud de onda igual a 525 nm, observa una serie de franjas oscuras igualmente espaciadas en la luz reflejada. Usted mide la separación de estas franjas y determina que hay 10 de ellas cada 6.33 mm. ¿Cuál es el índice de refracción del gel?

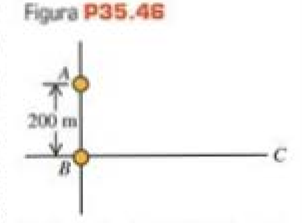
35.43 ••• Suponga que usted ilumina dos ranuras delgadas con luz coherente monocromática en el aire, y determina que produce su primer *mínimo* de interferencia en ±35.20° en cualquier lado del punto brillante central. Luego sumerge las ranuras en un líquido transparente y las ilumina con la misma luz. Ahora determina que el primer mínimo ocurre en ±19.46°. ¿Cuál es el índice de refracción de este líquido?

35.44 •• **PA CALC** Una lámina muy delgada de latón contiene dos ranuras paralelas. Cuando sobre ellas ilumina un rayo láser con incidencia normal y a temperatura ambiente (20.0°C), las primeras franjas oscuras de interferencia se presentan en ±32.5° desde la dirección original del rayo láser cuando se ve desde cierta distancia. Si ahora esta lámina se calienta lentamente a 135°C, ¿en cuántos grados cambian su posición estas franjas oscuras? ¿Se acercan o se separan? Véase la tabla 17.1 (vol. 1) para obtener la información pertinente e ignore cualquier efecto que pudiera ocurrir debido al cambio del espesor de las ranuras. (*Sugerencia:* Como la expansión térmica normalmente produce cambios muy pequeños en la longitud, se pueden usar diferenciales para obtener el cambio del ángulo).

35.45 •• Dos altavoces, separados por una distancia de 2.50 m, son alimentados por el mismo oscilador de audio de manera que cada uno produce un sonido que consiste en *dos* frecuencias distintas, 0.900 kHz y 1.20 kHz. La rapidez del sonido en la habitación es de 344 m/s. Calcule todos los ángulos con respecto a la línea central habitual frente a (y lejos de) los altavoces en los que *ambas* frecuencias interfieren constructivamente.

35.46 •• Dos antenas de radio que radian en fase están colocadas en los puntos *A* y *B*, separadas por una distancia de 200 m (figura P35.46). Las ondas de radio tienen una frecuencia de 5.80 MHz. Se desplaza un receptor de radio desde el punto *B* a lo largo de una línea perpendicular a la línea que une *A* con *B* (línea *BC* en la figura P35.46). ¿A qué distancias de *B* habrá interferencia *destructiva*? [*Nota:* La distancia entre el receptor y las fuentes no es grande en comparación con la separación de las fuentes, por lo que no se aplica la ecuación (35.5)].

Figura **P35.46**

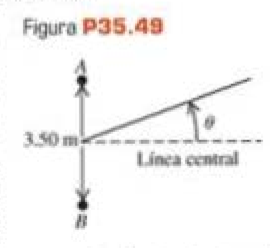


35.47 •• Una de las caras redondas de un tubo cilíndrico y sólido de plástico de 3.25 m está cubierta con un recubrimiento delgado negro que bloquea la luz por completo. La cara opuesta está cubierta por un recubrimiento fluorescente que brilla cuando lo toca la luz. En el centro de la cara negra se hacen dos ranuras paralelas, rectas y delgadas, separadas por 0.225 mm. Cuando a través de estas ranuras pasa luz láser con longitud de onda de 632.8 nm y perpendicular a la cara negra, se ve que la franja brillante central en la cara opuesta es de 5.82 mm de ancho, medida entre las bandas oscuras que la limitan a cada lado. ¿Cuál es el índice de refracción del plástico?

35.48 • Una película delgada uniforme de material con índice de refracción de 1.40 cubre una placa de vidrio con índice de refracción de 1.55. Esta película tiene el espesor adecuado para cancelar luz que incide normalmente con longitud de onda de 525 nm y que llega a la película desde el aire, pero es algo mayor que el espesor mínimo para lograr esta cancelación. Con el paso del tiempo, la película se desgasta a razón constante de 4.20 nm por año. ¿Cuál es el número mínimo de años que deben transcurrir antes de que la luz reflejada de esa longitud de onda sea más intensa en lugar de cancelarse?

35.49 •• Dos altavoces *A* y *B* están separados 3.50 m, y cada uno emite con una frecuencia de 444 Hz. Sin embargo, como la señal se atrasa en los cables, el altavoz *A* está un cuarto de periodo *adelante* del altavoz *B*. En puntos alejados de los altavoces, determine todos los ángulos en relación con la línea central (figura P35.49) en los cuales el sonido de estos altavoces se cancela. Incluya los ángulos a *ambos* lados de la línea central. La rapidez del sonido es de 340 m/s.

Figura **P35.49**



35.50 ••• **PA** Los campos eléctricos recibidos en el punto *P* desde dos fuentes de ondas coherentes e idénticas son $E_1(t) = E\cos(\omega t + \phi)$ y $E_2(t) = E\cos\omega t$. *a*) Utilice alguna identidad trigonométrica del apéndice B para demostrar que la onda resultante es $E_P(t) = 2E\cos(\phi/s)\cos(\omega t + \phi/2)$. *b*) Demuestre que la amplitud de esta onda resultante está dada por la ecuación (35.7). *c*) Con base en el resultado del inciso *a*), demuestre que en un máximo de interferencia la amplitud de la onda resultante está en fase con las ondas originales $E_1(t)$ y $E_2(t)$. *d*) Con base en el resultado del inciso *a*), demuestre que, cerca de un mínimo de interferencia, la onda resultante está fuera de fase aproximadamente $\frac{1}{4}$ de ciclo con cualquiera de las ondas originales. *e*) Demuestre que el vector de Poynting *instantáneo* en el punto *P* tiene una magnitud $S = 4\epsilon_0 cE^2\cos^2(\phi/2)\cos^2(\omega t + \phi/2)$ y que el vector de Poynting *promediado en el tiempo* está dado por la ecuación (35.9).

35.51 •• **PA** Se coloca una película delgada uniforme con índice de refracción de 1.750 sobre una lámina de vidrio con índice de refracción de 1.50. A temperatura ambiente (20.0°C), la película tiene espesor apenas suficiente para que la luz con longitud de onda de 582.4 nm que se refleja en la parte superior de ella sea cancelada por la luz reflejada en la parte superior del vidrio. Después de colocar el vidrio en un horno y calentarlo con lentitud a 170°C, se encuentra que la película cancela la luz reflejada con longitud de onda de 588.5 nm. ¿Cuál es el coeficiente de expansión lineal de la película? (Ignore cualquier cambio en el índice de refracción de la película debido al cambio de temperatura).

35.52 ••• **Transmisión GPS.** Los satélites del Sistema de Posicionamiento Global (GPS, por sus siglas en inglés) miden aproximadamente 5.18 m de un lado a otro y transmiten dos señales de baja potencia, una de las cuales es de 1575.42 MHz (en la banda UHF). En una serie de pruebas de laboratorio, se colocan dos transmisores UHF a 1575.42 MHz en lados opuestos del satélite, los cuales transmiten en fase de manera uniforme en todas direcciones. Se mide la intensidad en puntos en un círculo con radio de varias centenas de metros y con centro en el satélite. Sobre ese círculo se miden ángulos con respecto a un punto situado sobre la línea central del satélite (es decir, la bisectriz perpendicular de una línea que se extiende de un transmisor al otro). En este punto del círculo, la intensidad medida es de 2.00 W/m². *a*) ¿En cuántos otros ángulos en el intervalo $0° < \theta < 90°$ la intensidad también es de 2.00 W/m²? *b*) Calcule los cuatro ángulos más pequeños en el intervalo $0° < \theta < 90°$ para los que la intensidad es de 2.00 W/m². *c*) ¿Cuál es la intensidad en el punto del círculo a un ángulo de 4.65° con respecto a la línea central?

35.53 •• Considere un patrón de interferencia de dos ranuras para el que la distribución de la intensidad está dada por la ecuación (35.14).

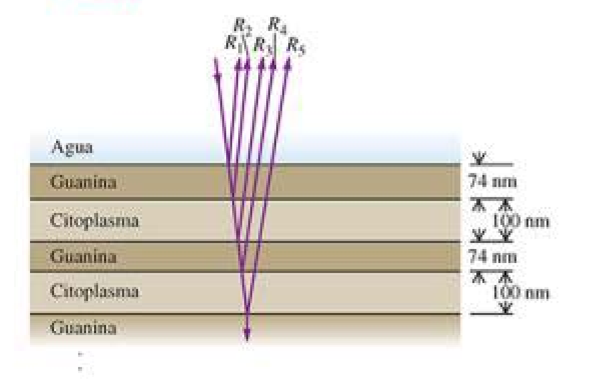
Sea θ_m la posición angular de la m-ésima franja brillante, donde la intensidad es I_0. Suponga que θ_m es pequeño, por lo que sen $\theta_m \cong \theta_m$. Sean θ_m^+ y θ_m^- los dos ángulos a cada lado de θ_m para los que $I = \frac{1}{2}I_0$. La cantidad $\Delta\theta_m = |\theta_m^+ - \theta_m^-|$ es la mitad del ancho de la m-ésima franja. Calcule $\Delta\theta_m$. ¿En qué forma $\Delta\theta_m$ depende de m?

35.54 •• Desde las superficies superior e inferior de una placa de vidrio ($n = 1.52$) se refleja luz blanca que incide en forma normal. Arriba y abajo de la placa hay aire. Se observa interferencia constructiva para luz cuya longitud de onda en el aire es de 477.0 nm. ¿Cuál es el espesor de la placa si la siguiente longitud de onda más larga para la que hay interferencia constructiva es 540.6 nm?

35.55 ••• Se coloca una fuente S de luz monocromática y un detector D en aire a una distancia h sobre una hoja plana de vidrio en posición horizontal, y se separan una distancia horizontal x. Las ondas que llegan a D directamente desde S interfieren con las que se reflejan en el vidrio. La distancia x es pequeña en comparación con h, por lo que la reflexión sucede cerca de la incidencia normal. *a*) Demuestre que la condición para la interferencia constructiva es $\sqrt{x^2 + 4h^2} - x = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda$, y para la interferencia destructiva es $\sqrt{x^2 + 4h^2} - x = m\lambda$. (*Sugerencia:* Tome en cuenta el cambio de fase en la reflexión). *b*) Sea $h = 24$ cm y $x = 14$ cm. ¿Cuál es la mayor longitud de onda para la que habrá interferencia constructiva?

35.56 •• BIO **Recubrimientos reflectantes y los arenques.** Los arenques y otros peces similares tienen un aspecto plateado brillante que les sirve de camuflaje cuando nadan en el océano iluminado por la luz del Sol. Esa apariencia se debe a las *plaquetas* adheridas a la superficie corporal de estos peces. Cada plaqueta está hecha de varias capas alternadas de guanina cristalina ($n = 1.80$) y de citoplasma ($n = 1.333$, un valor igual al del agua), con una capa de guanina en el exterior en contacto con el agua (figura P35.56). En una plaqueta común, las capas de guanina miden 74 nm de espesor y las capas de citoplasma miden 100 nm de espesor. *a*) Cuando llega luz a la superficie de la plaqueta con incidencia normal, ¿para qué longitudes de onda de la luz visible en el vacío estarán aproximadamente en fase todas las reflexiones R_1, R_2, R_3, R_4 y R_5, ilustradas en la figura P35.56? Si a esta plaqueta la alcanza luz blanca, ¿qué color se reflejará con más intensidad? (Véase la figura 32.4). La superficie de un arenque tiene muchas plaquetas unas al lado de las otras en capas de diferente espesor, de manera que se reflejan *todas* las longitudes de onda visibles. *b*) Explique por qué una "pila" de capas es más reflectante que una sola capa de guanina con citoplasma debajo de ella. (Una pila de cinco capas de guanina separadas por capas de citoplasma refleja más del 80% de la luz incidente con la longitud de onda para la que está "sintonizada"). *c*) El color que se refleja con más intensidad en una plaqueta depende del ángulo con que se mira. Explique por qué debe ser así. (Estos cambios de color se aprecian si se observa un arenque desde distintos ángulos. La mayoría de las plaquetas de estos peces están orientadas de la misma manera, en forma tal que quedan verticales cuando el pez nada).

Figura **P35.56**



35.57 • Una película opaca tiene dos ranuras paralelas delgadas. Cuando se dirige a través de ellas un haz de luz monocromática con incidencia normal, las primeras franjas brillantes en la luz transmitida se presentan en el aire a ±18.0° con respecto a la dirección original del haz de luz en una pantalla distante cuando el aparato está en el aire; y si este se sumerge en un líquido, las mismas franjas brillantes se presentan a ±12.6°. Determine el índice de refracción del líquido.

35.58 •• Se hace pasar luz roja con longitud de onda de 700 nm a través de un aparato con dos ranuras. Al mismo tiempo, por el aparato pasa luz visible monocromática con otra longitud de onda. Como resultado, la mayor parte del patrón que aparece en la pantalla es una mezcla de dos colores; sin embargo, el centro de la tercera franja brillante ($m = 3$) de la luz roja aparece como un rojo puro, sin nada del otro color. ¿Cuáles son las posibles longitudes de onda del segundo tipo de luz visible? ¿Necesita conocer la separación de las ranuras para responder esta pregunta? ¿Por qué?

35.59 ••• En un experimento de Young con dos ranuras se coloca una pieza de vidrio con índice de refracción n y espesor L frente a la ranura superior. *a*) Describa en forma cualitativa lo que pasa con el patrón de interferencia. *b*) Obtenga una expresión para la intensidad I de la luz en puntos sobre una pantalla como función de n, L y θ. Aquí, θ es el ángulo habitual medido desde el centro de las dos ranuras. Es decir, determine la ecuación análoga a la (35.14) pero que también incluye a L y n de la placa de vidrio. *c*) Con el resultado del inciso *b*) obtenga una expresión para los valores de θ que ubican los máximos del patrón de interferencia [es decir, obtenga una ecuación análoga a la (35.4).]

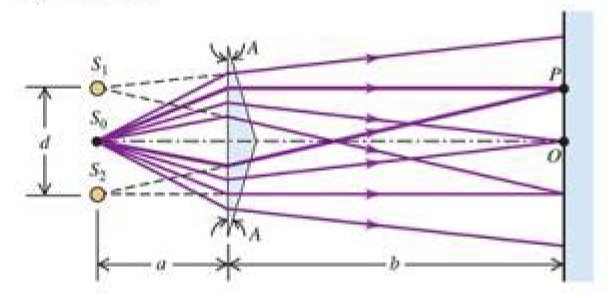
35.60 •• Después de que un rayo láser pasa a través de dos ranuras delgadas paralelas, las primeras franjas completamente oscuras se presentan a ±19.0° con respecto a la dirección original del rayo, como se observa en una pantalla alejada de las ranuras. *a*) ¿Cuál es la razón de la distancia entre las ranuras con respecto a la longitud de onda de la luz que las ilumina? *b*) ¿Cuál es el ángulo más pequeño con respecto a la dirección original del rayo láser con el que la intensidad de la luz es $\frac{1}{10}$ de la intensidad máxima sobre la pantalla?

PROBLEMAS DE DESAFÍO

35.61 ••• PA El índice de refracción de una varilla de vidrio es 1.48 a $T = 20.0$°C, y varía en forma lineal con la temperatura, con un coeficiente de 2.50×10^{-5}/C°. El coeficiente de expansión lineal del vidrio es 5.00×10^{-6}/C°. A 20.0°C la longitud de la varilla es de 3.00 cm. Un interferómetro de Michelson tiene esta varilla en un brazo, la cual se calienta de manera que su temperatura aumenta a razón de 5.00 C°/min. La fuente de luz tiene una longitud de onda $\lambda = 589$ nm, y la varilla está inicialmente a $T = 20.0$°C. ¿Cuántas franjas cruzan el campo visual cada minuto?

35.62 ••• PA La figura P35.62 ilustra un interferómetro conocido como *biprisma de Fresnel*. La magnitud del ángulo A del prisma es

Figura **P35.62**



extremadamente pequeña. *a*) Si S_0 es una ranura fuente muy angosta, demuestre que la separación de las dos fuentes coherentes virtuales S_1 y S_2 está dada por $d = 2aA(n - 1)$, donde n es el índice de refracción del material del prisma. *b*) Calcule la separación de las franjas de luz verde con longitud de onda de 500 nm sobre una pantalla a 2.00 m del biprisma. Considere que $a = 0.200$ m, $A = 3.50$ mrad y $n = 1.50$.

Respuestas

Pregunta inicial del capítulo 

Los colores aparecen debido a la interferencia constructiva entre las ondas luminosas reflejadas en las superficies externa e interna de la burbuja de jabón. El espesor de las paredes de la burbuja en cada punto determina la longitud de onda de la luz para la que ocurre la interferencia más constructiva y, por lo tanto, el color más brillante aparece en ese punto (véase el ejemplo 35.4 en la sección 35.4).

Preguntas de las secciones Evalúe su comprensión

35.1 Respuesta: i. En cualquier punto P sobre el eje y positivo por arriba de S_1, la distancia r_2 de S_2 a P es mayor que la distancia r_1 de S_1 a P por 4λ. Esto corresponde a $m = 4$ en la ecuación (35.1), referente a la interferencia constructiva. Así, todos esos puntos forman una curva antinodal.

35.2 Respuesta: ii. La luz azul tiene una longitud de onda más corta que la roja (véase la sección 32.1). La ecuación (35.6) dice que la distancia y_m desde el centro del patrón a la m-ésima franja brillante es proporcional a la longitud de onda λ. Por consiguiente, todas las franjas se moverán hacia el centro del patrón conforme la longitud de onda disminuya, y la separación entre las franjas se reducirá.

35.3 Respuesta: i, iv, ii, iii. En los casos **i** y **iii** se da la longitud de onda λ y la diferencia de trayectorias d sen θ. Por lo tanto, se usa la ecuación (35.14): $I = I_0 \cos^2[(\pi d \text{ sen } \theta)/\lambda]$. En los incisos **ii** y **iii** se da la diferencia de fase ϕ y se utiliza la ecuación (35.10), $I = I_0 \cos^2(\phi/2)$. Se obtiene:
i. $I = I_0\cos^2[\pi(4.00 \times 10^{-7}\text{ m})/(5.00 \times 10^{-7}\text{ m})] = I_0\cos^2(0.800\pi\text{ rad}) = 0.655I_0$;
ii. $I = I_0\cos^2[(4.00\text{ rad})/2] = I_0\cos^2(2.00\text{ rad}) = 0.173I_0$;
iii. $I = I_0\cos^2[\pi(7.50 \times 10^{-7}\text{ m})/(5.00 \times 10^{-7}\text{ m})] = I_0\cos^2(1.50\pi\text{ rad}) = 0$;
iv. $I = I_0\cos^2[(2.00\text{ rad})/2] = I_0\cos^2(1.00\text{ rad}) = 0.292I_0$.

35.4 Respuestas: i y iii. El benceno tiene un índice de refracción mayor que el del aire, por lo que la luz que se refleja en la superficie superior del benceno experimenta un corrimiento de fase de medio ciclo. La fluorita tiene un índice de refracción *menor* que el del benceno, de manera que la luz que se refleja en la interfase benceno-fluorita no experimenta un corrimiento de fase. Por lo tanto, la ecuación para la reflexión constructiva es la ecuación (35.18*a*), $2t = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda$, que se rescribe como $t = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda/2 = \left(m + \frac{1}{2}\right)(400\text{ mm})/2 = 100$ nm, 300 nm, 500 nm, …

35.5 Respuesta: sí Al cambiar el índice de refracción cambia la longitud de onda de la luz dentro de la placa del compensador y, por lo tanto, cambia el número de longitudes de onda dentro del espesor de la placa. Así, esto tiene el mismo efecto que si se cambiara la distancia L_1 entre el divisor de haz y el espejo M_1, lo que modificaría el patrón de interferencia.

Problema práctico

Respuestas: *a*) 441 nm *b*) 551 nm

36 DIFRACCIÓN



? El láser utilizado para leer DVD tiene una longitud de onda de 650 nm; mientras que el láser utilizado para leer un disco de tecnología Blu-ray tiene una longitud de onda de 405 nm. ¿Cómo hace esto posible que un disco de tecnología Blu-ray contenga mayor información que un DVD?

OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

Al estudiar este capítulo, usted aprenderá:

- Qué sucede cuando la luz coherente incide sobre un objeto con un borde o una abertura.
- Cómo interpretar el patrón de difracción que se forma cuando la luz coherente pasa por una ranura angosta.
- Cómo calcular la intensidad en varios puntos de un patrón de difracción de una sola ranura.
- Qué sucede cuando la luz coherente incide sobre un sistema de ranuras angostas ligeramente espaciadas.
- Cómo utilizan los científicos las rejillas de difracción para hacer mediciones precisas de la longitud de onda.
- Cómo la difracción de rayos x revela la configuración de los átomos en un cristal.
- Cómo la difracción establece límites para los detalles más pequeños que se pueden ver con un telescopio.

Todos estamos familiarizados con la idea de que el sonido da vuelta en las esquinas. Si el sonido no se comportara de este modo, no podríamos oír la sirena de una patrulla que suena a la vuelta de una esquina, donde no la vemos, o lo que nos dice una persona que está de espaldas a nosotros. Lo que quizá resulta sorprendente (y sin duda lo fue para muchos científicos de principios del siglo XIX) es que la *luz* también puede doblar las esquinas. Cuando la luz proveniente de una fuente puntual ilumina un borde recto y proyecta una sombra, el borde de la sombra nunca es perfectamente nítido. Se observa un poco de luz en el área que esperaríamos que estuviera en la sombra, y vemos que hay franjas brillantes y oscuras que se alternan en el área iluminada. En general, la luz que sale de aberturas no se comporta exactamente de acuerdo con las predicciones del modelo de rayos rectilíneos de la óptica geométrica.

La razón de estos efectos es que la luz, como el sonido, tiene características de onda. En el capítulo 35 estudiamos los patrones de interferencia que se producen cuando se combinan dos ondas luminosas. En este capítulo investigaremos los efectos de la interferencia debidos a la combinación de *muchas* ondas luminosas. Estos efectos se conocen como *difracción.* Descubriremos que el comportamiento de las ondas después de pasar a través de una abertura es un ejemplo de difracción; cada parte infinitesimal de la abertura actúa como una fuente de ondas, y el patrón resultante de luz y oscuridad es producto de la interferencia entre las ondas que proceden de estas fuentes.

La luz que emerge de arreglos de aberturas también forma patrones, cuyas características dependen del color de la luz, así como del tamaño y la separación de las aberturas. Ejemplos de este efecto son los colores iridiscentes de las mariposas y el "arcoíris" que vemos reflejado en la superficie de un disco compacto. Examinaremos efectos parecidos con rayos x, que se usan para estudiar la estructura atómica de sólidos y líquidos. Por último, estudiaremos la física de los *hologramas*, una clase especial de patrones de interferencia que se graban en una película fotográfica y luego se reproducen. Cuando un holograma se ilumina como es debido, forma una imagen tridimensional del objeto original.

36.1 Difracción de Fresnel y de Fraunhofer

De acuerdo con la óptica geométrica, cuando un objeto opaco se interpone entre una fuente puntual de luz y una pantalla, como en la figura 36.1, la sombra del objeto forma una línea perfectamente definida. Nada de luz incide en la pantalla en los puntos que están dentro de la sombra, y el área fuera de la sombra aparece iluminada de modo casi uniforme. Sin embargo, como vimos en el capítulo 35, la naturaleza *ondulatoria* de la luz origina efectos que resultarían incomprensibles con base en la óptica geométrica. Se produce una clase importante de estos efectos cuando la luz incide en una barrera que tiene una abertura o un borde. Los patrones de interferencia que se forman en estas situaciones se agrupan en el concepto de **difracción**.

En la figura 36.2 se muestra un ejemplo de difracción. La fotografía de la figura 36.2*a* se obtuvo colocando una navaja de afeitar a medio camino entre un orificio muy pequeño, iluminado con luz monocromática, y una película fotográfica. La película registró la sombra que proyectaba la navaja. La figura 36.2*b* es la ampliación de una región próxima a la sombra del borde derecho de la navaja. Las flechas indican la posición de la línea de sombra *geométrica*. El área que se encuentra afuera de la sombra geométrica está bordeada por bandas brillantes y oscuras alternas. Hay un poco de luz en la región de la sombra, aunque esto no es muy visible en la fotografía. La primera banda brillante de la figura 36.2*b*, inmediatamente a la derecha de la sombra geométrica, es considerablemente más brillante que en la región de iluminación uniforme de la extrema derecha. Este sencillo experimento nos da idea de la riqueza y complejidad de algo que parecería una idea muy sencilla: la proyección de una sombra por un objeto opaco.

No es frecuente observar patrones de difracción como el de la figura 36.2 en la vida diaria, porque casi todas las fuentes ordinarias de luz no son monocromáticas ni fuentes puntuales. Si se utilizara una bombilla eléctrica blanca esmerilada, en lugar de una fuente puntual, para iluminar la navaja de afeitar de la figura 36.2, cada longitud de onda de la luz proveniente de todos los puntos de la bombilla formaría su propio patrón de difracción; sin embargo, los patrones se traslaparían a tal grado que no veríamos ningún patrón individual.

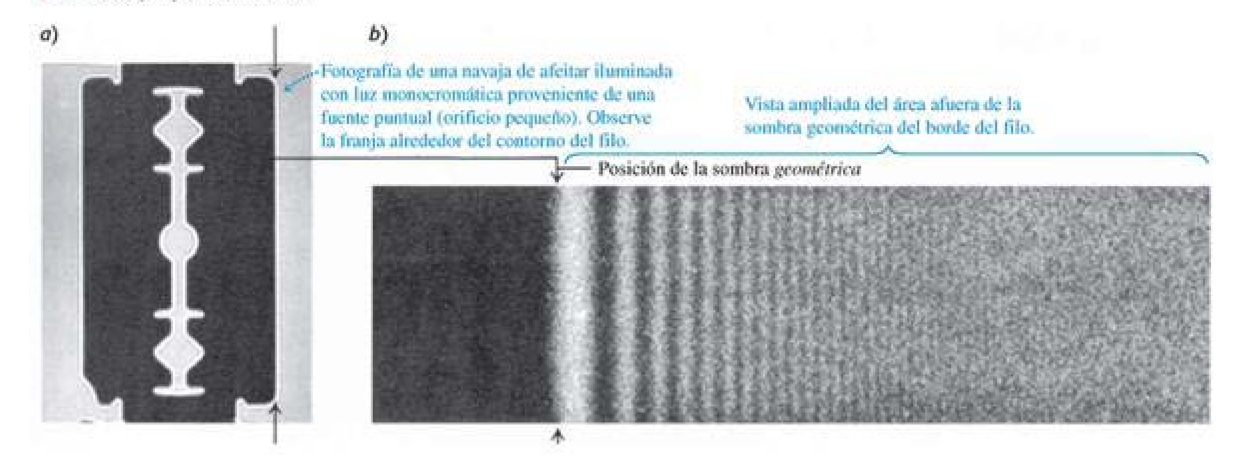
36.1 Una fuente puntual de luz ilumina un borde recto.



Difracción y principio de Huygens

Es posible analizar los patrones de difracción usando el principio de Huygens (véase la sección 33.7). Este principio establece que cada punto de un frente de onda puede considerarse como una fuente de ondas secundarias, que se extienden en todas direcciones con rapidez igual a la de propagación de la onda. La posición del frente de onda en cualquier momento subsiguiente es la *envolvente* de las ondas secundarias en ese instante. Para obtener el desplazamiento resultante en cualquier punto, se combinan todos los desplazamientos individuales producidos por estas ondas secundarias con base en el principio de superposición, teniendo en cuenta sus amplitudes y fases relativas.

36.2 Un ejemplo de difracción.



En la figura 36.1, tanto la fuente puntual como la pantalla están relativamente cerca del obstáculo que forma el patrón de difracción. Esta situación se conoce como *difracción de campo cercano* o **difracción de Fresnel** (se pronuncia "Frenel"), así llamada en honor del científico francés Augustin Jean Fresnel (1788-1827). En contraste, usamos el término **difracción de Fraunhofer** (en honor del físico alemán Joseph von Fraunhofer, 1787-1826) si la fuente, el obstáculo y la pantalla están lo suficientemente alejados para considerar como paralelas todas las líneas de la fuente al obstáculo y todas las líneas del obstáculo a un punto de la pantalla. Restringiremos el análisis que sigue a la difracción de Fraunhofer, el cual usualmente es más sencillo de analizar en detalle que la difracción de Fresnel.

En ocasiones la difracción se describe como "la luz que rodea un obstáculo". Sin embargo, el proceso que origina la difracción se presenta en la propagación de *toda* clase de ondas. Cuando un obstáculo impide el paso de una parte de la onda, se observan efectos de difracción que son resultado de la interferencia de las partes restantes de los frentes de onda. Normalmente, los instrumentos ópticos utilizan solo una porción limitada de una onda; por ejemplo, los telescopios usan solo la parte de una onda que es admitida por su lente objetivo o espejo. Por consiguiente, la difracción está presente en casi todos los fenómenos ópticos.

Por último, hacemos hincapié en que no existe una distinción fundamental entre *interferencia* y *difracción*. En el capítulo 35 aplicamos el término *interferencia* a los efectos en los que intervienen ondas de un número pequeño de fuentes, dos por lo regular. La *difracción* se relaciona normalmente con una distribución *continua* de ondas de Huygens que pasan a través de una abertura, o con un número muy grande de fuentes o aberturas. Pero tanto la interferencia como la difracción son producto de la superposición y del principio de Huygens.

Evalúe su comprensión de la sección 36.1 ¿Las ondas *sonoras* experimentan difracción en torno a un borde? ❙



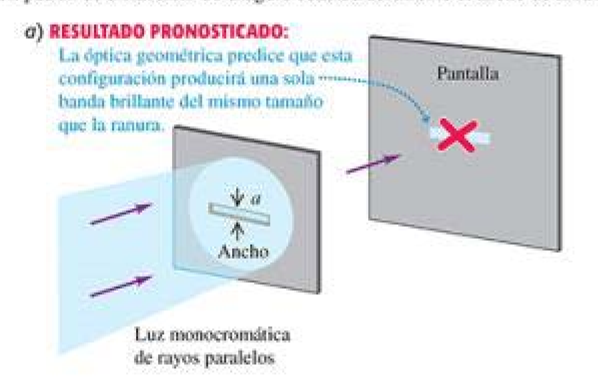
PhET: Wave Interference
ActivPhysics 16.6: Single-Slit Diffraction

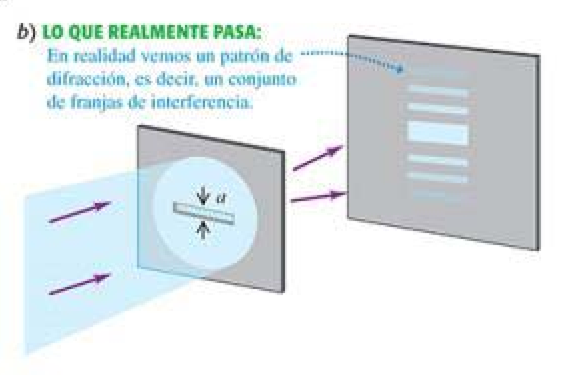
36.2 Difracción con una sola ranura

En esta sección analizaremos el patrón de difracción que forma la luz monocromática de ondas planas (rayos paralelos) cuando emerge de una ranura larga y angosta, como se muestra en la figura 36.3. Llamaremos *ancho* a la dimensión angosta, no obstante que en esta figura se trata de una dimensión vertical.

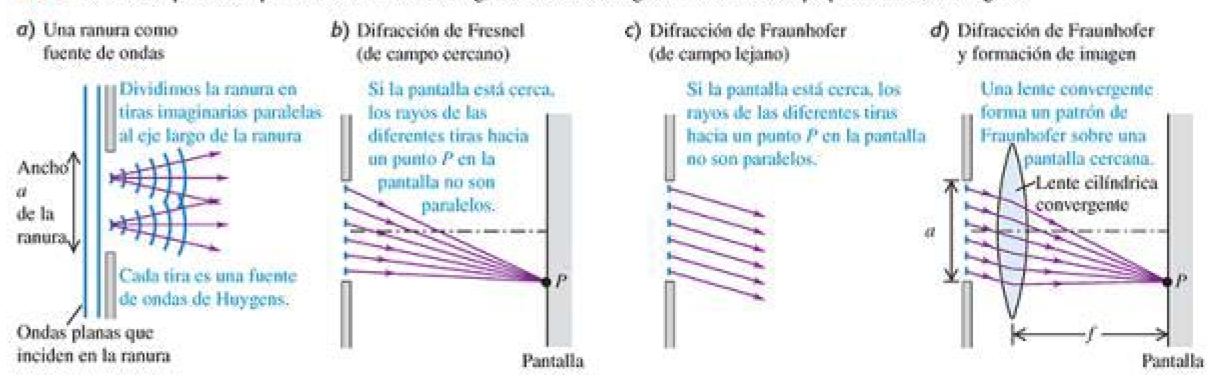
De acuerdo con la óptica geométrica, el haz transmitido debe tener la misma sección transversal de la ranura, como en la figura 36.3*a*. Lo que se observa *en realidad* es el patrón que se muestra en la figura 36.3*b*. El haz se ensancha en sentido vertical después de pasar por la ranura. El patrón de difracción consiste en una banda central brillante, que puede ser mucho más amplia que el ancho de la ranura, limitada por bandas oscuras y brillantes alternas, cuya intensidad decrece rápidamente. Alrededor del 85% de la potencia del haz transmitido se encuentra en la banda brillante central,

36.3 *a*) La óptica geométrica predice incorrectamente la "sombra" de una ranura horizontal. *b*) Una ranura horizontal forma en realidad un patrón de difracción. Se exageró considerablemente el ancho de la ranura.





36.4 Difracción producida por una sola ranura rectangular. Los lados largos de la ranura son perpendiculares a la figura.



cuya anchura es *inversamente* proporcional al ancho de la ranura. En general, cuanto menos ancha sea la ranura, más amplio será el patrón de difracción en su totalidad. (El ensanchamiento *horizontal* del haz en la figura 36.3*b* es insignificante, porque la dimensión horizontal de la ranura es relativamente grande). Es posible observar un patrón de difracción similar mirando una fuente puntual, como un farol distante, por ejemplo, a través de una abertura angosta formada por los dedos pulgares colocados delante del ojo; la retina del ojo corresponde a la pantalla.

Difracción de una sola ranura: Ubicación de las franjas oscuras

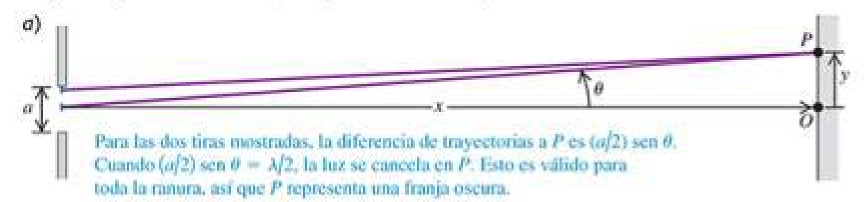
La figura 36.4 muestra una vista lateral del mismo arreglo; los lados largos de la ranura son perpendiculares a la figura, y las ondas planas inciden en la ranura desde la izquierda. De acuerdo con el principio de Huygens, cada elemento de área de la abertura de la ranura puede considerarse una fuente de ondas secundarias. En particular, imagine que dividimos la ranura en varias tiras angostas de igual anchura, paralelas a los bordes largos y perpendiculares a la página. En la figura 36.4*a* se muestran dos de estas tiras. A partir de cada tira se propagan ondas secundarias cilíndricas, las cuales se muestran en sección transversal.

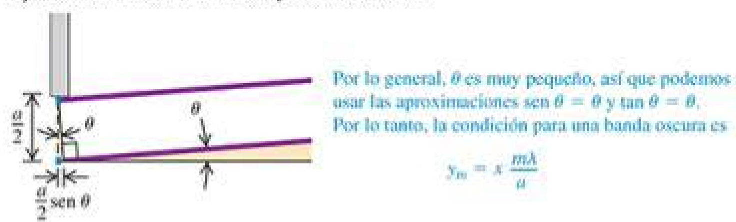
En la figura 36.4*b* se colocó una pantalla a la derecha de la ranura. Podemos calcular la intensidad resultante en el punto P de la pantalla al sumar las contribuciones de las ondas individuales, teniendo en cuenta como es debido sus diversas fases y amplitudes. Resulta mucho más fácil realizar este cálculo si suponemos que la pantalla está lo suficientemente lejos para considerar que todos los rayos, que van de diversas partes de la ranura a un punto P específico de la pantalla, son paralelos, como en la figura 36.4*c*. Una situación equivalente es la que se representa en la figura 36.4*d*, donde los rayos que inciden en la lente son paralelos, y la lente forma una imagen reducida del patrón que se formaría en una pantalla infinitamente distante sin la lente. Cabría esperar que las diversas trayectorias de la luz a través de la lente introdujeran nuevos corrimientos de fase pero, de hecho, es posible demostrar que todas las trayectorias tienen corrimientos de fase *iguales*, por lo que esto no representa un problema.

La situación de la figura 36.4*b* es una difracción de Fresnel; en las figuras 36.4*c* y 36.4*d*, donde se considera que los rayos que salen son paralelos, la difracción es de Fraunhofer. Podemos deducir con mucha facilidad las características más importantes del patrón de difracción de Fraunhofer correspondiente a una sola ranura. Considere en primer término dos tiras angostas, una inmediatamente debajo del borde superior del dibujo de la ranura y otra en su centro, las cuales se muestran vistas desde un extremo en la figura 36.5. La diferencia de longitud de las trayectorias al punto P es $(a/2)$ sen θ, donde a es el ancho de la ranura y θ es el ángulo entre la perpendicular a la ranura y una recta del centro de la ranura a P. Suponga que esta diferencia de trayectorias resulta ser igual a $\lambda/2$; entonces, la luz proveniente de estas dos tiras alcanza el punto P con una diferencia de fase de medio ciclo, y hay cancelación.

De forma análoga, la luz proveniente de dos tiras inmediatamente *debajo* de las dos de la figura también llega a P desfasada medio ciclo. De hecho, la luz proveniente de *cada una* de las tiras de la mitad superior de la ranura cancela la luz proveniente de una

36.5 Vista lateral de una ranura horizontal. Cuando la distancia x a la pantalla es mucho mayor que el ancho a de la ranura, los rayos provenientes de puntos separados por una distancia $a/2$ se pueden considerar paralelos.





tira correspondiente de la mitad inferior. Por ello, la luz combinada de la ranura completa se cancela totalmente en P, y se forma una franja oscura en el patrón de interferencia. Es decir, se produce una franja oscura siempre que

$$\frac{a}{2}\operatorname{sen}\theta = \pm\frac{\lambda}{2} \qquad \text{o bien,} \qquad \operatorname{sen}\theta = \pm\frac{\lambda}{a} \tag{36.1}$$

El signo más-menos (±) de la ecuación (36.1) significa que hay franjas oscuras simétricas arriba y abajo del punto O en la figura 36.5a. La franja superior ($\theta > 0$) aparece en un punto P, donde la luz proveniente de la mitad inferior de la ranura recorre $\lambda/2$ más distancia para llegar a P que la luz procedente de la mitad superior; la franja inferior ($\theta < 0$) se presenta donde la luz proveniente de la mitad *superior* recorre $\lambda/2$ más distancia que la luz procedente de la mitad *inferior*.

También podemos dividir la pantalla en cuartos, sextos, etcétera, y utilizar el argumento anterior para demostrar que se presenta una franja oscura siempre que sen $\theta = \pm 2\lambda/a$, $\pm 3\lambda/a$, y así sucesivamente. De esta forma, la condición para que haya una franja *oscura* es

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{m\lambda}{a} \qquad (m = \pm1, \pm2, \pm3, \dots) \qquad \text{(franjas oscuras en difracción con una ranura)} \tag{36.2}$$

Por ejemplo, si el ancho de la ranura es igual a 10 longitudes de onda ($a = 10\lambda$), aparecen franjas oscuras en sen $\theta = \pm\frac{1}{10}, \pm\frac{2}{10}, \pm\frac{3}{10}, \dots$ Entre las franjas oscuras hay franjas brillantes. También se observa que sen $\theta = 0$ corresponde a una banda *brillante*; en este caso, la luz de toda la ranura llega a P en fase. Por lo tanto, sería erróneo incluir $m = 0$ en la ecuación (36.2). La franja central brillante es más ancha que las otras franjas brillantes, como lo muestra la figura 36.3b. En la aproximación de ángulos pequeños que utilizaremos en seguida, es exactamente *dos veces* más ancha.

Con luz, la longitud de onda λ es del orden de 500 nm $= 5 \times 10^{-7}$ m. Este valor es con frecuencia mucho menor que el ancho a de la ranura; un ancho de ranura típico es de 10^{-2} cm $= 10^{-4}$ m. Por consiguiente, los valores de θ en la ecuación (36.2) suelen ser tan pequeños que la aproximación sen $\theta \approx \theta$ (donde θ está en radianes) es muy buena. En ese caso, podemos rescribir esta ecuación como

$$\theta = \frac{m\lambda}{a} \qquad (m = \pm1, \pm2, \pm3, \dots) \qquad \text{(para ángulos } \theta \text{ pequeños)}$$

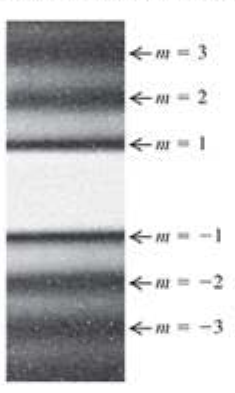
donde θ está en *radianes*. Asimismo, si la distancia de la ranura a la pantalla es x, como en la figura 36.5a, y la distancia vertical de la m-ésima banda oscura al centro

del patrón es y_m, entonces $\tan\theta = y_m/x$. Si θ es pequeño también podemos aproximar $\tan\theta$ por θ (en radianes), y en tal caso resulta que

$$y_m = x\frac{m\lambda}{a} \qquad (\text{para } y_m \ll x) \tag{36.3}$$

La figura 36.6 es una fotografía de un patrón de difracción con una sola ranura donde se identifican los mínimos $m = \pm 1$, ± 2 y ± 3.

36.6 Fotografía del patrón de difracción de Fraunhofer con una sola ranura horizontal.



CUIDADO **Difracción con una sola ranura contra interferencia con dos ranuras** La ecuación (36.3) tiene la misma forma que la ecuación correspondiente al patrón de dos ranuras [ecuación (35.6)], excepto que en la ecuación (36.3) representamos la distancia a la pantalla como x en lugar de R. Pero la ecuación (36.3) da las posiciones de las franjas *oscuras* en un patrón con una *sola ranura*, en lugar de las franjas *brillantes* de un patrón con *doble ranura*. Además, en la ecuación (36.2) $m = 0$ *no* es una franja oscura. ¡Tenga cuidado!

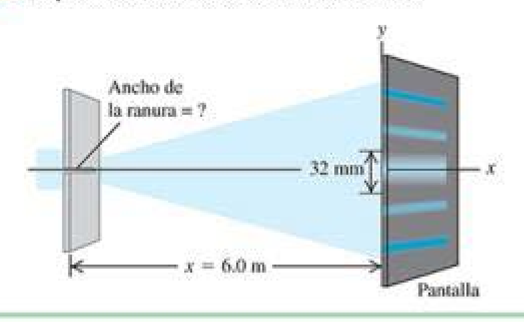
Ejemplo 36.1 Difracción con una ranura

Se hace pasar un láser de 633 nm a través de una ranura angosta y se observa el patrón de difracción en una pantalla a 6.0 m de distancia. La distancia en la pantalla entre los centros de los primeros mínimos en ambos lados de la franja brillante central es de 32 mm (figura 36.7). ¿Cuál es el ancho de la ranura?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Este problema implica la relación entre las posiciones de las franjas oscuras en un patrón de difracción en una sola ranura y el ancho a de la ranura (la incógnita). Las distancias entre las franjas en la pantalla son mucho menores que la distancia de la ranura a la pantalla; por ello, el ángulo θ de la figura 36.5*a* es muy pequeño y se utiliza la ecuación (36.3) para despejar a.

36.7 Experimento de difracción con una sola ranura.



EJECUTAR: El primer mínimo corresponde a $m = 1$ en la ecuación (36.3). La distancia y_1 del máximo central al primer mínimo de uno u otro lado es la mitad de la distancia entre los primeros dos mínimos; así que $y_1 = (32 \text{ mm})/2 = 16$ mm. Despejando a de la ecuación (36.3), se obtiene

$$a = \frac{x\lambda}{y_1} = \frac{(6.0 \text{ m})(633 \times 10^{-9} \text{ m})}{16 \times 10^{-3} \text{ m}} = 2.4 \times 10^{-4} \text{ m} = 0.24 \text{ mm}$$

EVALUAR: El ángulo θ es pequeño solo si la longitud de onda es pequeña en comparación con el ancho de ranura. Puesto que $\lambda = 633$ nm $= 6.33 \times 10^{-7}$ m y $a = 0.24$ mm $= 2.4 \times 10^{-4}$ m, nuestro resultado es congruente con esto: la longitud de onda es $(6.33 \times 10^{-7} \text{ m})/(2.4 \times 10^{-4} \text{ m}) = 0.0026$ veces el ancho de la ranura. ¿Podría usted demostrar que la distancia entre los *segundos* mínimos de los dos lados es 2(32 mm) = 64 mm, y así sucesivamente?

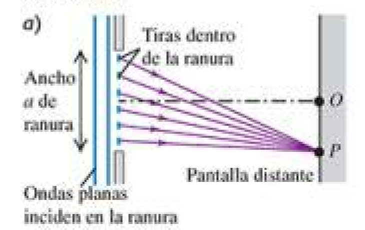
Evalúe su comprensión de la sección 36.2 Ordene de mayor a menor los siguientes experimentos de difracción con una sola ranura, según el tamaño del ángulo desde el centro del patrón de difracción hasta la primera franja oscura: **i.** Longitud de onda de 400 nm, ancho de ranura 0.20 mm; **ii.** longitud de onda de 600 nm, ancho de ranura 0.20 mm; **iii.** longitud de onda de 400 nm, ancho de ranura de 0.30 mm; **iv.** longitud de onda de 600 nm, ancho de ranura 0.30 mm.

36.3 Intensidad en el patrón con una sola ranura

Podemos deducir una expresión para la distribución de intensidades en el patrón de difracción con una sola ranura, aplicando el mismo método que utilizamos en la sección 35.3, para obtener las ecuaciones (35.10) y (35.14) correspondientes al patrón de interferencia con dos ranuras. Una vez más, imagine un frente de onda plano en la ranura, subdividido en un gran número de tiras. Superponemos las contribuciones de las ondas de Huygens provenientes de todas las tiras en un punto P sobre una pantalla distante, a un ángulo θ con respecto a la normal al plano de la ranura (figura 36.8*a*). Para ello, usamos un fasor para representar el campo $\vec{E}$ que varía de forma sinusoidal respecto de

36.8 Uso de diagramas de fasores para calcular la amplitud del campo $\vec{E}$ en una difracción con una sola ranura. Cada fasor representa el campo $\vec{E}$ de una sola tira dentro de la ranura.

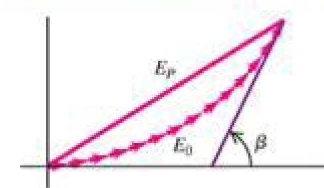
a)



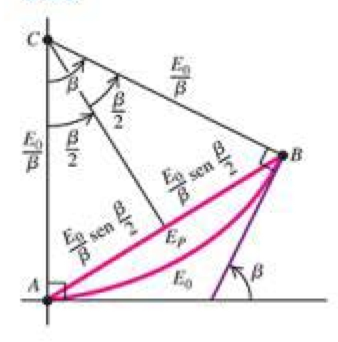
b) En el centro del patrón de difracción (punto O), los fasores de todas las tiras dentro de la ranura están en fase.



c) Diagrama de fasores en un punto ligeramente desviado del centro del patrón; β = diferencia de fase total entre los fasores primero y último.



d) Al igual que en c), pero en el límite en que la ranura se subdivide en un número infinito de tiras.



cada tira individual. La magnitud de la suma vectorial de los fasores en cada punto P es la amplitud E_P del campo total $\vec{E}$ en ese punto. La intensidad en P es proporcional a $E_P{}^2$.

En el punto O de la figura 36.8*a*, que corresponde al centro del patrón donde $\theta = 0$, las diferencias de trayectoria cuando $x >> a$ son insignificantes; todos los fasores están prácticamente *en fase* (es decir, tienen la misma dirección). En la figura 36.8*b* dibujamos los fasores en el tiempo $t = 0$ y denotamos la amplitud resultante en O con E_0. En esta ilustración la ranura está dividida en 14 tiras.

Considere ahora las ondas que llegan desde diferentes tiras al punto P de la figura 36.8*a*, a un ángulo θ del punto O. Debido a las diferencias en la longitud de las trayectorias, ahora hay diferencias de fase entre las ondas que llegan de tiras adyacentes; el diagrama de fasores correspondiente se muestra en la figura 36.8*c*. La suma vectorial de los fasores es ahora parte del perímetro de un polígono de muchos lados, y E_P, la amplitud del campo eléctrico resultante en P, es la *cuerda*. El ángulo β es la diferencia de fase total entre la onda procedente de la tira superior de la figura 36.8*a* y la que llega de la tira del extremo inferior; es decir, β es la fase de la onda recibida en P proveniente de la tira del extremo superior, con respecto a la onda que se recibe en P de la tira del extremo inferior.

Podemos imaginar que dividimos la ranura en tiras cada vez más angostas. En el límite, donde se tiene un número infinito de tiras infinitesimalmente angostas, la curva que describen los fasores se convierte en un *arco de círculo* (figura 36.8*d*), con una longitud de arco igual a la longitud E_0 de la figura 36.8*b*. El centro C de este arco se obtiene construyendo perpendiculares a A y B. Con base en la relación entre longitud de arco, radio y ángulo, el radio del arco es E_0/β; la amplitud E_P del campo eléctrico resultante en P es igual a la cuerda AB, que es $2(E_0/\beta)$ sen $(\beta/2)$. (¡Advierta que β *debe* estar en radianes!). Tenemos entonces que

$$E_P = E_0 \frac{\text{sen}(\beta/2)}{\beta/2} \qquad \text{(amplitud en la difracción con una sola ranura)} \qquad (36.4)$$

La intensidad en cada punto de la pantalla es proporcional al cuadrado de la amplitud dada por la ecuación (36.4). Si I_0 es la intensidad en la dirección hacia el frente donde $\theta = 0$ y $\beta = 0$, entonces, la intensidad I en cualquier punto es

$$I = I_0 \left[\frac{\text{sen}(\beta/2)}{\beta/2}\right]^2 \qquad \text{(intensidad en la difracción con una sola ranura)} \qquad (36.5)$$

Podemos expresar la diferencia de fase β en términos de magnitudes geométricas, como hicimos en el caso del patrón de dos ranuras. De acuerdo con la ecuación (35.11), la diferencia de fase es $2\pi/\lambda$ multiplicada por la diferencia de trayectorias. La figura 36.5 muestra que la diferencia de trayectorias entre el rayo proveniente del extremo superior de la ranura y el rayo que llega de la parte media es $(a/2)$ sen θ. La diferencia de trayectoria entre los rayos procedentes del extremo superior y del extremo inferior de la ranura es el doble de esto, así que

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda} a \,\text{sen}\,\theta \qquad (36.6)$$

y la ecuación (36.5) se transforma en

$$I = I_0 \left\{\frac{\text{sen}[\pi a(\text{sen}\,\theta)/\lambda]}{\pi a(\text{sen}\,\theta)/\lambda}\right\}^2 \qquad \text{(intensidad en la difracción con una sola ranura)} \qquad (36.7)$$

Esta ecuación expresa la intensidad directamente en términos del ángulo θ. En muchos cálculos resulta más fácil calcular primero el ángulo de fase β usando la ecuación (36.6), y luego aplicar la ecuación (36.5).

La figura 36.9*a* es una gráfica de la ecuación (36.7). Observe que el máximo central de intensidad es mucho más grande que cualquier otro. Esto significa que la mayor parte de la potencia de la onda se mantiene dentro de un ángulo θ con respecto a la perpendicular a la ranura, donde sen $\theta = \lambda/a$ (el primer mínimo de difracción). Esto se ve claramente en la figura 36.9*b*, una fotografía de ondas acuáticas que experimentan una difracción desde una sola ranura. Observe asimismo que las intensidades

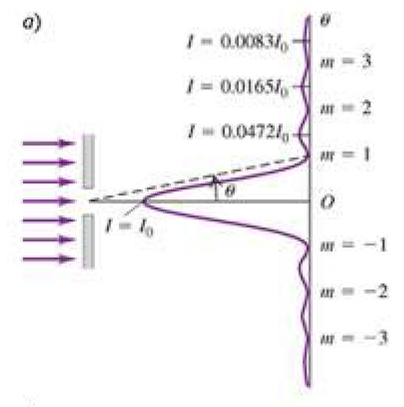
máximas de la figura 36.9*a* disminuyen rápidamente conforme aumenta la distancia al centro del patrón. (Compare con la figura 36.6, que muestra el patrón de difracción de luz con una sola ranura).

Las franjas oscuras del patrón son los lugares donde $I = 0$. Estos se presentan en puntos donde el numerador de la ecuación (36.5) es cero, por lo que β es un múltiplo de 2π. De acuerdo con la ecuación (36.6) esto corresponde a

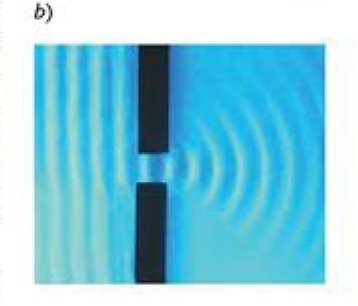
$$\frac{a \operatorname{sen}\theta}{\lambda} = m \qquad (m = \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{m\lambda}{a} \qquad (m = \pm 1, \pm 2, \ldots) \tag{36.8}$$

Esto concuerda con el resultado anterior: la ecuación (36.2). Observe de nuevo que $\beta = 0$ (correspondiente a $\theta = 0$) *no* es un mínimo. La ecuación (36.5) no está definida en $\beta = 0$, pero podemos evaluar el límite conforme $\beta \rightarrow 0$ usando la regla de L'Hôpital. Encontramos que en $\beta = 0$, $I = I_0$, como era de esperarse.



b)



36.9 *a*) Intensidad contra ángulo en difracción con una sola ranura. Los valores de m indican los mínimos de intensidad dados por la ecuación (36.8). La mayor parte de la potencia de las ondas va hacia el pico de intensidad central (entre la intensidad mínima $m = 1$ y $m = -1$). *b*) Estas ondas de agua pasan por una pequeña abertura y se comportan exactamente como ondas luminosas en difracción con una sola ranura. Solo las ondas difractadas dentro del pico de intensidad central son visibles; las ondas a mayores ángulos son demasiado tenues para verse.

Máximos de intensidad en el patrón de una sola ranura

La ecuación (36.5) también permite calcular las posiciones de los picos, o *máximos de intensidad*, así como la intensidad en estos picos. Esto no es tan sencillo como parecería. Cabría esperar que los máximos se presentaran donde la función seno alcanza el valor de ±1, esto es, donde $\beta = \pm\pi, \pm 3\pi, \pm 5\pi$ o, en general,

$$\beta \approx \pm(2m + 1)\pi \qquad (m = 0, 1, 2, \ldots) \tag{36.9}$$

Esto es *aproximadamente* correcto, pero debido al factor $(\beta/2)^2$ del denominador de la ecuación (36.5), los máximos no se presentan exactamente en esos puntos. Si se toma la derivada de la ecuación (36.5) con respecto a β y se iguala a cero para intentar determinar los máximos y mínimos, se obtiene una ecuación trascendental que es necesario resolver por métodos numéricos. De hecho, *no* hay un máximo cerca de $\beta = \pm\pi$. Los primeros máximos a uno y otro lado del máximo central, cerca de $\beta = \pm 3\pi$, se presentan en realidad en $\pm 2.860\pi$. Los segundos máximos laterales, cerca de $\beta = \pm 5\pi$, se encuentran efectivamente en $\pm 4.918\pi$, y así sucesivamente. El error en la ecuación (36.9) se desvanece en el límite donde m es grande, es decir, en los máximos de intensidad alejados del centro del patrón.

Para calcular la intensidad en los máximos laterales, se sustituyen de nuevo estos valores de β en la ecuación (36.5). A partir de la expresión aproximada de la ecuación (36.9) se obtiene

$$I_m \approx \frac{I_0}{\left(m + \frac{1}{2}\right)^2 \pi^2} \tag{36.10}$$

donde I_m es la intensidad del máximo lateral m-ésimo e I_0 es la intensidad del máximo central. La ecuación (36.10) proporciona la serie de intensidades

$$0.0450I_0 \qquad 0.0162I_0 \qquad 0.0083I_0$$

y así sucesivamente. Como hemos señalado, esta ecuación es solo aproximadamente correcta. Las intensidades reales de los máximos laterales resultan ser de

$$0.0472I_0 \qquad 0.0165I_0 \qquad 0.0083I_0 \qquad \ldots$$

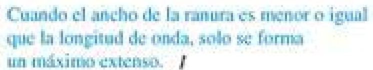
Observe que la intensidad de los máximos laterales disminuye con gran rapidez, como también lo muestra la figura 36.9*a*. Incluso los primeros máximos laterales tienen menos del 5% de la intensidad del máximo central.

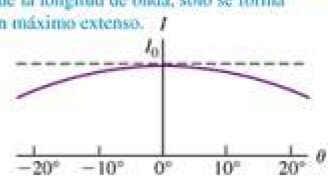
Anchura del patrón de una sola ranura

Para ángulos pequeños, la extensión angular del patrón de difracción es inversamente proporcional al ancho a de la ranura o, con más precisión, a la razón de a y la longitud de onda λ. La figura 36.10 muestra gráficas de intensidad I en función del ángulo θ con tres valores de la razón a/λ.

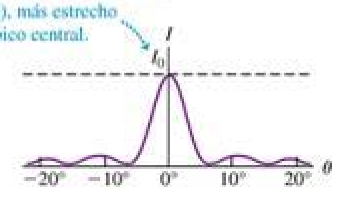
36.10 El patrón de difracción con una sola ranura depende de la razón del ancho a de la ranura con respecto a la longitud de onda λ.

a) $a = \lambda$ *b)* $a = 5\lambda$ *c)* $a = 8\lambda$









En el caso de las ondas luminosas, la longitud de onda λ suele ser mucho menor que el ancho a de la ranura, y los valores de θ en las ecuaciones (36.6) y (36.7) son tan pequeños que la aproximación sen $\theta = \theta$ es muy aceptable. Con esta aproximación, la posición θ_1 del primer mínimo al lado del máximo central, que corresponde a $\beta/2 = \pi$, es, según la ecuación (36.7),

$$\theta_1 = \frac{\lambda}{a} \tag{36.11}$$

Esto caracteriza la anchura (extensión angular) del máximo central, y vemos que es *inversamente* proporcional al ancho a de la ranura. Cuando la aproximación de ángulos pequeños es válida, el máximo central es exactamente dos veces más ancho que cada máximo lateral. Cuando a es del orden de un centímetro o más, θ_1 es tan pequeño que podemos considerar que prácticamente toda la luz está concentrada en el foco geométrico. Pero cuando a es menor que λ, el máximo central abarca 180° y no se observa el patrón de franjas.

Es importante tener presente que las ondas de *todo* tipo experimentan difracción, no solo la luz. Las ondas sonoras experimentan difracción cuando pasan a través de una ranura o abertura, como el vano de una puerta ordinaria, por ejemplo. Las ondas sonoras del habla tienen longitudes de onda de un metro o más, y el vano típico de una puerta tiene menos de 1 m de ancho; en esta situación, a es menor que λ y el máximo central de intensidad abarca 180°. Por ello, los sonidos que pasan a través de una puerta abierta pueden escucharse sin dificultad por un oyente furtivo que se oculte a la vuelta de la esquina. Asimismo, las ondas sonoras rodean la cabeza del profesor que mira hacia el pizarrón mientras imparte su clase (figura 36.11). En cambio, prácticamente no hay difracción de luz visible a través del vano de una puerta porque la anchura a es mucho mayor que la longitud de onda λ (del orden de 5×10^{-7} m). Podemos *oír* a la vuelta de las esquinas porque las ondas sonoras ordinarias tienen longitudes de onda relativamente largas; no podemos *ver* a la vuelta de las esquinas porque la longitud de onda de la luz visible es muy corta.

36.11 Las ondas sonoras del habla tienen una longitud de onda larga (aproximadamente de 1 m) y fácilmente dan la vuelta en torno a la cabeza de este profesor. En cambio, las ondas luminosas tienen longitudes de onda muy cortas y experimentan muy poca difracción. Por consiguiente, ¡no podemos *ver* alrededor de su cabeza!



Ejemplo 36.2 Difracción con una sola ranura: Intensidad I



a) La intensidad en el centro de un patrón de difracción con una ranura es I_0. ¿Cuál es la intensidad en un punto del patrón donde la diferencia de fase entre las ondas provenientes de los dos extremos de la ranura es de 66 rad? *b)* Si este punto está a 7.0° del máximo central, ¿cuál es el ancho de la ranura expresado en longitudes de onda?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: En el análisis de la figura 36.8 usamos el símbolo β para la diferencia de fase entre las ondas de los dos extremos de la ranura. En el inciso *a)* usaremos la ecuación (36.5) para calcular la intensidad I en el punto del patrón donde $\beta = 66$ rad. En el inciso *b)* necesitamos calcular el ancho a de la ranura como un múltiplo de la longitud de onda λ, de modo que la incógnita es a/λ. Nos dan la posición angular θ del punto donde $\beta = 66$ rad, por lo que se utiliza la ecuación (36.6) para despejar a/λ.

EJECUTAR: *a)* Puesto que $\beta/2 = 33$ rad, de acuerdo con la ecuación (36.5),

$$I = I_0\left[\frac{\text{sen}(33\text{ rad})}{33\text{ rad}}\right]^2 = (9.2 \times 10^{-4})I_0$$

b) Según la ecuación (36.6):

$$\frac{a}{\lambda} = \frac{\beta}{2\pi \,\text{sen}\,\theta} = \frac{66\text{ rad}}{(2\pi\text{ rad})\text{sen}\,7.0^\circ} = 86$$

Por ejemplo, con luz de 550 nm, el ancho a de la ranura es (86)(550 nm) = 4.7×10^{-5} m = 0.047 mm o, aproximadamente, $\frac{1}{20}$ mm.

EVALUAR: ¿A qué punto del patrón de difracción corresponde este valor de β? Para averiguarlo, observe que $\beta = 66$ rad es aproximadamente igual a 21π. Esto es un múltiplo impar de π, que corresponde a la forma $(2m + 1)\pi$ obtenida en la ecuación (36.9) de las intensidades *máximas*. De modo que $\beta = 66$ rad corresponde a un punto cercano al décimo máximo ($m = 10$), muy afuera del intervalo representado en la figura 36.9*a*, la cual muestra solo los máximos $m = \pm 3$.

Ejemplo 36.3 Difracción con una sola ranura: Intensidad II



En el experimento que se describe en el ejemplo 36.1 (sección 36.2), la intensidad en el centro del patrón es I_0. ¿Cuál es la intensidad en un punto de la pantalla situado a 3.0 mm del centro del patrón?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Se trata de un ejemplo similar al 36.2, excepto que no conocemos el valor de la diferencia de fase β en el punto en cuestión. Usamos geometría para determinar el ángulo θ de nuestro punto, y luego usamos la ecuación (36.7) para calcular la intensidad I (la incógnita).

EJECUTAR: Con respecto a la figura 36.5*a*, tenemos $y = 3.0$ mm y $x = 6.0$ m, de modo que $\tan\theta = y/x = (3.0 \times 10^{-3}\text{ m})/(6.0\text{ m}) = 5.0 \times 10^{-4}$; como esto es tan pequeño, los valores de $\tan\theta$, $\operatorname{sen}\theta$ y θ (en radianes) son todos prácticamente iguales. Entonces, aplicando la ecuación (36.7),

$$\frac{\pi a \operatorname{sen}\theta}{\lambda} = \frac{\pi(2.4 \times 10^{-4}\text{ m})(5.0 \times 10^{-4})}{6.33 \times 10^{-7}\text{ m}} = 0.60$$

$$I = I_0\left(\frac{\operatorname{sen} 0.60}{0.60}\right)^2 = 0.89 I_0$$

EVALUAR: La figura 36.9*a* muestra que una intensidad tan grande solo puede presentarse dentro del máximo central de intensidad. Esto concuerda con lo esperado; según el ejemplo 36.1, el primer mínimo de intensidad ($m = 1$ en la figura 36.9*a*) está a $(32\text{ mm})/2 = 16$ mm del centro del patrón; así, el punto en cuestión en $y = 3$ mm, efectivamente, se encuentra dentro del máximo central.

Evalúe su comprensión de la sección 36.3 Se envía radiación electromagnética coherente a través de una ranura con 0.0100 mm de ancho. ¿Para cuál de las siguientes longitudes de onda *no* habrá puntos en el patrón de difracción donde la intensidad sea cero? **i.** Luz azul con longitud de onda de 500 nm; **ii.** luz infrarroja con longitud de onda de 10.6 μm; **iii.** microondas con longitud de onda de 1.00 mm; **iv.** luz ultravioleta con longitud de onda de 50.0 nm.



36.4 Ranuras múltiples

En las secciones 35.2 y 35.3 analizamos la interferencia de dos fuentes puntuales o de dos ranuras muy angostas; en ese análisis pasamos por alto los efectos debidos al ancho finito de ranura (esto es, diferente de cero). En las secciones 36.2 y 36.3 consideramos los efectos de difracción que suceden cuando la luz pasa a través de una sola ranura de ancho finito. Se presentan otros efectos interesantes cuando se tienen dos ranuras de ancho finito o cuando hay varias ranuras muy angostas.

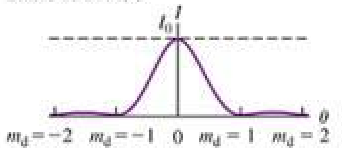
Dos ranuras de ancho finito

Examinemos de nuevo el patrón de dos ranuras en el caso más realista en el que las ranuras tienen un ancho finito. Si las ranuras son angostas en comparación con la longitud de onda, podemos suponer que la luz proveniente de cada ranura se extiende de modo uniforme en todas direcciones a la derecha de la ranura. Hicimos esta suposición en la sección 35.3 para calcular el patrón de interferencia descrito por la ecuación (35.10) o (35.15), consistente en una serie de máximos igualmente intensos y espaciados. Sin embargo, cuando las ranuras tienen un ancho finito, los picos del patrón de interferencia con dos ranuras están modulados por el patrón de difracción con una sola ranura característico del ancho de cada ranura.

La figura 36.12*a* muestra la intensidad en un patrón de difracción de una sola ranura de ancho *a*. Los *mínimos de difracción* están identificados por los enteros $m_d = \pm 1, \pm 2, \ldots$ ("d" de difracción). La figura 36.12*b* muestra el patrón que forman dos ranuras muy angostas separadas por una distancia *d*, donde *d* equivale a cuatro veces el ancho *a* de la ranura única de la figura 36.12*a*; esto es, $d = 4a$. Los *máximos de interferencia* están identificados con los enteros $m_i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ ("i" de interferencia). Observamos que la separación entre mínimos adyacentes en el patrón de una sola ranura es cuatro veces mayor que en el patrón de dos ranuras. Suponga ahora que ensanchamos cada una de las ranuras angostas hasta el mismo ancho *a* de la ranura única de la figura 36.12*a*. La figura 36.12*c* muestra el patrón que forman dos ranuras

36.12 Cálculo del patrón de intensidad para dos ranuras de ancho finito.

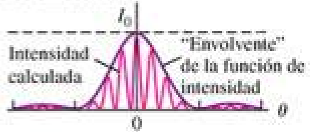
a) Patrón de difracción con una sola ranura de ancho *a*



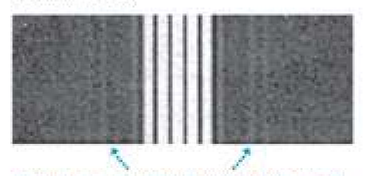
b) Patrón de interferencia de doble ranura correspondiente a ranuras angostas, cuya separación *d* es cuatro veces el ancho de la ranura en *a*)



c) Cálculo del patrón de intensidad para dos ranuras con ancho *a* y separación $d = 4a$, incluyendo los efectos tanto de interferencia como de difracción

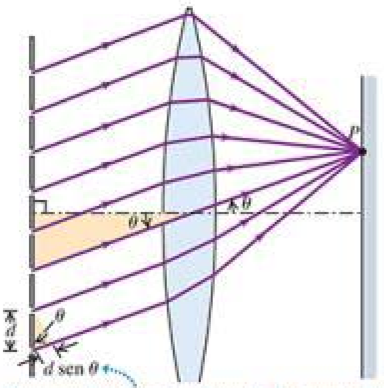


d) Fotografía real del patrón calculado en *c*)



Cuando $d = 4a$, falta un cuarto máximo de interferencia a los lados ($m_i = \pm 4, \pm 8, \ldots$).

36.13 Difracción de ranuras múltiples. Aquí se utiliza una lente para formar un patrón de Fraunhofer en una pantalla cercana, como en la figura 36.4*d*.



Ocurre un máximo si la diferencia de trayectorias entre ranuras adyacentes es un número entero de longitudes de onda: $d \operatorname{sen} \theta = m\lambda$.

de ancho *a* separadas por una distancia (entre centros) $d = 4a$. El efecto del ancho finito de las ranuras consiste en superponer los dos patrones; es decir, en multiplicar las dos intensidades en cada punto. Los máximos correspondientes a dos ranuras están en las mismas posiciones que antes; pero su intensidad está modulada por el patrón de una sola ranura, el cual actúa como una "envolvente" de la función de intensidad. La expresión de la intensidad que se muestra en la figura 36.12*c* es proporcional al producto de las expresiones correspondientes a dos ranuras y a una sola ranura, ecuaciones (35.10) y (36.5):

$$I = I_0 \cos^2 \frac{\phi}{2} \left[\frac{\operatorname{sen}(\beta/2)}{\beta/2} \right]^2 \qquad \text{(dos ranuras de ancho finito)} \qquad (36.12)$$

donde, al igual que antes,

$$\phi = \frac{2\pi d}{\lambda} \operatorname{sen}\theta \qquad \beta = \frac{2\pi a}{\lambda} \operatorname{sen}\theta$$

Observe que en la figura 36.12*c* *falta* cada cuarto máximo de interferencia a los lados, porque estos máximos de interferencia ($m_i = \pm 4, \pm 8, \ldots$) coinciden con mínimos de difracción ($m_d = \pm 1, \pm 2, \ldots$). Esto también se observa en la figura 36.12*d*, que es una fotografía de un patrón real con $d = 4a$. Usted debe ser capaz de visualizar que habrá máximos "faltantes" siempre que *d* sea un múltiplo entero de *a*.

Las figuras 36.12*c* y 36.12*d* indican que, a medida que aumenta la distancia con respecto al máximo central brillante del patrón de dos ranuras, disminuye la intensidad de los máximos. Esto es consecuencia del patrón de modulación de una sola ranura que se muestra en la figura 36.12*a*; en términos matemáticos, la disminución de intensidad se debe al factor $(\beta/2)^2$ del denominador de la ecuación (36.12). Esta disminución de intensidad también se observa en la figura 35.6 (sección 35.2). Cuanto más angostas sean las ranuras, más amplio será el patrón de una sola ranura (como en la figura 36.10) y más lenta será la disminución de intensidad de un máximo de interferencia al siguiente.

¿Debemos llamar *interferencia* o *difracción* al patrón de la figura 36.12*d*? En realidad es ambas cosas, pues es el resultado de la superposición de ondas provenientes de diversas partes de las dos aberturas.

Varias ranuras

Consideremos ahora los patrones que producen *varias* ranuras muy angostas. Como veremos, los sistemas de ranuras angostas tienen una importancia práctica enorme en la *espectroscopia*, la determinación de las longitudes de onda específicas de la luz que emana de una fuente. Suponga que cada ranura es estrecha en comparación con la longitud de onda, por lo que su patrón de difracción se extiende de modo casi uniforme. La figura 36.13 muestra un conjunto de ocho ranuras angostas, con una distancia *d* entre ranuras adyacentes. Experimentan interferencia constructiva los rayos que forman un ángulo θ con la normal y que llegan al punto *P* con una diferencia de trayectoria entre ranuras adyacentes igual a un número entero de longitudes de onda:

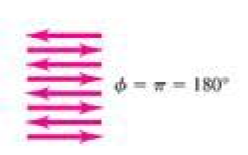
$$d \operatorname{sen}\theta = m\lambda \qquad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

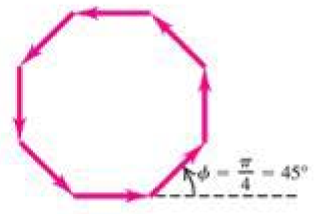
Esto significa que hay reforzamiento cuando la diferencia de fase ϕ en *P* de la luz proveniente de ranuras adyacentes es un múltiplo entero de 2π. Es decir, los máximos del patrón aparecen en las *mismas* posiciones que en el caso de *dos* ranuras con la misma separación. En esta medida, el patrón se asemeja al patrón de dos ranuras.

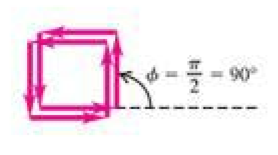
Pero, ¿qué ocurre *entre* los máximos? En el patrón de dos ranuras, hay exactamente un mínimo de intensidad situado a medio camino entre cada par de máximos, el cual corresponde a los ángulos a los que la diferencia de fase entre ondas provenientes de las dos fuentes es de π, 3π, 5π, etcétera. En el patrón de ocho ranuras, estos también son mínimos porque la luz que llega de ranuras adyacentes se cancela por pares, lo cual corresponde al diagrama de fasores de la figura 36.14*a*. Pero estos no son los únicos mínimos del patrón de ocho ranuras. Por ejemplo, cuando la diferencia de fase ϕ correspondiente a fuentes adyacentes es de $\pi/4$, el diagrama de fasores es como se muestra en la figura 36.14*b*; el fasor total (resultante) es cero y la intensidad es cero.

36.14 Diagrama de fasores de la luz que pasa a través de ocho ranuras angostas. Se presentan máximos de intensidad cuando la diferencia de fase $\phi = 0, 2\pi, 4\pi, \ldots$ Entre los máximos en $\phi = 0$ y $\phi = 2\pi$ hay siete mínimos, correspondientes a $\phi = \pi/4, \pi/2, 3\pi/4, \pi, 5\pi/4, 3\pi/2$ y $7\pi/4$. ¿Puede usted dibujar los diagramas de fasores correspondientes a los otros mínimos?









Cuando $\phi = \pi/2$, se tiene el diagrama de fasores de la figura 36.14*c*, y nuevamente el fasor total y la intensidad son cero. En términos más generales, la intensidad con ocho ranuras es cero siempre que ϕ es un múltiplo entero de $\pi/4$, *salvo* cuando ϕ es un múltiplo de 2π. Así, hay siete mínimos por cada máximo.

La figura 36.15*b* muestra el cálculo detallado del patrón de ocho ranuras. Los máximos grandes, llamados *máximos principales*, están en la misma posición que en el caso del patrón de dos ranuras de la figura 36.15*a*, aunque son mucho más angostos. Si la diferencia de fase ϕ entre ranuras adyacentes difiere levemente de un múltiplo de 2π, las ondas provenientes de las ranuras 1 y 2 estarán solo un poco fuera de fase; sin embargo, la diferencia de fase entre las ranuras 1 y 3 será mayor, la diferencia entre las ranuras 1 y 4 será aún más grande, y así sucesivamente. Esto da lugar a una cancelación parcial en el caso de los ángulos que difieren solo levemente del ángulo de un máximo, y forma los máximos estrechos de la figura 36.15*b*. Los máximos son aún más angostos con 16 ranuras (figura 36.15*c*).

Se invita al lector a demostrar que, cuando hay N ranuras, existen $(N - 1)$ mínimos entre cada par de los máximos principales, y se presenta un mínimo siempre que ϕ es un múltiplo entero de $2\pi/N$ (salvo cuando ϕ es un múltiplo entero de 2π; en tal caso, se tiene un máximo principal). Hay pequeños máximos *secundarios* de intensidad entre los mínimos; estos se reducen en comparación con los máximos principales a medida que N aumenta. Cuanto mayor sea el valor de N, más estrechos se volverán los máximos principales. Desde el punto de vista energético, la potencia total del patrón entero es proporcional a N. La altura de cada máximo principal es proporcional a N^2, de modo que, por la conservación de la energía, la anchura de cada máximo principal debe ser proporcional a $1/N$. Como veremos en la siguiente sección, la estrechez de los máximos principales en un patrón de ranuras múltiples es de gran importancia práctica.

Evalúe su comprensión de la sección 36.4 Suponga que dos ranuras, cada una de ancho a, están separadas por una distancia $d = 2.5a$. ¿Hay máximos faltantes en el patrón de interferencia producido por estas ranuras? Si es así, ¿cuáles faltan? Si no, ¿por qué? |

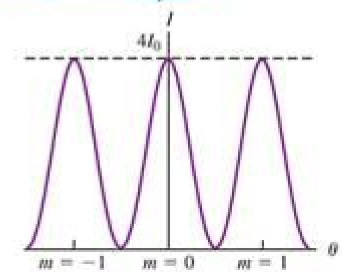
36.5 Rejilla de difracción

Hemos visto que si se aumenta el número de ranuras en un experimento de interferencia (manteniendo constante la separación entre ranuras adyacentes), se obtienen patrones de interferencia donde los máximos ocupan las mismas posiciones que con dos ranuras, pero son progresivamente más angostos que los de dos ranuras. Por ser estos máximos tan angostos, es factible medir con una precisión muy grande su posición angular y, por lo tanto, su longitud de onda. Como veremos, este efecto tiene muchas aplicaciones importantes.

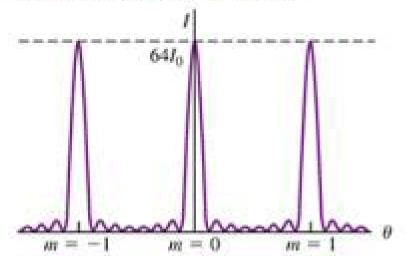
Una serie de ranuras paralelas en gran número, todas del mismo ancho a y separadas por distancias iguales d entre sus centros, recibe el nombre de **rejilla de difracción**. Fraunhofer construyó la primera con alambres finos. Se pueden hacer rejillas trazando con una punta de diamante muchos surcos igualmente espaciados sobre una superficie de vidrio o metal, o por reducción fotográfica de un patrón de tiras blancas

36.15 Patrones de interferencia de N ranuras muy angostas igualmente espaciadas. *a*) Dos ranuras. *b*) Ocho ranuras. *c*) Dieciséis ranuras. La escala vertical es diferente en cada gráfica; I_0 es la intensidad máxima de una sola ranura, y la intensidad máxima con N ranuras es $N^2 I_0$. La anchura de cada máximo es proporcional a $1/N$.

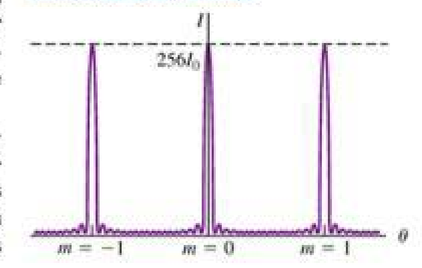
a) $N = 2$: dos ranuras producen un mínimo entre los máximos adyacentes.

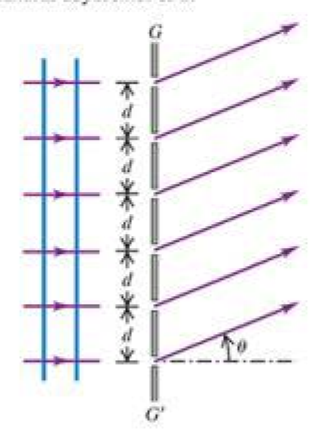


b) $N = 8$: ocho ranuras producen máximos más altos y más angostos, en el mismo lugar, separados por siete mínimos.



c) $N = 16$: con 16 ranuras, los máximos son aún más altos y estrechos, con más intervención de los mínimos.





36.16 Parte de una rejilla de difracción de transmisión. La separación entre los centros de ranuras adyacentes es d.

y negras sobre papel. En el caso de una rejilla, se suele llamar *rayas* o *líneas* a lo que aquí hemos llamado *ranuras*.

En la figura 36.16, GG' es la sección transversal de una *rejilla de transmisión*; las ranuras son perpendiculares al plano de la página y la luz que se transmite a través de las ranuras forma un patrón de interferencia. El diagrama muestra solo seis ranuras; una rejilla real podría contener varios miles. La separación d entre los centros de ranuras adyacentes se conoce como el *espaciado de rejilla*. Una onda monocromática plana incide en dirección normal sobre la rejilla desde el lado izquierdo. Suponemos condiciones de campo lejano (Fraunhofer); es decir, el patrón se forma sobre una pantalla lo suficientemente alejada, como para considerar paralelos a todos los rayos que emergen de la rejilla y se dirigen hacia un punto determinado de la pantalla.

En la sección 36.4 vimos que los máximos principales de intensidad con ranuras múltiples se forman en las mismas direcciones que en el caso del patrón de dos ranuras. Estas direcciones son aquellas en las cuales la diferencia de trayectorias desde ranuras adyacentes es un número entero de longitudes de onda. Por lo tanto, las posiciones de los máximos están dadas una vez más por

$$d \operatorname{sen}\theta = m\lambda \qquad (m = 0, \pm1, \pm2, \pm3, \dots) \quad \text{(máximos de intensidad, ranuras múltiples)} \qquad (36.13)$$

Los patrones de intensidad de dos, ocho y 16 ranuras que se ilustran en la figura 36.15 muestran el aumento gradual de agudeza de los máximos a medida que se incrementa el número de ranuras.

Cuando se ilumina con un haz de rayos paralelos de luz monocromática una rejilla con cientos o miles de ranuras, el patrón es una serie de líneas muy pronunciadas en ángulos determinados por la ecuación (36.13). Las líneas $m = \pm1$ se llaman *líneas de primer orden*, las líneas $m = \pm2$, *líneas de segundo orden*, y así sucesivamente. Si se ilumina la rejilla con luz blanca con una distribución continua de longitudes de onda, cada valor de m corresponde a un espectro continuo en el patrón. El ángulo de cada longitud de onda está determinado por la ecuación (36.13); para un valor dado de m, las longitudes de onda largas (el extremo rojo del espectro) se encuentran a ángulos más grandes (es decir, se desvían más de la dirección recta) que las longitudes de onda más cortas del extremo violeta del espectro.

Como se ve en la ecuación (36.13), el seno del ángulo de desviación de los máximos es proporcional a la razón λ/d. Para que haya una desviación importante, el espaciado de rejilla d debería ser del mismo orden de magnitud que la longitud de onda λ. Las rejillas que se utilizan con luz visible (λ de 400 a 700 nm) tienen por lo regular unas 1000 ranuras por milímetro; el valor de d es el *recíproco* del número de ranuras por unidad de longitud, por lo que d es del orden de $\frac{1}{1000}$ mm = 1000 nm.

En una *rejilla de reflexión*, la serie de ranuras igualmente espaciadas de la figura 36.16 se sustituye por una serie de crestas o surcos igualmente espaciados en una pantalla reflectora. La luz reflejada tiene una intensidad máxima en ángulos donde la diferencia de fase entre las ondas luminosas que se reflejan desde crestas o surcos adyacentes es un múltiplo entero de 2π. Si sobre una rejilla de reflexión con una separación d entre crestas o surcos adyacentes incide luz de longitud de onda λ en dirección normal, los ángulos *reflejados* a los que se presentan máximos de intensidad están dados por la ecuación (36.13).

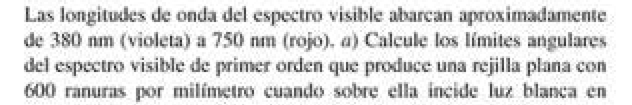
Los reflejos de colores del arcoíris que vemos en la superficie de un DVD son efectos de una rejilla de reflexión (figura 36.17). Los "surcos" son fosos diminutos de 0.12 μm de profundidad en la superficie del disco, con un espaciado radial uniforme de 0.74 μm = 740 nm. La información se codifica en el DVD haciendo variar la *longitud* de los fosos; el aspecto de la reflexión de la rejilla en el disco es tan solo una ventaja estética colateral.



ActivPhysics 16.4: The Grating: Introduction and Questions
ActivPhysics 16.5: The Grating: Problems

36.17 Los fosos microscópicos en la superficie de este DVD actúan como una rejilla de reflexión, separando la luz blanca en sus colores componentes.







Las longitudes de onda del espectro visible abarcan aproximadamente de 380 nm (violeta) a 750 nm (rojo). *a*) Calcule los límites angulares del espectro visible de primer orden que produce una rejilla plana con 600 ranuras por milímetro cuando sobre ella incide luz blanca en dirección normal. *b*) ¿Se traslapan los espectros del primero y segundo órdenes? ¿Y los espectros del segundo y tercer órdenes? ¿Dependen sus respuestas del espaciado de la rejilla?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Debemos calcular los ángulos contenidos en el espectro visible, de los espectros de primero, segundo y tercer órdenes. Esto corresponde a $m = 1$, 2 y 3 en la ecuación (36.13).

EJECUTAR: *a*) El espaciado de rejilla es

$$d = \frac{1}{600 \text{ ranuras/mm}} = 1.67 \times 10^{-6} \text{ m}$$

Despejamos θ de la ecuación (36.13):

$$\theta = \text{arcsen}\frac{m\lambda}{d}$$

Para $m = 1$, las desviaciones angulares θ_{v1} y θ_{r1} de la luz violeta y roja son, respectivamente,

$$\theta_{v1} = \text{arcsen}\left(\frac{380 \times 10^{-9} \text{ m}}{1.67 \times 10^{-6} \text{ m}}\right) = 13.2°$$

$$\theta_{r1} = \text{arcsen}\left(\frac{750 \times 10^{-9} \text{ m}}{1.67 \times 10^{-6} \text{ m}}\right) = 26.7°$$

Es decir, el espectro visible de primer orden aparece con los ángulos de desviación de $\theta_{v1} = 13.2°$ (violeta) a $\theta_{r1} = 26.7°$ (rojo).

b) Para $m = 2$ y $m = 3$, la ecuación $\theta = \text{arcsen}\,(m\lambda/d)$ para la luz violeta de 380 mm produce

$$\theta_{v2} = \text{arcsen}\left(\frac{2(380 \times 10^{-9} \text{ m})}{1.67 \times 10^{-6} \text{ m}}\right) = 27.1°$$

$$\theta_{v3} = \text{arcsen}\left(\frac{3(380 \times 10^{-9} \text{ m})}{1.67 \times 10^{-6} \text{ m}}\right) = 43.0°$$

Para la luz roja de 750 nm, esta misma ecuación da

$$\theta_{r2} = \text{arcsen}\left(\frac{2(750 \times 10^{-9} \text{ m})}{1.67 \times 10^{-6} \text{ m}}\right) = 63.9°$$

$$\theta_{r3} = \text{arcsen}\left(\frac{3(750 \times 10^{-9} \text{ m})}{1.67 \times 10^{-6} \text{ m}}\right) = \text{arcsen}(1.35) = \text{indefinido}$$

Por lo tanto, el espectro de segundo orden se extiende de 27.1 a 63.9° y el de tercer orden de 43.0 a 90° (el valor más grande posible de θ). El valor indefinido de θ_{r3} significa que el espectro de tercer orden alcanza $\theta = 90° = \text{arcsen}(1)$ en una longitud de onda más pequeña que 750 nm; usted debe demostrar que esto sucede cuando $\lambda = 557$ nm. Así, el espectro de primer orden (de 13.2 a 26.7°) no se traslapa con el espectro de segundo orden, pero el segundo y el tercero sí lo hacen. Compruebe que esto se cumple para cualquier valor de espaciado d de la rejilla.

EVALUAR: La razón fundamental por la que los espectros visibles de primer y segundo órdenes no se traslapan es que el ojo humano es sensible solo a un intervalo estrecho de longitudes de onda. Demuestre que si el ojo pudiera detectar longitudes de onda de 380 a 900 nm (en el infrarrojo cercano), los órdenes primero y segundo sí se *traslaparían*.

Espectrógrafos de rejilla

Las rejillas de difracción se utilizan extensamente para medir el espectro de la luz que emite una fuente, mediante un procedimiento que se conoce como *espectroscopia* o *espectrometría.* La luz que incide en una rejilla de espaciado conocido se dispersa para formar un espectro. Se miden entonces los ángulos de desviación de los máximos y se calcula la longitud de onda con base en la ecuación (36.13). Utilizando una rejilla con muchas ranuras, se obtienen máximos muy pronunciados y se puede medir con gran precisión el ángulo de desviación (y, por ende, la longitud de onda).

Una aplicación importante de esta técnica se da en la astronomía. Cuando la luz que se ha generado en el interior del Sol atraviesa su atmósfera, se absorben selectivamente ciertas longitudes de onda. El resultado es que el espectro de luz solar que se obtiene con una rejilla de difracción tiene *líneas de absorción* oscuras (figura 36.18). Los experimentos de laboratorio indican que los distintos tipos de átomos y de iones absorben luz de diferentes longitudes de onda. Comparando estos resultados de laboratorio con las longitudes de onda de absorción que se observan en el espectro de la luz solar, los astrónomos logran deducir la composición química de la atmósfera del Sol. Esta misma técnica se utiliza para efectuar análisis químicos de galaxias que están a millones de años luz de distancia.

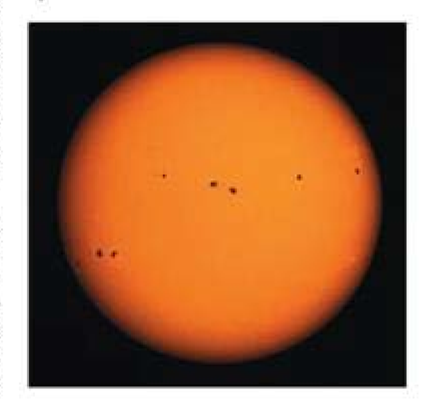
La figura 36.19 muestra un diseño de un *espectrógrafo de rejilla* que se utiliza en astronomía. En la figura se emplea una rejilla de transmisión; en otras configuraciones, se usa una rejilla de reflexión. En diseños más antiguos se utilizaba un prisma en lugar de una rejilla, y se formaba un espectro por dispersión (sección 33.4) y no por difracción. Sin embargo, en el caso de un prisma no existe una relación sencilla entre la longitud de onda y el ángulo de desviación; los prismas absorben parte de la luz que pasa a través de ellos y son menos eficaces con respecto a muchas longitudes de onda no visibles que son importantes en astronomía. Por estas y otras razones se prefieren las rejillas en las aplicaciones de precisión.

Resolución de un espectrógrafo de rejilla

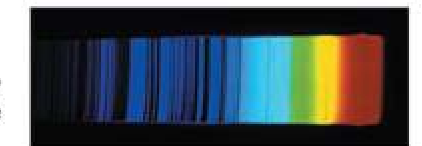
En espectroscopia suele ser importante distinguir longitudes de onda que difieren muy poco. La diferencia mínima de longitud de onda $\Delta\lambda$ que un espectrógrafo es capaz de distinguir se conoce como **poder de resolución cromático** R, el cual se define como

36.18 *a*) Fotografía de la luz visible del Sol. *b*) Una rejilla de difracción dispersa la luz solar para formar un espectro. Ciertas longitudes de onda específicas son absorbidas cuando la luz solar pasa a través de la atmósfera del Sol, produciendo líneas oscuras en el espectro.

a)



b)



36.19 Diagrama de un espectrógrafo con rejilla de difracción para uso astronómico. Observe que la luz no incide en la rejilla en dirección normal a su superficie, por lo que los máximos de intensidad están dados por una expresión algo diferente de la ecuación (36.13). (Véase el problema 36.64).

$$R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} \qquad \text{(poder de resolución cromático)} \qquad (36.14)$$

Por ejemplo, cuando se calientan átomos de sodio, estos emiten intensamente en las longitudes de onda amarillas de 589.00 y 589.59 nm. Un espectrógrafo que apenas es capaz de distinguir estas dos líneas del espectro de la luz de sodio (conocidas como el *doblete del sodio*) tiene un poder de resolución cromático $R = (589.00 \text{ nm})/(0.59 \text{ nm}) = 1000$. (Podemos ver estas longitudes de onda al hervir agua en una estufa de gas. Si el agua cae sobre la llama, el sodio disuelto de la sal común emite una flama de luz amarilla).

Es posible deducir una expresión para el poder de resolución de una rejilla de difracción de las que se usan en los espectrógrafos. Dos longitudes de onda diferentes dan máximos de difracción en ángulos ligeramente distintos. Como criterio razonable (aunque arbitrario), supongamos que podemos distinguirlas como dos picos individuales si el máximo de una coincide con el primer mínimo de la otra.

Con base en lo expuesto en la sección 36.4, el máximo de orden m-ésimo se presenta cuando la diferencia de fase ϕ correspondiente a ranuras adyacentes es $\phi = 2\pi m$. El primer mínimo al lado de ese máximo aparece cuando $\phi = 2\pi m + 2\pi/N$, donde N es el número de ranuras. La diferencia de fase también está dada por $\phi = (2\pi d \operatorname{sen}\theta)/\lambda$; por lo tanto, el intervalo angular $d\theta$ que corresponde a un pequeño incremento $d\phi$ de corrimiento de fase se obtiene a partir de la diferencial de esta ecuación:

$$d\phi = \frac{2\pi d \cos\theta \, d\theta}{\lambda}$$

Cuando $d\phi = 2\pi/N$, esto corresponde al intervalo angular $d\theta$ entre un máximo y el primer mínimo adyacente. Por lo tanto, $d\theta$ está dado por

$$\frac{2\pi}{N} = \frac{2\pi d \cos\theta \, d\theta}{\lambda} \qquad \text{o bien,} \qquad d\cos\theta \, d\theta = \frac{\lambda}{N}$$

CUIDADO **Esté atento a los diferentes usos del símbolo d** ¡No confunda la separación d con la diferencial "d" del intervalo angular $d\theta$ o del incremento de corrimiento de fase $d\phi$!

Ahora necesitamos obtener la separación angular $d\theta$ entre máximos de dos longitudes de onda ligeramente distintas. Tenemos $d \operatorname{sen}\theta = m\lambda$, de modo que la diferencial de esta ecuación da

$$d\cos\theta \, d\theta = m\, d\lambda$$

Aplicación Medición del ADN con difracción

Las rejillas de difracción se usan como parte de un equipo común de laboratorio conocido como espectrofotómetro. A través de una rejilla de difracción se dispersa una luz brillante en sus longitudes de onda componentes. Se usa una ranura para bloquear todas, menos un rango de longitudes de onda muy angostas, produciendo un haz de luz casi perfectamente monocromática. Luego el instrumento mide cuánta luz es absorbida por una solución de moléculas biológicas. Por ejemplo, el tubo de ensayo mostrado aquí contiene una solución de ADN, que es transparente a la luz visible pero absorbe intensamente luz ultravioleta con longitud de onda exactamente igual a 260 nm. Por lo tanto, iluminando la muestra con luz de 260 nm y midiendo la cantidad absorbida, podemos determinar la concentración de ADN en la solución.



De acuerdo con nuestro criterio, se alcanza el límite o la resolución cuando estas dos separaciones angulares son iguales. Igualando las dos expresiones de la cantidad ($d \cos\theta\, d\theta$), obtenemos

$$\frac{\lambda}{N} = m\, d\lambda \qquad \text{y} \qquad \frac{\lambda}{d\lambda} = Nm$$

Si $\Delta\lambda$ es pequeña, podemos sustituir $d\lambda$ por $\Delta\lambda$, y el poder de resolución R está dado por

$$R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = Nm \qquad (36.15)$$

Cuanto mayor sea el número de ranuras N, mejor será la resolución; asimismo, cuanto más alto sea el orden m del máximo del patrón de difracción que se utilice, mejor será la resolución.

Evalúe su comprensión de la sección 36.5 ¿Cuál es el número mínimo de ranuras que debería tener una rejilla para resolver el doblete de sodio en el cuarto orden? **i.** 250; **ii.** 400; **iii.** 1000; **iv.** 4000.

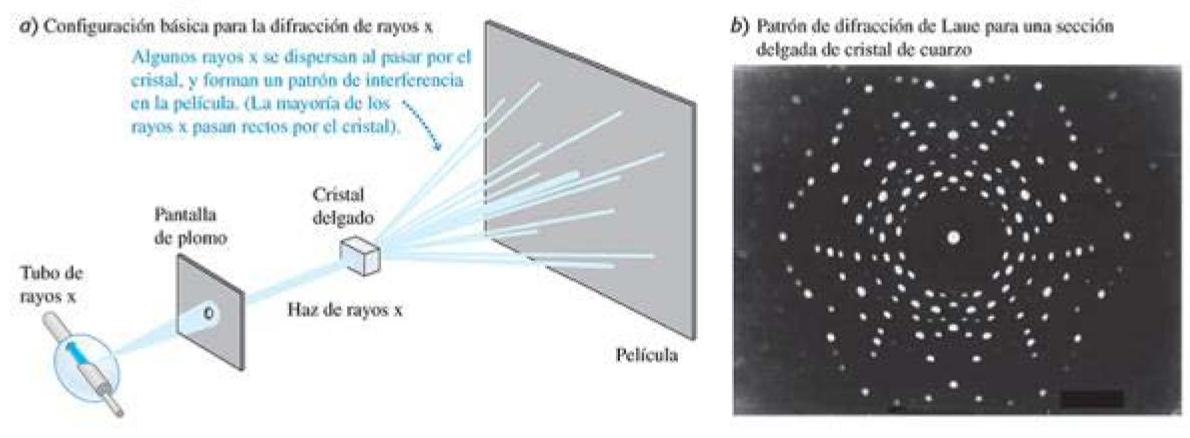


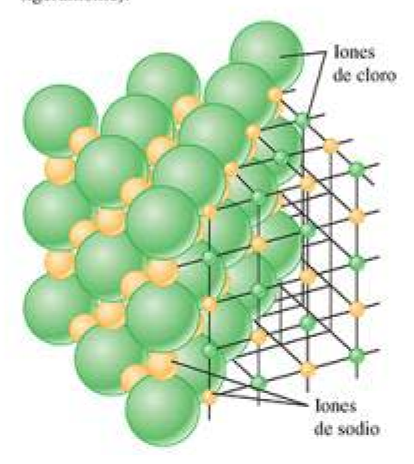
36.6 Difracción de rayos x

Los rayos x fueron descubiertos por Wilhelm Röntgen (1845-1923) en 1895, y los primeros experimentos sugerían que se trataba de ondas electromagnéticas con longitudes de onda del orden de 10^{-10} m. Por esa misma época, comenzó a surgir la idea de que en un sólido cristalino los átomos están dispuestos en un patrón que se repite de forma regular, con una separación entre átomos adyacentes también del orden de 10^{-10} m. Combinando estas dos ideas, en 1912 Max von Laue (1879-1960) propuso que un cristal podría servir como una especie de rejilla de difracción tridimensional para los rayos x. Es decir, los átomos individuales de un cristal podrían dispersar (esto es, absorber y emitir de nuevo) un haz de rayos x, y las ondas dispersadas podrían interferir del mismo modo que las ondas provenientes de una rejilla de difracción.

Los primeros experimentos de **difracción de rayos x** fueron realizados en 1912 por Friederich, Knipping y Von Laue, empleando el arreglo experimental que aparece en la figura 36.20*a*. Los rayos x dispersados *formaron* un patrón de interferencia, el cual se registró en una película fotográfica. La figura 36.20*b* es una fotografía de un patrón de este tipo. Con estos experimentos se comprobó que los rayos x *son* ondas, o al menos tienen propiedades ondulatorias, y también que los átomos de un cristal *están* dispuestos conforme a un patrón regular (figura 36.21). A partir de entonces, la difracción de rayos x ha probado ser una valiosísima herramienta de investigación, tanto para medir longitudes de onda de rayos x como para estudiar la estructura de cristales y moléculas complejas.

36.20 *a*) Un experimento de difracción de rayos x. *b*) Patrón de difracción (o *patrón de Laue*) que se forma dirigiendo un haz de rayos x hacia una sección delgada de cristal de cuarzo.





36.21 Modelo de la disposición de los iones en un cristal de NaCl (sal común). La separación entre átomos adyacentes es de 0.282 nm. (En realidad, las nubes de electrones de los átomos se traslapan ligeramente).

Modelo simple de difracción de rayos x

Para entender mejor la difracción de rayos x, consideremos en primer término una situación de dispersión bidimensional, como se muestra en la figura 36.22*a*, donde una onda plana incide sobre una formación rectangular de centros de dispersión. La situación podría representar un tanque de ondas con una serie de postes pequeños, microondas de 3 cm que chocan con una formación de pequeñas esferas conductoras, o rayos x que inciden en una formación de átomos. En el caso de las ondas electromagnéticas, la onda induce un momento dipolar eléctrico oscilante en cada elemento dispersor. Estos dipolos actúan como pequeñas antenas que emiten ondas dispersadas. El patrón de interferencia resultante es la superposición de todas estas ondas dispersadas. La situación no es la misma que la de una rejilla de difracción, donde las ondas provenientes de todas las ranuras son emitidas *en fase* (en el caso de una onda plana que incide en dirección normal). En el caso que nos ocupa, las ondas dispersadas *no* están todas en fase porque sus distancias con respecto a la *fuente* son diferentes. Para calcular el patrón de interferencia, es necesario considerar las diferencias de trayectoria *totales* de las ondas dispersadas, incluyendo las distancias de la fuente al elemento dispersor y de este al observador.

Como se observa en la figura 36.22*b*, la longitud de trayectoria de la fuente al observador es la misma con respecto a todos los elementos dispersores de una sola fila, si los dos ángulos θ_a y θ_r son iguales. La radiación dispersada de filas *adyacentes también* está en fase si la diferencia de trayectoria correspondiente a filas adyacentes es un número entero de longitudes de onda. La figura 36.22*c* muestra que esta diferencia de trayectoria es $2d\,\text{sen}\,\theta$, donde θ es el valor común de θ_a y θ_r. Por lo tanto, las condiciones para que la radiación proveniente de la *formación completa* llegue al observador en fase son: **1.** el ángulo de incidencia debe ser igual al ángulo de dispersión y **2.** la diferencia de trayectoria correspondiente a filas adyacentes debe ser igual a $m\lambda$, donde m es un entero. Podemos expresar la segunda condición como

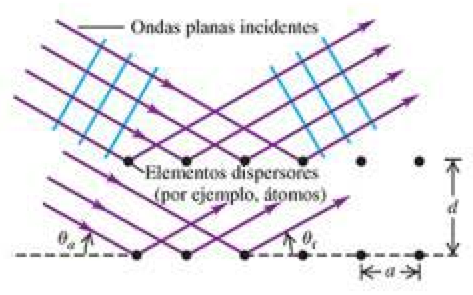
$$2d\,\text{sen}\,\theta = m\lambda \qquad (m = 1, 2, 3, \ldots) \quad \text{(condición de Bragg para que haya interferencia constructiva desde una formación)} \qquad (36.16)$$

CUIDADO **Dispersión desde una formación** En la ecuación (36.16) el ángulo θ se mide con respecto a la *superficie* del cristal, no con respecto a la *normal* al plano de una serie de ranuras o de una rejilla. Asimismo, observe que la diferencia de trayectoria de la ecuación (36.16) es $2d\,\text{sen}\,\theta$, no $d\,\text{sen}\,\theta$ como en la ecuación (36.13) para una rejilla de difracción.

En las direcciones con respecto a las cuales se satisface la ecuación (36.16), vemos un máximo intenso en el patrón de interferencia. Podemos describir esta interferencia en términos de *reflexiones* de la onda en las filas horizontales de elementos dispersores de la figura 36.22*a*. Hay reflexión intensa (interferencia constructiva) en los ángulos en los que los ángulos incidente y de dispersión son iguales y se satisface la ecuación

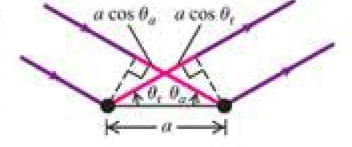
36.22 Modelo bidimensional de dispersión de un arreglo rectangular. Observe que los ángulos en *b*) se miden desde la *superficie* del arreglo, no desde su normal.

a) Dispersión de ondas de un arreglo rectangular



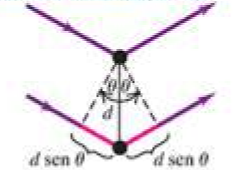
b) Dispersión desde los átomos adyacentes en una fila

La interferencia desde átomos adyacentes de una fila es constructiva cuando las longitudes de trayectoria $a\cos\theta_a$ y $a\cos\theta_r$ son iguales; así que el ángulo de incidencia θ_a es igual al ángulo de reflexión (dispersión) θ_r.

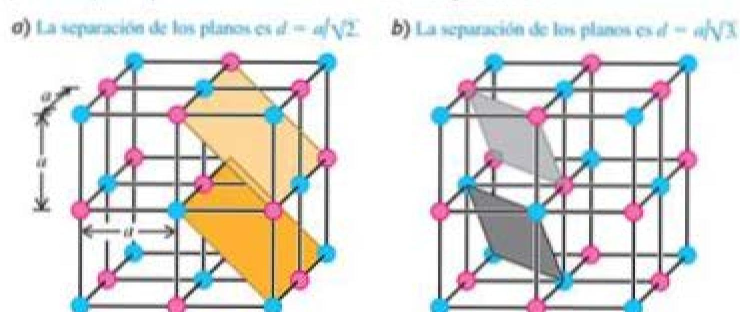


c) Dispersión desde átomos en filas adyacentes

La interferencia desde átomos en filas adyacentes es constructiva cuando la diferencia de trayectoria $2d\,\text{sen}\,\theta$ es igual a un número entero de longitudes de onda, como en la ecuación (36.16).



36.23 Un cristal cúbico y dos familias diferentes de planos cristalinos. Hay además tres conjuntos de planos paralelos a las caras del cubo, con separación a.



(36.16). Como sen θ nunca puede ser mayor que 1, la ecuación (36.16) indica que para tener interferencia constructiva, la cantidad $m\lambda$ debe ser menor que $2d$, así que λ debe ser menor que $2d/m$. Por ejemplo, el valor de d en un cristal de NaCl (figura 36.21) es solo de 0.282 nm. Por ello, para tener el máximo orden m-ésimo presente en el patrón de difracción, λ debe ser menor que $2(0.282 \text{ nm})/m$; esto es, $\lambda < 0.564$ nm para $m = 1$, $\lambda < 0.282$ nm para $m = 2$, $\lambda < 0.188$ nm para $m = 3$, y así sucesivamente. Todas estas son longitudes de onda de rayos x (véase la figura 32.4), que es la causa de que los rayos x se usen para estudiar la estructura de un cristal.

Podemos extender este análisis a una configuración tridimensional considerando *planos* de elementos dispersores en lugar de *filas*. La figura 36.23 muestra dos conjuntos diferentes de planos paralelos que pasan por todos los elementos dispersores. Las ondas provenientes de todos los elementos dispersores de un plano determinado interfieren constructivamente, si son iguales los ángulos de incidencia y de dispersión. También hay interferencia constructiva entre planos cuando se satisface la ecuación (36.16), donde d es ahora la distancia entre planos adyacentes. Debido a que existen muchos conjuntos distintos de planos paralelos, también son muchos los valores de d y los conjuntos de ángulos que producen interferencia constructiva en toda la red cristalina. Este fenómeno se conoce como **reflexión de Bragg**, y la ecuación (36.16) recibe el nombre de **condición de Bragg**, en honor de Sir William Bragg y su hijo Laurence Bragg, dos pioneros del análisis con rayos x.

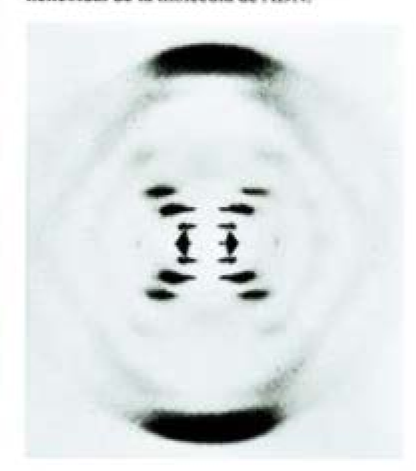
CUIDADO **La *reflexión* de Bragg es en realidad *interferencia* de Bragg** Aunque empleamos el término *reflexión*, recuerde que se trata de un efecto de *interferencia*. De hecho, las reflexiones en diversos planos presentan una estrecha analogía con los efectos de interferencia en películas delgadas (véase la sección 35.4).

Como se observa en la figura 36.20*b*, en la difracción de rayos x hay una cancelación casi total en todas direcciones, con excepción de algunas en las que hay interferencia constructiva y se forman manchas brillantes. Los patrones de este tipo se conocen habitualmente como patrones de *difracción* de rayos x, aunque sería más adecuado llamarlos patrones de *interferencia*.

Podemos determinar la longitud de onda de los rayos x examinando el patrón de difracción de un cristal de estructura y separación entre átomos conocidas, tal como determinamos las longitudes de onda de luz visible midiendo patrones formados por ranuras o rejillas. (La separación entre los átomos de cristales simples de estructura conocida, como el cloruro de sodio, se calculan con base en la densidad del cristal y el número de Avogadro). Así, una vez conocida la longitud de onda de los rayos x, podemos usar la difracción de rayos x para explorar la estructura y determinar la separación entre los átomos de cristales de estructura desconocida.

La difracción de rayos x es, sin duda, la herramienta experimental más importante en la investigación de la estructura cristalina de sólidos. La difracción de rayos x también desempeña un papel importante en el estudio de estructuras de líquidos y de moléculas orgánicas. Ha sido una de las principales técnicas experimentales para establecer la estructura de doble hélice del ADN (figura 36.24) y lograr avances ulteriores en genética molecular.

36.24 La científica británica Rosalind Franklin obtuvo esta revolucionaria imagen de difracción de rayos x del ADN en 1953. Las bandas oscuras dispuestas en cruz ofrecieron la primera prueba de la estructura helicoidal de la molécula de ADN.





Ejemplo 36.5 Difracción de rayos x

Se dirige un haz de rayos x con una longitud de onda de 0.154 nm hacia ciertos planos de un cristal de silicio. Conforme se aumenta el ángulo de incidencia del haz a partir de cero, se encuentra el primer máximo de interferencia intenso, cuando el haz forma un ángulo de 34.5° con los planos. *a*) ¿Cuál es la separación entre los planos? *b*) ¿Existirán otros máximos de interferencia debidos a estos planos a ángulos mayores?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Este problema implica la reflexión de Bragg de los rayos x de los planos de un cristal. En el inciso *a*) se aplica la condición de Bragg, la ecuación (36.16), para calcular la distancia d entre planos adyacentes a partir de la longitud de onda $\lambda = 0.154$ nm y el ángulo de incidencia $\theta = 34.5°$ para el máximo de interferencia con $m = 1$. Dado el valor de d, se aplica nuevamente la condición de Bragg en el inciso *b*) para obtener los valores de θ de los máximos de interferencia que corresponden a otros valores de m.

EJECUTAR: *a*) Se despeja d en la ecuación (36.16) y se establece que $m = 1$:

$$d = \frac{m\lambda}{2\,\text{sen}\,\theta} = \frac{(1)(0.154\text{ nm})}{2\,\text{sen}\,34.5°} = 0.136\text{ nm}$$

Esta es la distancia entre planos adyacentes.

b) Para calcular otros ángulos, se despeja sen θ de la ecuación (36.16):

$$\text{sen}\,\theta = \frac{m\lambda}{2d} = m\frac{0.154\text{ nm}}{2(0.136\text{ nm})} = m(0.566)$$

Los valores de m iguales o mayores que 2 dan valores de sen θ mayores que la unidad, lo cual es imposible. Por lo tanto, *no* hay otros ángulos de máximos de interferencia con este conjunto específico de planos cristalinos.

EVALUAR: El resultado del inciso *b*) indica que *habría* un segundo máximo de interferencia si la cantidad $2\lambda/2d = \lambda/d$ fuera menor que 1. Este sería el caso si la longitud de onda de los rayos x fuera menor que $d = 0.136$ nm. ¿Qué tan pequeña debería ser la longitud de onda para tener *tres* máximos de interferencia?

Evalúe su comprensión de la sección 36.6 Se realiza un experimento de difracción de rayos x con un cristal, en el cual los planos atómicos están separados 0.200 nm. Se usan rayos x con longitud de onda de 0.100 nm. ¿El máximo de quinto orden estará presente en el patrón de difracción?

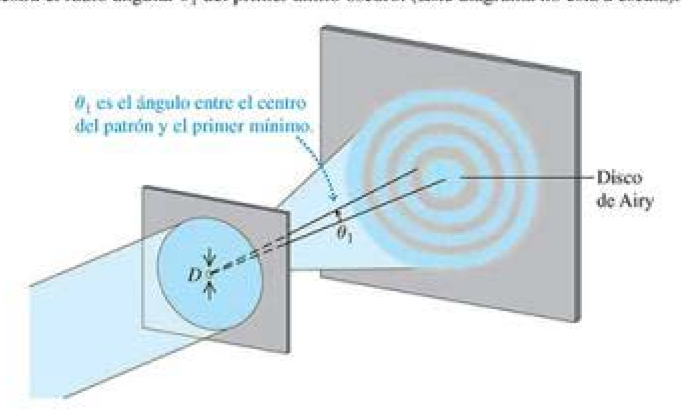


ActivPhysics 16.7: Circular Hole Diffraction
ActivPhysics 16.8: Resolving Power

36.7 Aberturas circulares y poder de resolución

Hemos estudiado detenidamente los patrones de difracción formados por ranuras largas y angostas, o por series de ranuras. No obstante, una abertura de *cualquier* forma crea un patrón de difracción. El patrón de difracción que forma una abertura *circular* tiene un interés especial debido a su papel en la limitación de la capacidad de resolución en un instrumento óptico para ver detalles finos. En principio, podríamos calcular la intensidad en cualquier punto P del patrón de difracción, dividiendo el área de la abertura en elementos pequeños, para obtener la amplitud de la onda resultante y la fase en P, e integrando después sobre el área de la abertura para determinar la amplitud e intensidad resultantes en P. En la práctica, esta integración no se puede llevar a cabo en términos de funciones elementales. Tan solo *describiremos* el patrón y citaremos algunas cifras importantes.

36.25 Patrón de difracción formado por una abertura circular de diámetro D. El patrón consiste en una mancha central brillante, y en anillos oscuros y brillantes que se alternan. Se muestra el radio angular θ_1 del primer anillo oscuro. (Este diagrama no está a escala).



El patrón de difracción que forma una abertura circular consiste en una mancha central brillante, rodeada por una serie de anillos brillantes y oscuros, como se observa en la figura 36.25. Es posible describir el patrón en términos del ángulo θ, que representa el radio angular de cada anillo. Si el diámetro de la abertura es D y la longitud de onda es λ, el radio angular θ_1 del primer anillo *oscuro* está dado por

$$\operatorname{sen}\theta_1 = 1.22\frac{\lambda}{D} \qquad \text{(difracción por una abertura circular)} \qquad (36.17)$$

Los radios angulares de los dos anillos oscuros siguientes están dados por

$$\operatorname{sen}\theta_2 = 2.23\frac{\lambda}{D} \qquad \operatorname{sen}\theta_3 = 3.24\frac{\lambda}{D} \qquad (36.18)$$

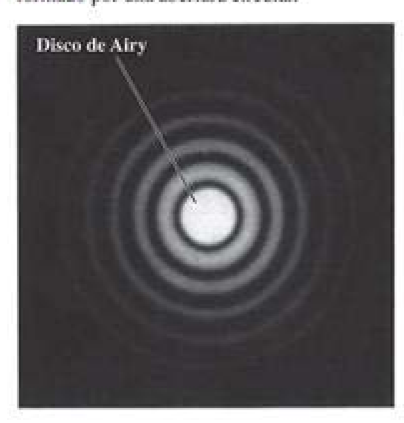
Entre estos hay anillos brillantes con radios angulares dados por

$$\operatorname{sen}\theta = 1.63\frac{\lambda}{D}, \qquad 2.68\frac{\lambda}{D}, \qquad 3.70\frac{\lambda}{D} \qquad (36.19)$$

y así sucesivamente. La mancha central brillante recibe el nombre de **disco de Airy**, en honor de Sir George Airy (1801-1892), astrónomo real de Inglaterra, quien dedujo por primera vez la expresión de la intensidad en el patrón. El radio angular del disco de Airy es el del primer anillo oscuro, dado por la ecuación (36.17).

La intensidad de los anillos brillantes decae con gran rapidez conforme aumenta el ángulo. Cuando D es mucho más grande que la longitud de onda λ, como es normalmente el caso en los instrumentos ópticos, la intensidad máxima del primer anillo es de solo el 1.7% del valor en el centro del disco de Airy, y la intensidad máxima del segundo anillo es de solo el 0.4%. La mayor parte (85%) de la energía lumínica cae dentro del disco de Airy. La figura 36.26 muestra un patrón de difracción formado por una abertura circular.

36.26 Fotografía del patrón de difracción formado por una abertura circular.



Difracción y formación de imágenes

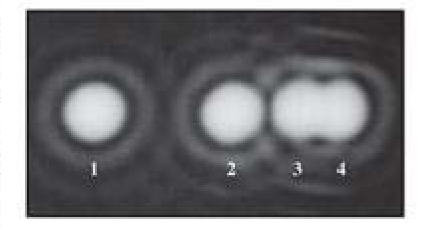
La difracción tiene implicaciones de gran alcance en la formación de imágenes por medio de lentes y espejos. En nuestro estudio de los instrumentos ópticos en el capítulo 34, supusimos que una lente de distancia focal f enfoca un haz paralelo (onda plana) en un *punto* situado a una distancia f de la lente. Esta suposición pasa por alto los efectos de difracción. Vemos ahora que lo que se obtiene no es un punto, sino el patrón de difracción que hemos descrito. Si se tienen dos objetos puntuales, sus imágenes no son dos puntos, sino dos patrones de difracción. Cuando los objetos están cerca entre sí, sus patrones de difracción se traslapan; si están lo suficientemente próximos, sus patrones se traslapan casi totalmente y es imposible distinguirlos. Este efecto se muestra en la figura 36.27, donde se presentan los patrones correspondientes a cuatro fuentes "puntuales" de luz muy pequeñas. En la figura 36.27*a* la imagen de la fuente izquierda está muy separada de las otras, pero las imágenes de las fuentes intermedia y derecha se han fusionado. En la figura 36.27*b*, con un diámetro de abertura más grande y, por consiguiente, discos de Airy más pequeños, las imágenes intermedia y derecha aparecen con mejor resolución. En la figura 36.27*c*, con una abertura aún mayor, tienen muy buena resolución.

Un criterio utilizado en la resolución de dos objetos puntuales, propuesto por el físico inglés Lord Rayleigh (1842-1919) y conocido como **criterio de Rayleigh**, es que los objetos están apenas resueltos (es decir, son apenas distinguibles), si el centro de un patrón de difracción coincide con el primer mínimo del otro. En ese caso, la separación angular de los centros de las imágenes está dada por la ecuación (36.17). La separación angular de los *objetos* es la misma que la de las *imágenes* hechas por un telescopio, un microscopio u otro dispositivo óptico. Así, dos objetos puntuales están apenas resueltos, de acuerdo con el criterio de Rayleigh, cuando su separación angular está dada por la ecuación (36.17).

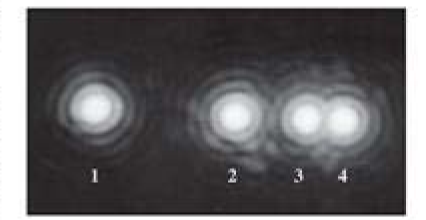
La separación mínima de dos objetos que apenas pueden resolverse mediante un instrumento óptico es el **límite de resolución** de este último. Cuanto más pequeño sea el límite de resolución, mayor será la *resolución*, o el **poder de resolución**, del instrumento. La difracción fija los límites últimos a la definición de las lentes. La óptica *geométrica* puede hacernos creer que podemos formar imágenes tan grandes como queramos. Tarde o temprano, sin embargo, se alcanza un punto donde la imagen se

36.27 Patrones de difracción de cuatro fuentes luminosas muy pequeñas ("puntuales"). Las fotografías fueron tomadas con una abertura circular delante de la lente. *a*) La abertura es tan pequeña que los patrones de las fuentes 3 y 4 se traslapan, y aparecen apenas resueltas conforme al criterio de Rayleigh. Al aumentar el tamaño de la abertura, disminuye el tamaño de los patrones de difracción, como se aprecia en *b*) y *c*).

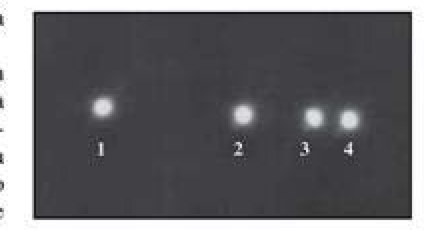
a) Abertura pequeña



b) Abertura media



c) Abertura grande



Aplicación Telescopio más grande, mejor resolución
Una razón para construir telescopios muy grandes es incrementar el diámetro de abertura y así reducir al mínimo los efectos de difracción. El diámetro efectivo de un telescopio se puede aumentar usando arreglos con telescopios más pequeños. El Very Large Array (VLA), de Nuevo México, es un conjunto de 27 radiotelescopios, cada uno con un diámetro de 25 m, que se extiende en un arreglo en forma de Y, a lo largo de 36 km. Por lo tanto, el diámetro de abertura efectivo es de 36 km, dando un límite de resolución de 5×10^{-8} rad a una longitud de onda de radio de 1.5 cm. Si su ojo tuviera esta resolución angular, ¡usted podría leer la línea "20/20" de una gráfica a 30 km de distancia!



hace más grande pero no más detallada. Si se ampliaran aún más las imágenes de la figura 36.27, no serían más nítidas.

CUIDADO **Poder de resolución contra poder de resolución cromático** Tenga cuidado de no confundir el poder de resolución de un instrumento óptico con el poder de resolución *cromático* de una rejilla (descrito en la sección 36.5). El poder de resolución se refiere a la capacidad para distinguir las imágenes de objetos que aparecen muy cerca entre sí, ya sea al mirarlos a través de un instrumento óptico o en una fotografía tomada con el instrumento. El poder de resolución cromático describe la medida en que es posible distinguir longitudes de onda diferentes, en un espectro formado por una rejilla de difracción. |

El criterio de Rayleigh combinado con la ecuación (36.17) muestra que la resolución (el poder de resolución) mejora al aumentar el diámetro; también mejora con longitudes de onda más cortas. Los microscopios de luz ultravioleta tienen mejor definición que los microscopios de luz visible. En los microscopios electrónicos, la resolución está limitada por las longitudes de onda asociadas con los electrones, los cuales tienen propiedades ondulatorias (que estudiaremos más ampliamente en el capítulo 39). Estas longitudes de onda pueden llegar a ser 100,000 veces más pequeñas que las longitudes de onda de la luz visible, con la correspondiente ganancia en resolución. El poder de resolución también explica la diferencia en la capacidad de almacenamiento entre los discos DVD (introducidos en 1995) y los discos con tecnología Blu-ray (introducidos en 2003). En ambos casos la información se almacena en una serie de fosos diminutos. Para que no se pierda información en el proceso de lectura, el sistema óptico de escaneo debe ser capaz de identificar dos fosos adyacentes, de manera que no parezcan mezclarse en un solo foso (véase fuentes 3 y 4 en la figura 36.27). El láser azul utilizado en un reproductor de Blu-ray tiene una longitud de onda más corta (405 nm) y, por ende, mejor poder de resolución que el láser rojo de 650 nm del primer reproductor de DVD. De esta manera, los fosos pueden estar más cerca en un disco Blu-ray que en un DVD, y es posible almacenar más información en un disco del mismo tamaño (50 gigabytes en un disco Blu-ray contra 4.7 gigabytes en un DVD).



Ejemplo 36.6 Poder de resolución de una lente de cámara

Una lente de cámara con distancia focal $f = 50$ mm y abertura máxima $f/2$ forma una imagen de un objeto situado a 9.0 m de distancia. *a*) Si la resolución está limitada por la difracción, ¿cuál es la distancia mínima entre dos puntos del objeto que están apenas resueltos, y cuál es la distancia correspondiente entre los puntos de la imagen? *b*) ¿Cómo cambia la situación si se "baja" la lente a $f/16$? Suponga que $\lambda = 500$ nm en ambos casos.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Este ejemplo se basa en ideas acerca del poder de resolución, formación de imágenes por medio de lentes (sección 34.4) y número f (sección 34.5). Según la ecuación (34.20), el número f de una lente es la distancia focal f entre el diámetro de abertura D. Se usa la ecuación para determinar D y luego se aplica la ecuación (36.17) (el criterio de Rayleigh) para calcular la separación angular θ entre dos puntos del objeto apenas resueltos. A continuación, y con ayuda de la geometría de formación de imágenes por una lente, se determina la distancia y entre esos puntos y la distancia y' entre los puntos de imagen correspondientes.

EJECUTAR: *a*) El diámetro de abertura es $D = f/(\text{número } f) = (50 \text{ mm})/2 = 25 \text{ mm} = 25 \times 10^{-3}$ m. De acuerdo con la ecuación (36.17), la separación angular θ de dos puntos del objeto apenas resueltos es

$$\theta \approx \operatorname{sen}\theta = 1.22\frac{\lambda}{D} = 1.22\frac{500 \times 10^{-9}\text{ m}}{25 \times 10^{-3}\text{ m}} = 2.4 \times 10^{-5}\text{ rad}$$

Según el análisis de las lentes delgadas de la sección 34.4 sabemos que, aparte del signo, $y/s = y'/s'$ [véase la ecuación (34.14)]. Por lo tanto, la separación angular de los puntos del objeto y la de los puntos de la imagen correspondientes son ambas iguales a θ. Como la distancia de objeto s es mucho mayor que la distancia focal $f = 50$ mm, la distancia de imagen s' es aproximadamente igual a f. Por lo tanto,

$$\frac{y}{9.0\text{ m}} = 2.4 \times 10^{-5} \qquad y = 2.2 \times 10^{-4}\text{ m} = 0.22\text{ mm}$$

$$\frac{y'}{50\text{ mm}} = 2.4 \times 10^{-5} \qquad y' = 1.2 \times 10^{-3}\text{ mm}$$

$$= 0.0012\text{ mm} \approx \tfrac{1}{800}\text{ mm}$$

b) El diámetro de abertura es ahora $(50\text{ mm})/16$, u ocho veces más pequeño que antes. La separación angular entre puntos apenas resueltos es ocho veces mayor, en tanto que los valores de y y y' también son ocho veces más grandes que antes:

$$y = 1.8\text{ mm} \qquad y' = 0.0096\text{ mm} = \tfrac{1}{100}\text{ mm}$$

Solo las mejores lentes de cámara se aproximan a este poder de resolución.

EVALUAR: Muchos fotógrafos utilizan siempre la abertura más pequeña posible para conseguir la máxima nitidez, pues las aberraciones de las lentes provocan que los rayos luminosos alejados del eje óptico converjan en un punto de imagen diferente del de los rayos próximos al eje. Pero como nos enseña este ejemplo, los efectos de difracción se tornan más importantes cuando la abertura es pequeña. Entonces es necesario equilibrar una causa de imágenes borrosas contra la otra.

Evalúe su comprensión de la sección 36.7 Se le pide comparar cuatro diferentes propuestas para telescopios que se pondrán en órbita en una ubicación tal que puedan evitarse los efectos borrosos de la atmósfera. Ordene del mejor al peor, los telescopios propuestos de acuerdo con su capacidad para resolver detalles pequeños. **i.** Un radiotelescopio de 100 m de diámetro que observa a una longitud de onda de 21 cm; **ii.** un telescopio óptico de 2.0 m de diámetro que observa a una longitud de onda de 500 nm; **iii.** un telescopio ultravioleta de 1.0 m de diámetro que observa a una longitud de onda de 100 nm; **iv.** un telescopio infrarrojo de 2.0 m de diámetro que observa a una longitud de onda de 10 μm.

36.8 Holografía

La **holografía** es una técnica para registrar y reproducir la imagen de un objeto por medio de efectos de interferencia. A diferencia de las imágenes bidimensionales que se obtienen mediante un sistema ordinario de fotografía o televisión, una imagen holográfica es auténticamente tridimensional. Este tipo de imágenes se pueden mirar desde diferentes direcciones para poner al descubierto distintos lados y desde diversas distancias para observar una perspectiva diferente. Quien nunca ha visto un holograma, ¡tal vez no creería que es posible algo así!

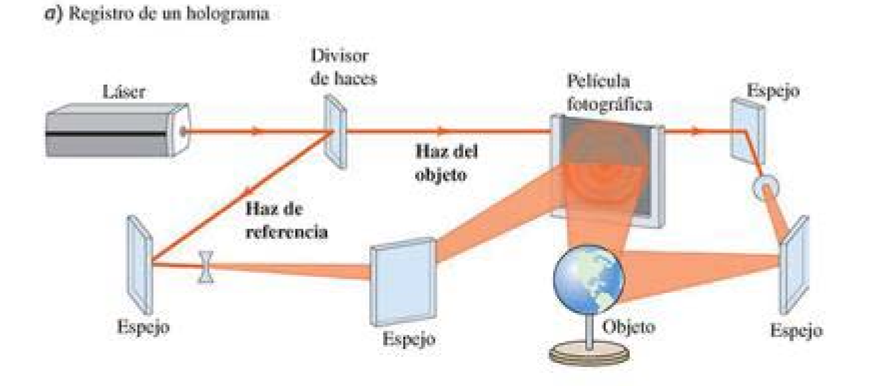
En la figura 36.28*a* se muestra el procedimiento básico para obtener un holograma. Se ilumina el objeto por holografiar con luz monocromática y se coloca una película fotográfica, de modo que incida en ella la luz dispersada desde el objeto y también la luz directa de la fuente. En la práctica, la fuente de luz debe ser un láser, por razones que comentaremos más adelante. La interferencia entre la luz directa y la dispersada da lugar a la formación y el registro de un complejo patrón de interferencia en la película.

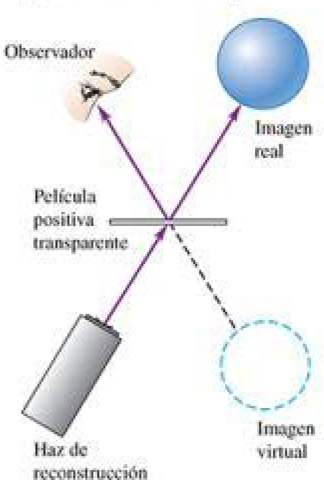
Para formar las imágenes, simplemente se proyecta luz a través de la película revelada (figura 36.28*b*). Se forman dos imágenes: una imagen virtual del lado de la película más próximo a la fuente, y una imagen real del lado opuesto.

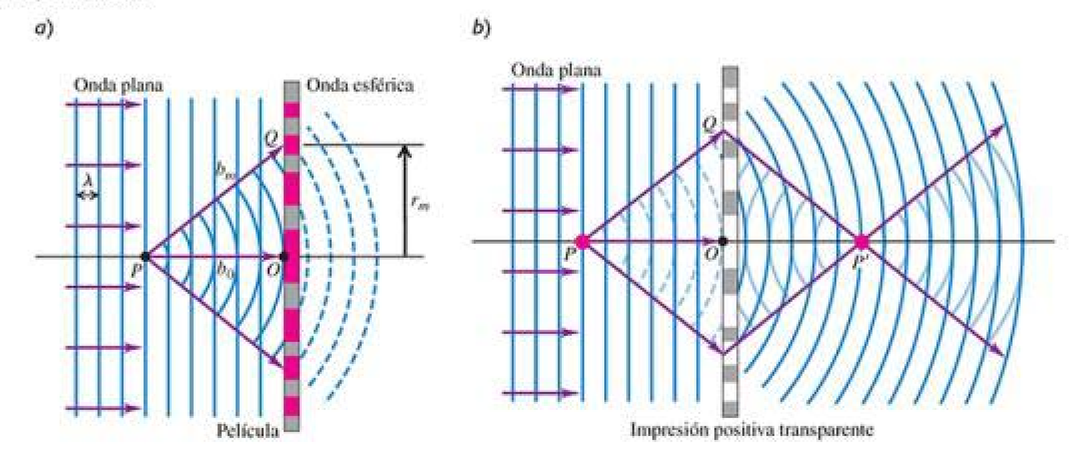
Holografía y patrones de interferencia

Un análisis completo de la holografía queda fuera de nuestro alcance; no obstante, comprenderemos el proceso en cierta medida examinando cómo se holografía un solo punto y cómo se forma su imagen. Considere el patrón de interferencia que se forma sobre una hoja de negativo fotográfico para película por superposición de una onda plana incidente y una onda esférica, como se muestra en la figura 36.29*a*. La onda esférica se origina en una fuente puntual P a una distancia b_0 de la película; de hecho,

36.28 *a*) Un holograma es un registro sobre película del patrón de interferencia que se forma con luz de la fuente coherente y luz dispersada desde el objeto. *b*) Se forman imágenes cuando se proyecta luz a través del holograma. El observador ve la imagen virtual que se forma detrás del holograma.







36.29 *a*) Hay interferencia constructiva de las ondas plana y esférica en el plano de la película en todos los puntos Q cuya distancia b_m con respecto a P excede la distancia b_0 de P a O en un número entero de longitudes de onda $m\lambda$. En el caso del punto Q que se muestra, $m = 2$. *b*) Cuando una onda plana incide en una impresión positiva transparente de la película revelada, la onda difractada consiste en una onda que converge en P' y luego diverge de nuevo, y en una onda divergente que parece provenir de P. Estas ondas forman una imagen real y una virtual, respectivamente.

P es un objeto pequeño que dispersa parte de la onda plana incidente. Suponemos que las dos ondas son monocromáticas y coherentes, y que la relación de fase es tal que hay interferencia constructiva en el punto O del diagrama. En estas condiciones *también* habrá interferencia constructiva en cualquier punto Q de la película que esté más distante de P que O un número entero de longitudes de onda. Es decir, si $b_m - b_0 = m\lambda$, donde m es un entero, entonces hay interferencia constructiva. Los puntos donde se satisface esta condición forman círculos en la película centrados en O, con radios r_m dados por

$$b_m - b_0 = \sqrt{b_0^2 + r_m^2} - b_0 = m\lambda \qquad (m = 1, 2, 3, \dots) \tag{36.20}$$

Despejando r_m^2 se obtiene:

$$r_m^2 = \lambda(2mb_0 + m^2\lambda)$$

Normalmente, b_0 es mucho mayor que λ; por ello, despreciamos el segundo término entre paréntesis y obtenemos

$$r_m = \sqrt{2m\lambda b_0} \qquad (m = 1, 2, 3, \dots) \tag{36.21}$$

El patrón de interferencia consiste en una serie de franjas circulares concéntricas brillantes cuyos radios están dados por la ecuación (36.21). Entre estas franjas brillantes hay franjas oscuras.

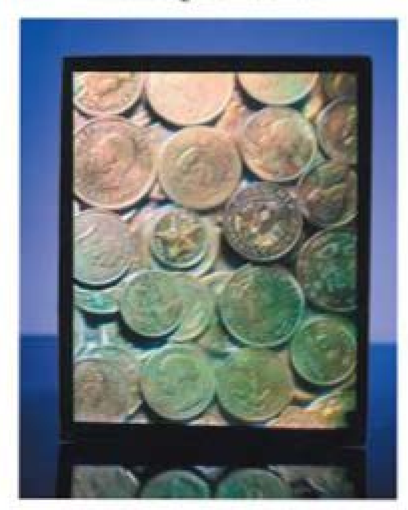
En seguida se revela la película y se obtiene una impresión positiva transparente, de modo que las áreas de franjas brillantes sean las más transparentes en la película. Después, se ilumina esta impresión con luz monocromática de onda plana de la misma longitud de onda λ que se utilizó inicialmente. En la figura 36.29*b*, considere un punto P' a una distancia b_0 a lo largo del eje proveniente de la película. Los centros de las franjas brillantes sucesivas difieren en su distancia con respecto a P' un número entero de longitudes de onda y, por lo tanto, en la onda difractada se presenta un *máximo* intenso en P'. Es decir, la luz converge en P' y luego diverge a partir de ese punto en el lado opuesto. Por consiguiente, P' es una *imagen real* del punto P.

Sin embargo, esto no constituye toda la onda difractada. La interferencia de las ondas que se extendieron a partir de todas las áreas transparentes forma una segunda onda esférica que es divergente en lugar de convergente. Cuando se sigue el rastro de esta onda detrás de la película en la figura 36.29*b*, parecería que se propaga a partir del punto P. Así, la onda difractada total procedente del holograma es una superposición de una onda esférica que converge para formar una imagen real en P' y una onda esférica que diverge como si hubiera provenido del punto de imagen virtual P.

Por el principio de superposición de las ondas, lo que es válido acerca de la formación de la imagen de un solo punto, también lo es con respecto a la formación de la imagen de cualquier número de puntos. La película registra el patrón de interferencia superpuesto de los diversos puntos, y cuando se proyecta luz a través de la película, se reproducen simultáneamente los diversos puntos de imagen. De este modo, se pueden registrar y reproducir las imágenes de un objeto extenso del mismo modo que un solo objeto puntual. La figura 36.30 muestra fotografías de una imagen holográfica tomadas desde dos ángulos diferentes; en ellas se observa la perspectiva cambiante de esta imagen tridimensional.

Para obtener un holograma es necesario resolver dos problemas prácticos. Primero, la luz que se utiliza debe ser *coherente* a lo largo de distancias grandes, en comparación con las dimensiones del objeto y su distancia con respecto a la película. Las fuentes ordinarias de luz *no* satisfacen este requisito por razones que comentamos en la sección 35.1. Por consiguiente, la luz láser es indispensable para formar un holograma. (La luz blanca ordinaria sirve para *ver* ciertos tipos de hologramas, como los que tienen las tarjetas de crédito). Segundo, se requiere una estabilidad mecánica extrema. Si se produce cualquier movimiento relativo de la fuente, el objeto o la película durante la exposición, incluso uno tan pequeño como un cuarto de longitud de onda, el patrón de interferencia en la película se desdibuja lo suficiente para impedir la formación de una imagen satisfactoria. Sin embargo, estos obstáculos no son insuperables y la holografía ha adquirido importancia en la investigación, el entretenimiento y una extensa variedad de aplicaciones tecnológicas.

36.30 Dos vistas del mismo holograma observado desde ángulos diferentes.

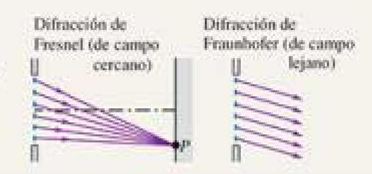




RESUMEN



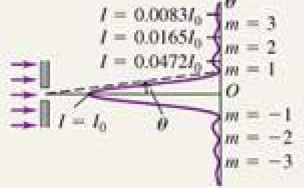
Difracción de Fresnel y de Fraunhofer: Cuando pasa luz a través de una abertura o alrededor de un borde, se produce difracción. Cuando la fuente y el observador se encuentran tan lejos de la superficie obstructora que los rayos salientes se consideran paralelos, se produce difracción de Fraunhofer. Cuando la fuente y el observador están relativamente cerca de la superficie obstructora, se produce difracción de Fresnel.



Difracción de una sola ranura: La luz monocromática que pasa a través de una ranura angosta de ancho a produce un patrón de difracción en una pantalla distante. La ecuación (36.2) establece la condición para que haya interferencia destructiva (una franja oscura) en un punto P del patrón a un ángulo θ. La ecuación (36.7) proporciona la intensidad en el patrón en función de θ. (Véase los ejemplos 36.1 a 36.3).

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{m\lambda}{a} \qquad (m = \pm 1, \pm 2, \ldots) \tag{36.2}$$

$$I = I_0 \left\{ \frac{\operatorname{sen}[\pi a(\operatorname{sen}\theta)/\lambda]}{\pi a(\operatorname{sen}\theta)/\lambda} \right\}^2 \tag{36.7}$$



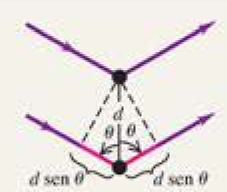
Rejillas de difracción: Una rejilla de difracción consiste en un gran número de ranuras finas paralelas, espaciadas una distancia d. La condición para que se alcance la intensidad máxima en el patrón de interferencia es la misma que en el caso del patrón de dos fuentes; pero los máximos producidos por la rejilla son muy pronunciados y angostos. (Véase el ejemplo 36.4).

$$d\operatorname{sen}\theta = m\lambda \qquad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots) \tag{36.13}$$



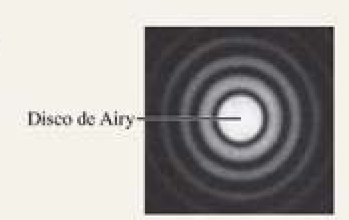
Difracción de rayos x: Un cristal actúa como una rejilla tridimensional de difracción de rayos x cuya longitud de onda es del mismo orden de magnitud que la separación entre los átomos del cristal. Con respecto a un conjunto de planos cristalinos separados entre sí por una distancia d, hay interferencia constructiva cuando los ángulos de incidencia y de dispersión (medidos con respecto a los planos cristalinos) son iguales y cuando se satisface la condición de Bragg [ecuación (36.16)]. (Véase el ejemplo 36.5).

$$2d\operatorname{sen}\theta = m\lambda \qquad (m = 1, 2, 3, \ldots) \tag{36.16}$$



Aberturas circulares y poder de resolución: El patrón de difracción producido por una abertura circular de diámetro D consiste en una mancha central brillante, llamada disco de Airy, y una serie de anillos concéntricos oscuros y brillantes. La ecuación (36.17) proporciona el radio angular θ_1 del primer anillo oscuro, igual al tamaño angular del disco de Airy. La difracción fija el límite último de resolución (nitidez de la imagen) de los instrumentos ópticos. De acuerdo con el criterio de Rayleigh, dos objetos puntuales están apenas resueltos cuando su separación angular q está dada por la ecuación (36.17). (Véase el ejemplo 36.6).

$$\operatorname{sen}\theta_1 = 1.22\frac{\lambda}{D} \tag{36.17}$$





PROBLEMA PRÁCTICO **Observación de la expansión del Universo**

Un astrónomo que estudia la luz proveniente de una galaxia identificó el espectro del hidrógeno, pero determina que las longitudes de onda son algo diferentes de las obtenidas en el laboratorio, donde la línea H_α del espectro del hidrógeno tiene una longitud de onda de 656.3 nm. El astrónomo usa una rejilla de difracción de transmisión que tiene 5758 líneas/cm en el primer orden y encuentra que la primera franja brillante del H_α se presenta en ±23.41° respecto de la mancha central. ¿Con qué rapidez se mueve la galaxia? Exprese su respuesta en m/s y como un porcentaje de la rapidez de la luz. ¿La galaxia se mueve hacia nosotros o se aleja?

GUÍA DE SOLUCIÓN

Véase el área de estudio MasteringPhysics® para consultar una solución con Video Tutor.



IDENTIFICAR Y PLANTEAR

1. Se puede usar la información de la rejilla para calcular la longitud de onda de la línea H_α en el espectro de la galaxia.
2. En la sección 16.8 referente al efecto Doppler aprendimos algo importante acerca de la radiación electromagnética: la frecuencia que se recibe de una fuente en movimiento, como una galaxia, es diferente de la frecuencia que se emite. La ecuación (16.30) relaciona la frecuencia emitida, la frecuencia recibida y la velocidad de la fuente (la incógnita). La ecuación $c = f\lambda$ relaciona la frecuencia f y la longitud de onda λ con la rapidez de la luz c.

EJECUTAR

3. Calcule la longitud de onda de la línea espectral H_α de la luz recibida.
4. Rescriba la ecuación (16.30) como una fórmula de la velocidad v de la galaxia en términos de la longitud de onda recibida y la longitud de onda emitida por la fuente.
5. Despeje v. Exprésela en m/s y como un porcentaje de c, e identifique si la galaxia se mueve hacia nosotros o se aleja.

EVALUAR

6. ¿Su respuesta es congruente con las dimensiones relativas de las longitudes de onda emitida y recibida?

Problemas

Para tareas asignadas por el profesor, visite www.masteringphysics.com



•, ••, •••: Problemas de dificultad creciente. **PA**: Problemas acumulativos que incorporan material de capítulos anteriores. **CALC**: Problemas que requieren cálculo. **BIO**: Problemas de ciencias biológicas.

PREGUNTAS PARA ANÁLISIS

P36.1 ¿Por qué podemos observar fácilmente los efectos de la difracción en el caso de las ondas sonoras y de las ondas en el agua, pero no en el caso de la luz? ¿Se debe a que la luz viaja mucho más rápido que esas otras ondas? Explique su respuesta.

P36.2 ¿Cuál es la diferencia entre la difracción de Fresnel y la de Fraunhofer? ¿Son procesos *físicos* diferentes? Explique su respuesta.

P36.3 Con una lente de diámetro D y luz de longitud de onda λ y frecuencia f se forma una imagen de dos objetos lejanos para el observador, pero próximos entre sí. De las acciones siguientes, ¿cuáles aumentan el poder de resolución? *a*) Usar una lente de diámetro más pequeño. *b*) Usar luz de mayor frecuencia. *c*) Usar luz de longitud de onda más larga. Justifique su respuesta en cada caso.

P36.4 A través de una sola ranura de ancho a pasa luz de longitud de onda λ y frecuencia f. Se observa el patrón de difracción en una pantalla a una distancia x de la ranura. De las acciones siguientes, ¿cuáles *reducen* la anchura del máximo central? *a*) Disminuir el ancho de la ranura. *b*) Disminuir la frecuencia f de la luz. *c*) Disminuir la longitud de onda λ de la luz. *d*) Disminuir la distancia x de la ranura a la pantalla. Justifique su respuesta en cada caso.

P36.5 En un experimento de difracción que utiliza ondas con longitud de onda λ, *no* habrá mínimos de intensidad (es decir, no habrá franjas oscuras) si la anchura de la rendija es lo suficientemente pequeña. ¿Cuál es el ancho máximo de rendija con el cual ocurre esto? Explique su respuesta.

P36.6 Las ondas sonoras predominantes en el habla humana tienen longitudes de onda del orden de 1.0 a 3.0 m. Con base en las ideas de la difracción, explique cómo es posible escuchar la voz de una persona cuando esta se halla de espaldas a nosotros.

P36.7 En la difracción con una sola ranura, ¿a qué equivale $\text{sen}(\beta/2)$ cuando $\theta = 0$? En función de su respuesta, ¿por qué la intensidad de una sola ranura *no* es igual a cero en el centro?

P36.8 Normalmente, un arcoíris muestra una gama de colores (véase la sección 33.4). Sin embargo, si las gotitas de agua que forman el arcoíris son suficientemente pequeñas, el arcoíris se ve blanco. Explique por qué, con base en ideas de difracción. ¿Qué tan pequeñas tendrían que ser las gotas de lluvia para que esto ocurra?

P36.9 Ciertos altavoces para conciertos al aire libre (donde todos los asistentes se sientan en el suelo) son más largos que anchos. Con base en ideas de difracción, explique por qué esto resulta más eficiente para difundir el sonido de modo uniforme entre los espectadores, en comparación con un altavoz cuadrado o un altavoz más grande en el sentido horizontal que en el vertical. ¿Seguiría siendo este el caso si los espectadores se sentaran a diferentes alturas, como en un anfiteatro? ¿Por qué?

P36.10 La figura 31.12 (sección 31.2) muestra un sistema de altavoces. El *woofer*, o bafle de bajos, que es un altavoz de diámetro grande, produce los sonidos de baja frecuencia; el *tweeter*, o bafle de agudos, un altavoz de diámetro más pequeño, produce sonidos de frecuencia más alta. Con base en ideas de difracción, explique por qué el *tweeter* es más eficaz que el *woofer* para distribuir de manera uniforme los sonidos de alta frecuencia en una habitación.

P36.11 En un disco compacto de audio, CD-ROM o en un DVD, se guarda información en una serie de fosos. Un rayo láser barre estos fosos. Una limitación importante de la cantidad de información que se puede almacenar en un disco de este tipo es la anchura del rayo láser. Explique a qué se debe esto, y cómo es que el uso de un láser de longitud de onda más corta permite almacenar más información en un disco del mismo tamaño.

P36.12 ¿Con qué color de luz el telescopio espacial Hubble puede ver detalles más finos en un objeto astronómico distante: rojo, azul o ultravioleta? Explique su respuesta.

P36.13 Al final de la sección 36.4 se hicieron los siguientes enunciados acerca de un arreglo de N ranuras. Explique, con ayuda de diagramas de fasores, por qué cada enunciado es válido. *a*) Se presenta un mínimo siempre que ϕ es un múltiplo entero de $2\pi/N$, excepto cuando ϕ es un múltiplo entero de 2π (que da un máximo principal). *b*) Hay $(N-1)$ mínimos entre cada par de máximos principales.

P36.14 ¿Se podrían observar efectos de difracción de rayos x con cristales, empleando luz visible en lugar de rayos x? ¿Por qué?

P36.15 ¿Por qué es mejor una rejilla de difracción que un conjunto de dos ranuras para medir longitudes de onda de luz?

P36.16 En ocasiones vemos filas de torres de antenas de radio uniformemente espaciadas. Un estudiante comenta que estas actúan como una rejilla de difracción. ¿Qué quiere decir con eso? ¿Por qué querría uno que actuaran como rejilla de difracción?

P36.17 Si se hace un holograma con luz de 600 nm y luego se observa con luz de 500 nm, ¿cómo se ven las imágenes en comparación con las que se observan cuando se emplea luz de 600 nm? Explique su respuesta.

P36.18 Se hace un holograma con luz de 600 nm y luego se ve con luz blanca de una bombilla incandescente. ¿Qué se observa? Explique su respuesta.

P36.19 La película fotográfica ordinaria invierte el blanco y el negro, en el sentido de que las áreas más brillantemente iluminadas se convierten en las más negras después del revelado (de ahí el término *negativo*). Suponga que se observa directamente un negativo de holograma, sin hacer una transparencia positiva. ¿En qué diferirán las imágenes resultantes de las que se obtienen con el positivo? Explique su respuesta.

EJERCICIOS

Sección 36.2 Difracción con una sola ranura

36.1 •• Sobre una ranura de 0.750 mm de ancho incide luz monocromática proveniente de una fuente lejana. En una pantalla a 2.00 m de la ranura, la distancia desde el máximo central del patrón de difracción al primer mínimo resulta ser de 1.35 mm. Calcule la longitud de onda de la luz.

36.2 • Rayos paralelos de luz verde de mercurio con una longitud de onda de 546 nm pasan a través de una ranura que cubre una lente con distancia focal de 60.0 cm. En el plano focal de la lente, la distancia entre el máximo central y el primer mínimo es de 10.2 mm. ¿Cuál es el ancho de la rendija?

36.3 •• Luz con longitud de onda de 585 nm incide sobre una rendija de 0.0666 mm de ancho. *a*) En una pantalla grande y muy lejana, ¿cuántas franjas *totalmente* oscuras (lo que indica cancelación absoluta) habrá, incluyendo ambos lados del punto central brillante? Resuelva este problema ¡*sin* calcular todos los ángulos! (*Sugerencia:* Pregúntese cuál es el valor máximo que puede tener sen θ. ¿Qué le dice esto acerca del valor máximo que puede tener m?). *b*) ¿A qué ángulo se presenta la franja oscura que está más alejada de la franja brillante central?

36.4 • Luz con longitud de onda de 633 nm proveniente de una fuente distante incide sobre una ranura de 0.750 mm de ancho, y el patrón de difracción se observa en una pantalla a 3.50 m de distancia. ¿Cuál es la distancia entre las dos franjas oscuras a cada lado de la franja brillante central?

36.5 •• La difracción se presenta en ondas de todo tipo, incluso en las ondas sonoras. A través de una ranura de 12.0 cm de ancho pasa sonido de alta frecuencia, proveniente de una fuente distante, con una longitud de onda de 9.00 cm. Un micrófono se encuentra a 8.00 m directamente enfrente del centro de la ranura, en la posición que corresponde al punto O de la figura 36.5*a*. Se desplaza el micrófono en dirección perpendicular a la recta que une el centro de la ranura con el punto O. ¿A qué distancias de O la intensidad que detecta el micrófono es cero?

36.6 • PA **¡Tsunami!** El 26 de diciembre de 2004, ocurrió un violento terremoto con magnitud de 9.1 en la costa de Sumatra, el cual provocó un enorme tsunami (similar a un maremoto) y causó la muerte a más de 150,000 personas. Los científicos que observaron la enorme ola en mar abierto midieron que el tiempo entre las crestas fue de 1.0 h y que la rapidez de la ola fue de 800 km/h. Modelos por computadora de la evolución de la enorme ola mostraron que esta dobló alrededor de los continentes y se difundió a todos los océanos de la Tierra. Cuando la onda cubrió las brechas entre los continentes, se difractó entre ellas como si se tratara de ranuras. *a*) ¿Cuál fue la longitud de onda de este tsunami? *b*) La distancia entre la punta sur de África y la punta norte de la Antártida es aproximadamente de 4500 km; mientras que la distancia entre el extremo sur de Australia y la Antártida es de unos 3700 km. Como una aproximación, podemos modelar el comportamiento de esta onda usando la difracción de Fraunhofer. Determine el ángulo más pequeño con respecto al máximo central para el que las ondas se cancelarían después de pasar a través de cada una de esas brechas continentales.

36.7 •• PA Una serie de frentes de onda de agua, lineales y paralelos, viajan directamente hacia la orilla a 15.0 cm/s en un lago que, si no fuera por eso, estaría completamente tranquilo. Una larga barrera de concreto que corre paralela a la orilla a una distancia de 3.20 m tiene un orificio. Usted cuenta las crestas de onda y observa que pasan 75.0 crestas por minuto; también observa que ninguna onda llega a la orilla a ±61.3 cm del punto directamente opuesto al orificio, pero las ondas sí llegan a la orilla en cualquier otro punto a menos de esa distancia. *a*) ¿Cuál es el ancho del orificio en la barrera? *b*) ¿A qué otros ángulos encuentra usted que ninguna onda choca con la orilla?

36.8 • A través de una ranura pasa radiación electromagnética monocromática de longitud de onda λ proveniente de una fuente distante. Se observa el patrón de difracción en una pantalla que está a 2.50 m de la ranura. Si el ancho del máximo central es de 6.00 mm, ¿cuál será el ancho de ranura a si la longitud de onda es de: *a*) 500 nm (luz visible), *b*) 50.0 μm (radiación infrarroja), *c*) 0.500 nm (rayos x)?

36.9 •• **Difracción en el vano de una puerta.** A través del vano de una puerta de 1.00 m de ancho, sale sonido con una frecuencia de 1250 Hz (véase el ejercicio 36.5). ¿A qué ángulos con respecto a la línea media perpendicular al vano de la puerta una persona que se encuentre afuera de la habitación no escuchará sonido alguno? Tome 344 m/s como la rapidez del sonido en el aire y suponga que la fuente y el receptor están ambos lo suficientemente lejos del vano, de manera que sea aplicable la difracción de Fraunhofer. Ignore los efectos de las reflexiones.

36.10 • PA Ciertas ondas luminosas, cuyo campo eléctrico es $E_y(x, t) = E_{máx}\,\text{sen}[(1.20 \times 10^7\ \text{m}^{-1})x - \omega t]$, pasan a través de una ranura y forman las primeras bandas oscuras a ±28.6° del centro del patrón de difracción. *a*) ¿Cuál es la frecuencia de esta luz? *b*) ¿Cuál es el ancho de la ranura? *c*) ¿A qué otros ángulos aparecen más bandas oscuras?

36.11 •• A través de una ranura que cubre una lente con una distancia focal de 40.0 cm pasan rayos de luz paralelos cuya longitud de onda es de 620 nm. Se observa el patrón de difracción en el plano focal de la lente, y la distancia del centro del máximo central al primer mínimo es de 36.5 cm. ¿Cuál es el ancho de la ranura? (*Nota:* El ángulo que ubica el primer mínimo *no* es pequeño).

36.12 •• A través de una ranura de 0.350 mm de ancho pasa luz roja con una longitud de onda de 633 nm, emitida por un láser de helio y neón. Se observa el patrón de difracción en una pantalla situada a 3.00 m de distancia. Defina el ancho de una franja brillante como la distancia entre los mínimos a ambos lados. *a*) ¿Cuál es el ancho de la franja central brillante? *b*) ¿Cuál es el ancho de la primera franja brillante a uno y otro lado de la franja central?

Sección 36.3 Intensidad en el patrón con una sola ranura

36.13 •• A través de una sola ranura pasa luz monocromática con una longitud de onda de 580 nm, y se observa el patrón de difracción en una pantalla. La fuente y la pantalla están lo suficientemente lejos de la ranura para que sea aplicable la difracción de Fraunhofer. *a*) Si los primeros mínimos de difracción están en ±90.0°, de modo que el máxi-

mo central ocupa totalmente la pantalla, ¿cuál es el ancho de la ranura? *b*) Con el ancho de ranura calculado en el inciso *a*), ¿cuál es la razón de la intensidad en $\theta = 45.0°$ con respecto a la intensidad en $\theta = 0°$?

36.14 •• A través de una ranura de 0.450 mm de ancho pasa luz monocromática de longitud de onda $\lambda = 620$ nm proveniente de una fuente distante. Se observa el patrón de difracción en una pantalla situada a 3.00 m de la ranura. En términos de la intensidad I_0 en la cresta del máximo central, ¿cuál es la intensidad de la luz en la pantalla a las distancias siguientes del centro del máximo central?: *a*) 1.00 mm; *b*) 3.00 mm; *c*) 5.00 mm.

36.15 •• Se ilumina una ranura de 0.240 mm de ancho con rayos de luz paralelos de 540 nm de longitud de onda. Se observa el patrón de difracción en una pantalla situada a 3.00 m de la ranura. La intensidad en el centro del máximo central ($\theta = 0°$) es de 6.00×10^{-6} W/m^2. *a*) En la pantalla, ¿cuál es la distancia del máximo central al primer mínimo? *b*) ¿Cuál es la intensidad en un punto de la pantalla en medio del centro del máximo central y el primer mínimo?

36.16 • A través de una ranura de 0.0290 mm de ancho pasa luz monocromática de 486 nm de longitud de onda proveniente de una fuente distante. En el patrón de difracción resultante, la intensidad en el centro del máximo central ($\theta = 0°$) es de 4.00×10^{-5} W/m^2. ¿Cuál es la intensidad en un punto de la pantalla que corresponde a $\theta = 1.20°$?

36.17 •• Se forma un patrón de difracción con una sola ranura, por la radiación electromagnética monocromática de una fuente distante que pasa a través de la ranura de 0.105 mm de ancho. En un punto del patrón a 3.25° del centro del máximo central, la diferencia total de fase entre las ondas provenientes de los extremos superior e inferior de la ranura es de 56.0 rad. *a*) ¿Cuál es la longitud de onda de la radiación? *b*) ¿Cuál es la intensidad en este punto, si la intensidad en el centro del máximo central es I_0?

36.18 • Considere un experimento de difracción de una sola ranura, en el que la amplitud de la onda en el punto *O* de la figura 36.5*a* es E_0. Para cada uno de los casos siguientes, dibuje un diagrama de fasores como el de la figura 36.8*c* y determine *gráficamente* la amplitud de la onda en el punto en cuestión. (*Sugerencia:* A partir de la ecuación (36.6), calcule el valor de β para cada caso). Calcule la intensidad y compare con la ecuación (36.5). *a*) sen $\theta = \lambda/2a$; *b*) sen $\theta = \lambda/a$; *c*) sen $\theta = 3\lambda/2a$.

36.19 •• La estación de radio pública KXPR-FM en Sacramento difunde su señal a 88.9 MHz. Las ondas de radio pasan entre dos grandes rascacielos, que están separados 15.0 m considerando sus paredes más cercanas. *a*) ¿A qué ángulos horizontales, en relación con la dirección original de las ondas, una antena alejada no recibirá señal alguna de esa estación? *b*) Si la intensidad máxima es de 3.50 W/m^2 en la antena, ¿cuál es la intensidad a $\pm 5.00°$ a partir del centro del máximo central en la antena alejada?

Sección 36.4 Ranuras múltiples

36.20 •• **Difracción e interferencia combinadas.** Considere el patrón de interferencia formado por dos ranuras paralelas de ancho *a* y con una separación *d*, donde $d = 3a$. Las ranuras se iluminan con luz que incide normalmente y con longitud de onda λ. *a*) Sin tener en cuenta los efectos de difracción debidos al ancho de ranura, ¿a qué ángulos θ con respecto al máximo central aparecerán los cuatro máximos siguientes del patrón de interferencia de dos ranuras? Exprese su respuesta en términos de *d* y λ. *b*) Ahora incluya los efectos de difracción. Si la intensidad en $\theta = 0$ es I_0, ¿cuál será la intensidad en cada uno de los ángulos calculados en el inciso *a*)? *c*) ¿Qué máximos de interferencia de doble ranura faltan en el patrón? *d*) Compare sus resultados con la figura 36.12*c*. ¿En qué forma difieren sus resultados?

36.21 • **Número de franjas en un máximo de difracción.** En la figura 36.12*c* el máximo central de difracción contiene exactamente siete franjas de interferencia, y en este caso $d/a = 4$. *a*) ¿Cuál debe ser la razón d/a para que el máximo central contenga exactamente cinco franjas? *b*) En el caso considerado en el inciso *a*), ¿cuántas franjas contiene el primer máximo de difracción a un lado del máximo central?

36.22 • Ocho ranuras angostas, paralelas e igualmente espaciadas crean un patrón de interferencia. Hay un mínimo de interferencia cuando la diferencia de fase ϕ entre la luz que sale de ranuras adyacentes es de $\pi/4$. El diagrama de fasores es el de la figura 36.14*b*. ¿Con qué pares de ranuras hay interferencia totalmente destructiva?

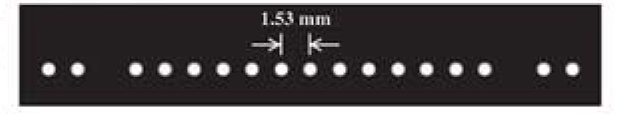
36.23 •• Se produce un patrón de interferencia con luz de una fuente distante, cuya longitud de onda es de 580 nm, y que incide sobre dos ranuras paralelas idénticas separadas por una distancia (entre centros) de 0.530 mm. *a*) Si las ranuras son muy angostas, ¿cuál sería la posición angular de los máximos de interferencia de primero y segundo órdenes de las dos ranuras? *b*) Las ranuras tienen 0.320 mm de ancho. En términos de la intensidad I_0 en el centro del máximo central, ¿cuál es la intensidad en cada una de las posiciones angulares del inciso *a*)?

36.24 • Dos ranuras idénticas son iluminadas por rayos paralelos de luz monocromática con longitud de onda de 568 nm y producen un patrón de interferencia en una pantalla que está a 75.0 cm de ellas. Los centros de las ranuras están separados 0.640 mm y el ancho de cada ranura es de 0.434 mm. Si la intensidad en el centro del máximo central es de 5.00×10^{-4} W/m^2, ¿cuál es la intensidad en un punto de la pantalla que está a 0.900 mm del centro del máximo central?

36.25 •• Cuatro ranuras angostas paralelas igualmente espaciadas producen un patrón de interferencia. Dibujando los diagramas de fasores adecuados, demuestre que hay un mínimo de interferencia cuando la diferencia de fase ϕ correspondiente a ranuras adyacentes es *a*) $\pi/2$; *b*) π; *c*) $3\pi/2$. En cada caso, ¿con qué pares de ranuras hay interferencia totalmente destructiva?

36.26 •• Un experimento de difracción implica dos ranuras delgadas paralelas que producen el patrón de franjas brillantes y oscuras, cercanamente espaciadas, que se muestra en la figura E36.26. Solo la porción central del patrón se muestra en la figura. Los puntos brillantes están igualmente espaciados a 1.53 mm entre sus centros (excepto por los puntos faltantes) sobre una pantalla a 2.50 m de las ranuras. La fuente de luz es un láser de helio-neón que produce una longitud de onda de 632.8 nm. *a*) ¿A qué distancia están las dos ranuras? *b*) ¿Qué tan ancha es cada una?

Figura **E36.26**



36.27 •• Se iluminan dos ranuras idénticas con luz láser de longitud de onda de 500.0 nm, con lo cual se produce un patrón de interferencia en una pantalla situada a 90.0 cm de las ranuras. Las bandas brillantes están a 1.00 cm unas de otras, y en el patrón faltan las terceras bandas brillantes a ambos lados del máximo central. Determine el ancho y la separación de las dos ranuras.

Sección 36.5 Rejilla de difracción

36.28 •• Sobre una rejilla plana de transmisión incide luz monocromática en dirección normal. El máximo de primer orden del patrón de interferencia está a un ángulo de 8.94°. ¿Cuál es la posición angular del máximo de cuarto orden?

36.29 • Si una rejilla de difracción produce su banda brillante de tercer orden a un ángulo de 78.4° con luz de longitud de onda de 681 nm, calcule *a*) el número de ranuras por centímetro de la rejilla; *b*) la ubicación angular de las bandas brillantes de primero y segundo órdenes. *c*) ¿Habría una banda brillante de cuarto orden? Explique su respuesta.

36.30 • Si una rejilla de difracción produce una mancha brillante de tercer orden para la luz roja (con longitud de onda de 700 nm), a 65.0° del máximo central, ¿en qué ángulo estará la segunda mancha brillante de segundo orden para la luz violeta (con longitud de onda de 400 nm)?
36.31 • A través de una rejilla de difracción con 900 ranuras/cm pasa luz visible, y se observa el patrón de interferencia en una pantalla que está a 2.50 m de la rejilla. *a*) ¿La posición angular del espectro de primer orden es lo suficientemente pequeña para que sen $\theta \approx \theta$ sea una buena aproximación? *b*) En el espectro de primer orden, los máximos correspondientes a dos longitudes de onda diferentes están separados en la pantalla por una distancia de 3.00 mm. ¿Cuál es la diferencia entre estas longitudes de onda?
36.32 • El intervalo de longitudes de onda del espectro visible es aproximadamente de 380 a 750 nm. Sobre una rejilla de difracción de 350 ranuras/mm incide luz blanca en dirección normal. Calcule la anchura angular del espectro visible en *a*) el primer orden y *b*) el tercer orden. (*Nota:* Una ventaja de trabajar a órdenes más altos es que se tiene mayor extensión angular y mejor resolución. Una desventaja es el traslape de los distintos órdenes, como se mostró en el ejemplo 36.4).
36.33 • Cuando un rayo láser con longitud de onda de 632.8 nm pasa a través de una rejilla de difracción, los primeros puntos brillantes se presentan a ±17.8° del máximo central. *a*) ¿Cuál es la densidad lineal (en líneas/cm) de esta rejilla? *b*) ¿Cuántos puntos brillantes adicionales se encuentran más allá de los primeros puntos, y en qué ángulos se presentan?
36.34 • *a*) ¿Cuál es la longitud de onda de la luz que se desvía un ángulo de 13.5° en el primer orden por una rejilla de transmisión con 5000 ranuras/cm? *b*) ¿Cuál es la desviación de segundo orden de esta longitud de onda? Suponga que la incidencia es normal.
36.35 • Sobre una rejilla plana de transmisión con 350 ranuras/mm inciden, en dirección normal, ondas monocromáticas planas con una longitud de onda de 520 nm. Obtenga los ángulos de desviación en los órdenes primero, segundo y tercero.
36.36 • **Identificación de isótopos mediante espectros.** Los diferentes isótopos de un mismo elemento emiten luz a longitudes de onda ligeramente distintas. Una longitud de onda del espectro de emisión del átomo de hidrógeno es de 656.45 nm; en el caso del deuterio, la longitud de onda correspondiente es de 656.27 nm. *a*) ¿Cuál es el número mínimo de ranuras que se requiere para resolver estas dos longitudes de onda en el segundo orden? *b*) Si la rejilla tiene 500.00 ranuras/mm, obtenga los ángulos y la separación angular de estas dos longitudes de onda en el segundo orden.
36.37 • Una rejilla de difracción típica de laboratorio tiene 5.00×10^3 líneas/cm, y estas líneas están contenidas en un ancho de rejilla de 3.50 cm. *a*) ¿Cuál es el poder de resolución cromático de una rejilla de este tipo en el primer orden? *b*) ¿Esta rejilla podría resolver las líneas del doblete de sodio (véase la sección 36.5) en el primer orden? *c*) Al hacer un análisis espectral de una estrella, usted utiliza esta rejilla en el *segundo* orden, para resolver líneas espectrales que están muy cerca de la línea espectral de 587.8002 nm del hierro. **i.** Para longitudes de onda más largas que la línea del hierro, ¿cuál es la longitud de onda más corta que usted podría distinguir de la línea del hierro? **ii.** Para longitudes de onda más cortas que la línea del hierro, ¿cuál es la longitud de onda más grande que usted podría distinguir de la línea del hierro? **iii.** ¿Cuál es el intervalo de longitudes de onda que usted *no* podría distinguir de la línea del hierro?
36.38 • La luz que emite un arco de hierro incluye muchas longitudes de onda. Dos de estas son $\lambda = 587.9782$ nm y $\lambda = 587.8002$ nm. Se desea resolver estas líneas espectrales en el primer orden por medio de una rejilla de 1.20 cm de longitud. ¿Qué número mínimo de ranuras por centímetro debe tener la rejilla?

Sección 36.6 Difracción de rayos x

36.39 • Los átomos de un cristal dispersan rayos x con una longitud de onda de 0.0850 nm. El máximo de segundo orden de la reflexión de Bragg se presenta cuando el ángulo θ de la figura 36.22 es de 21.5°. ¿Cuál es la separación entre planos atómicos adyacentes en el cristal?
36.40 • Si los planos de un cristal están separados 3.50 Å (1 Å = 10^{-10} m = 1 unidad de Ångstrom), *a*) ¿qué longitud de onda de ondas electromagnéticas se requiere para que el primer máximo intenso de interferencia de la reflexión de Bragg se presente, cuando las ondas inciden en los planos a un ángulo de 15.0°, y en qué parte del espectro electromagnético se encuentran dichas ondas? (Véase la figura 32.4). *b*) ¿En cuáles otros ángulos ocurrirán máximos de interferencia intensa?
36.41 • Rayos x monocromáticos inciden en un cristal en el que el espaciamiento de los planos atómicos es de 0.440 nm. El máximo de primer orden en la reflexión de Bragg se presenta cuando los rayos x incidentes y reflejados forman un ángulo de 39.4° con los planos del cristal. ¿Cuál es la longitud de onda de los rayos x?

Sección 36.7 Aberturas circulares y poder de resolución

36.42 • BIO Si usted puede leer el renglón inferior del diagrama de agudeza visual de su oftalmólogo, sus ojos tienen un poder de resolución de un minuto de arco, equivalente a de grado. Si este poder resolutivo está limitado por la difracción, ¿a qué diámetro efectivo del sistema óptico de sus ojos corresponde este valor? Aplique el criterio de Rayleigh y suponga que $\lambda = 550$ nm.
36.43 • Entre dos satélites que se encuentran a una altitud de 1200 km hay una separación de 28 km. Si los satélites transmiten microondas de 3.6 cm, ¿qué diámetro mínimo debe tener un plato receptor para resolver (de acuerdo con el criterio de Rayleigh) las dos transmisiones?
36.44 •• El VLBA (Very Long Baseline Array) usa varios radiotelescopios individuales para constituir uno que tenga un diámetro equivalente de 8000 km aproximadamente. Cuando este radiotelescopio enfoca ondas de radio de 2.0 cm de longitud de onda, ¿cuál tendría que ser el diámetro del espejo de un telescopio de luz visible que enfoca luz de 550 nm de longitud de onda de modo que este telescopio tenga la misma resolución que el radiotelescopio?
36.45 •• A través de una abertura circular con 7.4 μm de diámetro, pasa luz monocromática con una longitud de onda de 620 nm. El patrón de difracción resultante se observa en una pantalla que está a 4.5 m de la abertura. ¿Cuál es el diámetro del disco de Airy en la pantalla?
36.46 • **Fotografía.** Un fotógrafo de la vida silvestre utiliza una lente telefoto moderada con distancia focal de 135 mm y abertura máxima de $f/4.00$ para fotografiar un oso que está a 11.5 m de distancia. Suponga que la longitud de onda es de 550 nm. *a*) ¿Cuál es el ancho del detalle más pequeño en el oso que esa lente puede resolver, si se abre a su máxima abertura? *b*) Si, para ganar profundidad de campo, el fotógrafo ajusta la lente a $f/22.0$, ¿cuál sería el ancho del detalle resoluble más pequeño en el oso?
36.47 • **Observación de Júpiter.** Se le ha pedido diseñar un telescopio espacial que se pondrá en órbita alrededor de la Tierra. Cuando Júpiter esté a 5.93×10^8 km de distancia (su aproximación máxima a la Tierra), el telescopio debe resolver, conforme al criterio de Rayleigh, detalles de Júpiter que están a 250 km entre sí. ¿Cuál es el diámetro mínimo de espejo que se requiere? Suponga una longitud de onda de 500 nm.
36.48 • Una lente convergente de 7.20 cm de diámetro tiene una distancia focal de 300 mm. Si la resolución está limitada por la difracción, ¿cuánto es lo más lejos que puede estar un objeto, si se desea resolver (según el criterio de Rayleigh) puntos dentro de él separados por una distancia de 4.00 mm? Tome $\lambda = 550$ nm.
36.49 •• **Hubble contra Arecibo.** El telescopio espacial Hubble tiene una abertura de 2.4 m y enfoca luz visible (de 380 a 750 nm). El radiotelescopio de Arecibo, en Puerto Rico, tiene un diámetro de 305 m (1000 ft) (está construido en un valle) y enfoca las ondas de radio con una longitud de onda de 75 cm. *a*) En condiciones de observación óptimas, ¿de qué tamaño es el cráter más pequeño de la Luna que cada uno de estos telescopios podría resolver? *b*) Si se decidiera dedicar el telescopio Hubble a tareas de vigilancia, ¿cuál es la órbita más alta que podría tener por encima de la superficie terrestre, sin dejar de ser capaz de resolver la placa de matrícula (no las letras, solo la placa) de un automóvil situado en el suelo? Suponga condiciones de observación óptimas, de modo que la resolución esté limitada por la difracción.

36.50 • **Búsqueda de manchas estelares.** El telescopio Hale de Monte Palomar, California, tiene un espejo de 200 in (5.08 m) de diámetro y enfoca la luz visible. Considerando que una mancha solar grande tiene aproximadamente 10,000 mi de diámetro, ¿a qué distancia máxima tendría que hallarse una estrella para que este telescopio pudiera resolver una mancha solar, con la finalidad de saber si otras estrellas tienen este tipo de manchas? (Suponga condiciones de observación óptimas, de modo que la resolución esté limitada por la difracción). ¿Hay estrellas que estén tan cerca de nosotros, además del Sol?

PROBLEMAS

36.51 •• BIO **Espesor de un cabello humano.** Si bien hemos analizado la difracción con una sola ranura, se obtiene un resultado similar cuando la luz da vuelta alrededor de un objeto recto y delgado, como un cabello. En ese caso, a es el ancho del cabello. A partir de mediciones reales de un cabello humano en el laboratorio, se encontró que cuando un haz de luz de 632.8 nm de longitud de onda alumbraba un cabello, y la luz difractada se veía en una pantalla a 1.25 m de distancia, las primeras franjas oscuras en ambos lados de la mancha brillante central estaban separadas 5.22 cm. ¿Qué espesor tenía este cabello?

36.52 •• Suponga que el aparato completo (ranura, pantalla y espacio intermedio) del ejercicio 36.4 se sumerge en agua ($n = 1.333$). En tales condiciones, ¿cuál es la distancia entre las dos franjas oscuras?

36.53 ••• Luz láser con longitud de onda de 632.8 nm incide con dirección normal sobre una ranura que mide 0.0250 mm de ancho. La luz transmitida se ve sobre una pantalla distante, donde la intensidad en el centro de la franja brillante central es de 8.50 W/m^2. *a*) Determine el número máximo de franjas totalmente oscuras sobre la pantalla, suponiendo que esta es suficientemente grande para mostrarlas todas. *b*) ¿A qué ángulo se presenta la franja oscura que está más alejada del centro? *c*) ¿Cuál es la intensidad máxima de la franja brillante que se presenta inmediatamente antes de la franja oscura en el inciso *b*)? Aproxime el ángulo al que se presenta esta franja, suponiendo que está a medio camino entre los ángulos de las franjas oscuras a cada lado de ella.

36.54 •• PA Un altavoz tiene un diafragma que vibra a 1250 Hz y viaja a 80.0 m/s directamente hacia un par de orificios en una pared muy grande, para la cual la rapidez del sonido es de 344 m/s. Usted observa que el sonido que pasa a través de los orificios se cancela primero a ±11.4° con respecto a la dirección original del altavoz, cuando se le observa desde una distancia lejos de la pared. *a*) ¿Cuál es la distancia de separación entre los dos orificios? *b*) ¿A qué ángulos el sonido se cancelaría primero si la fuente dejara de moverse?

36.55 • **Medición del índice de refracción.** Una ranura delgada iluminada con luz de frecuencia f forma su primera banda oscura a ±38.2° en el aire. Cuando se sumerge el aparato completo (ranura, pantalla y espacio intermedio) en un líquido transparente desconocido, las primeras bandas oscuras de la ranura aparecen ahora a ±21.6°. Calcule el índice de refracción del líquido.

36.56 • **Diseño de una rejilla.** Su jefe le pide diseñar una rejilla de difracción capaz de dispersar el espectro visible de primer orden en un intervalo angular de 21.0° (véase el ejemplo 36.4 de la sección 36.5). *a*) ¿Cuántas ranuras por centímetro debe tener esta rejilla? *b*) ¿A qué ángulos comenzará y terminará el espectro visible de primer orden?

36.57 •• Unos rayos paralelos de luz con una longitud de onda de 540 nm iluminan una ranura de 0.360 mm de ancho. El patrón de difracción se observa en una pantalla que está a 1.20 m de la ranura. La intensidad en el centro del máximo central ($\theta = 0°$) es I_0. *a*) ¿Cuál es la distancia en la pantalla del centro del máximo central al primer mínimo? *b*) ¿Cuál es la distancia en la pantalla del centro del máximo central al punto donde la intensidad ha decaído a $I_0/2$?

36.58 ••• CALC La intensidad de la luz en el patrón de difracción de Fraunhofer de una sola ranura es

$$I = I_0\left(\frac{\operatorname{sen}\gamma}{\gamma}\right)^2$$

donde

$$\gamma = \frac{\pi a \operatorname{sen}\theta}{\lambda}$$

a) Demuestre que la ecuación de los valores de γ a los que I es un máximo es $\tan\gamma = \gamma$. *b*) Calcule los tres valores positivos más pequeños de γ que sean soluciones de esta ecuación. (*Sugerencia:* Puede utilizar un procedimiento de aproximaciones sucesivas. Suponga un valor de γ y ajuste su conjetura de modo que $\tan\gamma$ se aproxime cada vez más a γ. Una solución gráfica de la ecuación resulta muy útil para localizar las soluciones de modo aproximado para obtener buenas conjeturas iniciales).

36.59 •• **Anchura angular de un máximo principal.** Considere N ranuras angostas igualmente espaciadas. Aplique la aproximación de ángulos pequeños $\operatorname{sen}\theta = \theta$ (con θ en radianes) para probar lo siguiente: con respecto a un máximo de intensidad que aparece a un ángulo θ, los mínimos de intensidad inmediatamente adyacentes a este máximo se encuentran a los ángulos $\theta + \lambda/Nd$ y $\theta - \lambda/Nd$, por lo que la anchura angular del máximo principal es $2\lambda/Nd$. Esto es proporcional a $1/N$, como se concluyó en la sección 36.4 sobre la base de la conservación de la energía.

36.60 •• PA CALC En una cámara de vacío grande, un rayo láser monocromático pasa a través de la ranura angosta de una placa de aluminio y forma un patrón de difracción en una pantalla que se encuentra a 0.620 m de la ranura. Cuando la placa de aluminio tiene una temperatura de 20.0°C, el ancho del máximo central en el patrón de difracción es de 2.75 mm. ¿Cuál es el cambio en el ancho del máximo central cuando la temperatura de la placa se eleva a 520°C? ¿El ancho de la difracción máxima central aumenta o disminuye con el aumento de temperatura?

36.61 • **Diagrama de fasores con ocho ranuras.** Ocho ranuras angostas uniformemente espaciadas forman un patrón de interferencia. La figura 36.14 muestra diagramas de fasores correspondientes a los casos donde la diferencia de fase ϕ entre la luz proveniente de ranuras adyacentes es $\phi = \pi$, $\phi = \pi/4$ y $\phi = \pi/2$. Cada uno de estos casos da un mínimo de intensidad. El pie de la figura 36.14 también afirma que se presenta un mínimo cuando $\phi = 3\pi/4$, $\phi = 5\pi/4$, $\phi = 3\pi/2$ y $\phi = 7\pi/4$. *a*) Dibuje el diagrama de fasores de cada uno de estos cuatro casos, y explique por qué cada diagrama prueba que, de hecho, hay un mínimo. (*Nota:* Es conveniente emplear un lápiz de diferente color para cada ranura). *b*) Con respecto a cada uno de los cuatro casos $\phi = 3\pi/4$, $\phi = 5\pi/4$, $\phi = 3\pi/2$ y $\phi = 7\pi/4$, ¿con qué pares de ranuras hay interferencia totalmente destructiva?

36.62 •• PA En el laboratorio, una línea particular de luz del espectro de helio pasa a través de una rejilla de difracción y el máximo de segundo orden se encuentra a 18.9° del centro de la banda brillante central. Luego se usa la misma rejilla para luz proveniente de una galaxia distante que se aleja de la Tierra con una rapidez de 2.65×10^7 m/s. Para la luz proveniente de la galaxia, ¿cuál es la ubicación angular del máximo de segundo orden para la misma línea espectral como la observada en el laboratorio? (Véase la sección 16.8).

36.63 • ¿Cuál es la longitud de onda más grande que se puede observar en el tercer orden de una rejilla de transmisión que tiene 9200 ranuras/cm? Suponga una incidencia normal.

36.64 •• *a*) La figura 36.16 muestra ondas planas de luz que inciden en *dirección normal* en una rejilla de difracción. Si, en cambio, la luz incide en la rejilla con un ángulo de incidencia θ' (medido con respecto a la normal), demuestre que la condición para que haya un máximo de intensidad *no* es la ecuación (36.13), sino

$$d(\operatorname{sen}\theta + \operatorname{sen}\theta') = m\lambda \quad (m = 0, \pm1, \pm2, \pm3, \dots)$$

b) Para la rejilla descrita en el ejemplo 36.4 (sección 36.5), con 600 ranuras/mm, obtenga los ángulos de los máximos correspondientes a $m = 0$, 1 y -1 con luz roja ($\lambda = 650$ nm) en los casos en que $\theta' = 0$ (incidencia normal) y $\theta' = 20.0°$.

36.65 • Cierta rejilla de difracción tiene 650 ranuras/mm. ¿Cuál es el orden más alto que contiene todo el espectro visible? (El intervalo de longitudes de onda del espectro visible es aproximadamente de 380 a 750 nm).

36.66 •• Los *cuásares*, cuyo nombre es una abreviatura de *fuentes cuasiestelares de radio*, son objetos distantes que parecen estrellas a través de un telescopio, pero que emiten mucha más radiación electromagnética que una galaxia entera normal de estrellas. Un ejemplo es el objeto brillante que aparece abajo y a la izquierda del centro de la figura P36.66; los otros objetos alargados de esta imagen son galaxias normales. El modelo más socorrido de la estructura de un cuásar es una galaxia con un agujero negro de masa inmensamente grande en su centro. En este modelo, la radiación es emitida por el gas y el polvo interestelares presentes en la galaxia conforme este material cae hacia el agujero negro. Se piensa que la radiación emana de una región de apenas unos cuantos años luz de diámetro. (Se cree que el resplandor difuso que rodea al brillante cuásar de la figura P36.66 es la galaxia que hospeda a este cuásar). Con la finalidad de investigar este modelo de los cuásares y de estudiar otros objetos astronómicos extraños, la Agencia Espacial Rusa se propone colocar un radiotelescopio en una órbita que se extiende a 77,000 km de la Tierra. Cuando se combinen las señales de este telescopio con señales de los telescopios terrestres del VLBA, la resolución será la de un solo radiotelescopio de 77,000 km de diámetro. ¿De qué tamaño es el detalle más pequeño que este sistema podría resolver en el cuásar 3C 405, que se encuentra a 7.2×10^8 años luz de la Tierra, si se utilizan ondas de radio a una frecuencia de 1665 MHz? (*Sugerencia:* Aplique el criterio de Rayleigh). Exprese su respuesta en años luz y en kilómetros.

Figura **P36.66**



36.67 ••• **Radar de configuración sincronizada.** En un tipo común de instalación de radar, una antena giratoria barre el cielo con un haz de radio. No obstante, en un sistema de radar de *formación sincronizada*, las antenas permanecen inmóviles y el barrido del haz se lleva a cabo electrónicamente. Para saber cómo se logra esto, considere una formación de N antenas dispuestas a lo largo del eje horizontal de las x en $x = 0, \pm d, \pm 2d, \ldots, \pm(N-1)d/2$. (El número N es impar). Cada antena emite radiación uniformemente en todas direcciones en el plano horizontal xy. Todas las antenas emiten la radiación de forma coherente, con la misma amplitud E_0 y la misma longitud de onda λ. Sin embargo, se puede modificar la fase relativa δ de la emisión de antenas adyacentes. Si la antena que está en $x = 0$ emite una señal dada por $E_0 \cos \omega t$, medida en un punto próximo a la antena, la antena en $x = d$ emite una señal dada por $E_0 \cos(\omega t + \delta)$, medida en un punto próximo a esa antena. La cantidad correspondiente a la antena que está en $x = -d$ es $E_0 \cos(\omega t - \delta)$; en el caso de las antenas que están en $x = \pm 2d$, es $E_0 \cos(\omega t \pm 2\delta)$, y así sucesivamente. *a*) Si $\delta = 0$, el patrón de interferencia a cierta distancia de las antenas es grande en comparación con d y tiene un máximo principal en $\theta = 0$ (es decir, en la dirección $+y$, perpendicular a la línea de las antenas). Demuestre que, si $d < \lambda$, este es el *único* máximo principal de interferencia en el intervalo angular $-90° < \theta < 90°$. Por consiguiente, este máximo principal describe un haz emitido en la dirección $\theta = 0$. Como se describe en la sección 36.4, si N es grande, el haz tiene una gran intensidad y es muy angosto. *b*) Si $\delta \neq 0$, demuestre que el máximo principal de intensidad descrito en el inciso *a*) se encuentra en

$$\theta = \operatorname{arcsen}\left(\frac{\delta\lambda}{2\pi d}\right)$$

donde δ se mide en radianes. De este modo, haciendo variar δ de valores positivos a valores negativos y viceversa, lo cual se consigue fácilmente por medios electrónicos, se logra que el haz efectúe un barrido en un sentido y otro en torno a $\theta = 0$. *c*) Una unidad meteorológica de radar que se va a instalar en un avión emite ondas de radio a 8800 MHz. La unidad utiliza una formación de 15 antenas de 28.0 cm de largo (de la antena de un extremo de la formación a la antena del otro extremo). ¿Cuáles deben ser los valores máximo y mínimo de δ (esto es, el valor más positivo y el más negativo), si el haz del radar debe barrer 45° a la izquierda o a la derecha de la dirección de vuelo? Exprese su respuesta en radianes.

36.68 •• **Fotografía subacuática.** Una cámara subacuática tiene una lente con distancia focal de 35.0 mm y una abertura máxima de $f/2.80$. La película que utiliza tiene una emulsión sensible a la luz con frecuencia de 6.00×10^{14} Hz. Si el fotógrafo toma una foto de un objeto ubicado a 2.75 m frente a la cámara con la lente abierta por completo, ¿cuál es el ancho del detalle resoluble más pequeño en el objeto si este es *a*) un pez bajo el agua y la cámara está dentro del agua, y *b*) una persona en la playa, y la cámara está fuera del agua?

36.69 •• Un astronauta en órbita apenas logra resolver dos fuentes puntuales ubicadas en la Tierra y separadas por una distancia de 65.0 m. Suponga que la definición está limitada por la difracción y aplique el criterio de Rayleigh. ¿A qué altitud con respecto a la Tierra se encuentra el astronauta? Considere su ojo como una abertura circular con un diámetro de 4.00 mm (el diámetro de su pupila) y suponga que la longitud de onda de la luz es de 550 nm. Ignore el efecto del fluido en el ojo.

36.70 •• BIO **Resolución del ojo.** La resolución máxima del ojo depende del diámetro de la abertura de la pupila (efecto de difracción) y del tamaño de las células de la retina. El tamaño de las células de la retina (aproximadamente 5.0 μm de diámetro) limita el tamaño de un objeto en un punto (25 cm) cerca del ojo a una altura de 50 μm aproximadamente. (Para tener una aproximación razonable sin tener que efectuar cálculos complicados, ignoraremos el efecto del fluido en el ojo). *a*) Puesto que el diámetro de la pupila humana es de 2.0 mm aproximadamente, ¿permite el criterio de Rayleigh resolver un objeto de 50 μm de altura a 25 cm del ojo con luz de longitud de onda de 550 nm? *b*) De acuerdo con el criterio de Rayleigh, ¿cuál es el objeto más pequeño que podemos resolver un punto a 25 cm de distancia, con luz de 550 nm de longitud de onda? *c*) ¿Qué ángulo subtiende el objeto del inciso *b*) en el ojo? Exprese su respuesta en minutos (60 min = 1°), y compárelo con el valor experimental de aproximadamente 1 min. *d*) ¿Qué efecto es más importante en la limitación de la resolución del ojo: la difracción o el tamaño de las células de la retina?

36.71 •• Una hoja de vidrio está cubierta con un recubrimiento opaco y delgado. En medio de esta hoja hay un surco delgado de 0.00125 mm de espesor. La hoja está totalmente sumergida en un líquido. Rayos paralelos de luz coherente monocromática con 612 nm de longitud de onda en el aire inciden sobre la hoja, de forma perpendicular a la superficie, y pasan a través del surco. Una pantalla está colocada en el líquido a una distancia de 30.0 cm de la hoja, paralela a ella. Se observa que las primeras franjas oscuras en ambos lados de la banda bri-

llante central en la pantalla están separadas 22.4 cm. ¿Cuál es el índice de refracción del líquido?

36.72 •• Observación de planetas más allá de nuestro Sistema Solar. La NASA está evaluando un proyecto denominado *Planet Imager* (*Formador de imágenes de planetas*) que daría a los astrónomos la capacidad para ver detalles de planetas en órbita alrededor de otras estrellas. Con base en el principio del Very Large Array (véase la sección 36.7), el *Planet Imager* se serviría de una formación de telescopios de infrarrojo distribuidos a lo largo de miles de kilómetros en el espacio. (La luz visible permitiría alcanzar una definición aún mejor. Por desgracia, a las longitudes de onda visibles, las estrellas son tan brillantes que el resplandor ocultaría a los planetas. Esto no es un problema tan grande a las longitudes de onda de infrarrojo). *a*) Si el *Planet Imager* tiene un diámetro efectivo de 6000 km y observa radiación infrarroja a una longitud de onda de 10 μm, ¿cuál es la distancia máxima a la que sería capaz de observar detalles de 250 km de ancho como mínimo (aproximadamente el tamaño de la zona metropolitana de Los Ángeles) en un planeta? Exprese su respuesta en años luz (véase el apéndice E). (*Sugerencia:* Aplique el criterio de Rayleigh). *b*) Con fines comparativos, considere la definición de un solo telescopio espacial de infrarrojo de 1.0 m de diámetro que observa radiación de 10 μm. ¿Cuál es el tamaño de los detalles más pequeños que un telescopio como este podría resolver a la distancia de la estrella más cercana al Sol, Próxima Centauri, que se encuentra a 4.22 años luz? Cómo es este tamaño en comparación con el diámetro de la Tierra (1.27×10^4 km)? ¿Y con la distancia media de la Tierra al Sol (1.50×10^8 km)? ¿Sería capaz un telescopio de este tipo de detectar la presencia de un planeta como la Tierra, en una órbita del tamaño de la órbita terrestre, alrededor de *cualquier* otra estrella? Explique su respuesta. *c*) Suponga que se utiliza el *Planet Imager* para observar un planeta en órbita alrededor de la estrella 70 Virginis, a 59 años luz de nuestro Sistema Solar. De hecho, se ha detectado un planeta (aunque no parecido a la Tierra) en órbita alrededor de esta estrella, no mediante una imagen directa de él, sino al observar el ligero "bamboleo" de la estrella, debido a que esta y el planeta giran en órbita alrededor de un centro de masa común. ¿De qué tamaño son los detalles más pequeños que el *Planet Imager* tendría la posibilidad de resolver sobre el planeta de 70 Virginis? ¿Cómo es este tamaño en comparación con el diámetro del planeta, que se supone es similar al de Júpiter (1.38×10^5 km)? (Aunque se cree que el planeta de 70 Virginis tiene una masa 6.6 veces mayor que la de Júpiter, probablemente su radio no sea muy distinto del de este. La razón es que se considera que los planetas tan grandes como el de 70 Virginis se componen principalmente de gases, no de material rocoso, y por lo tanto la atracción gravitacional mutua de las diferentes partes del planeta los comprime en alto grado).

PROBLEMAS DE DESAFÍO

36.73 ••• CALC Es posible calcular la intensidad del patrón de difracción de Fraunhofer de una sola ranura *sin* emplear el método de fasores de la sección 36.3. Sea y' la posición de un punto dentro de la ranura de ancho a de la figura 36.5*a*, con $y' = 0$ en el centro de la ranura, de modo que esta se extiende de $y' = -a/2$ a $y' = a/2$. Imaginemos que dividimos la ranura en tiras infinitesimales de ancho dy', cada una de las cuales actúa como fuente de ondas secundarias. *a*) La amplitud de la onda total en el punto O de la pantalla distante de la figura 36.5*a* es E_0. Explique por qué la amplitud de la onda proveniente de cada tira infinitesimal de la ranura es $E_0(dy'/a)$, por lo que el campo eléctrico de la onda a una distancia x de la tira infinitesimal es $dE = E_0(dy'/a)\text{sen}(kx - \omega t)$. *b*) Explique por qué la onda proveniente de cada tira, tal como se detecta en el punto P de la figura 36.5*a*, se puede expresar como

$$dE = E_0\frac{dy'}{a}\text{sen}[k(D - y'\,\text{sen}\,\theta) - \omega t]$$

donde D es la distancia del centro de la ranura al punto P y $k = 2\pi/\lambda$. *c*) Integrando las contribuciones dE de todas las partes de la ranura, demuestre que la onda total que se detecta en el punto P es

$$E = E_0\text{sen}(kD - \omega t)\frac{\text{sen}[ka(\text{sen}\,\theta)/2]}{ka(\text{sen}\,\theta)/2}$$
$$= E_0\text{sen}(kD - \omega t)\frac{\text{sen}[\pi a(\text{sen}\,\theta)/\lambda]}{\pi a(\text{sen}\,\theta)/\lambda}$$

(Le serán útiles las identidades trigonométricas del apéndice B). Demuestre que en $\theta = 0$, correspondiente al punto O de la figura 36.5*a*, la onda es $E = E_0\,\text{sen}(kD - \omega t)$ y su amplitud es E_0, como se indica en el inciso *a*). *d*) Con base en el resultado del inciso *c*), demuestre que, si la intensidad en el punto O es I_0, entonces la intensidad en un punto P está dada por la ecuación (36.7).

36.74 ••• Patrón de intensidad de N ranuras. *a*) Considere un arreglo de N ranuras con una distancia d entre ranuras adyacentes. Las ranuras emiten, coherentemente y en fase, a una longitud de onda λ. Demuestre que, en el tiempo t, el campo eléctrico en un punto distante P es

$$E_P(t) = E_0\cos(kR - \omega t) + E_0\cos(kR - \omega t + \phi)$$
$$+ E_0\cos(kR - \omega t + 2\phi) + \cdots$$
$$+ E_0\cos(kR - \omega t + (N-1)\phi)$$

donde E_0 es la amplitud en P del campo eléctrico debido a una ranura individual, $\phi = (2\pi d\,\text{sen}\,\theta)/\lambda$, θ es el ángulo de los rayos que llegan a P (medidos desde la bisectriz perpendicular de la formación de ranuras), y R es la distancia de P a la ranura más distante. En este problema, suponga que R es mucho mayor que d. *b*) Para efectuar la suma del inciso *a*), es conveniente utilizar la relación de números complejos:

$$e^{iz} = \cos z + i\,\text{sen}\,z$$

donde $i = \sqrt{-1}$. En esta expresión, $\cos z$ es la *parte real* del número complejo e^{iz}, y $\text{sen}\,z$ es su *parte imaginaria*. Demuestre que el campo eléctrico $E_P(t)$ es igual a la parte real de la cantidad compleja

$$\sum_{n=0}^{N-1} E_0 e^{i(kR - \omega t + n\phi)}$$

c) Con base en las propiedades de la función exponencial según las cuales $e^A e^B = e^{(A+B)}$ y $(e^A)^n = e^{nA}$, demuestre que la sumatoria del inciso *b*) se puede escribir como:

$$E_0\left(\frac{e^{iN\phi} - 1}{e^{i\phi} - 1}\right)e^{i(kR - \omega t)}$$
$$= E_0\left(\frac{e^{iN\phi/2} - e^{-iN\phi/2}}{e^{i\phi/2} - e^{-i\phi/2}}\right)e^{i(kR - \omega t + (N-1)\phi/2)}$$

En seguida, con base en la relación $e^{iz} = \cos z + i\,\text{sen}\,z$, demuestre que el campo eléctrico (real) en el punto P es

$$E_P(t) = \left[E_0\frac{\text{sen}(N\phi/2)}{\text{sen}(\phi/2)}\right]\cos[kR - \omega t + (N-1)\phi/2]$$

La cantidad que aparece en los primeros corchetes de esta expresión es la amplitud del campo eléctrico en P. *d*) Use el resultado de la amplitud del campo eléctrico del inciso *c*), para demostrar que la intensidad a un ángulo θ es

$$I = I_0\left[\frac{\text{sen}(N\phi/2)}{\text{sen}(\phi/2)}\right]^2$$

donde I_0 es la intensidad máxima de una sola ranura. *e*) Compruebe el resultado del inciso *d*) para el caso $N = 2$. Conviene recordar que $\text{sen}\,2A = 2\,\text{sen}\,A\cos A$. Explique por qué su resultado difiere de la ecuación (35.10), la expresión de la intensidad en una interferencia de dos fuentes, por un factor de 4. (*Sugerencia:* ¿Está definida I_0 de la misma forma en ambas expresiones?).

36.75 ••• CALC Patrón de intensidad de N ranuras (continuación). El inciso *d*) del problema de desafío anterior da una expresión de la intensidad en el patrón de interferencia de N ranuras idénticas. Verifique los enunciados siguientes con base en este resultado. *a*) La intensidad máxima del patrón es $N^2 I_0$. *b*) El máximo principal del centro del patrón se extiende desde $\phi = -2\pi/N$ por lo que su anchura es inversamente proporcional a $1/N$. *c*) Se presenta un mínimo siempre que ϕ sea un múltiplo entero de $2\pi/N$, excepto cuando ϕ es un múltiplo entero de 2π (en tal caso, se tiene un máximo principal). *d*) Hay $(N-1)$ mínimos entre cada par de máximos principales. *e*) A la mitad del camino entre dos máximos principales, la intensidad no puede ser mayor que I_0; es decir, no puede ser mayor que $1/N^2$ veces la intensidad en el máximo principal.

Respuestas

Pregunta inicial del capítulo 

La menor longitud de onda de un lector láser de tecnología Blu-ray ofrece un poder de resolución superior, de modo que la información puede arreglarse de manera más compacta en un disco Blu-ray que en un DVD. Véase la sección 36.7 para mayor detalle.

Preguntas de las secciones
Evalúe su comprensión

36.1 Respuesta: sí Cuando se escucha la voz de una persona que se halla a la vuelta de la esquina, se oyen ondas sonoras que experimentaron difracción. Si no hubiera difracción del sonido, solo podríamos escuchar sonidos procedentes de objetos que estuvieran a la vista directamente.

36.2 Respuestas: ii, i y iv (empate), iii. El ángulo θ de la primera franja oscura está dado por la ecuación (36.2) con $m = 1$ o $\text{sen}\,\theta = \lambda/a$. Cuanto mayor sea el valor de la razón λ/a, más grande será el valor de $\text{sen}\,\theta$ y, por lo tanto, el valor de θ. La razón λ/a en cada caso es **i.** $(400\text{ nm})/(0.20\text{ mm}) = (4.0\times10^{-7}\text{ m})/(2.0\times10^{-4}\text{ m}) = 2.0\times10^{-3}$; **ii.** $(600\text{ nm})/(0.20\text{ mm}) = (6.0\times10^{-7}\text{ m})/(2.0\times10^{-4}\text{ m}) = 3.0\times10^{-3}$; **iii.** $(400\text{ nm})/(0.30\text{ mm}) = (4.0\times10^{-7}\text{ m})/(3.0\times10^{-4}\text{ m}) = 1.3\times10^{-3}$; **iv.** $(600\text{ nm})/(0.30\text{ mm}) = (6.0\times10^{-7}\text{ m})/(3.0\times10^{-4}\text{ m}) = 2.0\times10^{-3}$.

36.3 Respuestas: ii y iii. Si el ancho a de la ranura es menor que la longitud de onda λ, no habrá puntos en el patrón de difracción donde la intensidad sea cero (véase la figura 36.10*a*). El ancho de la ranura es $0.0100\text{ mm} = 1.00\times10^{-5}\text{ m}$, de manera que esta condición se satisface para **ii.** ($\lambda = 10.6\ \mu\text{m} = 1.06\times10^{-5}\text{ m}$) y **iii.** ($\lambda = 1.00\text{ mm} = 1.00\times10^{-3}\text{ m}$), pero no para **i.** ($\lambda = 500\text{ nm} = 5.00\times10^{-7}\text{m}$) ni para **iv.** ($\lambda = 50.0\text{ nm} = 5.00\times10^{-8}\text{ m}$).

36.4 Respuesta: sí; $m_i = \pm5, \pm10, \ldots$ Un "máximo faltante" satisface tanto $d\,\text{sen}\,\theta = m_i\lambda$ (la condición para un máximo de interferencia) como $a\,\text{sen}\,\theta = m_d\lambda$ (la condición para un mínimo de difracción). Sustituyendo $d = 2.5a$, podemos combinar estas dos condiciones en la relación $m_i = 2.5m_d$. Esto se satisface con $m_i = \pm5$ y $m_d = \pm2$ (falta el quinto máximo de interferencia, porque coincide con el segundo mínimo de difracción), $m_i = \pm10$ y $m_d = \pm4$ (falta el décimo máximo de interferencia porque coincide con el cuarto mínimo de difracción), y así sucesivamente.

36.5 Respuesta: i. Como se describe en el texto, el poder de resolución que se necesita es $R = Nm = 1000$. En el primer orden ($m = 1$) se necesitan $N = 1000$ ranuras, pero en el cuarto orden ($m = 4$) basta con $N = R/m = 1000/4 = 250$ ranuras. (Estos números son solo aproximados debido a la índole arbitraria de nuestro criterio de resolución, y porque las rejillas reales siempre tienen ligeras imperfecciones en cuanto a la forma y la separación de las ranuras).

36.6 Respuesta: no La posición angular del m-ésimo máximo está dada por la ecuación (36.16), $2d\,\text{sen}\,\theta = m\lambda$. Con $d = 0.200$ nm, $\lambda = 0.100$ nm y $m = 5$; esto nos da $\text{sen}\,\theta = m\lambda/2d = (5)(0.100\text{ nm})/(2)(0.200\text{ nm}) = 1.25$. Como la función seno nunca puede ser mayor que 1, esto significa que no hay solución a esta ecuación y no aparece el máximo $m = 5$.

36.7 Respuesta: iii, ii, iv, i. El criterio de Rayleigh combinado con la ecuación (36.17) indica que cuanto menor sea el valor de la razón λ/D, mejor será el poder de resolución de un telescopio de diámetro D. Para los cuatro telescopios, esta razón es igual a **i.** $(21\text{ cm})/(100\text{ m}) = (0.21\text{ m})/(100\text{ m}) = 2.1\times10^{-3}$; **ii.** $(500\text{ nm})/(2.0\text{ m}) = (5.0\times10^{-7}\text{ m})/(2.0\text{ m}) = 2.5\times10^{-7}$; **iii.** $(100\text{ nm})/(1.0\text{ m}) = (1.0\times10^{-7}\text{ m})/(1.0\text{ m}) = 1.0\times10^{-7}$; **iv.** $(10\ \mu\text{m})/(2.0\text{ m}) = (1.0\times10^{-5}\text{ m})/(2.0\text{ m}) = 5.0\times10^{-6}$.

Problema práctico

Respuestas: 1.501×10^7 m/s, o bien, 5.00% de c; se aleja de nosotros.

RELATIVIDAD

37



? En el Brookhaven National Laboratory de Nueva York, se aceleran núcleos atómicos al 99.995% del último límite de rapidez del Universo: la rapidez de la luz. ¿También hay un límite máximo en la *energía cinética* de la partícula?

OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

Al estudiar este capítulo, usted aprenderá:

- Los dos postulados de la teoría especial de la relatividad de Einstein y cómo surgieron.
- Por qué distintos observadores pueden diferir acerca de si dos sucesos son simultáneos.
- Cómo la relatividad predice que los relojes que se mueven se vuelven lentos y la evidencia experimental que lo confirma.
- Cómo cambia la longitud de un objeto debido al movimiento de este.
- Cómo la velocidad de un objeto depende del marco de referencia desde el que se observa.
- Cómo la teoría de la relatividad modifica la relación entre velocidad y momento lineal.
- A resolver problemas que implican trabajo y energía cinética para partículas que se mueven a rapideces relativas.
- Algunos conceptos fundamentales de la teoría general de la relatividad de Einstein.

Al comenzar el año 1905, Albert Einstein tenía 25 años de edad y era empleado en la oficina suiza de patentes. Al terminar ese año asombroso, Einstein había publicado tres artículos de extraordinaria importancia. Uno era un análisis del movimiento browniano; el segundo (por el que se hizo acreedor al Premio Nobel) trataba sobre el efecto fotoeléctrico. En el tercero, Einstein presentó su **teoría especial de la relatividad**, donde propuso revisiones drásticas a los conceptos newtonianos del espacio y el tiempo.

La teoría especial de la relatividad ha traído consigo cambios de gran alcance en nuestra comprensión de la naturaleza; no obstante, Einstein la fundamentó tan solo en dos sencillos postulados. Uno de ellos establece que las leyes de la física son las mismas en todos los marcos de referencia inerciales; el otro, que la rapidez de la luz en el vacío es la misma en todos los marcos inerciales. Estas propuestas aparentemente inocentes tienen implicaciones de enorme trascendencia. Veamos tres de ellas: **1.** Los sucesos que son simultáneos para un observador quizá no lo sean para otro. **2.** Cuando dos observadores que se desplazan uno con respecto al otro miden un intervalo de tiempo o una longitud, tal vez no obtengan los mismos resultados. **3.** Para que los principios de conservación del momento lineal y de la energía sean válidos en todos los sistemas inerciales, es necesario revisar la segunda ley de Newton, así como las ecuaciones de momento lineal y energía cinética.

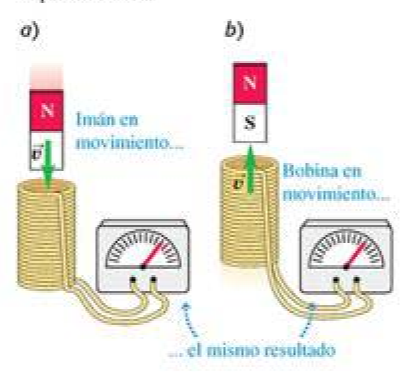
La relatividad tiene consecuencias importantes en *todos* los campos de la física, entre ellos el electromagnetismo, la física atómica y nuclear, y la física de alta energía. Aunque muchos de los resultados que se deducen en este capítulo tal vez contradigan nuestra intuición, la teoría concuerda sólidamente con las observaciones experimentales.

37.1 Invariabilidad de las leyes físicas

Examinemos los dos postulados que constituyen la teoría especial de la relatividad. Ambos postulados describen lo que ve un observador que se encuentra en un *marco inercial de referencia*, tal como lo presentamos en la sección 4.2. La teoría es "especial" en el sentido de que se aplica a observadores en este tipo de marcos de referencia especiales.

Primer postulado de Einstein

El primer postulado de Einstein, conocido como el **principio de relatividad**, afirma que **las leyes de la física son las mismas en todos los marcos de referencia inerciales**. Si las leyes difirieran, tal diferencia permitiría distinguir un marco inercial de los otros, o bien, haría que un marco fuera de algún modo más "correcto" que otro. Veamos dos ejemplos. Suponga que observa a dos niños que juegan a atrapar una pelota, mientras usted y los niños se hallan a bordo de un tren que avanza con velocidad constante. Sus observaciones del movimiento *de la pelota*, no importa con cuánto cuidado las haga, no le indicarán con qué rapidez se mueve el tren (o si acaso se mueve). Esto se debe a que las leyes de Newton del movimiento son las mismas en todos los marcos inerciales.



37.1 Se induce la misma fem en la bobina, ya sea que *a*) el imán se mueva con respecto a la bobina o *b*) la bobina se mueva con respecto al imán.

Otro ejemplo es la fuerza electromotriz (fem) que induce en una bobina de alambre un imán permanente que se mueve cerca de ella. En un marco de referencia donde la *bobina* está inmóvil (figura 37.1*a*), el imán en movimiento provoca un cambio de flujo magnético a través de la bobina, y esto induce una fem. En un marco de referencia diferente, donde el *imán* está inmóvil (figura 37.1*b*), el movimiento de la bobina a través de un campo magnético induce la fem. De acuerdo con el principio de relatividad, ambos marcos de referencia son igualmente válidos. Por consiguiente, se debe inducir la misma fem en las dos situaciones que muestra la figura 37.1. Como vimos en el capítulo 29, esto es en efecto lo que ocurre, así que la ley de Faraday es congruente con el principio de relatividad. De hecho, *todas* las leyes del electromagnetismo son las mismas en todos los marcos de referencia inerciales.

Igualmente significativa es la predicción de la rapidez de la radiación electromagnética, deducida de las ecuaciones de Maxwell (véase la sección 32.2). De acuerdo con este análisis, la luz y todas las demás ondas electromagnéticas se propagan en el vacío con cierta rapidez constante, que ahora se ha definido como exactamente igual a 299,792,458 m/s. (Se suele emplear el valor aproximado $c = 3.00 \times 10^8$ m/s, que difiere en una parte por cada 1000 del valor exacto). Como veremos, la rapidez de la luz en el vacío desempeña un papel central en la teoría de la relatividad.

Segundo postulado de Einstein

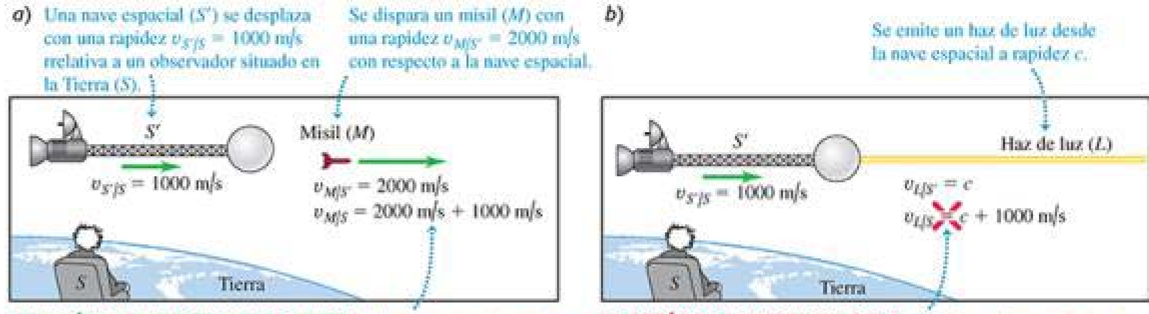
A lo largo del siglo XIX, casi todos los físicos creían que la luz viajaba a través de un medio hipotético al que llamaban *éter*, tal como las ondas sonoras viajan por el aire. De ser así, la rapidez de la luz medida por observadores dependería del movimiento de estos con respecto al éter y, por lo tanto, sería distinta en diferentes direcciones. El experimento de Michelson-Morley, descrito en la sección 35.5, fue un esfuerzo por detectar el movimiento de la Tierra con respecto al éter. El salto conceptual de Einstein consistió en reconocer que, si las ecuaciones de Maxwell eran válidas en todos los marcos inerciales, entonces la rapidez de la luz en el vacío también debería ser la misma en todos los marcos y en todas direcciones. De hecho, Michelson y Morley *no* detectaron algún movimiento del éter a través de la Tierra, y se desechó el concepto del éter. Aunque quizá Einstein no tenía el conocimiento de este resultado, apoyaba su audaz hipótesis de la rapidez constante de la luz en el vacío.

El segundo postulado de Einstein: Afirma que la rapidez de la luz en el vacío es la misma en todos los marcos de referencia inerciales y es independiente del movimiento de la fuente.

Reflexionemos acerca de lo que esto significa. Suponga que dos observadores miden la rapidez de la luz en el vacío. Uno de ellos está en reposo con respecto a la fuente de luz, y el otro se aleja de ella. Ambos se encuentran en marcos de referencia inerciales. De acuerdo con el principio de relatividad, los dos observadores deben obtener el mismo resultado, a pesar del hecho de que uno de ellos se desplaza con respecto al otro.

Si esto parece muy fácil, considere la siguiente situación. Una nave espacial que pasa cerca de la Tierra a 1000 m/s dispara un misil hacia adelante con una rapidez de 2000 m/s (con respecto a la nave espacial) (figura 37.2). ¿Cuál es la rapidez del misil con respecto a la Tierra? Muy sencillo, diríamos; se trata de un problema elemental de velocidad relativa (véase la sección 3.5). La respuesta correcta, de acuerdo con la mecánica newtoniana, es de 3000 m/s. Pero ahora suponga que la nave espacial enciende un reflector y lo apunta en la dirección en la que se disparó el misil. Un observador a bordo

37.2 *a*) La mecánica newtoniana hace predicciones correctas acerca de los objetos que se mueven con relativa lentitud; *b*) y predice incorrectamente el comportamiento del haz luminoso.



de la nave espacial mide la rapidez de la luz que emite el reflector y obtiene el valor *c*. De acuerdo con el segundo postulado de Einstein, el movimiento de la luz una vez que esta ha dejado la fuente no puede depender del movimiento de la fuente. Por lo tanto, el observador situado en la Tierra que mide la rapidez de esta misma luz también debe obtener el valor *c*, *no* $c + 1000$ m/s. Este resultado contradice nuestra noción elemental de las velocidades relativas, y quizá parezca que no concuerda con el sentido común. Pero el "sentido común" es la intuición basada en la experiencia ordinaria, y por lo regular esta no incluye mediciones de la rapidez de la luz.

Último límite de rapidez

Del segundo postulado de Einstein surge de inmediato el siguiente resultado:

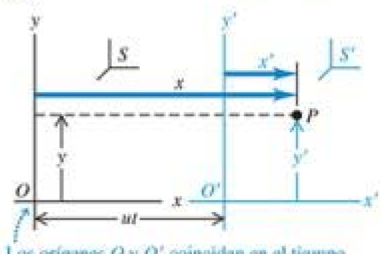
Es imposible que un observador inercial viaje a una velocidad c, la rapidez de la luz en el vacío.

Podemos probar esto demostrando que viajar a una velocidad *c* implica una contradicción lógica. Suponga que la nave espacial *S′* de la figura 37.2*b* se desplaza con la rapidez de la luz con respecto a un observador que se encuentra en la Tierra, de modo que $v_{S'/S} = c$. Si la nave espacial enciende un faro, el segundo postulado afirma ahora que el observador *S* en la Tierra encuentra que el haz del faro también se desplaza a *c*. Así que, las mediciones de este observador le indican que el haz del faro y la nave espacial se desplazan juntos, y siempre están en el mismo punto del espacio. Sin embargo, el segundo postulado de Einstein también afirma que el haz del faro se desplaza con una rapidez *c* con respecto a la nave espacial, de modo que *no pueden* estar en el mismo punto del espacio. Este resultado contradictorio solo se evita si es imposible que un observador inercial, por ejemplo un pasajero de la nave espacial, se desplace a *c*. Conforme avancemos en nuestro análisis de la relatividad, quizá nos encontremos haciéndonos la pregunta que Einstein se formuló a sí mismo cuando era un estudiante de 16 años: "¿Qué vería yo si viajara con la rapidez de la luz?". No fue sino varios años más tarde que Einstein comprendió que el error básico de su pregunta era que él *no* podía viajar a *c*.

Transformación galileana de coordenadas

Formulemos de nuevo el argumento anterior en términos simbólicos, con base en dos marcos de referencia inerciales, identificados como *S* para el del observador en la Tierra, y *S′* para la nave espacial en movimiento, como se muestra en la figura 37.3. Para simplificar la situación tanto como sea posible, omitimos el eje *z*. El eje *x* de los dos marcos se hallan a lo largo de la misma recta, pero el origen *O′* del marco *S′* se desplaza con respecto al origen *O* del marco *S* con velocidad constante *u* a lo largo del eje común *x*-*x′*. Nosotros en la Tierra ajustamos nuestros relojes de modo que los dos orígenes coincidan en el tiempo $t = 0$, por lo que su separación algún tiempo *t* después es "ut".

37.3 La posición de la partícula *P* se describe mediante las coordenadas *x* y *y* en el marco de referencia *S* o mediante *x′* y *y′* en el marco *S′*.



CUIDADO **Elija concienzudamente las coordenadas del marco inercial** Muchas de las ecuaciones que se deducen en este capítulo son válidas *solo* si se definen los marcos de referencia inerciales como se indica en el párrafo anterior. Por ejemplo, la dirección x positiva debe ser la dirección en la que el origen O' se desplaza con respecto al origen O. En la figura 37.3 esta dirección es hacia la derecha; si, en cambio, O' se desplaza hacia la izquierda con respecto a O, es preciso definir que la dirección x positiva es hacia la izquierda.

Ahora piense cómo describir el movimiento de una partícula P. Esta podría ser un vehículo explorador lanzado desde la nave espacial o un pulso de luz de un láser. Podemos describir la *posición* de esta partícula usando las coordenadas terrestres (x, y, z) en S o las coordenadas de la nave espacial (x', y', z') en S'. La figura 37.3 muestra que estas se encuentran relacionadas sencillamente por:

$$x = x' + ut \qquad y = y' \qquad z = z' \qquad \text{(transformación galileana de coordenadas)} \tag{37.1}$$

Estas ecuaciones, basadas en las conocidas nociones newtonianas de espacio y tiempo, se conocen como la **transformación galileana de coordenadas**.

Si la partícula P se desplaza en la dirección x, su velocidad instantánea v_x medida por un observador inmóvil en S es $v_x = dx/dt$. Su velocidad v'_x medida por un observador inmóvil en S' es $v'_x = dx'/dt$. Podemos deducir una relación entre v_x y v'_x derivando con respecto a t la primera de las ecuaciones (37.1):

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx'}{dt} + u$$

Ahora bien, dx/dt es la velocidad v_x medida en S, y dx'/dt es la velocidad v'_x medida en S', de manera que obtenemos la *transformación galileana de velocidades* correspondiente a un movimiento unidimensional:

$$v_x = v'_x + u \qquad \text{(transformación galileana de velocidades)} \tag{37.2}$$

Aunque la notación es diferente, este resultado concuerda con nuestro análisis de las velocidades relativas en la sección 3.5.

Ahora bien, el problema fundamental es el siguiente. Aplicada a la rapidez de la luz en el vacío, la ecuación (37.2) afirma que $c = c' + u$. El segundo postulado de Einstein, respaldado posteriormente por abundantes pruebas experimentales, afirma que $c = c'$. Esto es una incongruencia flagrante, no una ilusión, y es necesario resolverla. Si aceptamos este postulado, nos vemos obligados a concluir que las ecuaciones (37.1) y (37.2) *no pueden* ser precisamente correctas, a pesar de nuestra convincente deducción. Es preciso modificar estas ecuaciones para que armonicen con dicho principio.

La solución implica ciertas modificaciones muy fundamentales a nuestros conceptos cinemáticos. La primera idea que debemos cambiar es el supuesto aparentemente evidente de que los observadores de los marcos S y S' emplean la misma *escala de tiempo*, enunciada formalmente como $t = t'$. Por desgracia, estamos por demostrar que esta suposición de la vida diaria no es correcta: los dos observadores *deben* tener escalas de tiempo diferentes. Debemos definir la velocidad v' en el marco S' como $v' = dx'/dt'$, no como dx'/dt; recordemos que las escalas de tiempo son diferentes. La dificultad radica en el concepto de *simultaneidad*, que es nuestro siguiente tema. Un análisis minucioso de la simultaneidad nos ayudará a formular las modificaciones adecuadas a nuestras nociones del espacio y el tiempo.

Evalúe su comprensión de la sección 37.1 Al pasar volando cerca de usted, una nave espacial a alta velocidad enciende una luz estroboscópica que emite una pulsación de luz en todas direcciones. Un observador a bordo de la nave mide un frente de onda esférico que se propaga a partir de la nave con la misma rapidez c en todas direcciones. *a)* ¿Qué forma tiene el frente de onda que *usted* mide? **i.** Esférica, **ii.** elipsoidal, con el eje más largo del elipsoide en la dirección del movimiento de la nave espacial; **iii.** elipsoidal, con el eje más corto del elipsoide en la dirección del movimiento de la nave espacial; **iv.** no se dispone de suficiente información para determinarlo. *b)* ¿Coincide el centro del frente de onda con la nave espacial?

37.2 Relatividad de la simultaneidad

La medición de tiempos e intervalos de tiempo implica el concepto de **simultaneidad**. En un marco de referencia dado, un **suceso** es un acontecimiento con una posición y un tiempo definidos (figura 37.4). Cuando decimos que despertamos a las siete de la mañana, queremos decir que dos sucesos (el despertar y que el reloj marcara las 7:00) ocurrieron *simultáneamente*. El problema fundamental de la medición de intervalos de tiempo es este: en general, dos sucesos que son simultáneos en un marco de referencia *no* lo son en un segundo marco que se mueve con respecto al primero, aun cuando ambos sean marcos inerciales.

37.4 Un suceso tiene una posición y un tiempo definidos; por ejemplo, en el pavimento directamente debajo del centro de la torre Eiffel, a media noche, en la víspera de Año Nuevo.



Un experimento mental de simultaneidad

Esto parecería contradecir el sentido común. Para ilustrar el argumento, examinemos la versión de uno de los *experimentos mentales* de Einstein, los cuales son experimentos de razonamiento que siguen los conceptos hasta sus conclusiones lógicas. Imaginemos un tren que se desplaza con una rapidez comparable a c, con velocidad uniforme (figura 37.5). Caen dos relámpagos en un vagón de pasajeros, uno cerca de cada extremo. Cada relámpago deja una marca en el vagón y otra en el suelo en el instante en que cae. Los puntos del suelo aparecen identificados como A y B en la figura, y los puntos correspondientes del vagón son A' y B'. Sergio se encuentra inmóvil en el suelo en O, equidistante de A y B. Magda se mueve junto con el tren en O', a la mitad del vagón de pasajeros, equidistante de A' y B'. Tanto Sergio como Magda ven los destellos luminosos emitidos en los puntos donde cayeron los relámpagos.

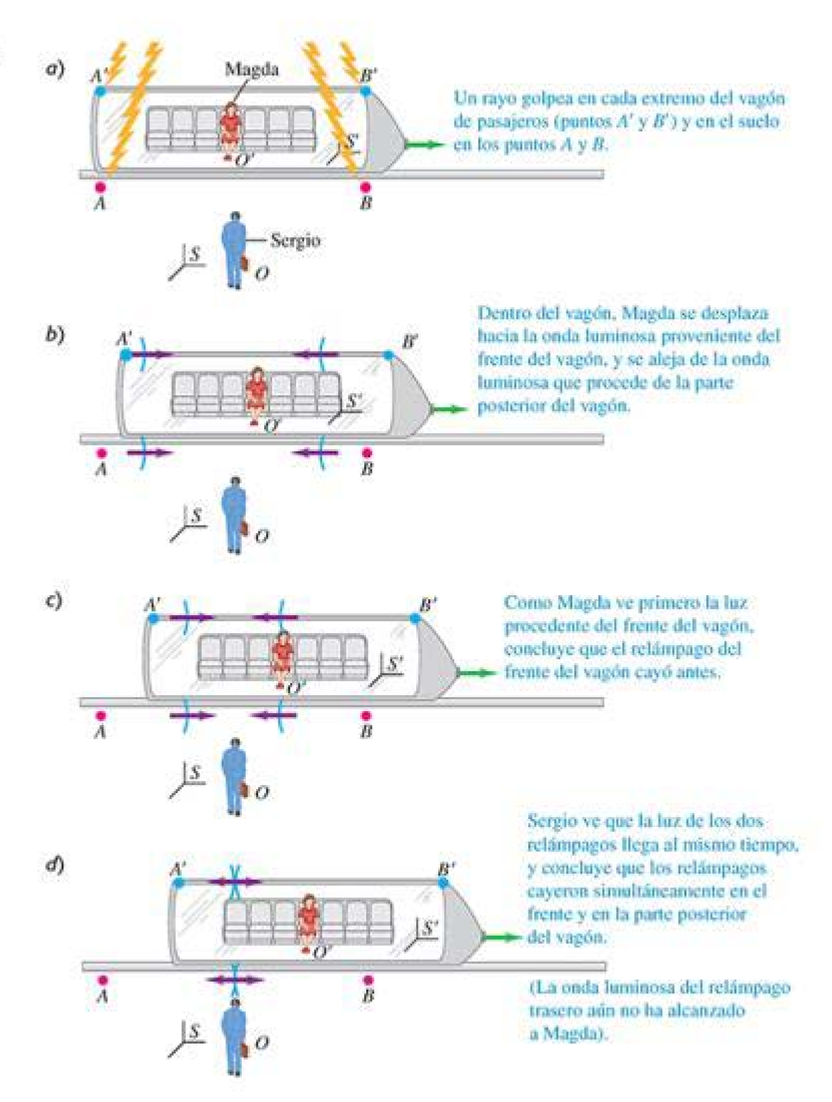
Suponga que los dos frentes de onda generados por la caída de los relámpagos llegan a Sergio en O simultáneamente. Él sabe que está a la misma distancia de B y de A, por lo que concluye que ambos relámpagos cayeron en B y A simultáneamente. Magda coincide en que los dos frentes de onda llegaron a Sergio al mismo tiempo, pero no está de acuerdo en que los destellos fueran emitidos simultáneamente.

Sergio y Magda coinciden en que los dos frentes de onda no llegan a Magda al mismo tiempo. Magda, en O', se desplaza hacia la derecha junto con el tren, por lo que se encuentra con el frente de onda proveniente de B' *antes* que el frente de onda procedente de A' le dé alcance. Sin embargo, debido a que Magda se halla a la mitad del vagón de pasajeros, equidistante de A' y B', su observación es que ambos frentes de onda tardaron el mismo tiempo en llegar a ella, porque ambos recorrieron la misma distancia con la misma rapidez c. (Recuerde que la rapidez de cada frente de onda con respecto a *cualquiera* de los observadores es c). Por lo tanto, Magda concluye que el relámpago de B' cayó *antes* que el relámpago de A'. Sergio, en O, encuentra por medición que los dos sucesos son simultáneos, ¡pero no así Magda, en O'! *El que dos sucesos en diferentes ubicaciones del eje de las x sean o no simultáneos depende del estado de movimiento del observador.*

Quizá nos sintamos inclinados a argumentar que en este ejemplo los relámpagos *son* realmente simultáneos, y que si Magda, en O', pudiera comunicarse con los puntos distantes sin la demora debida a la rapidez finita de la luz, se daría cuenta de ello. Pero eso sería incorrecto; la rapidez finita de la transmisión de información no es el verdadero problema. Si O' está a medio camino entre A' y B', entonces en su marco de referencia el tiempo para que una señal viaje de A' a O' es el mismo que de B' a O'. Dos señales llegarán simultáneamente a O' solo si se emitieron simultáneamente en A' y B'. En este ejemplo *no* llegan simultáneamente a O', por lo que Magda se ve obligada a concluir que los sucesos en A' y B' *no* fueron simultáneos.

Además, no existe base alguna para afirmar que Sergio tiene razón y Magda está equivocada, o viceversa. Según el principio de relatividad, ningún marco inercial de referencia es más correcto que cualquier otro para la formulación de leyes físicas. Cada observador está en lo correcto *en su propio marco de referencia*. En otras palabras, la simultaneidad no es un concepto absoluto. El que dos sucesos sean simultáneos depende del marco de referencia. Como mencionamos al principio de esta sección, la simultaneidad desempeña un papel fundamental en la medición de intervalos de tiempo. Se deduce que *el intervalo de tiempo entre dos sucesos puede ser diferente en distintos marcos de referencia*. Así, nuestra siguiente tarea consiste en aprender cómo comparar intervalos de tiempo en diferentes marcos de referencia.

37.5 Experimento mental de simultaneidad.



Evalúe su comprensión de la sección 37.2 Sergio, quien trabaja para el sistema ferroviario de la figura 37.5, sincronizó minuciosamente los relojes de todas las estaciones del ferrocarril. En el momento en que Sergio ve que todos los relojes marcan el mediodía, Magda se encuentra en el vagón de pasajeros de alta velocidad viajando de Ogdenville a Haverbrook. Según Magda, cuando el reloj de Ogdenville marca las 12 del día, ¿qué hora es en Haverbrook: **i.** Mediodía, **ii.** antes del mediodía o **iii.** después del mediodía? ❙

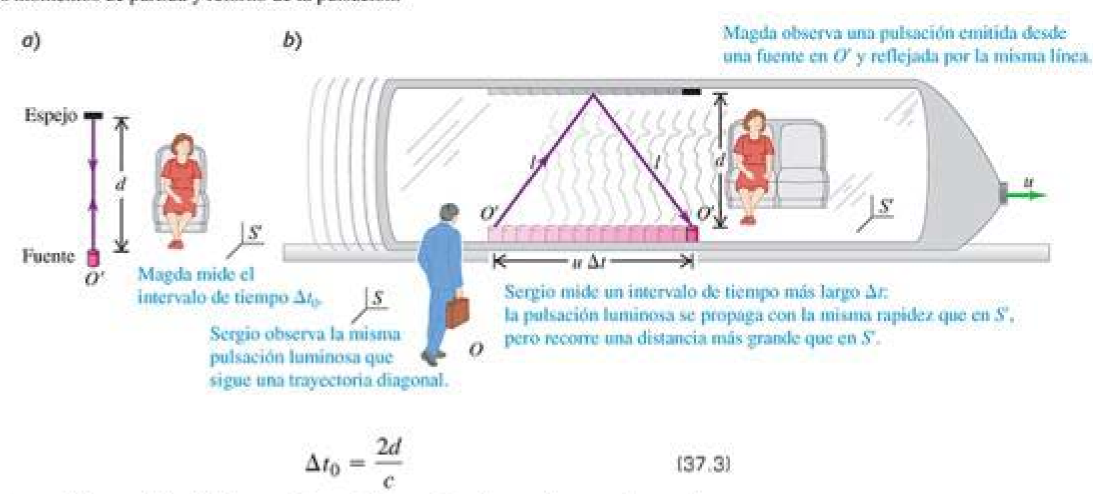
MasteringPHYSICS

ActivPhysics 17.1: Relativity of Time

37.3 Relatividad de los intervalos de tiempo

Es posible deducir una relación cuantitativa entre los intervalos de tiempo en diferentes sistemas de coordenadas. Para hacer esto, consideremos otro experimento mental. Como en el caso anterior, un marco de referencia S' se desplaza a lo largo de un eje común x-x' con rapidez constante u con respecto a un marco S. Como se explicó en la sección 37.1, u debe ser menor que la rapidez c de la luz. Magda, que viaja junto con el marco S', mide el intervalo de tiempo entre dos sucesos que ocurren en el *mismo* punto del espacio. El suceso 1 corresponde al momento en que un destello de luz parte de O' desde una fuente luminosa. El suceso 2 es cuando el destello regresa a O', luego de haberse reflejado en un espejo situado a una distancia d, como se muestra en la figura 37.6*a*. Denotamos el intervalo de tiempo como Δt_0, donde el subíndice cero es un recordatorio de que el aparato se halla en reposo, con velocidad cero, en el marco S'. El destello de luz recorre una distancia total $2d$; por lo tanto, el intervalo de tiempo es

37.6 *a*) Magda, en el marco de referencia S', observa una pulsación luminosa emitida desde una fuente en O' y reflejada de regreso a lo largo de la misma línea. *b*) Cómo Sergio (en el marco de referencia S) y Magda ven la misma pulsación luminosa. Se muestran las posiciones de O' en los momentos de partida y retorno de la pulsación.



$$\Delta t_0 = \frac{2d}{c} \tag{37.3}$$

El tiempo del recorrido de ida y vuelta medido por Sergio en el marco S es un intervalo Δt diferente; en su marco de referencia, los dos sucesos ocurren en puntos *diferentes* del espacio. Durante el tiempo Δt, la fuente se desplaza con respecto a S una distancia $u\ \Delta t$ (figura 37.6*b*). En S' la distancia del recorrido de ida y vuelta es $2d$, perpendicular a la velocidad relativa, pero en S la distancia del recorrido de ida y vuelta es una distancia más grande $2l$, donde

$$l = \sqrt{d^2 + \left(\frac{u\ \Delta t}{2}\right)^2}$$

Al escribir esta expresión hemos supuesto que ambos observadores miden la misma distancia d. Justificaremos esta suposición en la sección que sigue. La rapidez de la luz es la misma para ambos observadores; así que el tiempo del recorrido de ida y vuelta medido en S es

$$\Delta t = \frac{2l}{c} = \frac{2}{c}\sqrt{d^2 + \left(\frac{u\ \Delta t}{2}\right)^2} \tag{37.4}$$

Sería conveniente tener una relación entre Δt y Δt_0 que fuera independiente de d. Para obtenerla, despejamos d de la ecuación (37.3) y sustituimos el resultado en la ecuación (37.4); tenemos, entonces,

$$\Delta t = \frac{2}{c}\sqrt{\left(\frac{c\ \Delta t_0}{2}\right)^2 + \left(\frac{u\ \Delta t}{2}\right)^2} \tag{37.5}$$

Ahora lo elevamos al cuadrado y despejamos Δt, cuyo resultado es

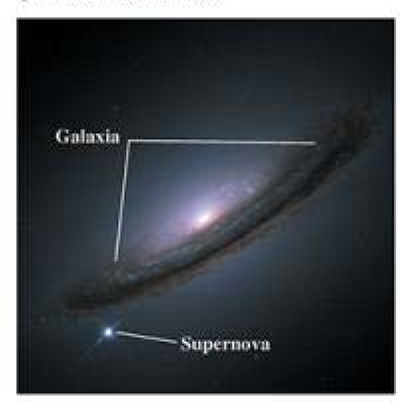
$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}$$

Puesto que la cantidad $\sqrt{1 - u^2/c^2}$ es menor que 1, Δt es mayor que Δt_0: de esta manera, Sergio mide un tiempo de viaje de ida y vuelta *mayor* que Magda para la pulsación luminosa.

Dilatación del tiempo

Podemos generalizar este trascendental resultado. En un marco de referencia específico, suponga que ocurren dos sucesos en un mismo punto del espacio. El intervalo de tiempo entre estos sucesos, medido por un observador en reposo en este mismo marco (al cual denominamos el *marco en reposo* de este observador), es Δt_0. Luego, un observador en un segundo marco que se desplaza con rapidez constante u con respecto al marco en reposo medirá un intervalo de tiempo Δt, donde

37.7 Esta imagen muestra la explosión de una estrella, llamada *supernova*, en el interior de una galaxia distante. El brillo de una supernova común decae a cierto ritmo. No obstante, las supernovas que se alejan de nosotros a una fracción considerable de la rapidez de la luz decaen con más lentitud, de acuerdo con la ecuación (37.6): la supernova en extinción es un "reloj" en movimiento que marcha con lentitud.



$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \qquad \text{(dilatación del tiempo)} \tag{37.6}$$

Recordemos que ningún observador inercial puede viajar a $u = c$, y observe que $\sqrt{1 - u^2/c^2}$ es imaginaria cuando $u > c$. Por lo tanto, la ecuación (37.6) da resultados razonables solo cuando $u < c$. El denominador de la ecuación (37.6) siempre es menor que 1; por ello, Δt siempre es *mayor* que Δt_0. En consecuencia, llamamos a este efecto **dilatación del tiempo**.

Piense en un reloj antiguo de péndulo, en el que transcurre un segundo entre cada tic, medido por Magda en el marco en reposo del reloj; esto es Δt_0. Si el marco en reposo del reloj se desplaza con respecto a Sergio, este mide un tiempo Δt de más de un segundo entre cada tic. En pocas palabras, *los observadores perciben que cualquier reloj marcha más despacio si se desplaza con respecto a ellos* (figura 37.7). Observe que esta conclusión es un resultado directo del hecho de que la rapidez de la luz en el vacío es la misma en ambos marcos de referencia.

La cantidad $1/\sqrt{1 - u^2/c^2}$ de la ecuación (37.6) aparece con tanta frecuencia en la relatividad que se le ha asignado su propio símbolo: γ (la letra griega gamma):

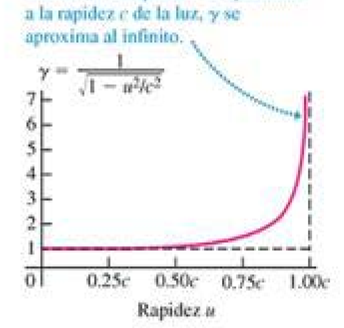
$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \tag{37.7}$$

En términos de este símbolo, podemos expresar la fórmula de la dilatación del tiempo, ecuación (37.6), como

$$\Delta t = \gamma \, \Delta t_0 \qquad \text{(dilatación del tiempo)} \tag{37.8}$$

Como simplificación adicional, en ocasiones a u/c se le asigna el símbolo β (la letra griega beta); en tal caso, $\gamma = 1/\sqrt{1 - \beta^2}$.

37.8 La cantidad $\gamma = 1/\sqrt{1 - u^2/c^2}$ en función de la rapidez relativa u entre dos marcos de referencia.



La figura 37.8 muestra una gráfica de γ en función de la rapidez relativa u de dos marcos de referencia. Cuando u es muy pequeña en comparación con c, u^2/c^2 es mucho menor que 1, y γ es prácticamente *igual* a 1. En ese límite, las ecuaciones (37.6) y (37.8) tienden a la relación newtoniana $\Delta t = \Delta t_0$, que corresponde al mismo intervalo de tiempo en todos los marcos de referencia.

Si la rapidez relativa u es lo suficiente grande para que γ sea considerablemente mayor que 1, se dice que la rapidez es *relativista*; si la diferencia entre γ y 1 es demasiado pequeña, la rapidez u se denomina *no relativista*. Así, $u = 6.00 \times 10^7$ m/s $= 0.200c$ (para la que $\gamma = 1.02$) es una rapidez relativista, pero $u = 6.00 \times 10^4$ m/s $= 0.000200c$ (para la que $\gamma = 1.00000002$) es una rapidez no relativista.

Tiempo propio

Hay un solo marco de referencia donde un reloj está en reposo, y existe un número infinito de marcos en los que está en movimiento. Por consiguiente, el intervalo de tiempo medido entre dos sucesos (por ejemplo, dos tics del reloj) que ocurren en el mismo punto en un marco determinado es una magnitud más fundamental que el intervalo entre sucesos en puntos diferentes. Utilizamos el término **tiempo propio** para describir el intervalo de tiempo Δt_0 entre dos sucesos que ocurren *en el mismo punto*.

CUIDADO **Medición de los intervalos de tiempo** Es importante observar que el intervalo de tiempo Δt de la ecuación (37.6) se refiere a sucesos que ocurren *en puntos espaciales diferentes* en el marco de referencia S. Observe asimismo que cualquier diferencia entre Δt y el tiempo propio Δt_0 *no* se debe a diferencias en los tiempos necesarios para que la luz se propague de esos puntos del espacio a un observador en reposo en S. Suponemos que nuestro observador es capaz de hacer correcciones por las diferencias de tiempo de tránsito de la luz, del mismo modo que un astrónomo que observa el Sol sabe que un suceso que se ve en este momento en la Tierra ocurrió en realidad hace 500 s en la superficie del Sol. Otra opción es considerar a *dos* observadores, uno inmóvil en la ubicación del primer suceso y el otro en la del segundo, cada uno con su propio reloj. Podemos sincronizar estos dos relojes sin dificultad, siempre y cuando se encuentren en reposo en el mismo marco de referencia. Por ejemplo, podríamos enviar una pulsación luminosa simultáneamente a los dos relojes desde un punto equidistante de ambos. Cuando la pulsación llega, los observadores ajustan sus relojes a un tiempo acordado previamente. (Sin embargo, advierta que, en general, los relojes que están sincronizados en un marco de referencia *no están* sincronizados en otro).

En los experimentos mentales, con frecuencia es conveniente imaginar muchos observadores con relojes sincronizados en reposo en diversos puntos de un marco de referencia en particular. Podemos imaginar un marco de referencia como una cuadrícula de coordenadas con muchos relojes sincronizados distribuidos por todas partes, como lo sugiere la figura 37.9. Solo cuando un reloj está en movimiento con respecto a un marco de referencia dado, es necesario estar alerta para reconocer ambigüedades de sincronización o simultaneidad.

A lo largo de este capítulo utilizaremos con frecuencia frases como "Sergio *observa* que Magda pasa por el punto $x = 5.00$ m, $y = 0$, $z = 0$ en el instante 2.00 s". Esto significa que Sergio está utilizando una cuadrícula de relojes en su marco de referencia, como la que se muestra en la figura 37.9, para registrar el instante en que ocurre un suceso. Podríamos reformular la frase como "cuando Magda pasa por el punto situado en $x = 5.00$ m, $y = 0$, $z = 0$, el reloj ubicado en ese punto del marco de referencia de Sergio marca 2.00 s". Evitaremos el uso de frases como "Sergio *ve* que Magda está en un punto determinado en cierto momento", porque la luz tarda cierto tiempo en viajar al ojo de Sergio desde la posición donde ocurre el suceso.

37.9 Marco de referencia representado como un sistema de coordenadas con una cuadrícula de relojes sincronizados.

y

x

S

La cuadrícula es tridimensional: hay planos idénticos de relojes enfrente y detrás de la página, enlazados por líneas de la cuadrícula perpendiculares a la página.

Estrategia para resolver problemas 37.1 Dilatación del tiempo



IDENTIFICAR *los conceptos relevantes:* Se utiliza el concepto de dilatación del tiempo, siempre que se compara el intervalo de tiempo entre sucesos medido por observadores en marcos de referencia inerciales distintos.

PLANTEAR *el problema* de acuerdo con los siguientes pasos:

1. Primero determine cuáles son los dos sucesos que definen el principio y el final del intervalo de tiempo. Luego, identifique los dos marcos de referencia en los que se mide el intervalo de tiempo.
2. Identifique la incógnita.

EJECUTAR *la solución* como sigue:

1. En muchos problemas, el intervalo de tiempo entre sucesos medido en un marco de referencia es el tiempo *propio* Δt_0. Este es el intervalo de tiempo entre dos sucesos en un marco de referencia en el que los dos sucesos ocurren en el mismo punto del espacio. En un segundo marco de referencia que tiene una rapidez u respecto al primer marco, existe un intervalo de tiempo Δt mayor entre los mismos dos eventos. En este segundo marco los dos eventos ocurren en puntos diferentes. Será necesario decidir en qué marco el intervalo de tiempo es Δt_0, y en cuál es Δt.
2. Relacione Δt_0 con Δt por medio de la ecuación (37.6) o la (37.8), y luego despeje la incógnita.

EVALUAR *la respuesta:* Observe que Δt nunca es menor que Δt_0, y que u nunca es más grande que c. Si sus resultados sugieren algo distinto, deberá revisar sus cálculos.

Ejemplo 37.1 Dilatación del tiempo en 0.990*c*



Las partículas subatómicas de alta energía que llegan del espacio interactúan con los átomos de las capas más altas de la atmósfera terrestre, produciendo partículas inestables llamadas *muones*. Antes de descomponerse en otras partículas, un muón tiene una vida media de 2.2 μs $= 2.20 \times 10^{-6}$ s, medida en un marco de referencia en el que está en reposo. Si un muón se desplaza a 0.990c con respecto a la Tierra, ¿cuál será su vida media medida por un observador que se encuentra en la Tierra?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: El tiempo de vida de un muón es el intervalo de tiempo entre dos sucesos: el nacimiento del muón y su desintegración subsiguiente. La incógnita es el tiempo de vida con respecto al marco de referencia de la Tierra, el cual denotamos con S. Nos dan el tiempo de vida en el marco S' en el que el muón está en reposo; este es el tiempo de vida *propio*, $\Delta t_0 = 2.20$ μs. La rapidez relativa de estos dos marcos es $u = 0.990c$. Se usa la ecuación (37.6) para relacionar los tiempos de vida en los dos marcos.

EJECUTAR: El muón se desplaza con respecto a la Tierra entre los dos sucesos, por lo que los sucesos, medidos en S, ocurren en posiciones diferentes, y el intervalo de tiempo en ese marco es Δt (la incógnita). Según la ecuación (37.6),

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} = \frac{2.20\ \mu\text{s}}{\sqrt{1 - (0.990)^2}} = 15.6\ \mu\text{s}$$

EVALUAR: El resultado predice que la vida media del muón en el marco terrestre (Δt) es alrededor de siete veces más grande que en el marco del muón (Δt_0). Esta predicción se ha comprobado experimentalmente; de hecho, fue la primera confirmación experimental de la fórmula de dilatación del tiempo, ecuación (37.6).



Ejemplo 37.2 Dilatación del tiempo a la rapidez de un avión comercial

Un avión vuela de San Francisco a Nueva York (aproximadamente 4800 km, o 4.80×10^6 m) con una rapidez constante de 300 m/s (aproximadamente 670 mi/h). ¿Cuánto tiempo tarda el viaje, medido por un observador en tierra? ¿Y por un observador a bordo del avión?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Ahora nos interesa el intervalo de tiempo entre la salida de San Francisco del avión y su llegada a Nueva York. Las incógnitas son los intervalos de tiempo medidos en el marco de referencia del suelo S y en el marco de referencia del avión S'.

EJECUTAR: Medidos en S, los dos sucesos ocurren en posiciones diferentes (San Francisco y Nueva York); por lo tanto, el intervalo de tiempo medido por observadores en tierra corresponde a Δt en la ecuación (37.6). Para obtenerlo, basta con dividir la distancia entre la rapidez $u = 300$ m/s:

$$\Delta t = \frac{4.80 \times 10^6 \text{ m}}{300 \text{ m/s}} = 1.60 \times 10^4 \text{ s} \quad (\text{aprox. } 4\tfrac{1}{2} \text{ horas})$$

En el marco del avión S', el paso de San Francisco a Nueva York en el avión ocurre en el mismo punto (la posición del avión). De modo que, el intervalo de tiempo en el avión es un tiempo propio, el cual corresponde a Δt_0 en la ecuación (37.6). Tenemos, entonces,

$$\frac{u^2}{c^2} = \frac{(300 \text{ m/s})^2}{(3.00 \times 10^8 \text{ m/s})^2} = 1.00 \times 10^{-12}$$

De acuerdo con la ecuación (37.6),

$$\Delta t_0 = (1.60 \times 10^4 \text{ s})\sqrt{1 - 1.00 \times 10^{-12}}$$

Esta raíz cuadrada no se puede evaluar con la precisión adecuada con una calculadora ordinaria. Sin embargo, obtendremos una aproximación usando el teorema del binomio (véase el apéndice B):

$$(1 - 1.00 \times 10^{-12})^{1/2} = 1 - \left(\tfrac{1}{2}\right)(1.00 \times 10^{-12}) + \cdots$$

Los términos restantes son del orden de 10^{-24} o menos, y se pueden desechar. El resultado aproximado de Δt_0 es

$$\Delta t_0 = (1.60 \times 10^4 \text{ s})(1 - 0.50 \times 10^{-12})$$

El tiempo propio Δt_0, medido en el avión, es ligeramente menor (menos de una parte en 10^{12}) que el tiempo medido en tierra.

EVALUAR: No observamos los efectos de este tipo en la vida diaria. Pero actualmente, los relojes atómicos (sección 1.3) alcanzan una precisión de alrededor de una parte en 10^{13}. Se ha utilizado un reloj de cesio que recorre una distancia larga en un avión para medir tal efecto y, de este modo, verificar la ecuación (37.6) incluso a una rapidez mucho menor que c.



Ejemplo 37.3 ¿Cuál es entonces el tiempo propio?

Magda aborda una nave espacial, y luego pasa velozmente por donde está Sergio en la Tierra con una rapidez relativa de $0.600c$. En el instante en que Magda pasa, ambos ponen en marcha sendos cronómetros. *a*) En el instante en que Sergio mide que Magda ha recorrido 9.00×10^7 m más allá de donde él está y pasa la estación espacial, ¿qué tiempo registra el cronómetro de Sergio cuando Magda pasa la estación? ¿Qué tiempo indica el cronómetro de Magda? *b*) En el instante en que Magda pasa por donde está Sergio, este comienza a parpadear y Magda mide que el parpadeo dura 0.400 s de principio a fin. De acuerdo con Sergio, ¿cuánto dura este parpadeo?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: El problema implica la dilatación del tiempo para dos conjuntos de sucesos *diferentes* medidos en el marco de referencia de Sergio (que denotamos con S) y en el marco de referencia de Magda (que denotamos con S'). Los dos sucesos de interés en el inciso *a*) son cuando Magda pasa por donde se encuentra Sergio, y cuando Magda pasa por la estación espacial; las incógnitas son los intervalos de tiempo entre estos dos sucesos medidos en S y en S'. En el inciso *b*) los dos sucesos son el inicio y fin del parpadeo de Sergio; la incógnita es el intervalo de tiempo entre estos dos sucesos medidos en S.

EJECUTAR: *a*) Los dos sucesos, el paso de Magda cerca de la Tierra y cuando Magda pasa la estación espacial, ocurren en posiciones diferentes en el marco de Sergio, pero en la misma posición en el marco de Magda. Por lo tanto, Sergio mide el intervalo de tiempo Δt, mientras que Magda mide el tiempo *propio* Δt_0. Según las mediciones de Sergio, Magda se desplaza a $0.600c = 0.600(3.00 \times 10^8 \text{ m/s}) = 1.80 \times 10^8$ m/s y recorre los 9.00×10^7 m en un tiempo $\Delta t = (9.00 \times 10^7 \text{ m})/(1.80 \times 10^8 \text{ m/s}) = 0.500$ s. De la ecuación (37.6), el cronómetro de Magda indica un tiempo transcurrido de

$$\Delta t_0 = \Delta t\sqrt{1 - u^2/c^2} = 0.500 \text{ s}\sqrt{1 - (0.600)^2} = 0.400 \text{ s}$$

b) Es tentador responder que el parpadeo de Sergio dura 0.500 s en su marco. Pero es incorrecto, porque ahora estamos considerando un par de sucesos *diferentes* a los del inciso *a*). El inicio y término del parpadeo de Sergio ocurren en el mismo punto de su marco S pero en posiciones diferentes en el marco S' de Magda, por lo que el intervalo de tiempo de 0.400 s que ella mide entre estos sucesos es igual a Δt. La duración del parpadeo medido en el cronómetro de Sergio es ahora el tiempo propio Δt_0:

$$\Delta t_0 = \Delta t\sqrt{1 - u^2/c^2} = 0.400 \text{ s}\sqrt{1 - (0.600)^2} = 0.320 \text{ s}$$

EVALUAR: Este ejemplo ilustra la relatividad de la simultaneidad. En el marco de Magda, ella pasa la estación espacial en el mismo instante en que terminó el parpadeo de Sergio, 0.400 s después de que ella lo pasó. Por lo tanto, estos dos sucesos son simultáneos en el marco S' de Magda, pero *no* son simultáneos en el marco S de Sergio: de acuerdo con su cronómetro, él terminó su parpadeo 0.320 s después y Magda pasó la estación espacial después de 0.500 s.

Paradoja de los gemelos

Las ecuaciones (37.6) y (37.8) de la dilatación del tiempo sugieren una paradoja aparente conocida como la **paradoja de los gemelos**. Considere dos astronautas gemelas

idénticas llamadas Elena y Astrid. Elena permanece en la Tierra mientras que su gemela Astrid emprende un viaje a gran velocidad a través de la galaxia. Debido a la dilatación del tiempo, Elena observa que el latido cardiaco y todos los demás procesos vitales de Astrid se llevan a cabo con más lentitud que los suyos. Es así que, para Elena, Astrid envejece más lentamente; cuando Astrid regresa a la Tierra es más joven (ha envejecido menos) que Elena.

La paradoja es la siguiente: todos los marcos inerciales son equivalentes. ¿Acaso no puede Astrid emplear exactamente los mismos argumentos para concluir que Elena es, de hecho, la más joven? En tal caso las mediciones de cada gemela indican que la otra es más joven cuando se reúnen de nuevo, y eso es una paradoja.

Para resolver la paradoja, es preciso reconocer que las condiciones de las gemelas *no* son idénticas en todos los aspectos. Mientras que Elena permanece en un marco aproximadamente inercial en todo momento, Astrid debe *acelerar* con respecto a ese marco inercial durante algunas partes de su recorrido con la finalidad de partir, dar la vuelta y regresar a la Tierra. El marco de referencia de Elena siempre es aproximadamente inercial; el de Astrid está en muchos casos lejos de ser inercial. Así que, en efecto, hay una diferencia física real entre las circunstancias de las dos gemelas. Un análisis minucioso muestra que Elena está en lo correcto; cuando Astrid regresa, *es* más joven que Elena.

Aplicación ¿Quién es la abuela? La respuesta a esta pregunta parece evidente, pero dependería de cuál persona ha realizado viajes interplanetarios a velocidades relativistas. Imagine que una mujer de 20 años de edad ha dado a luz un niño y partido inmediatamente a un viaje de 100 años luz (50 años luz de ida y 50 años luz de regreso), a una velocidad de 99.5% de la velocidad de la luz. Debido a la dilatación del tiempo, para la viajera solo pasarían 10 años, y tendría 30 años cuando regresara, aun cuando hayan pasado 100 años para las personas de la Tierra. Mientras tanto, el niño que dejó en casa podría haber tenido un hijo 20 años después de su partida, y este nieto ¡tendría ahora 80 años!



Evalúe su comprensión de la sección 37.3 Samuel (que se encuentra en el suelo) pone en marcha su cronómetro en el instante en que María pasa volando en su nave espacial por donde él se encuentra, con una rapidez de $0.600c$. En el mismo instante, María pone en marcha su cronómetro. *a*) Medida en el marco de referencia de Samuel, ¿cuál es la lectura en el cronómetro de María en el instante en que el cronómetro de Samuel indica 10.0 s? **i.** 10.0 s; **ii.** menos de 10.0 s; **iii.** más de 10.0 s. *b*) Medida en el marco de referencia de María, ¿cuál es la lectura en el cronómetro de Samuel en el instante en que el cronómetro de María indica 10.0 s? **i.** 10.0 s; **ii.** menos de 10.0 s; **iii.** más de 10.0 s. ❙

MP

37.4 Relatividad de la longitud

Mastering PHYSICS

ActivPhysics 17.2: Relativity of Length

No solo el intervalo de tiempo entre dos sucesos depende del marco de referencia del observador; también la *distancia* entre dos puntos puede depender del marco de referencia del observador. En esto interviene el concepto de simultaneidad. Suponga que se desea medir la longitud de un automóvil en movimiento. Una forma de lograrlo es hacer que dos ayudantes marquen el pavimento en las posiciones de los parachoques delantero y trasero, y luego midan la distancia entre las marcas. Pero los ayudantes tendrían que hacer las marcas *al mismo tiempo*. Si uno marca la posición del parachoques delantero en un momento determinado, y el otro marca la posición del parachoques trasero medio segundo más tarde, no se obtendrá la longitud real del auto. Como ya sabemos que la simultaneidad no es un concepto absoluto, es necesario proceder con precaución.

Longitudes paralelas en el movimiento relativo

Para obtener una relación entre las longitudes que se miden paralelas a la dirección del movimiento en varios sistemas de coordenadas, consideremos otro experimento mental. Fijamos una fuente de luz al extremo de una regla y un espejo en el otro extremo. La regla se halla en reposo en el marco de referencia S', y su longitud en este marco es l_0 (figura 37.10*a*). En estas condiciones, el tiempo Δt_0 que se requiere para que una pulsación luminosa haga el recorrido de la fuente al espejo y viceversa es

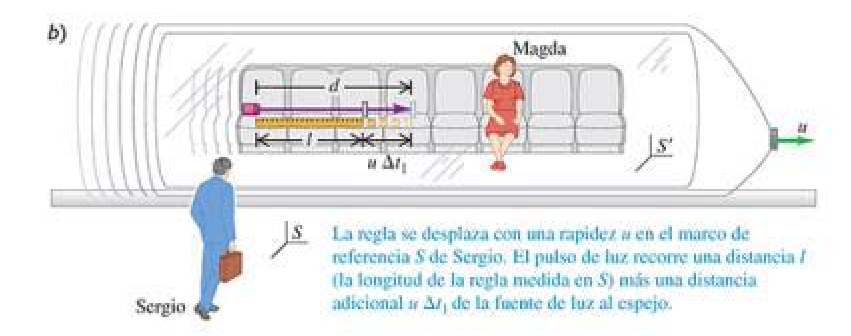
$$\Delta t_0 = \frac{2l_0}{c} \tag{37.9}$$

Este es un intervalo de tiempo propio porque la partida y el regreso ocurren en el mismo punto en S'.

En el marco de referencia S la regla se desplaza hacia la derecha con rapidez u durante este recorrido de la pulsación luminosa (figura 37.10*b*). La longitud de la regla en S es l, y el tiempo de recorrido de la fuente al espejo, medido en S, es Δt_1. Durante

37.10 *a*) Una regla está en reposo en el marco S' de Magda. Una fuente en un extremo de la regla emite un pulso de luz que se refleja en un espejo en el otro extremo y regresa a la posición de la fuente. *b*) Movimiento del pulso de luz medido en el marco S de Sergio.





este intervalo, la regla, junto con la fuente y el espejo, se desplazan una distancia $u\,\Delta t_1$. La longitud total de la trayectoria d de la fuente al espejo no es l, sino

$$d = l + u\,\Delta t_1 \tag{37.10}$$

El pulso de luz viaja con una rapidez c; por lo tanto, también es válido que

$$d = c\,\Delta t_1 \tag{37.11}$$

Combinando las ecuaciones (37.10) y (37.11) para eliminar d:

$$c\,\Delta t_1 = l + u\,\Delta t_1 \quad \text{o bien,}$$

$$\Delta t_1 = \frac{l}{c - u} \tag{37.12}$$

(La división de la distancia l entre $c - u$ *no* significa que la luz viaje con una rapidez $c - u$, sino que la distancia que la pulsación recorre en S es mayor que l).

De igual forma, podemos demostrar que el tiempo Δt_2 del recorrido de regreso del espejo a la fuente es

$$\Delta t_2 = \frac{l}{c + u} \tag{37.13}$$

El tiempo *total* $\Delta t = \Delta t_1 + \Delta t_2$ del recorrido de ida y vuelta, medido en S, es

$$\Delta t = \frac{l}{c - u} + \frac{l}{c + u} = \frac{2l}{c(1 - u^2/c^2)} \tag{37.14}$$

Sabemos además que la ecuación (37.6) relaciona Δt y Δt_0, porque Δt_0 es un tiempo propio en S'. Por lo tanto, la ecuación (37.9) del tiempo del recorrido de ida y vuelta en el marco en reposo S' de la regla se transforma en

$$\Delta t\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} = \frac{2l_0}{c} \tag{37.15}$$

Por último, combinando las ecuaciones (37.14) y (37.15) para eliminar Δt y simplificando, se obtiene

$$l = l_0\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} = \frac{l_0}{\gamma} \qquad \text{(contracción de la longitud)} \tag{37.16}$$

[Hemos empleado la cantidad $\gamma = 1/\sqrt{1 - u^2/c^2}$ definida en la ecuación (37.7)]. Así, la longitud l medida en S, donde la regla está en movimiento, es *más corta* que la longitud l_0 medida en su marco en reposo S'.

CUIDADO **La contracción de la longitud es real** ¡Esto *no* es una ilusión óptica! La regla es efectivamente más corta en el marco de referencia S que en S'.

Una longitud medida en el marco donde el cuerpo está en reposo (el marco del cuerpo en reposo) recibe el nombre de **longitud propia**; así, l_0 es una longitud propia en S', y la longitud medida en cualquier otro marco en movimiento con respecto a S' es *menor que* l_0. Este efecto se llama **contracción de la longitud**.

Cuando u es muy pequeña en comparación con c, γ se acerca a 1. Así, en el límite de las rapideces pequeñas nos acercamos a la relación newtoniana $l = l_0$. Esto, junto con el resultado correspondiente a la dilatación del tiempo, muestra que las ecuaciones (37.1), la transformación galileana de coordenadas, son por lo regular suficientemente exactas cuando la rapidez relativa es mucho menor que c. No obstante, cuando u es una fracción considerable de c, la cantidad $\sqrt{1 - u^2/c^2}$ puede ser sustancialmente menor que 1. Entonces, l puede ser mucho menor que l_0 y los efectos de la contracción de la longitud son considerables (figura 37.11).

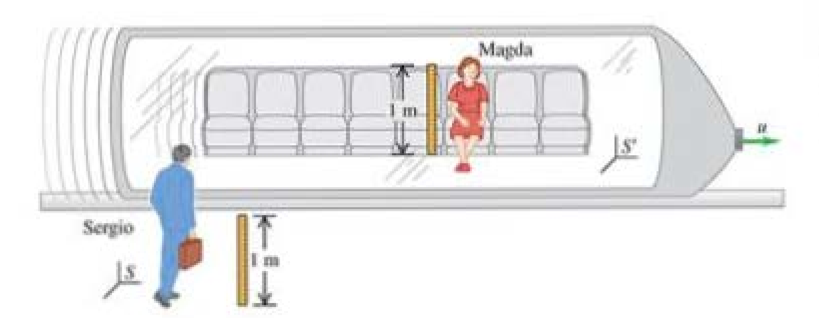
37.11 En el Stanford Linear Accelerator Center, la rapidez con que los electrones recorren la línea del haz de 3 km es más lenta que c por menos de 1 cm/s. Al medirse en el marco de referencia de tales electrones, la línea del haz (que se extiende de la parte superior a la inferior de esta fotografía) ¡es solo de aproximadamente 15 cm de longitud!



Longitudes perpendiculares al movimiento relativo

Hemos hecho la deducción de la ecuación (37.16) con respecto a longitudes medidas en la dirección *paralela* al movimiento relativo de dos marcos de referencia. Las longitudes medidas *perpendicularmente* a la dirección de movimiento *no* se contraen. Para probarlo, considere dos reglas de madera idénticas. Una de ellas está en reposo en el marco S y permanece a lo largo del eje de las y positivas con un extremo en O, el origen de S. La otra está en reposo en el marco S' y permanece a lo largo del eje de las y' positivas con un extremo en O', el origen de S'. El marco S' se desplaza en la dirección x positiva con respecto al marco S. Los observadores Sergio y Magda, en reposo en S y S', respectivamente, se sitúan en la marca de 50 cm de sus reglas. En el instante en que los dos orígenes coinciden, las dos reglas se encuentran a lo largo de la misma línea. En ese instante, Magda hace una marca en la regla de Sergio, en el punto que coincide con su propia marca de 50 cm, y Sergio hace lo mismo en la regla de Magda.

En beneficio del argumento suponga que Sergio ve la regla de Magda más larga que la suya. Entonces, la marca que Sergio hace en la regla de Magda estará *abajo* de su centro. En ese caso, Magda pensará que la regla de Sergio se ha acortado, pues la mitad de su longitud coincide con *menos* de la mitad de la longitud de la regla de ella. Por consiguiente, Magda ve que las reglas en movimiento se acortan y Sergio ve que se alargan. Pero esto implica una asimetría entre los dos marcos que contradice el postulado básico de la relatividad, según el cual todos los marcos inerciales son equivalentes. Se concluye entonces que la congruencia con los postulados de la relatividad exige que ambos observadores vean las reglas de una *misma* longitud, aunque para cada observador uno de ellos está inmóvil y el otro en movimiento (véase la figura 37.12). Por lo tanto, *no hay contracción de longitud perpendicularmente a la dirección del movimiento relativo de los sistemas de coordenadas*. Empleamos este resultado en nuestra deducción de la ecuación (37.6) al suponer que la distancia d es la misma en ambos marcos de referencia.



37.12 Las reglas de madera son perpendiculares a la velocidad relativa. Cualquiera que sea el valor de u, tanto para Sergio como para Magda, ambas reglas de madera tienen una longitud de 1 metro.

Por ejemplo, suponga que una varilla en movimiento, de longitud l_0, forma un ángulo θ_0 con la dirección del movimiento relativo (el eje x), medido en su marco en reposo. Su componente de longitud en ese marco paralela al movimiento, $l_0 \cos\theta_0$, se contrae a $(l_0 \cos\theta_0)/\gamma$. Sin embargo, su componente de longitud perpendicular al movimiento l_0 sen θ_0 no cambia.

Estrategia para resolver problemas 37.2 Contracción de la longitud



IDENTIFICAR *los conceptos relevantes:* El concepto de contracción de la longitud se utiliza siempre que se compara la longitud de un objeto medida por observadores en marcos de referencia inerciales diferentes.

PLANTEAR *el problema* de acuerdo con los siguientes pasos:

1. Determine lo que define la longitud en cuestión. Si el enunciado del problema describe un objeto como una regla, es simplemente la distancia entre los extremos del objeto. Si el problema se refiere a una distancia entre dos puntos sin ningún objeto entre ellos, sería útil imaginar una regla o varilla que se extiende de un punto al otro.
2. Identifique la incógnita.

EJECUTAR *la solución* como sigue:

1. Establezca el marco de referencia donde el objeto en cuestión se encuentra en reposo. En este marco, la longitud del objeto es su longitud propia l_0. En un segundo marco de referencia que se desplaza con rapidez u con respecto al primer marco, el objeto tiene una longitud contraída l.
2. Tenga presente que la contracción de longitud ocurre solo con respecto a las longitudes paralelas a la dirección del movimiento relativo de los dos marcos. Toda longitud perpendicular al movimiento relativo es la misma en ambos marcos.
3. Relacione l y l_0 por medio de la ecuación (37.16), y luego despeje la incógnita.

EVALUAR *la respuesta:* Compruebe que sus respuestas tengan sentido: l nunca será mayor que l_0, y u nunca será mayor que c.

Ejemplo 37.4 ¿Cuál es la longitud de la nave espacial?



Una nave espacial pasa volando cerca de la Tierra con una rapidez de $0.990c$. Un miembro de la tripulación a bordo de la nave mide la longitud de esta, y obtiene un valor de 400 m. ¿Qué longitud miden los observadores que se hallan en la Tierra?

SOLUCIÓN

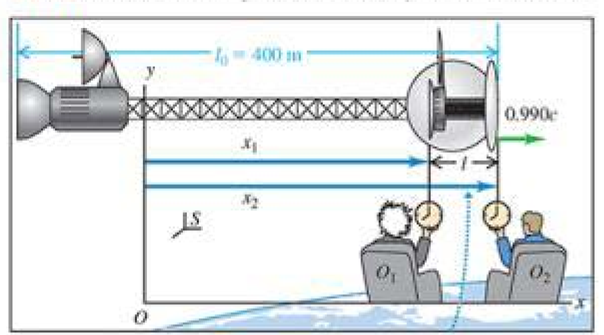
IDENTIFICAR y PLANTEAR: Este problema es acerca de la longitud de la nave espacial, es decir, la distancia de la punta a la cola, medida en la nave espacial y en la Tierra. Esta longitud se encuentra a lo largo de la dirección del movimiento relativo (figura 37.13); por lo tanto, habrá una contracción de longitud. La longitud de 400 m de la nave espacial es la longitud *propia* l_0 porque se midió en el marco donde la nave está en reposo. La incógnita es la longitud l medida en el marco terrestre, en relación con el cual la nave se mueve a $u = 0.990c$.

EJECUTAR: Por la ecuación (37.16), la longitud en el marco de la Tierra es

$$l = l_0\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} = (400\text{ m})\sqrt{1 - (0.990)^2} = 56.4\text{ m}$$

EVALUAR: La nave espacial es más corta en el marco en el que está en movimiento que en el marco donde se encuentra en reposo. Para medir la longitud l, dos observadores en Tierra con relojes sincronizados podrían medir las posiciones de los dos extremos de la nave simultáneamente en el marco de referencia terrestre, como se muestra en la figura 37.13. (Estas dos mediciones *no* parecerán simultáneas para un observador a bordo de la nave).

37.13 Medición de la longitud de una nave espacial en movimiento.



Los dos observadores que están en la Tierra (S) deben medir x_2 y x_1 simultáneamente, para obtener la longitud correcta $l = x_2 - x_1$ en su marco de referencia.

Ejemplo 37.5 ¿Cuál es la distancia entre los observadores?



Los observadores O_1 y O_2 de la figura 37.13 están separados una distancia de 56.4 m en la Tierra. ¿Cuál es la separación entre ellos, medida por la tripulación de la nave espacial?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: En este ejemplo la distancia de 56.4 m es la longitud *propia* l_0, la cual representa la longitud de una regla que se extiende de O_1 a O_2 y se encuentra en reposo en el marco de la Tierra en el que los observadores están en reposo. La incógnita es la longitud l de esta regla medida en el marco de la nave espacial, en el cual la Tierra y la regla se mueven a $u = 0.990c$.

EJECUTAR: Igual que en el ejemplo 37.4, pero con $l_0 = 56.4$ m,

$$l = l_0\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} = (56.4 \text{ m})\sqrt{1 - (0.990)^2} = 7.96 \text{ m}$$

EVALUAR: Esta respuesta *no* indica que la nave espacial, medida por su tripulación, tenga a la vez 400 m y 7.96 m de largo. Medida en la Tierra, la cola de la nave espacial se encuentra en la posición O_1 en el mismo instante en que la nariz se encuentra en la posición O_2. De esta forma, la longitud de la nave espacial medida en la Tierra es igual a la distancia de 56.4 m entre O_1 y O_2. Pero en el marco de la nave espacial O_1 y O_2 están separados solo 7.96 m, y la nariz (que está a 400 m enfrente de la cola) pasa por O_2 antes de que la cola pase por O_1.

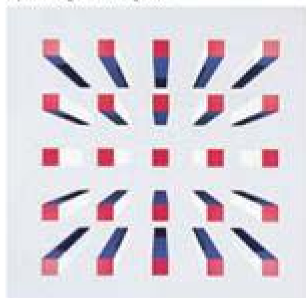
Cómo se vería un objeto que se mueve cerca de *c*

Reflexionemos un poco acerca de la apariencia visual de un cuerpo tridimensional en movimiento. Si pudiéramos ver simultáneamente la posición de todos los puntos del cuerpo, este parecería que se encoge solo en la dirección del movimiento. Pero *no* vemos todos los puntos simultáneamente; la luz proveniente de los puntos más alejados tarda más tiempo en llegar a nosotros que la luz procedente de los puntos cercanos, por lo cual vemos los puntos más alejados en la posición que tenían en momentos anteriores.

Suponga que tenemos una varilla rectangular con sus caras paralelas a los planos de coordenadas. Cuando miramos desde un extremo enfrente del centro de la cara más próxima de una varilla de este tipo en reposo, vemos solo esa cara. (Véase la varilla central generada por computadora en la figura 37.14*a*). Pero cuando esa varilla pasa cerca de nosotros moviéndose hacia la derecha a una fracción apreciable de la rapidez de la luz, quizá también veamos su lado izquierdo debido al efecto de tiempos anteriores que hemos descrito. Es decir, podemos ver ciertos puntos que no pudimos ver cuando la varilla estaba en reposo porque la varilla se quita del paso de los rayos luminosos que vienen de esos puntos hacia nosotros. A la inversa, la varilla en movimiento impide el paso de parte de la luz que puede llegar hasta nosotros cuando la varilla está en reposo. Por todo esto, las varillas de las figuras 37.14*b* y 37.14*c* se ven giradas y deformadas.

37.14 Simulación por computadora de la apariencia de un arreglo de 25 varillas con sección transversal cuadrada. La varilla central se observa desde un extremo. La simulación no tiene en cuenta los cambios de color del arreglo debidos al efecto Doppler (véase la sección 37.6).

a) Arreglo en reposo



b) Arreglo desplazándose hacia la derecha a 0.2*c*



c) Arreglo desplazándose hacia la derecha a 0.9*c*



Evalúe su comprensión de la sección 37.4 Una nave espacial en miniatura vuela y pasa junto a usted, desplazándose horizontalmente a una fracción considerable de la rapidez de la luz. En cierto instante, usted observa que la punta y la cola de la nave espacial se alinean exactamente con los dos extremos de una regla de madera que usted sostiene con sus manos. Ordene de la más larga a la más corta las siguientes distancias: **i.** La longitud propia de la regla de madera; **ii.** la longitud propia de la nave espacial; **iii.** la longitud de la nave espacial medida en el marco de referencia de usted; **iv.** la longitud de la regla de madera medida en el marco de referencia de la nave espacial. ❙

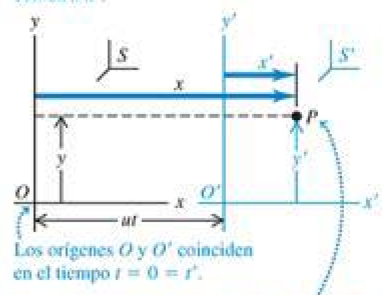
37.5 Transformaciones de Lorentz

En la sección 37.1 estudiamos las ecuaciones de la transformación galileana de coordenadas, ecuaciones (37.1), las cuales relacionan las coordenadas (x, y, z) de un punto en un marco de referencia S con las coordenadas (x', y', z') del punto en un segundo marco de referencia S'. El segundo marco se desplaza con rapidez constante u con respecto a S en la dirección positiva a lo largo del eje común x-x'. Esta transformación supone también que la escala de tiempo es la misma en los dos marcos de referencia, como lo expresa la relación adicional $t = t'$. Esta transformación galileana, como hemos visto, es válida solo en el límite en que u tiende a cero. Ahora estamos en condiciones de deducir transformaciones de carácter más general que sean congruentes con el principio de relatividad. Estas relaciones más generales se conocen como las **transformaciones de Lorentz**.

Transformación de coordenadas de Lorentz

Nuestra primera pregunta es la siguiente: cuando ocurre un suceso en el punto (x, y, z) en el tiempo t, observado en un marco de referencia S, ¿cuáles son las coordenadas (x', y', z') y el tiempo t' del suceso observado en un segundo marco de referencia S', que se desplaza con respecto a S con rapidez constante u en la dirección $+x$?

Para deducir la transformación de coordenadas haremos referencia a la figura 37.15 (siguiente página), que es igual a la figura 37.3. Como hicimos antes, suponemos que los orígenes coinciden en el tiempo inicial $t = 0 = t'$. Entonces, en S la distancia de O a O' en el tiempo t sigue siendo ut. La coordenada x' es una *longitud propia* en S'; por



37.15 Medida en un marco de referencia S, x' se ha contraído a x'/γ; por lo tanto, $x = ut + x'/\gamma$ y $x' = \gamma(x - ut)$.

El marco S' se desplaza con respecto al marco S con velocidad constante u a lo largo del eje común x-x'.

Los orígenes O y O' coinciden en el tiempo $t = 0 = t'$.

La transformación de coordenadas de Lorentz relaciona las coordenadas de espacio-tiempo de un suceso medidas en los dos marcos (x, y, z, t) en el marco S y (x', y', z', t') en el marco S'.

lo tanto, en S se ha contraído por el factor $1/\gamma = \sqrt{1 - u^2/c^2}$, como en la ecuación (37.16). En consecuencia, la distancia x de O a P, vista en S, no es simplemente $x = ut + x'$, como en la transformación galileana de coordenadas, sino

$$x = ut + x'\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} \tag{37.17}$$

Despejando x' de esta ecuación, tenemos

$$x' = \frac{x - ut}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \tag{37.18}$$

La ecuación (37.18) es parte de la transformación de coordenadas de Lorentz; otra parte es la ecuación que proporciona t' en términos de x y t. Para obtenerla, observamos que el principio de relatividad demanda que la transformación de S a S' sea idéntica en cuanto a *forma* a la transformación de S' a S. La única diferencia es un cambio en el signo de la componente de velocidad relativa u. Por lo tanto, de acuerdo con la ecuación (37.17) debe ser cierto que

$$x' = -ut' + x\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} \tag{37.19}$$

Ahora igualamos las ecuaciones (37.18) y (37.19) para eliminar x'. Esto nos da una ecuación de t' en términos de x y t. Dejamos a usted la solución de los detalles algebraicos; el resultado es

$$t' = \frac{t - ux/c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \tag{37.20}$$

Como ya comentamos, el movimiento no afecta las longitudes perpendiculares a la dirección del movimiento relativo; por lo tanto, $y' = y$ y $z' = z$.

Agrupando todas estas ecuaciones de transformación, tenemos

$$\begin{aligned} x' &= \frac{x - ut}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} = \gamma(x - ut) \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= \frac{t - ux/c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} = \gamma(t - ux/c^2) \end{aligned} \quad \text{(transformación de coordenadas de Lorentz)} \tag{37.21}$$

Estas ecuaciones integran la *transformación de coordenadas de Lorentz*, la generalización relativista de la transformación galileana de coordenadas: las ecuaciones (37.1) y $t = t'$. Con valores de u que tienden a cero, los radicales de los denominadores y γ tienden a 1, y el término ux/c^2 tiende a cero. En este límite, las ecuaciones (37.21) se vuelven idénticas a la ecuación (37.1), junto con $t = t'$. En general, sin embargo, tanto las coordenadas como el tiempo de un suceso en un marco dependen de sus coordenadas y tiempo en otro marco. *El espacio y el tiempo han quedado ligados; ya no podemos afirmar que la longitud y el tiempo tienen significados absolutos independientes del marco de referencia.* Por tal razón, nos referimos al tiempo y a las tres dimensiones del espacio colectivamente, como una entidad tetradimensional denominada **espacio-tiempo**, y denominamos a (x, y, z, t), en conjunto, como las **coordenadas de espacio-tiempo** de un suceso.

Transformación de velocidades de Lorentz

Las ecuaciones (37.21) nos permiten deducir la generalización relativista de la transformación galileana de velocidades, ecuación (37.2). Consideramos solo el movimiento unidimensional a lo largo del eje de las x y empleamos el término "velocidad" como una abreviatura de la "componente x de la velocidad". Suponga que en un

tiempo dt una partícula se desplaza una distancia dx, medida en el marco S. La distancia dx' y el tiempo dt' correspondientes en S' se obtienen diferenciando las ecuaciones (37.21):

$$dx' = \gamma(dx - u\,dt)$$
$$dt' = \gamma(dt - u\,dx/c^2)$$

Dividimos la primera ecuación entre la segunda, y luego el numerador y el denominador del resultado entre dt para obtener

$$\frac{dx'}{dt'} = \frac{\dfrac{dx}{dt} - u}{1 - \dfrac{u}{c^2}\dfrac{dx}{dt}}$$

Ahora dx/dt es la velocidad v_x en S, y dx'/dt' es la velocidad v'_x en S', y así obtenemos finalmente la generalización relativista

$$v'_x = \frac{v_x - u}{1 - uv_x/c^2} \qquad \text{(transformación de velocidades de Lorentz)} \qquad (37.22)$$

Cuando u y v_x son mucho menores que c, el denominador de la ecuación (37.22) tiende a 1, y nos aproximamos al resultado no relativista $v'_x = v_x - u$. El extremo opuesto se da cuando $v_x = c$; en tal caso, encontramos que

$$v'_x = \frac{c - u}{1 - uc/c^2} = \frac{c(1 - u/c)}{1 - u/c} = c$$

Esto indica que cualquier objeto que se desplace con una velocidad $v_x = c$ medida en S también tiene una velocidad $v'_x = c$ medida en S', no obstante el movimiento relativo de los dos marcos. Así, la ecuación (37.22) es congruente con el postulado de Einstein de que la rapidez de la luz en el vacío es la misma en todos los marcos de referencia inerciales.

El principio de relatividad nos dice que no existe una distinción fundamental entre los dos marcos S y S'. Por lo tanto, la expresión de v_x en términos de v'_x debe tener la misma forma que la ecuación (37.22), con v_x convertida en v'_x y viceversa, y el signo de u invertido. Si llevamos a cabo estas operaciones con la ecuación (37.22) encontramos que

$$v_x = \frac{v'_x + u}{1 + uv'_x/c^2} \qquad \text{(transformación de velocidad de Lorentz)} \qquad (37.23)$$

Esto también se obtiene algebraicamente despejando v_x de la ecuación (37.22). Las ecuaciones (37.22) y (37.23) son *transformaciones de velocidades de Lorentz* para el movimiento unidimensional.

CUIDADO **Use las coordenadas correctas de los marcos de referencia** Tenga presente que las ecuaciones de transformaciones de Lorentz dadas por las ecuaciones (37.21), (37.22) y (37.23) suponen que el marco S' se desplaza en la dirección x positiva con velocidad u con respecto al marco S. Siempre establezca su sistema de coordenadas de modo que se apegue a esta convención. ❙

Cuando u es menor que c, las transformaciones de velocidades de Lorentz nos demuestran que un cuerpo que se desplaza con rapidez menor que c en un marco de referencia siempre tiene una rapidez menor que c en *cualquier otro* marco de referencia. Esta es una de las razones por las que se concluye que ningún cuerpo material puede viajar con una rapidez igual o mayor que la de la luz en el vacío, con respecto a *cualquier* marco de referencia inercial. La generalización relativista de la energía y el momento lineal, que examinaremos más adelante, ofrecen un respaldo adicional a esta hipótesis.

Estrategia para resolver problemas 37.3 Transformaciones de Lorentz



IDENTIFICAR *los conceptos relevantes:* Las ecuaciones de transformación de *coordenadas* de Lorentz relacionan las coordenadas de espacio-tiempo de un suceso en un marco de referencia inercial con las coordenadas de espacio-tiempo del mismo suceso en un segundo marco inercial. Las ecuaciones de la transformación de *velocidades* de Lorentz relacionan la velocidad de un objeto en un marco inercial con su velocidad en un segundo marco inercial.

PLANTEAR *el problema* de acuerdo con los siguientes pasos:
1. Identifique la incógnita.
2. Defina los dos marcos inerciales S y S'. Recuerde que S' se desplaza con respecto a S con velocidad constante u en la dirección $+x$.
3. Si se necesitan las ecuaciones de transformación de coordenadas, elabore una lista de coordenadas de espacio-tiempo en los dos marcos, como x_1, x_1', t_1, t_1', y así sucesivamente. Identifique minuciosamente cuáles de ellas conoce y cuáles no.
4. En los problemas de transformación de velocidades, identifique claramente las velocidades u (la velocidad relativa en los dos marcos de referencia), v_x (la velocidad del objeto con respecto a S) y v_x' (la velocidad del objeto con respecto a S').

EJECUTAR *la solución* como sigue:
1. En un problema de transformación de coordenadas, despeje de las ecuaciones (37.21) las coordenadas de espacio-tiempo del suceso medidas en S' en términos de los valores correspondientes en S. (Si necesita despejar las coordenadas de espacio-tiempo en S en términos de los valores correspondientes en S', podrá convertir fácilmente las expresiones de las ecuaciones (37.21): sustituya todas las cantidades con prima por cantidades sin prima, y viceversa, y sustituya u por $-u$).
2. En un problema de transformación de velocidades, despeje la incógnita de la ecuación (37.22) o de la ecuación (37.23), según sea adecuado.

EVALUAR *la respuesta:* No se desanime si algunos de sus resultados parecen no tener sentido o si no concuerdan con el "sentido común". Toma tiempo adquirir intuición acerca de la relatividad; la experiencia se la brindará.

Ejemplo 37.6 ¿Se recibió antes de ser enviado?



Ganadora de una carrera interestelar, Magda cruza la meta en el espacio al mando de su nave espacial con una rapidez de 0.600c con respecto a esa línea. Un mensaje de "¡hurra!" es enviado desde el extremo posterior de su nave (suceso 2) en el instante (en su marco de referencia) en que el extremo frontal de la nave cruza la meta (suceso 1). La longitud de la nave medida por Magda es de 300 m. Sergio está en la meta y se encuentra en reposo con respecto a ella. Según las mediciones de Sergio, ¿cuándo y dónde ocurren los sucesos 1 y 2?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: En este ejemplo interviene la transformación de coordenadas de Lorentz. La deducción de esta transformación supone que los orígenes de los marcos S y S' coinciden en $t = 0 = t'$. Por lo tanto, para simplificar, fijamos el origen de S en la meta y el origen de S' en el extremo frontal de la nave espacial, para que, según las mediciones de Sergio y Magda, el suceso 1 ocurra en $x = 0 = x'$ y $t = 0 = t'$.

En S' Magda determinó que su nave tiene 300 m de largo, por lo que ordena enviar el "¡hurra!" desde 300 m detrás del frente de su nave en el instante en que, según sus mediciones, el frente cruza la meta. Es decir, según sus mediciones, el suceso 2 ocurre en $x' = -300$ m y $t' = 0$.

Las incógnitas son la coordenada x y el tiempo t del suceso 2, medidos por Sergio en S.

EJECUTAR: Para despejar las incógnitas, modificamos la primera y la última de las ecuaciones (37.21) para obtener x y t en función de x' y t'. Lo hacemos del mismo modo como obtuvimos la ecuación (37.23) a partir de la ecuación (37.22). Eliminamos las primas de x' y t', agregamos primas a x y t, y sustituimos cada u por $-u$. Los resultados son

$$x = \gamma(x' + ut') \quad \text{y} \quad t = \gamma(t' + ux'/c^2)$$

De acuerdo con la ecuación (37.7), $\gamma = 1.25$ cuando $u = 0.600c = 1.80 \times 10^8$ m/s. Sustituimos además $x' = -300$ m, $t' = 0$, $c = 3.00 \times 10^8$ m/s y $u = 1.80 \times 10^8$ m/s en la ecuación de x y t para obtener $x = -375$ m en $t = -7.50 \times 10^{-7}$ s $= -0.750$ μs en el suceso 2.

EVALUAR: Magda afirma que los sucesos son simultáneos, pero Sergio no está de acuerdo. De hecho, este afirma que el "¡hurra!" fue enviado *antes* de que Magda cruzara la meta. Esto no significa que el efecto antecediera la causa. Lo más rápido que Magda puede enviar una señal a lo largo de su nave es 300 m/(3.00 × 10^8 m/s) = 1.00 μs. Magda no puede enviar una señal desde el frente, en el instante en que cruza la meta, capaz de provocar la emisión de un "¡hurra!" desde el extremo trasero en el mismo instante. Tendría que enviar esa señal desde el frente, al menos 1.00 μs antes, para lo cual tendría que anticipar ligeramente su éxito.

Ejemplo 37.7 Velocidades relativas

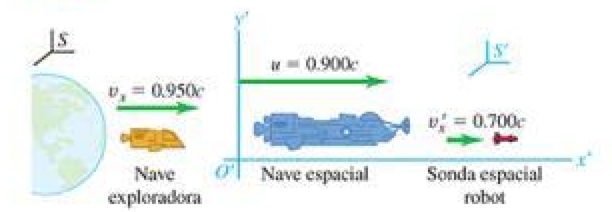


a) Una nave espacial que se aleja de la Tierra con una rapidez de 0.900c dispara una sonda espacial robot en la dirección de su movimiento, con una rapidez de 0.700c con respecto a la nave. ¿Cuál es la velocidad de la sonda con respecto a la Tierra? *b*) Una nave exploradora intenta dar alcance a la nave espacial viajando a 0.950c con respecto a la Tierra. ¿Cuál es la velocidad de la nave exploradora con respecto a la nave espacial?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Este ejemplo utiliza la transformación de velocidades de Lorentz. Sea S el marco de referencia de la Tierra, y S' el marco de referencia de la nave espacial (figura 37.16); la velocidad relativa de los dos marcos es $u = 0.900c$. En el inciso *a*) nos dan la velocidad de la sonda $v_x' = 0.700c$ con respecto a S', y la incógnita es

37.16 Nave espacial, sonda espacial robot y nave exploradora.



la velocidad v_x de la sonda con respecto a S. En el inciso *b*) nos dan la velocidad $v_x = 0.950c$ de la nave exploradora con respecto a S, y la incógnita es v'_x con respecto a S'.

EJECUTAR: *a*) Aplicamos la ecuación (37.23) para obtener la velocidad de la sonda con respecto a la Tierra:

$$v_x = \frac{v'_x + u}{1 + uv'_x/c^2} = \frac{0.700c + 0.900c}{1 + (0.900c)(0.700c)/c^2} = 0.982c$$

b) Aplicamos la ecuación (37.22) para obtener la velocidad de la nave exploradora con respecto a la nave espacial:

$$v'_x = \frac{v_x - u}{1 - uv_x/c^2} = \frac{0.950c - 0.900c}{1 - (0.900c)(0.950c)/c^2} = 0.345c$$

EVALUAR: ¿Qué habríamos obtenido con la fórmula de la transformación galileana de velocidades, ecuación (37.2)? En el inciso *a*) habríamos encontrado que la velocidad de la sonda con respecto a la Tierra es $v_x = v'_x + u = 0.700c + 0.900c = 1.600c$, lo cual es mayor que c, y por lo mismo imposible. En el inciso *b*) habríamos determinado que la velocidad de la nave exploradora con respecto a la nave espacial es $v'_x = v_x - u = 0.950c - 0.900c = 0.050c$; el valor correcto desde la perspectiva relativista, $v'_x = 0.345c$, es casi siete veces mayor que el valor galileano incorrecto.

Evalúe su comprensión de la sección 37.5 *a*) En el marco S los sucesos P_1 y P_2 ocurren en las mismas coordenadas x, y y z, pero el suceso P_1 ocurre antes que el suceso P_2. En el marco S', ¿qué suceso ocurre primero? *b*) En el marco S los sucesos P_3 y P_4 ocurren en el mismo tiempo t y en las mismas coordenadas y y z, pero el suceso P_3 ocurre en una coordenada x menos positiva que el suceso P_4. En el marco S', ¿qué suceso ocurre primero? |

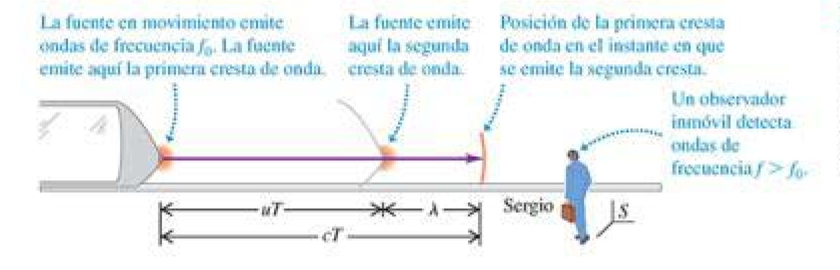
37.6 Efecto Doppler en ondas electromagnéticas

Otra consecuencia importante de la cinemática relativista es el efecto Doppler en ondas electromagnéticas. En nuestro análisis previo del efecto Doppler (véase la sección 16.8) citamos la ecuación (16.30), la fórmula del desplazamiento de la frecuencia que provoca el movimiento de una fuente de ondas electromagnéticas con respecto al observador, pero no la demostramos. Ahora podemos deducir ese resultado.

El problema es el siguiente. Una fuente de luz se desplaza con rapidez constante u hacia Sergio, quien se halla inmóvil en un marco inercial (figura 37.17). Medida en su marco en reposo, la fuente emite ondas luminosas de frecuencia f_0 y periodo $T_0 = 1/f_0$. ¿Cuál es la frecuencia f de estas ondas como las recibe Sergio?

Sea T el intervalo de tiempo entre la *emisión* de crestas de onda sucesivas observado en el marco de referencia de Sergio. Observe que *no* se trata del intervalo entre la *llegada* de crestas sucesivas a la posición que ocupa Sergio, porque las crestas se emiten en diferentes puntos del marco de Sergio. Al medir solo la frecuencia f que recibe, Sergio no tiene en cuenta la diferencia de tiempo de tránsito de las crestas sucesivas. Por consiguiente, la frecuencia que recibe *no* es $1/T$. ¿Cuál es la ecuación de f?

Durante un tiempo T las crestas que van por delante de la fuente recorren una distancia cT, y la fuente se desplaza una distancia más corta uT en la misma dirección.



37.17 Efecto Doppler en la luz. Una fuente de luz que se desplaza con rapidez u con respecto a Sergio emite una cresta de onda, luego recorre una distancia uT hacia un observador y emite la cresta siguiente. En el marco de referencia S de Sergio, la segunda cresta se halla a una distancia λ atrás de la primera.

Por lo tanto, la distancia λ entre crestas sucesivas, es decir, la longitud de onda, es $\lambda = (c - u)T$, medida en el marco de Sergio. La frecuencia que este mide es c/λ. Por lo que

$$f = \frac{c}{(c - u)T} \tag{37.24}$$

Hasta aquí hemos seguido un patrón similar al del efecto Doppler correspondiente al sonido de una fuente en movimiento (véase la sección 16.8 (vol. 1)). En ese análisis, el paso siguiente consistió en igualar T con el tiempo T_0 entre emisiones de crestas de onda sucesivas de la fuente. Sin embargo, debido a la dilatación del tiempo, desde el punto de vista relativista *no* es correcto equiparar T con T_0. El tiempo T_0 se mide en el marco en reposo de la fuente, por lo que es un tiempo propio. Según la ecuación (37.6), T_0 y T están relacionados por

$$T = \frac{T_0}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} = \frac{cT_0}{\sqrt{c^2 - u^2}}$$

o bien, puesto que $T_0 = 1/f_0$,

$$\frac{1}{T} = \frac{\sqrt{c^2 - u^2}}{cT_0} = \frac{\sqrt{c^2 - u^2}}{c} f_0$$

Recuerde que $1/T$ no es igual a f. Debemos sustituir esta expresión de $1/T$ en la ecuación (37.24) para determinar f:

$$f = \frac{c}{c - u} \frac{\sqrt{c^2 - u^2}}{c} f_0$$

Usando $c^2 - u^2 = (c - u)(c + u)$, la expresión anterior da

$$f = \sqrt{\frac{c + u}{c - u}} f_0 \quad \text{(efecto Doppler, ondas electromagnéticas, fuente que se aproxima al observador)} \tag{37.25}$$

37.18 Este radar manual emite un haz de radio de frecuencia f_0, el cual, en el marco de referencia de un automóvil que se aproxima, tiene una frecuencia f más alta dada por la ecuación (37.25). El haz reflejado también tiene una frecuencia f en el marco del auto, pero tiene una frecuencia f' aún más alta en el marco del policía. El radar calcula la rapidez del auto comparando las frecuencias del haz emitido y del haz reflejado con desplazamiento de Doppler duplicado. (Compare con el ejemplo 16.18 de la sección 16.8).



Esto demuestra que, cuando la fuente se desplaza *hacia* el observador, la frecuencia observada f es *mayor* que la frecuencia emitida f_0. La diferencia $f - f_0 = \Delta f$ se conoce como el desplazamiento de frecuencia de Doppler. Cuando u/c es mucho menor que 1, el desplazamiento fraccionario $\Delta f/f$ también es pequeño y aproximadamente igual a u/c:

$$\frac{\Delta f}{f} = \frac{u}{c}$$

Cuando la fuente se *aleja* del observador, se cambia el signo de u en la ecuación (37.25) para obtener

$$f = \sqrt{\frac{c - u}{c + u}} f_0 \quad \text{(efecto Doppler, ondas electromagnéticas, fuente alejándose del observador)} \tag{37.26}$$

Esto concuerda con la ecuación (16.30), ya citada, con cambios de notación menores.

En el caso de la luz, a diferencia del sonido, no existe distinción alguna entre el movimiento de la fuente y el movimiento del observador; solo importa la velocidad *relativa* de los dos. En los últimos cuatro párrafos de la sección 16.8 se analizan varias aplicaciones prácticas del efecto Doppler con luz y otras radiaciones electromagnéticas; sugerimos repasar esos párrafos ahora. La figura 37.18 muestra una aplicación común.

Ejemplo 37.8 Material proveniente de un agujero negro



Muchas galaxias tienen en su centro agujeros negros supermasivos (véase la sección 13.8). El material que gira en remolino alrededor de un agujero negro se calienta, se ioniza y genera campos magnéticos intensos. Las fuerzas magnéticas resultantes convierten parte del material en chorros de alta velocidad que se proyectan hacia afuera de la galaxia y al espacio intergaláctico (figura 37.19). La luz azul que se

37.19 Esta imagen muestra el chorro, moviéndose rápidamente, de 5000 años luz de largo que emana del centro de la galaxia M87. La luz del chorro es emitida por electrones de alta rapidez que se mueven en espiral alrededor de las líneas del campo magnético (véase la figura 27.18).



observa en el chorro de la figura 37.19 tiene una frecuencia de 6.66×10^{14} Hz (en la región ultravioleta del espectro electromagnético; véase la figura 32.4), pero en el marco de referencia del material proyectado, la luz tiene una frecuencia de 5.55×10^{13} Hz (en la región infrarroja). ¿Con qué rapidez se desplaza el material del chorro hacia nosotros?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Este problema se relaciona con el efecto Doppler para ondas electromagnéticas. La frecuencia que observamos es $f = 6.66 \times 10^{14}$ Hz, y la frecuencia en el marco de la fuente es $f_0 = 5.55 \times 10^{13}$ Hz. Puesto que $f > f_0$, el chorro se aproxima hacia nosotros y se usa la ecuación (37.25) para calcular la incógnita u.

EJECUTAR: Necesitamos despejar u de la ecuación (37.25). Se deja al lector como ejercicio demostrar que el resultado es

$$u = \frac{(f/f_0)^2 - 1}{(f/f_0)^2 + 1}c$$

Tenemos que $f/f_0 = (6.66 \times 10^{14}\text{ Hz})/(5.55 \times 10^{13}\text{ Hz}) = 12.0$; por lo tanto,

$$u = \frac{(12.0)^2 - 1}{(12.0)^2 + 1}c = 0.986c$$

EVALUAR: Dado que el desplazamiento de la frecuencia es muy considerable, habría sido incorrecto usar la expresión aproximada $\Delta f/f = u/c$. De haberlo intentado, habríamos determinado que $u = c(\Delta f/f_0) = c(6.66 \times 10^{14}\text{ Hz} - 5.55 \times 10^{13}\text{ Hz})/(5.55 \times 10^{13}\text{ Hz}) = 11.0c$. Este resultado no es correcto, porque el material del chorro no puede viajar más rápidamente que la luz.

37.7 Momento lineal relativista

Las leyes de Newton del movimiento tienen la misma forma en todos los marcos de referencia inerciales. Cuando empleamos transformaciones para cambiar de un marco inercial a otro, las leyes deben ser *invariables* (es decir, no deben cambiar). Pero acabamos de aprender que el principio de relatividad nos obliga a sustituir las transformaciones galileanas por las transformaciones de Lorentz, de carácter más general. Como veremos, esto requiere las generalizaciones correspondientes en las leyes del movimiento y en las definiciones de momento lineal y energía.

El principio de conservación del momento lineal afirma que *cuando dos cuerpos interactúan, la cantidad de momento lineal total es constante*, siempre y cuando la fuerza externa neta que actúa sobre los cuerpos en un marco de referencia inercial sea cero (por ejemplo, si forman un sistema aislado en el que solo interactúan uno con otro). Si la del momento lineal es una ley física válida, debe ser válida en *todos* los marcos de referencia inerciales. Ahora bien, el problema es el siguiente. Suponga que observamos una colisión en un sistema inercial S de coordenadas y determinamos que el momento lineal se conserva. A continuación aplicamos la transformación de Lorentz para obtener las velocidades en un segundo sistema inercial S'. Veremos que si se aplica la definición newtoniana del momento lineal ($\vec{p} = m\vec{v}$), ¡el momento lineal *no* se conserva en el segundo sistema! Si estamos convencidos de que el principio de relatividad y la transformación de Lorentz son correctos, la única forma de salvaguardar la conservación del momento lineal es generalizar la *definición* de momento lineal.

No deduciremos la generalización relativista correcta del momento lineal, pero el resultado es el siguiente. Suponga que la masa medida de una partícula es m cuando está en reposo con respecto a nosotros: a menudo llamamos a m **masa en reposo**. Usaremos el término *partícula material* para una partícula que tiene una masa en reposo diferente de cero. Cuando una de estas partículas tiene una velocidad $\vec{v}$, su **momento lineal relativista** $\vec{p}$ es

$$\vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \qquad \text{(momento lineal relativista)} \qquad (37.27)$$

37.20 Gráfica de la magnitud del momento lineal de una partícula de masa en reposo m en función de la rapidez v. También se muestra la predicción newtoniana, que da resultados correctos solo cuando la rapidez es mucho menor que c.



Cuando la rapidez v de la partícula es mucho menor que c, esto es aproximadamente igual a la expresión newtoniana $\vec{p} = m\vec{v}$; sin embargo, en general, la magnitud del momento lineal es mayor que mv (figura 37.20). De hecho, conforme v tiende a c, el momento lineal tiende al infinito.

Relatividad, segunda ley de Newton y masa relativista

¿Cómo es la generalización relativista de la segunda ley de Newton? En la mecánica newtoniana, la forma más general de la segunda ley es

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \tag{37.28}$$

Es decir, la fuerza neta $\vec{F}$ sobre una partícula es igual a la razón de cambio de su momento lineal con respecto al tiempo. Los experimentos muestran que este resultado conserva su validez en la mecánica relativista, siempre y cuando se utilice el momento lineal relativista dado por la ecuación (37.27). Es decir, la generalización correcta relativista de la segunda ley de Newton es

$$\vec{F} = \frac{d}{dt}\frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \tag{37.29}$$

Puesto que el momento lineal ya no es directamente proporcional a la velocidad, la razón de cambio del momento lineal ha dejado de ser directamente proporcional a la aceleración. En consecuencia, *una fuerza constante no produce una aceleración constante.* Por ejemplo, cuando la fuerza neta y la velocidad están dirigidas a lo largo del eje x, la ecuación (37.29) da

$$F = \frac{m}{(1 - v^2/c^2)^{3/2}}a \qquad (\vec{F} \text{ y } \vec{v} \text{ a lo largo de la misma línea}) \tag{37.30}$$

donde a es la aceleración, también a lo largo del eje x. Al despejar la aceleración a de la ecuación (37.30), se obtiene

$$a = \frac{F}{m}\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}$$

Vemos que, a medida que la rapidez de una partícula aumenta, la aceleración provocada por una fuerza dada *disminuye* constantemente. Conforme la rapidez tiende a c, la aceleración tiende a cero, sin importar cuán intensa sea la fuerza que se aplica. Por lo tanto, es imposible acelerar una partícula con una masa en reposo diferente de cero a una rapidez igual o mayor que c. De nuevo, vemos que la rapidez de la luz en el vacío representa un último límite de rapidez.

Algunas veces se interpreta la ecuación (37.27) del momento lineal relativista en el sentido de que una partícula que se desplaza rápidamente experimenta un aumento de masa. Si la masa a velocidad nula (la masa en reposo) se denota con m, entonces la "masa relativista" m_{rel} es

$$m_{\text{rel}} = \frac{m}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

De hecho, cuando se considera el movimiento de un sistema de partículas (como las moléculas con movimiento rápido de un gas ideal en un recipiente inmóvil), la masa total en reposo del sistema es la suma de las masas relativistas de las partículas, no la suma de sus masas en reposo.

Sin embargo, si se aplica a ciegas, el concepto de masa relativista presenta dificultades. Como indica la ecuación (37.29), la generalización relativista de la segunda ley de Newton *no* es $\vec{F} = m_{\text{rel}}\vec{a}$, y en la sección 37.8 demostraremos que la energía cinética relativista de una partícula *no* es $K = \frac{1}{2} m_{\text{rel}}v^2$. El uso de la masa relativista tiene partidarios y detractores, algunos de ellos muy enérgicos en sus opiniones. En la mayoría de los casos tendremos que tratar con partículas individuales, por lo que haremos a un lado la controversia y usaremos la ecuación (37.27) como la definición generalizada del momento lineal con m como una constante de cada partícula, independientemente de su estado de movimiento.

Utilizaremos la abreviatura

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

Usamos esta abreviatura en la sección 37.3 con u en lugar de v, la rapidez relativa de dos sistemas de coordenadas. Aquí, v es la rapidez de una partícula en un sistema de coordenadas determinado, es decir, la rapidez del *marco en reposo* de la partícula con respecto a ese sistema. En términos de γ, las ecuaciones (37.27) y (37.30) se transforman en

$$\vec{p} = \gamma m \vec{v} \qquad \text{(momento lineal relativista)} \qquad (37.31)$$

$$F = \gamma^3 ma \qquad (\vec{F} \text{ y } \vec{v} \text{ a lo largo de la misma línea}) \qquad (37.32)$$

En los aceleradores lineales (que se utilizan tanto en medicina como en física nuclear y de partículas elementales; véase la figura 37.11), la fuerza neta $\vec{F}$ y la velocidad $\vec{v}$ de la partícula acelerada están dirigidas a lo largo de la misma recta. Pero durante la mayor parte de la trayectoria en casi todos los aceleradores *circulares*, la partícula tiene un movimiento circular uniforme con rapidez constante v. En este caso, la fuerza total y la velocidad son perpendiculares; por lo tanto, la fuerza no puede realizar trabajo sobre la partícula, y la energía cinética y la rapidez permanecen constantes. En consecuencia, el denominador de la ecuación (37.29) es constante, y se obtiene lo siguiente:

$$F = \frac{m}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}} a = \gamma ma \qquad (\vec{F} \text{ y } \vec{v} \text{ perpendiculares}) \qquad (37.33)$$

Recuerde de la sección 3.4 que si la partícula se mueve en círculo, la fuerza neta y la aceleración están dirigidas hacia adentro a lo largo del radio r, y $a = v^2/r$, que es una aceleración radial.

¿Qué ocurre en el caso general en el que $\vec{F}$ y $\vec{v}$ no están a lo largo de una misma recta ni tampoco son perpendiculares? En tal caso, podemos descomponer la fuerza total $\vec{F}$ en cualquier instante en sus componentes paralela y perpendicular a $\vec{v}$. La aceleración resultante tendrá componentes correspondientes obtenidas con las ecuaciones (37.32) y (37.33). Puesto que los factores γ^3 y γ son diferentes, las componentes de la aceleración no serán proporcionales a las componentes de la fuerza neta. Es decir, *a menos que la fuerza neta sobre una partícula relativista esté a lo largo de la misma recta que la velocidad de la partícula, o bien, sea perpendicular a ella, los vectores de fuerza total y de aceleración no son paralelos.*

Ejemplo 37.9 Dinámica relativista de un electrón



Un electrón (masa en reposo $= 9.11 \times 10^{-31}$ kg; carga $= -1.60 \times 10^{-19}$ C) se desplaza en sentido opuesto a un campo eléctrico de magnitud $E = 5.00 \times 10^5$ N/C. Todas las demás fuerzas son insignificantes en comparación con la fuerza del campo eléctrico. *a*) Calcule la magnitud del momento lineal y de la aceleración en los instantes en que $v = 0.010c$, $0.90c$ y $0.99c$. *b*) Determine las aceleraciones correspondientes si una fuerza de la misma magnitud es perpendicular a la velocidad.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Además de las expresiones de esta sección referentes al momento lineal y la aceleración relativistas, necesitamos la relación entre fuerza eléctrica y campo eléctrico del capítulo 21. En el inciso *a*) se aplica la ecuación (37.31) para determinar la magnitud del momento lineal; la fuerza actúa a lo largo de la misma línea que la velocidad, por lo que se usa la ecuación (37.32) para calcular la magnitud de la aceleración. En el inciso *b*) la fuerza es perpendicular a la velocidad; por lo tanto, se aplica la ecuación (37.33) en lugar de la (37.32).

EJECUTAR: *a*) Para $v = 0.010c$, $0.90c$ y $0.99c$ tenemos que $\gamma = \sqrt{1 - v^2/c^2} = 1.00$, 2.29 y 7.09 respectivamente. Los valores de la magnitud del momento lineal $p = \gamma mv$ son

$$\begin{aligned} p_1 &= (1.00)(9.11 \times 10^{-31}\,\text{kg})(0.010)(3.00 \times 10^8\,\text{m/s}) \\ &= 2.7 \times 10^{-24}\,\text{kg}\cdot\text{m/s en } v_1 = 0.010c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_2 &= (2.29)(9.11 \times 10^{-31}\,\text{kg})(0.90)(3.00 \times 10^8\,\text{m/s}) \\ &= 5.6 \times 10^{-22}\,\text{kg}\cdot\text{m/s en } v_2 = 0.90c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_3 &= (7.09)(9.11 \times 10^{-31}\,\text{kg})(0.99)(3.00 \times 10^8\,\text{m/s}) \\ &= 1.9 \times 10^{-21}\,\text{kg}\cdot\text{m/s en } v_3 = 0.99c \end{aligned}$$

Según la ecuación (21.4), la magnitud de la fuerza sobre el electrón es

$$\begin{aligned} F = |q|E &= (1.60 \times 10^{-19}\,\text{C})(5.00 \times 10^5\,\text{N/C}) \\ &= 8.00 \times 10^{-14}\,\text{N} \end{aligned}$$

Continúa

Según la ecuación (37.32), $a = F/\gamma^3 m$. Cuando $v = 0.010c$ y $\gamma = 1.00$,

$$a_1 = \frac{8.00 \times 10^{-14}\ \text{N}}{(1.00)^3(9.11 \times 10^{-31}\ \text{kg})} = 8.8 \times 10^{16}\ \text{m/s}^2$$

Las aceleraciones en los dos valores más altos de rapidez son más pequeñas que el valor no relativista por factores de $\gamma^3 = 12.0$ y 356, respectivamente:

$$a_2 = 7.3 \times 10^{15}\ \text{m/s}^2 \qquad a_3 = 2.5 \times 10^{14}\ \text{m/s}^2$$

b) De acuerdo con la ecuación (37.33), $a = F/\gamma m$ si $\vec{F}$ y $\vec{v}$ son perpendiculares. Cuando $v = 0.010c$ y $\gamma = 1.00$,

$$a_1 = \frac{8.00 \times 10^{-14}\ \text{N}}{(1.00)(9.11 \times 10^{-31}\ \text{kg})} = 8.8 \times 10^{16}\ \text{m/s}^2$$

Ahora las aceleraciones a los dos valores más altos de rapidez son más pequeñas por un factor de $\gamma = 2.29$ y 7.09, respectivamente:

$$a_2 = 3.8 \times 10^{16}\ \text{m/s}^2 \qquad a_3 = 1.2 \times 10^{16}\ \text{m/s}^2$$

Estas aceleraciones son mayores que las correspondientes del inciso *a*) por factores de γ^2.

EVALUAR: Nuestros resultados del inciso *a*) indican que, cuando la rapidez es mayor, los valores relativistas del momento lineal difieren cada vez más con respecto a los valores no relativistas calculados con base en $p = mv$. Observe que el momento lineal a $0.99c$ es más de tres veces mayor que a $0.90c$ por el aumento del factor γ. Nuestros resultados también indican que la aceleración declina con gran rapidez conforme v se aproxima a c.

Evalúe su comprensión de la sección 37.7 De acuerdo con la mecánica relativista, cuando se duplica la rapidez de una partícula, la magnitud de su momento lineal aumenta en **i.** un factor de 2; **ii.** un factor mayor de 2; **iii.** un factor entre 1 y 2 que depende de la masa de la partícula.

37.8 Trabajo y energía relativistas

Cuando formulamos la relación entre trabajo y energía cinética en el capítulo 6 (vol 1), aplicamos las leyes de Newton del movimiento. Para generalizar estas leyes conforme al principio de relatividad, necesitamos una generalización correspondiente de la ecuación de la energía cinética.

Energía cinética relativista

Aplicamos el teorema de trabajo y energía, comenzando por la definición de trabajo. Cuando la fuerza neta y el desplazamiento tienen la misma dirección, el trabajo efectuado por esa fuerza es $W = \int F\,dx$. Luego sustituimos la expresión de F de la ecuación (37.30), la versión relativista aplicable de la segunda ley de Newton. Al desplazar una partícula de masa m en reposo del punto x_1 al punto x_2,

$$W = \int_{x_1}^{x_2} F\,dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{ma\,dx}{(1 - v^2/c^2)^{3/2}} \tag{37.34}$$

Para deducir la expresión generalizada de la energía cinética K en función de la rapidez v, sería conveniente convertir esta en una integral con respecto a v. Para hacer esto, recuerde que la energía cinética de una partícula es igual al trabajo total realizado sobre ella al llevarla del reposo a la rapidez v: $K = W$. Por lo tanto, fijamos la rapidez igual a cero en el punto x_1 y v en el punto x_2. Para no confundir la variable de integración con la rapidez final, cambiamos v por v_x en la ecuación (37.34). Es decir, v_x es la componente x variable de la velocidad de la partícula cuando la fuerza neta la acelera del reposo a una rapidez v. Asimismo, entendemos que dx y dv_x son los cambios infinitesimales de x y v_x, respectivamente, en el intervalo de tiempo dt. Puesto que $v_x = dx/dt$ y $a = dv_x/dt$, podemos rescribir $a\,dx$ de la ecuación (37.34) como

$$a\,dx = \frac{dv_x}{dt}dx = dx\frac{dv_x}{dt} = \frac{dx}{dt}dv_x = v_x dv_x$$

Al hacer estas sustituciones obtenemos lo siguiente:

$$K = W = \int_0^v \frac{mv_x dv_x}{(1 - v_x^2/c^2)^{3/2}} \tag{37.35}$$

Podemos evaluar esta integral mediante un simple cambio de variable; el resultado final es

$$K = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - mc^2 = (\gamma - 1)mc^2 \qquad \text{(energía cinética relativista)} \tag{37.36}$$

Conforme v tiende a c, la energía cinética tiende al infinito. Si la ecuación (37.36) es correcta, también debe tender a la expresión newtoniana $K = \frac{1}{2}mv^2$ cuando v es mucho más pequeña que c (figura 37.21). Para verificar esto, desarrollamos el radical mediante el teorema del binomio en la forma

$$(1 + x)^n = 1 + nx + n(n-1)x^2/2 + \cdots$$

En nuestro caso, $n = -\frac{1}{2}$ y $x = -v^2/c^2$, y obtenemos

$$\gamma = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} = 1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} + \frac{3}{8}\frac{v^4}{c^4} + \cdots$$

Combinando esto con $K = (\gamma - 1)mc^2$, encontramos que

$$K = \left(1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} + \frac{3}{8}\frac{v^4}{c^4} + \cdots - 1\right)mc^2$$

$$= \frac{1}{2}mv^2 + \frac{3}{8}\frac{mv^4}{c^2} + \cdots \qquad (37.37)$$

Cuando v es mucho menor que c, todos los términos de la serie en la ecuación (37.37), salvo el primero, son insignificantemente pequeños, y obtenemos la expresión newtoniana $\frac{1}{2}mv^2$.

37.21 Gráfica de la energía cinética de una partícula de masa en reposo m en función de la rapidez v. También se muestra la predicción newtoniana, que da resultados correctos solo cuando la rapidez es mucho menor que c.

La energía cinética relativista tiende al infinito conforme v se aproxima a c.

¡SUCEDE!

NO SUCEDE

K, $\frac{1}{2}mc^2$, O, c, v

La mecánica newtoniana predice, incorrectamente, que la energía cinética tiende a infinito solo v se aproxima a infinito.

Energía en reposo y $E = mc^2$

La ecuación (37.36) de la energía cinética de una partícula en movimiento incluye un término $mc^2/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ que depende del movimiento y un segundo término de energía mc^2 que es independiente del movimiento. Al parecer, la energía cinética de una partícula es la diferencia entre cierta **energía total** E y una energía mc^2 que tiene incluso cuando está en reposo. Por consiguiente, podemos reformular la ecuación (37.36) como

$$E = K + mc^2 = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \gamma mc^2 \qquad \text{(energía total de una partícula)} \qquad (37.38)$$

En el caso de una partícula en reposo ($K = 0$), vemos que $E = mc^2$. La energía mc^2 asociada con la masa en reposo m, y no con el movimiento, se conoce como la **energía en reposo** de la partícula.

De hecho, tenemos pruebas experimentales directas de que la energía en reposo existe realmente. El ejemplo más sencillo es la desintegración de un *pión* neutro. Se trata de una partícula subatómica inestable de masa en reposo m_π; cuando se desintegra, desaparece y en su lugar aparece radiación electromagnética. Si un pión neutro no tiene energía cinética antes de desintegrarse, la energía total de la radiación una vez que se ha desintegrado resulta ser igual a exactamente $m_\pi c^2$. En muchas otras transformaciones de partículas fundamentales, cambia la suma de las masas en reposo de las partículas. En todos los casos hay un cambio energético correspondiente, el cual concuerda con la supuesta energía en reposo mc^2 asociada con una masa en reposo m.

Históricamente, los principios de conservación de la masa y de la energía se descubrieron de modo muy independiente. La teoría de la relatividad muestra que se trata en realidad de dos casos especiales de un solo principio de conservación más amplio, el *principio de conservación de la masa y la energía*. En ciertos fenómenos físicos, ni la suma de las masas en reposo de las partículas ni la energía total distinta de la energía en reposo se conservan por separado, sino que hay un principio de conservación más general: en un sistema aislado, cuando la suma de las masas en reposo cambia, siempre hay un cambio equivalente a $1/c^2$ veces la energía total distinta de la energía en reposo. Este cambio es de la misma magnitud que el cambio de la suma de las masas en reposo, pero de signo opuesto.

Esta ley más general de conservación de la masa y la energía es el principio fundamental en el que se basa la generación de energía por medio de reacciones nucleares. Cuando un núcleo de uranio experimenta una fisión en un reactor nuclear, la suma de las masas en reposo de los fragmentos resultantes es *menor que* la masa en reposo del núcleo original. Se libera una cantidad de energía equivalente al producto de la disminución de masa por c^2. La mayor parte de esta energía se puede utilizar para producir vapor de agua y con él mover turbinas para generar energía eléctrica.

Aplicación Seguimiento de la conversión masa-energía

Si bien el cuarto de control de una planta de energía nuclear es muy complejo, el principio físico con el que opera es sencillo: parte de la energía en reposo de los núcleos atómicos se convierte en energía térmica, que a su vez se usa para generar vapor e impulsar los generadores eléctricos.



También podemos relacionar directamente la energía total E de una partícula (energía cinética más energía en reposo) con su momento lineal combinando la ecuación (37.27) del momento lineal relativista y la ecuación (37.38) de la energía total para eliminar la velocidad de la partícula. El procedimiento más sencillo consiste en reformular estas ecuaciones como sigue:

$$\left(\frac{E}{mc^2}\right)^2 = \frac{1}{1 - v^2/c^2} \quad \text{y} \quad \left(\frac{p}{mc}\right)^2 = \frac{v^2/c^2}{1 - v^2/c^2}$$

Restando la segunda de estas de la primera y reorganizando términos vemos que

$$E^2 = (mc^2)^2 + (pc)^2 \quad \text{(energía total, energía en reposo y momento lineal)} \quad (37.39)$$

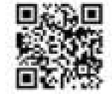
Vemos nuevamente que, para una partícula en reposo ($p = 0$), $E = mc^2$.

La ecuación (37.39) también sugiere que una partícula puede tener energía y momento lineal incluso cuando carece de masa en reposo. En tal caso, $m = 0$ y

$$E = pc \quad \text{(cero masa en reposo)} \quad (37.40)$$

De hecho, existen partículas con masa en reposo nula. Estas partículas siempre viajan a la rapidez de la luz en el vacío. Un ejemplo es el *fotón*, el cuanto de radiación electromagnética (que se explicará en el capítulo 38). Los fotones son emitidos y absorbidos durante cambios de estado de un sistema atómico o nuclear, cuando la energía y el momento lineal del sistema cambian.

Ejemplo 37.10 Electrones con energía



a) Determine la energía en reposo de un electrón ($m = 9.109 \times 10^{-31}$ kg, $q = -e = -1.602 \times 10^{-19}$ C) en joules y en electrón volts. *b*) Calcule la rapidez de un electrón que ha sido acelerado por un campo eléctrico, a partir del reposo, a través de un aumento de potencial de 20.0 kV o de 5.00 MV (típico de una máquina de rayos x de alto voltaje).

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Este problema se basa en las ideas de la energía en reposo, la energía cinética relativista y la energía potencial eléctrica (del capítulo 23). Se utiliza la relación $E = mc^2$ para determinar la energía en reposo, y las ecuaciones (37.7) y (37.38) para calcular la rapidez que da la energía total calculada.

EJECUTAR: *a*) La energía en reposo es

$$mc^2 = (9.109 \times 10^{-31}\ \text{kg})(2.998 \times 10^8\ \text{m/s})^2 = 8.187 \times 10^{-14}\ \text{J}$$

De acuerdo con la definición del electrón volt de la sección 23.2, $1\ \text{eV} = 1.602 \times 10^{-19}$ J. Con base en esto se encuentra que

$$mc^2 = (8.187 \times 10^{-14}\ \text{J})\frac{1\ \text{eV}}{1.602 \times 10^{-19}\ \text{J}} = 5.11 \times 10^5\ \text{eV} = 0.511\ \text{MeV}$$

b) En cálculos como este, suele ser conveniente trabajar con la cantidad $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ de la ecuación (37.38). Despejando v, obtenemos:

$$v = c\sqrt{1 - (1/\gamma)^2}$$

La energía total E del electrón acelerado es la suma de su energía en reposo mc^2 y la energía cinética eV_{ba} que gana, en virtud del trabajo realizado sobre él por el campo eléctrico al desplazarlo del punto a al punto b:

$$E = \gamma mc^2 = mc^2 + eV_{ba} \quad \text{o bien,}$$
$$\gamma = 1 + \frac{eV_{ba}}{mc^2}$$

Un electrón acelerado por un aumento de potencial $V_{ba} = 20.0$ kV gana una cantidad de energía de 20.0 keV; así, para este electrón tenemos que

$$\gamma = 1 + \frac{20.0 \times 10^3\ \text{eV}}{0.511 \times 10^6\ \text{eV}} = 1.039$$

y

$$v = c\sqrt{1 - (1/1.039)^2} = 0.272c = 8.15 \times 10^7\ \text{m/s}$$

Al repetir el cálculo con $V_{ba} = 5.00$ MV, encontramos que $eV_{ba}/mc^2 = 9.78$, $\gamma = 10.78$ y $v = 0.996c$.

EVALUAR: Con $V_{ba} = 20.0$ kV, la energía cinética adicional de 20.0 keV es menos del 4% de la energía en reposo de 0.511 MeV, y la rapidez final es aproximadamente una cuarta parte de la rapidez de la luz. Con $V_{ba} = 5.00$ MV, la energía cinética adicional de 5.00 MeV es mucho mayor que la energía en reposo, y la rapidez se aproxima a c.

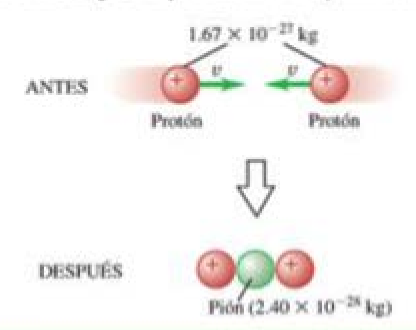
CUIDADO **Tres energías del electrón** Todos los electrones tienen una energía *en reposo* de 0.511 MeV. Un electrón acelerado del reposo a través de un aumento de potencial de 5.00 MeV tenía una energía *cinética* de 5.00 MeV (a un electrón como este le llamamos "electrón de 5.00 MeV") y una energía *total* de 5.51 MeV. Tenga cuidado de no confundir estas energías.



Ejemplo 37.11 Colisión relativista

Dos protones (cada uno con masa $M_p = 1.67 \times 10^{-27}$ kg) se desplazan inicialmente con la misma rapidez en sentidos opuestos, y siguen existiendo después de un choque frontal que produce un pión neutro de masa $M_\pi = 2.40 \times 10^{-28}$ kg (figura 37.22). Si las tres partículas están en reposo después de la colisión, determine la rapidez inicial de los protones. La energía se conserva durante el choque.

37.22 En este choque, la energía cinética de los dos protones se transforma en la energía en reposo de una nueva partícula, un pión.



SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: La energía total relativista se conserva en el choque. Por lo tanto, podemos igualar la energía total (desconocida) de los dos protones antes del choque con la energía en reposo combinada de los dos protones y el pión después de la colisión. Luego usamos la ecuación (37.38) para determinar la rapidez de cada protón.

EJECUTAR: La energía total de cada protón antes del choque es γMc^2. Pero por la conservación de la energía,

$$2(\gamma M_p c^2) = 2(M_p c^2) + M_\pi c^2$$

$$\gamma = 1 + \frac{M_\pi}{2M_p} = 1 + \frac{2.40 \times 10^{-28}\ \text{kg}}{2(1.67 \times 10^{-27}\ \text{kg})} = 1.072$$

Según la ecuación (37.38), la rapidez inicial del protón es

$$v = c\sqrt{1 - (1/\gamma)^2} = 0.360c$$

EVALUAR: La energía en reposo de un protón es de 938 MeV; por lo tanto, la energía cinética de cada protón es $(\gamma - 1)Mc^2 = 0.072Mc^2 = (0.072)(938\ \text{MeV}) = 67.5$ MeV. Usted puede verificar que la energía en reposo $M_\pi c^2$ del pión es el doble de esta cantidad, esto es, 135 MeV. Toda la energía cinética "perdida" en esta colisión totalmente inelástica se transforma en la energía en reposo del pión.

Evalúe su comprensión de la sección 37.8 Se acelera un protón a partir del reposo mediante una fuerza constante que siempre apunta en la dirección del movimiento de la partícula. En comparación con la cantidad de energía cinética que gana el protón durante el primer metro de su trayecto, ¿cuánta energía cinética gana el protón durante un metro de trayecto mientras se desplaza al 99% de la rapidez de la luz? **i.** La misma cantidad; **ii.** una mayor cantidad; **iii.** una menor cantidad.

37.9 Mecánica newtoniana y relatividad

Los cambios radicales que exige el principio de relatividad llegan hasta las raíces mismas de la mecánica newtoniana, incluyendo los conceptos de longitud y tiempo, las ecuaciones del movimiento y los principios de conservación. Así pues, podría pensarse que hemos destruido los cimientos sobre los que se funda la mecánica newtoniana. En cierto sentido esto es verdad; no obstante, la formulación newtoniana sigue siendo exacta siempre que la rapidez sea pequeña en comparación con la rapidez de la luz en el vacío. En tales casos, la dilatación del tiempo, la contracción de la longitud y las modificaciones de las leyes del movimiento son tan minúsculas que resulta imposible observarlas. De hecho, cada uno de los principios de la mecánica newtoniana sobrevive como un caso especial de la formulación relativista, de carácter más general.

Las leyes de la mecánica newtoniana no son *erróneas*; están *incompletas*. Son un caso límite de la mecánica relativista. Son *aproximadamente* correctas cuando la rapidez es pequeña en comparación con c, y se consideran exactamente correctas en el límite cuando toda rapidez tiende a cero. Así, vemos que la relatividad no destruye totalmente las leyes de la mecánica newtoniana, sino que las *generaliza*. Esto es un patrón común en el desarrollo de la teoría física. Siempre que una teoría nueva entra en conflicto parcial con una teoría establecida con anterioridad, la nueva teoría debe hacer las mismas predicciones que la antigua en los campos donde esta última se encuentra respaldada por pruebas experimentales. Toda teoría física nueva debe pasar con éxito esta prueba, conocida como el **principio de correspondencia**.

Teoría general de la relatividad

En este momento podríamos preguntar si la teoría especial de la relatividad es la última palabra en materia de mecánica, o si son posibles o necesarias generalizaciones

adicionales. Por ejemplo, los marcos inerciales han ocupado una posición privilegiada en nuestro análisis. ¿Es posible ampliar el principio de relatividad para incluir también los marcos no inerciales?

He aquí un ejemplo que ilustra algunas de las implicaciones de esta pregunta. Una estudiante decide lanzarse por las cataratas del Niágara encerrada en una gran caja de madera. Durante su caída libre, la estudiante no cae al piso porque tanto ella como la caja están en caída libre con una aceleración hacia abajo de 9.8 m/s^2. Pero otra interpretación, desde el punto de vista de la estudiante, es que no cae al piso porque su interacción gravitacional con la Tierra se ha suspendido de repente. Mientras permanezca en la caja y en caída libre, la estudiante no puede saber si efectivamente se halla en caída libre o si la interacción gravitacional ha desaparecido.

Un problema semejante se presenta en una estación espacial en órbita alrededor de la Tierra. Los objetos que se encuentran en la estación espacial *parecen* ingrávidos, pero sin mirar hacia afuera de la estación, no hay forma de saber si la gravedad se ha desactivado o si la estación y todo su contenido se están acelerando hacia el centro de la Tierra. La figura 37.23 ilustra un argumento análogo con respecto a una nave espacial que no se encuentra en caída libre, pero que pudiera estar acelerándose con respecto a un marco inercial o encontrarse en reposo en la superficie terrestre.

37.23 Sin información del exterior de la nave, el astronauta es incapaz de distinguir la situación *b*) de la situación *c*).

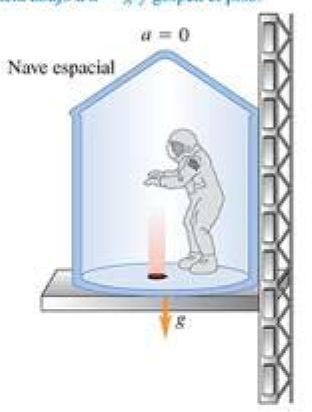
a) Un astronauta deja caer su reloj en la nave espacial.



b) En el espacio sin gravedad, el piso se acelera hacia arriba a $a = g$ y golpea el reloj.



c) En la superficie terrestre, el reloj se acelera hacia abajo a $a = g$ y golpea el piso.

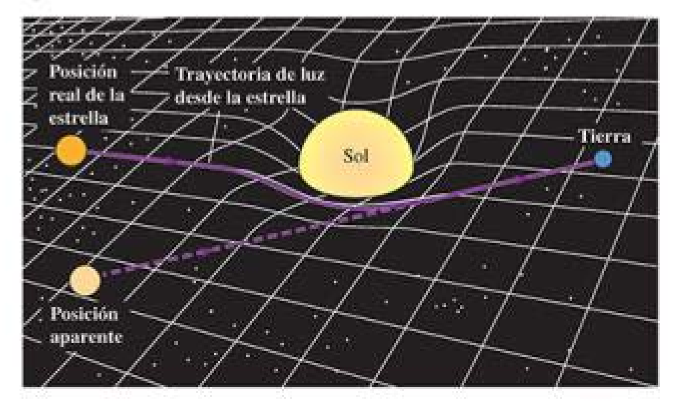


Estas observaciones constituyen la base de la **teoría general de la relatividad** de Einstein. Si no podemos distinguir experimentalmente entre un campo gravitacional uniforme en un lugar en particular y un marco de referencia uniformemente acelerado, entonces no puede haber una distinción real entre los dos. Prosiguiendo con este concepto, podemos tratar de representar *cualquier* campo gravitacional en términos de características especiales del sistema de coordenadas. Resulta que esto exige revisiones aún más radicales de nuestros conceptos de espacio y tiempo que la teoría especial de la relatividad. En la teoría general de la relatividad, las propiedades geométricas del espacio se ven afectadas por la presencia de materia (figura 37.24).

La teoría general de la relatividad ha pasado con éxito varias pruebas experimentales, entre ellas tres que propuso el mismo Einstein. Una prueba tiene que ver con la comprensión de la rotación de los ejes de la órbita elíptica del planeta Mercurio, conocida como *precesión del perihelio.* (El perihelio es el punto de máxima aproximación al Sol). Una segunda prueba se refiere a la aparente flexión de los rayos luminosos procedentes de estrellas distantes cuando pasan cerca del Sol. La tercera prueba es el *desplazamiento gravitacional al rojo*, el aumento de longitud de onda de la luz que se emite desde una fuente masiva. Es difícil probar ciertos detalles de la teoría general, pero esta teoría ha desempeñado un papel fundamental en las investigaciones de la formación y evolución de las estrellas, los agujeros negros y la evolución del Universo.

La teoría general de la relatividad tal vez parezca una parte excéntrica del conocimiento, con escasa aplicación práctica. De hecho, esta teoría desempeña un papel

37.24 Representación bidimensional de un espacio curvo. Imagine el espacio (un plano) distorsionado, como se muestra, por un objeto masivo (el Sol). La luz de una estrella distante (línea continua) sigue la superficie distorsionada en su camino a la Tierra. La línea punteada muestra la dirección desde la cual la luz *parece* venir. El efecto está exagerado considerablemente; para el Sol, la desviación máxima es de solo 0.00048°.



esencial en el sistema de posicionamiento global (GPS, por las siglas de *global positioning system*), que hace posible determinar la posición de un objeto en la superficie terrestre con un margen de unos cuantos metros utilizando un receptor manual (figura 37.25). El meollo del sistema GPS es un conjunto de más de una docena de satélites que siguen órbitas muy precisas. Cada satélite emite señales de radio cronometradas con sumo cuidado, y un receptor GPS detecta simultáneamente las señales provenientes de varios satélites. El receptor calcula entonces la diferencia de tiempo entre el momento en que se emitió la señal y el momento en que esta se recibió, y utiliza esa información para calcular la posición del receptor. Para asegurar el cronometraje adecuado de las señales, es necesario incluir correcciones gracias a la teoría especial de la relatividad (porque los satélites se desplazan en relación con el receptor en Tierra), así como a la teoría general (porque los satélites están más elevados con respecto al campo gravitacional de la Tierra que el receptor). Las correcciones debidas a la relatividad son pequeñas, menores que una parte en 10^9, pero son cruciales para la gran precisión del sistema GPS.

37.25 Un receptor GPS utiliza señales de radio provenientes de satélites GPS en órbita para determinar su posición. Para tomar en cuenta los efectos de la relatividad, el receptor debe sintonizar una frecuencia ligeramente más alta (10.23 MHz) que la frecuencia emitida por los satélites (10.22999999543 MHz).



CAPÍTULO 37 RESUMEN



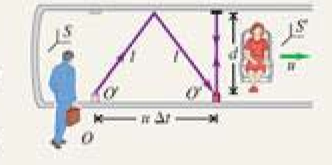
Invariabilidad de las leyes físicas, simultaneidad: Todas las leyes fundamentales de la física tienen la misma forma en todos los marcos de referencia inerciales. La rapidez de la luz en el vacío es la misma en todos los marcos inerciales y es independiente del movimiento de la fuente. La simultaneidad no es un concepto absoluto; los sucesos que son simultáneos en un marco de referencia no lo son necesariamente en un segundo marco en movimiento con respecto al primero.



Dilatación del tiempo: Si dos sucesos ocurren en el mismo punto espacial en un marco de referencia particular, el intervalo de tiempo Δt_0 entre los sucesos, medido en ese marco, se denomina intervalo de tiempo propio. Si este marco se desplaza con velocidad constante u con respecto a un segundo marco, el intervalo de tiempo Δt entre los sucesos observados en el segundo marco es más largo que Δt_0. (Véase los ejemplos 37.1 a 37.3).

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} = \gamma\, \Delta t_0 \quad (37.6), (37.8)$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \quad (37.7)$$



Contracción de longitud: Si dos puntos están en reposo en un marco de referencia particular, la distancia l_0 entre los puntos medida en ese marco es una longitud propia. Si este marco se desplaza con velocidad constante u con respecto a un segundo marco, y si las distancias se miden paralelamente al movimiento, la distancia l entre los puntos medida en el segundo marco es más corta que l_0. (Véase los ejemplos 37.4 y 37.5).

$$l = l_0\sqrt{1 - u^2/c^2} = \frac{l_0}{\gamma} \quad (37.16)$$



Transformaciones de Lorentz: La transformación de coordenadas de Lorentz relaciona las coordenadas y el tiempo de un suceso en un marco inercial S con las coordenadas y el tiempo del mismo suceso observado en un segundo marco inercial S', que se desplaza con velocidad u con respecto al primero. Para un movimiento unidimensional, las velocidades v_x en S y v'_x, en S' de una partícula están relacionadas por la transformación de velocidades de Lorentz. (Véase los ejemplos 37.6 y 37.7).

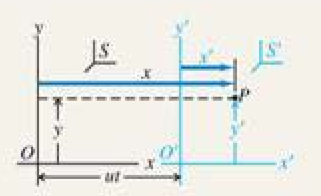
$$x' = \frac{x - ut}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} = \gamma(x - ut)$$

$$y' = y \qquad z' = z \quad (37.21)$$

$$t' = \frac{t - ux/c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} = \gamma(t - ux/c^2)$$

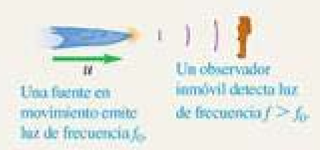
$$v'_x = \frac{v_x - u}{1 - uv_x/c^2} \quad (37.22)$$

$$v_x = \frac{v'_x + u}{1 + uv'_x/c^2} \quad (37.23)$$



El efecto Doppler de las ondas electromagnéticas: El efecto Doppler es el desplazamiento de la frecuencia de la luz proveniente de una fuente, debida al movimiento relativo de la fuente y el observador. Para una fuente que se mueve hacia el observador con rapidez u, la ecuación (37.25) proporciona la frecuencia f recibida en términos de la frecuencia emitida f_0. (Véase el ejemplo 37.8).

$$f = \sqrt{\frac{c + u}{c - u}}\, f_0 \quad (37.25)$$



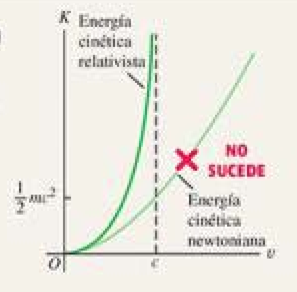
Momento lineal y energía relativistas: Para una partícula de masa en reposo m que se mueve con velocidad $\vec{v}$, el momento lineal relativista $\vec{p}$ está dado por la ecuación (37.27) o (37.31), y la energía cinética relativista K, por la ecuación (37.36). La energía total E es la suma de la energía cinética y la energía en reposo mc^2. La energía total también se puede expresar en términos de la magnitud del momento lineal p y la masa en reposo m. (Véase los ejemplos 37.9 a 37.11).

$$\vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \gamma m\vec{v} \quad (37.27), (37.31)$$

$$K = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - mc^2 = (\gamma - 1)mc^2 \quad (37.36)$$

$$E = K + mc^2 = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \gamma mc^2 \quad (37.38)$$

$$E^2 = (mc^2)^2 + (pc)^2 \quad (37.39)$$





PROBLEMA PRÁCTICO **Colisión de protones**

En un experimento, dos protones son disparados directamente uno hacia el otro. Sus rapideces son tales que en el marco de referencia de cada protón, el otro protón se mueve a 0.500c. *a*) ¿Cuál será la medición que realiza un observador en el laboratorio para la rapidez de cada protón? *b*) ¿Cuál es la energía cinética de cada protón medida por un observador en el laboratorio? *c*) ¿Cuál es la energía cinética de cada protón medida por el otro protón?

GUÍA DE SOLUCIÓN

Véase el área de estudio MasteringPhysics® para consultar una solución con Video Tutor.



IDENTIFICAR y PLANTEAR

1. Este problema usa la transformación de velocidades de Lorentz, la cual permite relacionar la velocidad v_x de un protón en un marco con su velocidad v'_x en un marco diferente. También usa la idea de la energía cinética relativista.
2. Tome la línea de movimiento de los protones como el eje x, y la dirección $+x$ hacia la derecha. En el marco en el cual el protón de la izquierda está en reposo, el protón de la derecha tiene una velocidad de $-0.500c$. En el marco del laboratorio los dos protones tienen velocidades $-\alpha c$ y $+\alpha c$, donde α (la rapidez de cada protón en el laboratorio como una fracción de c) es la primera incógnita. Una vez conocida α, podemos calcular la energía cinética de cada protón en el laboratorio.

EJECUTAR

3. Escriba una ecuación de transformación de velocidades de Lorentz que relacione la velocidad del protón de la derecha en el marco del laboratorio con su velocidad en el marco del protón de la izquierda. Con esta ecuación, calcule α. (*Sugerencia:* Recuerde que α no puede ser mayor que 1. ¿Por qué?).
4. Use el resultado del paso 3 para calcular la energía cinética del laboratorio de cada protón.
5. Calcule la energía cinética del protón de la derecha medida en el marco del protón de la izquierda.

EVALUAR

6. ¿Cuánta energía cinética total deben impartir los científicos a los protones en el laboratorio? Si el experimento se repitiera con un protón estacionario, ¿qué energía cinética tendría que proporcionarse al otro protón para que la colisión sea equivalente?

Problemas

Para tareas asignadas por el profesor, visite www.masteringphysics.com



•, ••, •••: Problemas de dificultad creciente. **PA**: Problemas acumulativos que incorporan material de capítulos anteriores. **CALC**: Problemas que requieren cálculo. **BIO**: Problemas de ciencias biológicas.

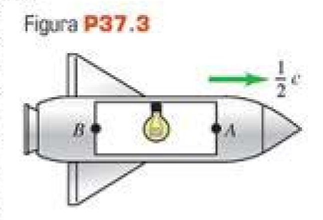
PREGUNTAS PARA ANÁLISIS

P37.1 Usted se encuentra sobre una plataforma de ferrocarril observando el paso de un tren de alta velocidad. Se enciende una luz en el interior de uno de los vagones del tren, y poco después se apaga. *a*) ¿Quién puede medir el intervalo de tiempo propio de la duración de la luz: usted o un pasajero a bordo del tren? *b*) ¿Quién puede medir la longitud propia del vagón: usted o un pasajero a bordo del tren? *c*) ¿Quién puede medir la longitud propia de un letrero fijo en un poste de la plataforma de ferrocarril: usted o un pasajero a bordo del tren? En cada caso, explique su respuesta.

P37.2 Si la simultaneidad no es un concepto absoluto, ¿significa esto que debemos desechar el concepto de causalidad? Para que el suceso A sea la *causa* del suceso B, A debe ocurrir primero. ¿Es posible que en ciertos marcos, A parezca ser la causa de B, y en otros B parezca ser la causa de A? Explique su respuesta.

P37.3 Un cohete se desplaza hacia la derecha a la mitad de la rapidez de la luz en relación con la Tierra. Una bombilla de luz en el centro de una cabina en el interior del cohete se enciende súbitamente. Sea la luz que incide en el extremo anterior de la cabina el suceso A y la luz que incide en el extremo posterior de la cabina el suceso B (figura P37.3). ¿Qué suceso ocurre primero, A o B, o acaso son simultáneos desde el punto de vista de *a*) un astronauta a bordo del cohete y *b*) una persona en reposo en la Tierra?

Figura **P37.3**



P37.4 ¿Qué sería diferente en la vida diaria si la rapidez de la luz fuera de 10 m/s en lugar de 3.00×10^8 m/s?

P37.5 El promedio de vida en Estados Unidos es de alrededor de 70 años. ¿Significa esto que es imposible que una persona promedio viaje a una distancia mayor de 70 años luz de la Tierra? (Un año luz es la distancia que recorre la luz en un año). Explique su respuesta.

P37.6 Usted sostiene una bandeja de forma elíptica. ¿Cómo tendría que moverse usted para que la bandeja pareciera redonda a los ojos de otro observador?

P37.7 Dos sucesos ocurren en el mismo punto espacial en un marco de referencia inercial determinado y son simultáneos en ese marco. ¿Es posible que no sean simultáneos en un marco inercial diferente? Explique su respuesta.

P37.8 Un tren de alta velocidad pasa por la plataforma ferroviaria. Luis es un pasajero del tren, Adán está de pie en la plataforma del tren, y David va en bicicleta hacia la plataforma en el mismo sentido que viaja el tren. Compare la longitud de un vagón del tren medida por Luis, Adán y David.

P37.9 La teoría de la relatividad fija un límite superior a la rapidez que una partícula puede tener. ¿Existen límites a la energía y al momento lineal de una partícula? Explique su respuesta.

P37.10 Un estudiante afirma que una partícula material siempre debe tener una rapidez menor que la de la luz, en tanto que una partícula sin masa siempre debe desplazarse exactamente a la misma rapidez de la luz. ¿Es esto correcto? Si es así, ¿cómo es que las partículas sin masa, como los fotones y los neutrinos, adquieren esa rapidez? ¿Pueden partir del reposo y acelerarse? Explique su respuesta.

P37.11 La rapidez de la luz con respecto al agua inmóvil es de 2.25×10^8 m/s. Si el agua fluye cerca de nosotros, la rapidez de la luz que medimos depende de la rapidez del agua. ¿Violan estos hechos el segundo postulado de Einstein? Explique su respuesta.

P37.12 Cuando una fuente de luz monocromática se desplaza hacia un observador, su longitud de onda parece ser más corta que el valor medido cuando la fuente está en reposo. ¿Contradice esto la hipótesis de que la rapidez de la luz es la misma para todos los observadores? Explique su respuesta.

P37.13 En principio, ¿tiene más masa un gas caliente que el mismo gas cuando está frío? Explique su respuesta. En la práctica, ¿sería mensurable este efecto? Explique su respuesta.

P37.14 En su opinión, ¿por qué precedió por tantos años la formulación de la mecánica newtoniana a la mecánica relativista, más refinada?

EJERCICIOS

Sección 37.2 Relatividad de la simultaneidad

37.1 • Suponga que los dos relámpagos que se ilustran en la figura 37.5*a* son simultáneos para un observador a bordo del tren. Demuestre que *no* son simultáneos para un observador que está en el suelo. De acuerdo con las mediciones de este último observador, ¿cuál de los relámpagos cae primero?

Sección 37.3 Relatividad de los intervalos de tiempo

37.2 • El muón positivo (μ^+), una partícula inestable, vive en promedio 2.20×10^{-6} s (medidos en su propio marco de referencia) antes de desintegrarse. *a*) Si un muón positivo se desplaza con una rapidez de 0.900*c* con respecto al laboratorio, ¿qué vida media se mide en el laboratorio? *b*) ¿Qué distancia media, medida en el laboratorio, recorre la partícula antes de desintegrarse?

37.3 • ¿A qué rapidez debe viajar un cohete en relación con la Tierra de manera que el tiempo en el cohete "disminuya" a la mitad de su tasa medida por los observadores en Tierra? ¿Los aviones a propulsión actuales se acercan a esa rapidez?

37.4 • Una nave espacial pasa volando cerca de Marte con una rapidez de 0.985*c* con respecto a la superficie del planeta. Cuando la nave está directamente arriba, una señal de luz se enciende y luego se apaga en la superficie marciana. Un observador en Marte mide que la señal de luz estuvo encendida durante 75.0 μs. *a*) ¿El observador en Marte o el piloto de la nave espacial podrán medir el tiempo propio? *b*) ¿Cuál es la duración del pulso luminoso medido por el piloto de la nave espacial?

37.5 • El pión negativo (π^-) es una partícula inestable con una vida media de 2.60×10^{-8} s (medida en el marco en reposo del pión). *a*) Si se hace viajar al pión con gran rapidez con respecto a un laboratorio, su vida media medida en el laboratorio es de 4.20×10^{-7} s. Calcule la rapidez del pión expresada como fracción de *c*. *b*) ¿Qué distancia, medida en el laboratorio, recorre el pión durante su vida media?

37.6 •• Mientras usted conduce su vehículo espacial de servicio con rapidez constante hacia la Luna, un piloto de carreras pasa a su lado en su nave espacial con una rapidez constante de 0.800*c* con respecto a usted. En el instante en que la nave espacial de carreras pasa ante usted, ambos ponen en marcha los cronómetros desde cero. *a*) En el instante en que usted mide que la nave espacial de carreras ha recorrido 1.20×10^8 m luego de pasar al lado de usted, ¿qué tiempo lee el piloto de carreras en su cronómetro? *b*) Cuando el piloto de carreras lee en su cronómetro el valor calculado en el inciso *a*), ¿qué distancia lo separa de usted? *c*) En el instante en que el piloto de carreras lee en su cronómetro el valor calculado en el inciso *a*), ¿qué tiempo lee usted en el suyo?

37.7 •• Una nave espacial se aleja volando de la Tierra con una rapidez de 4.80×10^6 m/s con respecto a la Tierra y luego regresa con la misma rapidez. La nave transporta un reloj atómico que se ha sincronizado cuidadosamente con un reloj idéntico que permanece en reposo en la Tierra. La nave regresa a su punto de partida 365 días (1 año) después, de acuerdo con el reloj que permaneció en la Tierra. ¿Cuál es la diferencia, medida en horas, entre los tiempos transcurridos en los dos relojes? ¿Cuál de los relojes, el que está en la nave o el que permaneció en la Tierra, registra el menor tiempo transcurrido?

37.8 • Una nave espacial extraterrestre vuela en lo alto a gran distancia mientras usted se encuentra en el patio de su casa. Usted ve que su reflector se enciende durante 0.190 s. Según la medición del primer oficial de la nave espacial, el reflector permanece encendido durante 12.0 ms. *a*) ¿Cuál de estos dos tiempos medidos es el tiempo propio? *b*) ¿Cuál es la rapidez de la nave con respecto a la Tierra, expresada como fracción de la rapidez *c* de la luz?

Sección 37.4 Relatividad de la longitud

37.9 • Una nave espacial de la Federación Comercial pasa volando cerca del planeta Fulgurante con una rapidez de 0.600*c*. Un científico que se encuentra en Fulgurante mide la longitud de la nave en movimiento y encuentra que es de 74.0 m. La nave aterriza poco después en Fulgurante, y el mismo científico mide la longitud de la nave ahora inmóvil. ¿Qué valor obtiene?

37.10 • Una regla de madera pasa al lado de usted con gran rapidez. Su movimiento con respecto a usted es paralelo a su eje longitudinal. Si sus mediciones le indican que la longitud de la regla en movimiento es de 1.00 ft (1 ft = 0.3048 m), por ejemplo, comparándola con una regla de 1 ft que se encuentra en reposo con respecto a usted, ¿con qué rapidez se desplaza la regla con respecto a usted?

37.11 •• **¿Por qué somos bombardeados por muones?** Los muones son partículas subatómicas inestables, con una vida media de 2.2 μs, que se desintegran para convertirse en electrones. Se producen cuando los rayos cósmicos bombardean la atmósfera superior aproximadamente a 10 km arriba de la superficie de la Tierra y viajan con una rapidez muy cercana a la de la luz. El problema que nos interesa es por qué vemos algunos de ellos en la superficie terrestre. *a*) ¿Cuál es la distancia máxima que un muón puede viajar durante su vida de 2.2 μs? *b*) De acuerdo con su respuesta en el inciso *a*), parecería que los muones nunca tocan tierra, pero la vida de 2.2 μs se mide en el marco del muón, y los muones viajan muy rápido. A una rapidez de 0.999*c*, ¿cuál es la vida media de un muón medida por un observador en reposo sobre la Tierra? ¿Qué distancia viajaría el muón en ese tiempo? ¿Explica este resultado por qué encontramos muones en los rayos cósmicos? *c*) Desde el punto de vista del muón, su vida sigue siendo de solo 2.2 μs, de manera que ¿cómo logra llegar al suelo? ¿Cuál es el espesor de la atmósfera de 10 km a través del cual debe viajar el muón, medido desde la perspectiva de este último? ¿Queda claro ahora cómo el muón logra llegar a tierra?

37.12 • Un rayo cósmico crea una partícula inestable en las capas altas de la atmósfera y viaja en línea recta hacia la superficie terrestre con una rapidez de 0.99540*c* con respecto a la Tierra. Las mediciones de un científico en reposo en la superficie terrestre le indican que la partícula se creó a una altura de 45.0 km. *a*) Según la medición que realiza el científico, ¿cuánto tiempo tarda la partícula en recorrer los 45.0 km que la separan de la superficie terrestre? *b*) Con base en la fórmula de contracción de la longitud, calcule la distancia del punto donde se creó la partícula a la superficie terrestre medida en el marco de la partícula. *c*) En el marco de la partícula, ¿cuánto tiempo tarda esta en viajar del punto donde se creó a la superficie terrestre? Calcule este tiempo por medio de la fórmula de dilatación del tiempo y también a partir de la distancia calculada en el inciso *b*). ¿Concuerdan los dos resultados?

37.13 • Medida por un observador en la Tierra, una pista terrestre para naves espaciales tiene una longitud de 3600 m. *a*) ¿Cuál es la longitud de la pista medida por el piloto de una nave espacial que pasa volando cerca de ella con una rapidez de 4.00×10^7 m/s con respecto a la Tierra? *b*) Un observador en la Tierra mide el intervalo de tiempo entre el momento en que la nave espacial está directamente arriba de un extremo de la pista y el momento en que está directamente arriba del otro extremo. ¿Qué resultado obtiene? *c*) El piloto de la nave espacial mide el tiempo que le toma viajar de un extremo de la pista al otro. ¿Qué valor obtiene?

37.14 • Una nave espacial pasa volando por la Tierra a 85.0% de la rapidez de la luz. En su interior, un astronauta se somete a un examen físico mientras su cuerpo se encuentra paralelo a la dirección del movimiento de la nave. *a*) Si la altura del astronauta, medida por su médico,

es de 2.00 m, ¿qué altura mediría una persona mirando desde la Tierra? *b*) Si la persona en la Tierra hiciera una medición de 2.00 m, ¿cuál sería la medición que haría el médico en la nave? ¿Esta es una altura razonable? *c*) Suponga que el astronauta del inciso *a*) termina con su examen y pone su cuerpo en dirección perpendicular al movimiento. ¿Cuál sería su altura ahora, medida por el médico en la nave y el observador en la Tierra?

Sección 37.5 Transformaciones de Lorentz

37.15 • Una observadora en el marco S' se aleja hacia la derecha (dirección $+x$) con una rapidez $u = 0.600c$ de una observadora inmóvil en el marco S. La observadora que está en S' mide la rapidez v' de una partícula que se aleja de ella hacia la derecha. Según la medición de la observadora en S, ¿cuál es la rapidez v de la partícula si *a*) $v' = 0.400c$, *b*) $v' = 0.900c$, *c*) $v' = 0.990c$?

37.16 • La piloto espacial Magda pasa velozmente cerca de Sergio con una rapidez constante de $0.800c$ con respecto a él. Magda y Sergio ponen en marcha sendos cronómetros en cero cuando el frente de la nave de Magda está directamente arriba de Sergio. Cuando su cronómetro indica 5.00 s, Magda enciende una luz brillante bajo la parte delantera de su nave. *a*) Use la transformación de coordenadas de Lorentz deducidas en el ejemplo 37.6 para calcular x y t medidos por Sergio con respecto al suceso de encender la luz. *b*) Aplique la fórmula de dilatación del tiempo, ecuación (37.6), para calcular el intervalo de tiempo entre los dos sucesos (el frente de la nave pasando sobre su cabeza y el encendido de la luz) medido por Sergio. Compare con el valor de t calculado en el inciso *a*). *c*) Multiplique el intervalo de tiempo por la rapidez de Magda, ambos medidos por Sergio, para calcular la distancia que ella ha recorrido cuando se enciende la luz, medida por Sergio. Compare con el valor de x calculado en el inciso *a*).

37.17 •• Una nave espacial de caza del planeta Tatuino intenta dar alcance a un crucero de la Federación Comercial. Según las mediciones de un observador que se halla en Tatuino, el crucero se aleja del planeta con una rapidez de $0.600c$. La nave de caza viaja con una rapidez de $0.800c$ con respecto a Tatuino, en la misma dirección que el crucero. *a*) Para que la nave de caza dé alcance al crucero, ¿la rapidez del crucero con respecto a la nave de caza debe ser positiva o negativa? *b*) ¿Cuál es la rapidez del crucero con respecto a la nave de caza?

37.18 • Una nave espacial extraterrestre se aleja de la Tierra después de tener un encuentro desagradable con sus habitantes. Conforme se aleja, la nave espacial dispara un misil hacia la Tierra. Un observador en la Tierra mide que la nave espacial se aleja con una rapidez de $0.600c$. Un observador en la nave espacial mide que el misil se aleja de él a una rapidez de $0.800c$. De acuerdo con la medición de un observador en la Tierra, ¿con qué rapidez se acerca el misil a la Tierra?

37.19 •• Dos partículas creadas en un acelerador de alta energía se desplazan en sentidos opuestos. La rapidez de una de las partículas, medida en el laboratorio, es de $0.650c$, y la rapidez de cada partícula con respecto a la otra es de $0.950c$. ¿Cuál es la rapidez de la segunda partícula, medida en el laboratorio?

37.20 •• Dos partículas en un experimento con un acelerador de alta energía se aproximan de frente una a la otra, cada una con una rapidez de $0.9520c$ medida en el laboratorio. ¿Cuál es la magnitud de la velocidad de una partícula en relación con la otra?

37.21 •• Dos partículas en un experimento con un acelerador de alta energía se aproximan de frente una a la otra con una rapidez relativa de $0.890c$. Ambas partículas viajan con la misma rapidez medida en el laboratorio. ¿Cuál es la rapidez de cada partícula, medida en el laboratorio?

37.22 •• Una nave espacial enemiga se aproxima hacia su nave de guerra (Guerrero Estelar) con una rapidez, medida desde su marco, de $0.400c$. La nave enemiga dispara un proyectil hacia usted con una rapidez de $0.700c$ con respecto a la nave enemiga (figura E37.22). *a*) ¿Cuál es la rapidez del proyectil con respecto a usted? Exprese su respuesta en términos de la rapidez de la luz. *b*) Si sus mediciones le indican que la nave enemiga estaba a 8.00×10^6 km de usted cuando disparó el proyectil, ¿cuánto tiempo, medido en su marco, tardará el proyectil en darle alcance?

Figura **E37.22**



37.23 • Una nave espacial imperial, que se desplaza con gran rapidez con respecto al planeta Arrakis, dispara un cohete hacia el planeta con una rapidez de $0.920c$ con respecto a la nave. Según las mediciones de un observador situado en Arrakis, el cohete se aproxima con una rapidez de $0.360c$. ¿Cuál es la rapidez de la nave con respecto a Arrakis? Indique si la nave espacial se acerca o se aleja de Arrakis.

Sección 37.6 Efecto Doppler en ondas electromagnéticas

37.24 • Con un telescopio ubicado en la Tierra, se observa la radiación electromagnética de una estrella. Esta última se aleja de la Tierra con una rapidez de $0.600c$. Si la radiación tiene una frecuencia de 8.64×10^{14} Hz en el marco en reposo de la estrella, ¿cuál es la frecuencia medida por un observador en la Tierra?

37.25 • **Dígale al juez.** *a*) ¿Con qué rapidez debe usted aproximarse a un semáforo en rojo ($\lambda = 675$ nm) para que este se vea amarillo ($\lambda = 575$ nm)? Exprese su respuesta en términos de la rapidez de la luz. *b*) Si usted utilizara esto como excusa para no recibir una infracción por pasarse un semáforo en rojo, ¿qué multa le impondrían por exceso de velocidad? Suponga que la multa es de un dólar por cada kilómetro por hora en exceso del límite señalado de 90 km/h.

37.26 • Una fuente de radiación electromagnética se mueve en dirección radial con respecto a usted. La frecuencia que usted mide es 1.25 veces la frecuencia medida en el marco en reposo de la fuente. ¿Cuál es la rapidez de la fuente respecto a usted? ¿La fuente se acerca o se aleja de usted?

Sección 37.7 Momento lineal relativista

37.27 • Un protón tiene un momento lineal de magnitud p_0 cuando su rapidez es de $0.400c$. En términos de p_0, ¿cuál es la magnitud del momento lineal del protón cuando su rapidez se duplica a $0.800c$?

37.28 • **¿Cuándo se debe usar la relatividad?** Como hemos visto, los cálculos relativistas a menudo implican la cantidad γ. Cuando γ es apreciablemente mayor que 1, debemos usar las fórmulas relativistas en lugar de las newtonianas. ¿Para qué rapidez v (en términos de c) el valor de γ es *a*) 1.0% mayor que 1; *b*) 10% mayor que 1; *c*) 100% mayor que 1?

37.29 • *a*) ¿A qué rapidez el momento lineal de una partícula es el doble del resultado que se obtiene de la expresión no relativista mv? Exprese su respuesta en términos de la rapidez de la luz. *b*) Se aplica una fuerza a una partícula a lo largo de su dirección de movimiento. ¿A qué rapidez la magnitud de la fuerza necesaria para producir una aceleración dada es el doble de la fuerza que se requiere para producir la misma aceleración cuando la partícula está en reposo? Exprese su respuesta en términos de la rapidez de la luz.

37.30 • De acuerdo con las mediciones en un marco ubicado en la Tierra, un protón se mueve en la dirección $+x$ a una rapidez de 2.30×10^8 m/s. *a*) ¿Qué fuerza (magnitud y dirección) se requiere para producir una aceleración en la dirección $-x$ que tenga una magnitud de 2.30×10^8 m/s^2? *b*) ¿Qué magnitud de aceleración proporciona la fuerza calculada en el inciso *a*) al protón si está inicialmente en reposo?

37.31 • Un electrón es empujado hacia arriba por una fuerza de 5.00×10^{-15} N debida a un campo eléctrico. Calcule la aceleración que esta fuerza produce en cada caso: *a*) La rapidez del electrón es de 1.00 km/s. *b*) La rapidez del electrón es de 2.50×10^8 m/s y la fuerza es paralela a la velocidad.

37.32 • **Béisbol relativista.** Calcule la magnitud de la fuerza que se necesita para impartir a una pelota de béisbol de 0.145 kg una aceleración $a = 1.00$ m/s^2 en la dirección de la velocidad inicial de la pelota cuando la magnitud de esta velocidad es de *a*) 10.0 m/s; *b*) 0.900*c*; *c*) 0.990*c*. *d*) Repita los incisos *a*), *b*) y *c*) con la fuerza y la aceleración perpendiculares a la velocidad.

Sección 37.8 Trabajo y energía relativistas

37.33 •• ¿Cuál es la rapidez de una partícula cuya energía cinética es igual a *a*) su energía en reposo, *b*) cinco veces su energía en reposo?

37.34 • Si un muón viaja a 0.999*c*, ¿cuál es su momento lineal y energía cinética? (La masa de este muón en reposo, en el laboratorio, es 207 veces la masa del electrón).

37.35 • Un protón (masa en reposo = 1.67×10^{-27} kg) tiene una energía total 4.00 veces mayor que su energía en reposo. ¿Cuál es *a*) la energía cinética del protón; *b*) la magnitud del momento lineal del protón; *c*) la rapidez del protón?

37.36 •• *a*) ¿Cuánto trabajo es necesario realizar sobre una partícula de masa *m* para acelerarla *a*) desde el reposo hasta una rapidez de 0.090*c*, y *b*) desde una rapidez de 0.900*c* hasta una de 0.990*c*? (Exprese sus respuestas en términos de mc^2). *c*) Compare las respuestas de los incisos *a*) y *b*).

37.37 • **PA** *a*) ¿En qué porcentaje aumenta su masa en reposo cuando usted sube 30 m hasta el nivel más alto de un edificio de 10 pisos? ¿Está usted consciente de este incremento? Explique su respuesta. *b*) ¿En cuántos gramos cambia la masa de un resorte de 12.0 g con una constante de fuerza de 200 N/cm cuando se comprime 6.0 cm? ¿Aumenta o disminuye la masa? ¿Notaría usted el cambio de masa si estuviera sosteniendo el resorte en sus manos? Explique su respuesta.

37.38 • Una persona de 60.0 kg está de pie y en reposo en el suelo horizontal. ¿Con qué rapidez tendría que correr para *a*) duplicar su energía total, *b*) aumentar su energía total en un factor de 10?

37.39 • **Un reactor antimateria.** Cuando una partícula se encuentra con su antipartícula, ambas se aniquilan y su masa se convierte en energía lumínica. Estados Unidos usa aproximadamente 1.0×10^{20} J de energía por año. *a*) Si toda esa energía proviniera de un reactor antimateria del futuro, ¿cuánta masa de combustible de materia y antimateria se consumiría cada año? *b*) Si ese combustible tuviera la densidad del hierro (7.86 g/cm^3) y estuviera apilado en bloques para formar una pila cúbica, ¿de qué altura sería esta? (Antes de que se entusiasme, le informamos que los reactores antimateria están aún *muy lejos* en el futuro, si acaso son factibles).

37.40 •• Ciertos electrones son acelerados por una diferencia de potencial de 750 kV, de modo que su energía cinética es 7.50×10^5 eV. *a*) ¿Cuál es la razón de la rapidez v de un electrón que tiene esta energía con respecto a la rapidez de la luz? *b*) ¿Cuál sería la rapidez si se calculara con los principios de la mecánica clásica?

37.41 • Cierta partícula tiene una masa en reposo de 6.64×10^{-27} kg y un momento lineal de 2.10×10^{-18} kg·m/s. *a*) ¿Cuál es la energía total (energía cinética + energía en reposo) de la partícula? *b*) ¿Cuál es la energía cinética de la partícula? *c*) ¿Cuál es la razón entre la energía cinética y la energía en reposo de la partícula?

37.42 •• Una partícula de polvo de 0.100 μg se acelera a partir del reposo hasta alcanzar una rapidez de 0.900*c* mediante una fuerza constante de 1.00×10^6 N. *a*) Si se emplea la mecánica no relativista, ¿qué distancia viaja el objeto para alcanzar esa rapidez final? *b*) Utilizando el tratamiento relativista correcto de la sección 37.8, ¿qué distancia viaja el objeto para alcanzar su rapidez final? *c*) ¿Cuál distancia es mayor? ¿Por qué?

37.43 • Calcule la energía cinética de un protón (masa = 1.67×10^{-27} kg) a partir de las expresiones tanto no relativista como relativista, y calcule la razón de los dos resultados (relativista entre no relativista) cuando la rapidez es de *a*) 8.00×10^7 m/s y *b*) 2.85×10^8 m/s.

37.44 • ¿Cuál es la energía cinética de un protón que se desplaza a *a*) 0.100*c*, *b*) 0.500*c*, *c*) 0.900*c*? ¿Cuánto trabajo se debe realizar sobre un protón para *d*) aumentar su rapidez de 0.100*c* a 0.500*c* y *e*) aumentar su rapidez de 0.500*c* a 0.900*c*? *f*) ¿Cómo se comparan los dos últimos resultados obtenidos en el límite no relativista?

37.45 • *a*) ¿Con qué diferencia de potencial es necesario acelerar un electrón, a partir del reposo, para alcanzar una rapidez de 0.980*c*? *b*) ¿Cuál es la energía cinética del electrón a esta rapidez? Exprese su respuesta en joules y en electrón volts.

37.46 • **Creación de una partícula.** Dos protones (cada uno con masa en reposo $M = 1.67 \times 10^{-27}$ kg) se desplazan inicialmente con la misma rapidez en sentidos opuestos. Los protones continúan existiendo después de una colisión que también produce una partícula η^0 (véase el capítulo 44). La masa en reposo de η^0 es $m = 9.75 \times 10^{-28}$ kg. *a*) Si los dos protones y η^0 se encuentran en reposo después del choque, obtenga la rapidez inicial de los protones, expresada como fracción de la rapidez de la luz. *b*) ¿Cuál es la energía cinética de cada protón? Exprese su respuesta en MeV *c*) ¿Cuál es la energía en reposo de la η^0, expresada en MeV? *d*) Analice la relación entre las respuestas de los incisos *b*) y *c*).

37.47 • El Sol produce energía mediante reacciones de fusión nuclear, en las cuales se convierte materia en energía. Midiendo la cantidad de energía que recibimos del Sol, sabemos que este produce energía a razón de 3.8×10^{26} W. *a*) ¿Cuántos kilogramos de materia pierde el Sol cada segundo? Aproximadamente, ¿a cuántas toneladas de materia equivale esto (1 ton = 2000 lb)? *b*) A este ritmo, ¿cuánto tiempo tardará el Sol en consumir toda su masa?

PROBLEMAS

37.48 • Un péndulo se balancea en el interior de una nave espacial que pasa por la Tierra a $\frac{3}{4}$ de la velocidad de la luz. *a*) Si un astronauta que ejecuta un experimento dentro de la nave mide 1.50 s por cada balanceo, ¿cuánto tiempo durará el balanceo medido por una persona en el control de misión en la Tierra que observa el experimento? *b*) Si cada balanceo dura 1.50 s medido por una persona en el control de misión de la Tierra, ¿cuánto tiempo durará medido por un astronauta en la nave espacial?

37.49 • Después de ser producido en un choque entre partículas elementales, un pión positivo (π^+) debe recorrer un tubo de 1.90 km de largo para llegar a un área experimental. Una partícula π^+ tiene una vida media (medida en su marco en reposo) de 2.60×10^{-8} s; el π^+ que estamos considerando tiene esta vida. *a*) ¿Con qué rapidez debe viajar el π^+ para no desintegrarse antes de alcanzar el final del tubo? [Puesto que u se aproxima mucho a c, escriba $u = (1 - \Delta)c$ y dé su respuesta en términos de Δ en lugar de u]. *b*) El π^+ tiene una energía en reposo de 139.6 MeV. ¿Cuál es la energía total del π^+ a la rapidez calculada en el inciso *a*)?

37.50 •• Un cubo de metal con lados de longitud a se halla en reposo en un marco S con una arista paralela al eje de las x. Por consiguiente, en S el volumen del cubo es a^3. El marco S' se desplaza a lo largo del eje de las x con rapidez u. De acuerdo con la medición que realiza un observador en el marco S', ¿cuál es el volumen del cubo metálico?

37.51 ••• Las naves estelares de la Federación Solar están marcadas con el símbolo de la federación, un círculo, en tanto que las naves estelares del Imperio Denebiano están marcadas con el símbolo del Im-

perio, una elipse cuyo eje mayor es 1.40 veces más grande que su eje menor ($a = 1.40b$ en la figura P37.51). ¿Con qué rapidez, con respecto a un observador, debe viajar una nave del Imperio para que sus marcas se confundan con las de una nave de la Federación?

Figura **P37.51**



37.52 •• Se envía una sonda espacial a las proximidades de la estrella Capella, que está a 42.2 años luz de la Tierra. (Un año luz es la distancia que recorre la luz en un año). La sonda viaja con una rapidez de 0.9930c. Una astronauta recluta a bordo tiene 19 años cuando la sonda parte de la Tierra. ¿Cuál es su edad biológica cuando la sonda llega a Capella?

37.53 • Se dice que una partícula es *extremadamente relativista* cuando su energía cinética es mucho mayor que su energía en reposo. *a*) ¿Cuál es la rapidez de una partícula (expresada como fracción de c) cuando su energía total es 10 veces su energía en reposo? *b*) ¿Cuál es la diferencia porcentual entre los lados izquierdo y derecho de la ecuación (37.39) si se desprecia el término $(mc^2)^2$ correspondiente a una partícula con la rapidez calculada en el inciso *a*)?

37.54 •• **Dilatación del tiempo cotidiano.** Dos relojes atómicos se sincronizan con sumo cuidado. Uno permanece en Nueva York, y el otro se coloca a bordo de un avión que viaja con una rapidez media de 250 m/s y luego regresa a Nueva York. Cuando el avión regresa, el tiempo transcurrido en el reloj que se quedó en Tierra fue de 4.00 h. ¿En cuánto difieren las lecturas de los dos relojes y cuál de ellos registrará el menor tiempo transcurrido? (*Sugerencia:* Como $u \ll c$, puede simplificar $\sqrt{1 - u^2/c^2}$ mediante expansión binomial).

37.55 • **El Supercolisionador de Hadrones (LHC).** Físicos e ingenieros de todo el mundo se han reunido para construir el acelerador más grande del planeta, el Supercolisionador de Hadrones en el laboratorio CERN de Ginebra, Suiza. La máquina acelerará protones a energías cinéticas de 7 TeV en un anillo subterráneo de 27 km de circunferencia. (Para obtener información más reciente sobre el LHC, visite www.cern.ch). *a*) ¿Qué rapidez v alcanzarán los protones en el LHC? [Como v es muy cercana a c, escriba $v = (1 - \Delta)c$ y dé su respuesta en términos de Δ]. *b*) Calcule la masa relativista, m_{rel}, de los protones acelerados en términos de su masa en reposo.

37.56 • **PA** Se detona una bomba nuclear que contiene 12.0 kg de plutonio. La suma de las masas en reposo de los productos de la explosión es menor que la masa en reposo original en una parte en 10^4. *a*) ¿Cuánta energía libera la explosión? *b*) Si la explosión tiene lugar en 4.00 μs, ¿cuál es la potencia media que genera la bomba? *c*) ¿Qué masa de agua podría elevar a una altura de 1.00 km la energía liberada?

37.57 • **PA** **Radiación de Cerenkov.** El físico ruso P. A. Cerenkov descubrió que una partícula con carga que viaja en un sólido con rapidez mayor que la de la luz, en ese material, emite radiación electromagnética. (Esto es análogo al estruendo sónico que produce un avión cuando avanza con rapidez mayor que la del sonido en el aire; véase la sección 16.9. Cerenkov compartió el Premio Nobel de 1958 por este descubrimiento). ¿Cuál es la energía cinética mínima (en electrón volts) que un electrón debe tener cuando viaja en el interior de un bloque de vidrio blanco (n = 1.52) para crear esta radiación de Cerenkov?

37.58 •• Un átomo con masa m emite un fotón con energía E; el átomo retrocede en sentido opuesto. *a*) Suponiendo que el movimiento del átomo puede tratarse de manera no relativista, calcule la rapidez de retroceso del átomo. *b*) A partir del resultado en el inciso *a*), demuestre que la rapidez de retroceso es mucho menor que c siempre que E sea mucho menor que la energía en reposo mc^2 del átomo.

37.59 •• En un experimento, dos protones son disparados directamente uno hacia el otro; cada uno se desplaza a la mitad de la rapidez de la luz con respecto al laboratorio. *a*) ¿Qué rapidez registra cada protón medida por el otro protón? *b*) ¿Cuál sería la respuesta al inciso *a*) si solo usáramos la mecánica newtoniana no relativista? *c*) ¿Cuál será la energía cinética de cada protón medida por **i.** un observador en reposo en el laboratorio y **ii.** un observador que viajara junto con uno de los protones? *d*) ¿Cuáles serían las respuestas al inciso *c*) si solo usáramos la mecánica newtoniana no relativista?

37.60 •• Dos protones se mueven alejándose uno del otro. En el marco de cada protón, el otro protón tiene una rapidez de 0.600c. ¿Qué rapidez mide un observador en el marco de la Tierra para cada protón?

37.61 •• El marco S' tiene una componente x de velocidad u con respecto al marco S, y en $t = t' = 0$ los dos marcos coinciden (véase la figura 37.3). En el origen de S' se emite un pulso de luz con un frente de onda esférico en el tiempo $t' = 0$. Su distancia x' con respecto al origen al cabo de un tiempo t' está dada por la ecuación $x'^2 = c^2t'^2$. Aplicando la transformación de coordenadas de Lorentz, transforme esta ecuación en una ecuación en x y t, y demuestre que el resultado es $x^2 = c^2t^2$, es decir, el movimiento se ve exactamente igual en el marco de referencia S que en S'; en ambos marcos se observa un frente de onda esférico.

37.62 • En ciertos procesos de desintegración radiactivos beta, la partícula beta (un electrón) abandona el núcleo atómico con una rapidez del 99.95% de la rapidez de la luz en relación con el núcleo en desintegración. Si ese núcleo se desplaza al 75.00% de la rapidez de la luz, calcule la rapidez del electrón emitido con respecto al marco de referencia del laboratorio si el electrón se emite *a*) en el mismo sentido que se desplaza el núcleo y *b*) en sentido opuesto a la velocidad del núcleo. *c*) En cada caso de los incisos *a*) y *b*), calcule la energía cinética del electrón medida en **i.** el marco del laboratorio y **ii.** el marco de referencia del núcleo en desintegración.

37.63 •• **CALC** De acuerdo con la mecánica newtoniana, una partícula de masa m acelerada a partir del reposo por una fuerza constante F continuará acelerándose indefinidamente; es decir, cuando $t \to \infty$, $v \to \infty$. Demuestre que, de acuerdo con la mecánica relativista, la rapidez de la partícula tiende a c cuando $t \to \infty$. [*Nota:* Una integral útil es $\int (1 - x^2)^{-3/2}\, dx = x/\sqrt{1 - x^2}$].

37.64 •• Dos sucesos observados en un marco de referencia S ocurren en el mismo punto del espacio; el segundo ocurre 1.80 s después que el primero. En un segundo marco de referencia donde S' se mueve en relación con S, el segundo suceso ocurre 2.35 s después que el primero. ¿Cuál es la diferencia entre las posiciones de los dos sucesos de acuerdo con las mediciones en S'?

37.65 ••• Dos sucesos observados en un marco de referencia S tienen posiciones y tiempos dados por (x_1, t_1) y (x_2, t_2), respectivamente. *a*) El marco S' se desplaza a lo largo del eje x con la rapidez suficiente para que los dos sucesos ocurran en la misma posición en S'. Demuestre que en S' el intervalo de tiempo $\Delta t'$ entre los dos sucesos está dado por

$$\Delta t' = \sqrt{(\Delta t)^2 - \left(\frac{\Delta x}{c}\right)^2}$$

donde $\Delta x = x_2 - x_1$ y $\Delta t = t_2 - t_1$. A partir de ahí, demuestre que si $\Delta x > c\,\Delta t$, no existe *ningún* marco S' en el que los dos sucesos ocurren en el mismo punto. El intervalo $\Delta t'$ se conoce a veces como el *intervalo de tiempo propio* de los sucesos. ¿Es adecuado este término? *b*) Demuestre que si $\Delta x > c\,\Delta t$, existe un marco de referencia S' diferente donde los dos sucesos ocurren *simultáneamente*. Calcule la distancia entre los dos sucesos en S'; exprese su respuesta en términos de Δx, Δt y c. Esta distancia se designa a veces como una *longitud propia*. ¿Es adecuado este término? *c*) En un marco de referencia S' se observa que dos sucesos ocurren simultáneamente en puntos separados por una distancia de 2.50 m. En un segundo marco S que se desplaza con respecto a S' a lo largo de la recta que une los dos puntos de S', los dos sucesos parecen ocurrir a una distancia de 5.00 m uno del otro. ¿Cuál es el intervalo de tiempo entre los dos sucesos, medido en S? [*Sugerencia:* Aplique el resultado obtenido en el inciso *b*)].

37.66 •• **Alberto en el País de las Maravillas.** Einstein y Lorentz, dos entusiastas tenistas, juegan un juego rápido en una cancha donde se hallan a 20.0 m uno del otro. Por ser jugadores muy diestros, juegan sin red. La pelota de tenis tiene una masa de 0.0580 kg. Ignore la gravedad y suponga que la pelota viaja paralela al piso cuando va de un jugador a otro. A menos que se especifique otra cosa, los dos jugadores realizan todas las mediciones. *a*) Lorentz pone en juego la pelota a 80.0 m/s. ¿Cuál es la energía cinética de la pelota? *b*) Einstein la devuelve con mucha energía a 1.80×10^8 m/s. ¿Cuál es la energía cinética de la pelota? *c*) Mientras Einstein devuelve la pelota en el inciso *a*), un conejo blanco corre a un costado de la cancha en dirección de Einstein a Lorentz. La rapidez del conejo es de 2.20×10^8 m/s con respecto a los dos hombres. ¿Cuál es la rapidez del conejo con respecto a la pelota? *d*) ¿Cuál es para el conejo la distancia entre Einstein y Lorentz? *e*) ¿Cuánto tiempo tarda el conejo en correr 20.0 m, según los jugadores? *f*) El conejo blanco lleva un reloj de bolsillo, y lo utiliza para medir el tiempo (desde su punto de vista) que tarda en recorrer la distancia entre Einstein y Lorentz. ¿Cuánto tiempo mide?

37.67 • Una de las longitudes de onda de la luz que emiten los átomos de hidrógeno en condiciones normales de laboratorio es $\lambda = 656.3$ nm, en la parte roja del espectro electromagnético. En la luz emitida desde una galaxia distante se observa que esta misma línea espectral presenta un desplazamiento de Doppler para $\lambda = 953.4$ nm, en la parte infrarroja del espectro. ¿Con qué rapidez se desplazan los átomos emisores con respecto a nuestro planeta? ¿Se aproximan a la Tierra o se alejan de ella?

37.68 •• **Medición de la rapidez por radar.** Un entrenador de béisbol utiliza un dispositivo de radar para medir la rapidez de una pelota de béisbol lanzada y que se aproxima. Este dispositivo envía ondas electromagnéticas de frecuencia f_0, y luego mide el desplazamiento de frecuencia Δf de las ondas que se reflejan en la pelota en movimiento. Si el desplazamiento fraccionario de frecuencia que produce una pelota es $\Delta f / f_0 = 2.86 \times 10^{-7}$, ¿cuál es la rapidez de la pelota en km/h? (*Sugerencia:* Pregúntese si las ondas experimentan un desplazamiento de Doppler una segunda vez cuando se reflejan en la pelota).

37.69 • **¿Viaje espacial?** Viajar a las estrellas requiere cientos o miles de años, incluso a la rapidez de la luz. Algunos han sugerido que podemos sortear esta dificultad acelerando el cohete (y a sus astronautas) a una rapidez muy alta de manera que envejezcan menos debido a la dilatación del tiempo. El inconveniente de esto es que se necesita una gran cantidad de energía para lograrlo. Suponga que usted quiere ir a la enorme gigante roja Betelgeuse, que está a unos 500 años luz de distancia. (Un año luz es la distancia que recorre la luz en un año). Usted planea viajar a rapidez constante en un cohete de 1000 kg (un poco más de una tonelada), el cual, en realidad, es demasiado pequeño para este propósito. En cada uno de los siguientes casos, calcule el tiempo que se requeriría para hacer el viaje de acuerdo con las mediciones de quienes se quedan en la Tierra y de los astronautas a bordo del cohete, la energía necesaria en joules y la energía necesaria como un porcentaje del consumo anual de energía de Estados Unidos (que es de 1.0×10^{20} J). Para comparar, ordene sus resultados en una tabla que muestre v_{cohete}, t_{Tierra}, t_{cohete}, E (en J) y E (como porcentaje del consumo de energía de Estados Unidos). La rapidez del cohete es *a*) $0.50c$; *b*) $0.99c$; *c*) $0.9999c$. Con base en sus resultados, ¿es probable que algún gobierno invierta pronto en un viaje de tan elevada velocidad?

37.70 •• Una nave espacial que se desplaza con rapidez constante u con respecto a nosotros transmite una señal de radio a una frecuencia constante f_0. Conforme la nave espacial se aproxima a nosotros, recibimos una frecuencia más alta f; una vez que ha pasado, recibimos una frecuencia más baja. *a*) Cuando la nave espacial pasa cerca de nosotros, de manera que hay un instante en que no se acerca ni se aleja de nosotros, demuestre que la frecuencia que recibimos no es f_0, y deduzca una expresión de la frecuencia que recibimos. ¿La frecuencia que recibimos es mayor o menor que f_0? (*Sugerencia:* En este caso, las crestas de onda sucesivas recorren la misma distancia hasta el observador y, por lo tanto, tienen el mismo tiempo de tránsito. En consecuencia, f es igual a $1/T$. Utilice la fórmula de dilatación del tiempo para relacionar los periodos en los marcos estacionario y en movimiento). *b*) Una nave espacial emite ondas electromagnéticas de frecuencia $f_0 = 345$ MHz medida en un marco que se desplaza a la par que la nave. La nave espacial se desplaza con una rapidez constante de $0.758c$ con respecto a nosotros. ¿Qué frecuencia f recibimos cuando la nave se aproxima a nosotros? ¿Y cuando se aleja? En cada caso, ¿cuál es el desplazamiento de frecuencia $f - f_0$? *c*) Con base en el resultado del inciso *a*), calcule la frecuencia f y el desplazamiento de frecuencia $(f - f_0)$ que recibimos en el instante en que la nave pasa cerca de nosotros. ¿Cómo es el desplazamiento de frecuencia calculado aquí en comparación con los calculados en el inciso *b*)?

37.71 • PA En cierto acelerador de partículas, un protón se mueve con rapidez constante de $0.750c$ en un círculo de radio igual a 628 m. ¿Cuál es la fuerza neta sobre el protón?

37.72 •• PA El físico francés Armand Fizeau fue el primero en medir la rapidez de la luz con exactitud. Además, encontró experimentalmente que la rapidez (con respecto al marco del laboratorio) de la luz que se propaga en un tanque de agua que también se desplaza con rapidez V con respecto al marco del laboratorio es

$$v = \frac{c}{n} + kV$$

donde $n = 1.333$ es el índice de refracción del agua. Fizeau llamó a k el coeficiente de arrastre y obtuvo un valor experimental de $k = 0.44$. ¿Qué valor de k obtiene usted a partir de transformaciones relativistas?

PROBLEMAS DE DESAFÍO

37.73 ••• CALC **Transformación de Lorentz para la aceleración.** Siguiendo un método análogo al que se utilizó en el texto para encontrar la fórmula de transformación de Lorentz para la velocidad, podemos obtener la transformación de Lorentz para la *aceleración*. El marco S' tiene una componente x constante de la velocidad u con respecto al marco S. Un objeto se desplaza con respecto al marco S a lo largo del eje de las x con velocidad instantánea v_x y aceleración instantánea a_x. *a*) Demuestre que su aceleración instantánea en el marco S' es

$$a'_x = a_x\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{3/2}\left(1 - \frac{uv_x}{c^2}\right)^{-3}$$

[*Sugerencia:* Exprese la aceleración en S' como $a'_x = dv'_x/dt'$. Después utilice la ecuación (37.21) para expresar dt' en términos de dt y dx, y la ecuación (37.22) para expresar dv'_x en términos de u y dv_x. La velocidad del objeto en S es $v_x = dx/dt$]. *b*) Demuestre que la aceleración en el marco S se expresa como

$$a_x = a'_x\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{3/2}\left(1 + \frac{uv'_x}{c^2}\right)^{-3}$$

donde $v'_x = dx'/dt'$ es la velocidad del objeto en el marco S'.

37.74 ••• CALC **Versión real de la paradoja de las gemelas.** Un cohete parte de la Tierra el 1 de enero de 2100. Stella, una de dos gemelas nacidas en el año 2075, conduce el cohete (marco de referencia S'); la otra gemela, Terra, se queda en la Tierra (marco de referencia S). El cohete tiene una aceleración de magnitud constante g en su propio marco de referencia (con esto la piloto se siente a gusto, pues simula la gravedad terrestre). La trayectoria del cohete es una línea recta en la dirección $+x$ en el marco S. *a*) Con base en los resultados del problema de desafío 37.73, demuestre que, en el marco terrestre S de Terra, la aceleración del cohete es

$$\frac{du}{dt} = g\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{3/2}$$

donde u es la velocidad instantánea del cohete en el marco S. *b*) Escriba el resultado del inciso *a*) en la forma $dt = f(u)\ du$, donde $f(u)$ es una función de u, e integre ambos lados. (*Sugerencia:* Utilice la integral del problema 37.63). Demuestre que, en el marco de Terra, el tiempo en que Stella alcanza una velocidad v_{1x} es

$$t_1 = \frac{v_{1x}}{g\sqrt{1 - v_{1x}^2/c^2}}$$

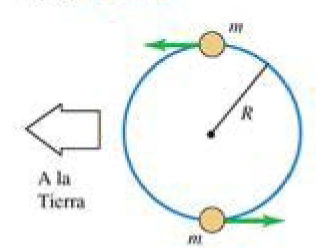
c) Use la fórmula de dilatación del tiempo para relacionar dt y dt' (intervalos infinitesimales de tiempo medidos en los marcos S y S', respectivamente). Combine este resultado con el del inciso *a*) e integre como en el inciso *b*) para demostrar lo siguiente: cuando Stella alcanza una velocidad v_{1x} con respecto a Terra, el tiempo t'_1 que ha transcurrido en el marco S' es

$$t'_1 = \frac{c}{g}\text{arctanh}\left(\frac{v_{1x}}{c}\right)$$

En esta fórmula arctanh es la tangente hiperbólica inversa. (*Sugerencia:* Utilice la integral dada en el problema de desafío 5.124). *d*) Combine los resultados de los incisos *b*) y *c*) para obtener t_1 en términos de t'_1, g y c solamente. *e*) Stella acelera en línea recta durante cinco años (según su reloj), reduce su velocidad al mismo ritmo durante cinco años, da la vuelta en redondo, acelera cinco años, disminuye su velocidad durante cinco años más, y aterriza de regreso en la Tierra. Según el reloj de Stella, la fecha es el 1 de enero de 2120. ¿Cuál es la fecha de acuerdo con el reloj de Terra?

37.75 ••• PA Cómo medir la masa de las estrellas. Muchas de las estrellas del firmamento son en realidad *estrellas binarias*, en las cuales dos estrellas giran en órbita alrededor de su centro de masa común. Si la rapidez orbital de las estrellas es lo bastante grande, es posible detectar el movimiento de las estrellas por los desplazamientos de Doppler de la luz que emiten. Las estrellas que se ajustan a esta descripción se conocen como *estrellas binarias espectroscópicas*. La figura P37.75 ilustra el caso más sencillo de estrella binaria espectroscópica: dos estrellas idénticas, cada una de masa m, giran en órbita alrededor de su centro de masa en un círculo de radio R. El plano de las órbitas de las estrellas está de lado con respecto a la línea visual de un observador situado en la Tierra. *a*) La luz que emite el hidrógeno gaseoso caliente en un laboratorio terrestre tiene una frecuencia de 4.568110×10^{14} Hz. En la luz que recibe de las estrellas un telescopio terrestre, se observa que la frecuencia de la luz del hidrógeno varía entre 4.567710×10^{14} Hz y 4.568910×10^{14} Hz. Determine si el sistema estelar binario, en conjunto, se acerca o se aleja de la Tierra, la rapidez de este movimiento y la rapidez orbital de las estrellas. (*Sugerencia:* Los valores de rapidez en cuestión son mucho menores que c; por lo tanto, se puede emplear el resultado aproximado $\Delta f/f = u/c$ que se dio en la sección 37.6). *b*) La luz proveniente de cada estrella del sistema binario fluctúa de su frecuencia máxima a su frecuencia mínima y viceversa en 11.0 días. Determine el radio orbital R y la masa m de cada estrella. Exprese su respuesta de m en kilogramos y como múltiplo de la masa del Sol (1.99×10^{30} kg). Compare el valor de R con la distancia de la Tierra al Sol: 1.50×10^{11} m. (Esta técnica se utiliza efectivamente en astronomía para calcular la masa de las estrellas. En la práctica, el problema es más complicado porque, por lo regular, las dos estrellas de un sistema binario no son idénticas; comúnmente las órbitas no son circulares, y el plano de las órbitas está inclinado con respecto a la línea de visión desde la Tierra).

Figura **P37.75**



37.76 ••• PA CALC Relatividad y la ecuación de onda. *a*) Considere la transformación galileana a lo largo de la dirección x: $x' = x - vt$ y $t' = t$. En el marco S la ecuación de onda de las ondas electromagnéticas en el vacío es

$$\frac{\partial^2 E(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E(x,t)}{\partial t^2} = 0$$

donde E representa el campo eléctrico en la onda. Demuestre que, al utilizar la transformación galileana, la ecuación de onda en el marco S' resulta ser

$$\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)\frac{\partial^2 E(x',t')}{\partial x'^2} + \frac{2v}{c^2}\frac{\partial^2 E(x',t')}{\partial x'\partial t'} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E(x',t')}{\partial t'^2} = 0$$

Esto tiene una forma diferente de la ecuación de onda en S. Por lo tanto, la transformación galileana *viola* el primer postulado de la relatividad, según el cual todas las leyes físicas tienen la misma forma en todos los marcos de referencia inerciales. (*Sugerencia:* Exprese las derivadas $\partial/\partial x$ y $\partial/\partial t$ en términos de $\partial/\partial x'$ y $\partial/\partial t'$ aplicando la regla de la cadena). *b*) Repita el análisis del inciso *a*), pero utilice las transformaciones de coordenadas de Lorentz, ecuaciones (37.21), y demuestre que en el marco S' la ecuación de onda tiene la misma forma que en el marco S:

$$\frac{\partial^2 E(x',t')}{\partial x'^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E(x',t')}{\partial t'^2} = 0$$

Explique por qué esto demuestra que la rapidez de la luz en el vacío es c en los dos marcos S y S'.

37.77 ••• PA Producción de kaones. En la física de alta energía se crean partículas nuevas mediante colisiones de partículas proyectil de movimiento rápido con partículas estacionarias. Parte de la energía cinética de la partícula incidente se utiliza para crear la masa de la partícula nueva. Una colisión de protón-protón puede dar por resultado la creación de un kaón negativo (K^-) y un kaón positivo (K^+):

$$p + p \rightarrow p + p + K^- + K^+$$

a) Calcule la energía cinética mínima del protón incidente que permite llevar a cabo esta reacción si el segundo protón (que sirve de blanco) está inicialmente en reposo. La energía en reposo de un kaón es de 493.7 MeV, y la energía en reposo de un protón es de 938.3 MeV. (*Sugerencia:* En este caso es conveniente trabajar en el marco en el que el momento lineal total es cero. Pero observe que aquí se debe utilizar la transformación de Lorentz para relacionar las velocidades en el marco del laboratorio con las velocidades en el marco del momento lineal total cero). *b*) ¿Cómo es esta energía cinética mínima calculada en comparación con la energía de la masa en reposo total de los kaones creados? *c*) Suponga que ahora los dos protones están en movimiento, con velocidades de igual magnitud y sentidos opuestos. Calcule la energía cinética combinada mínima de los dos protones que permite llevar a cabo la reacción. ¿Cómo es esta energía cinética mínima calculada en comparación con la energía de la masa en reposo total de los kaones creados? (Este ejemplo muestra que, cuando se utilizan haces de partículas en colisión en lugar de un blanco inmóvil, las necesidades de energía para producir partículas nuevas se reducen considerablemente).

Respuestas

Pregunta inicial del capítulo 

No. Mientras que la rapidez de la luz c es el "límite de rapidez" último para cualquier partícula, *no* existe un límite superior de la energía cinética de una partícula (véase la figura 37.21). A medida que la rapidez se aproxima a c, un incremento pequeño de rapidez corresponde a un gran aumento de energía cinética.

Preguntas de las secciones Evalúe su comprensión

37.1 Respuestas: *a*) i, *b*) no Usted también mide un frente de onda esférico que se expande con la misma rapidez c en todas direcciones. Esto es consecuencia del segundo postulado de Einstein. El frente de onda que usted mide *no* está centrado en la posición actual de la nave espacial, sino en el punto P donde se hallaba la nave en el instante en que emitió la pulsación luminosa. Por ejemplo, suponga que la nave se desplazaba con una rapidez de $c/2$. Cuando su reloj indica que ha transcurrido un tiempo t a partir de la emisión de la pulsación luminosa, sus mediciones indican que el frente de onda es una esfera de radio ct centrada en P, y que la nave se encuentra a una distancia de $ct/2$ con respecto a P.

37.2 Respuesta: iii. En el marco de referencia de Magda, los dos sucesos (el reloj de Ogdenville marca el mediodía y el reloj de Haverbrook marca el mediodía) no son simultáneos. La figura 37.5 indica que el suceso hacia el frente del vagón del tren ocurre primero. Puesto que el vagón del tren viaja hacia Haverbrook, ese reloj marcó el mediodía antes que el de Ogdenville. Por lo tanto, según Magda, es después del mediodía en Haverbrook.

37.3 Respuestas: *a*) ii, *b*) ii. El enunciado de que los cronómetros en movimiento marchan con lentitud se refiere a cualquier cronómetro que se mueve en relación con un observador. María y su cronómetro se mueven en relación con Samuel, de manera que Samuel mide que el cronómetro de María marcha con lentitud y que marca unos cuantos segundos menos que su propio cronómetro. Samuel y su cronómetro se mueven en relación con María, así que ella también mide que el cronómetro de Samuel marcha con lentitud. La medición de cada uno de los observadores es correcta para su propio marco de referencia. *Ambos* observadores concluyen que un cronómetro en movimiento marcha con lentitud. Esto es congruente con el principio de la relatividad (véase la sección 37.1), el cual establece que las leyes de la física son las mismas en todos los marcos de referencia inerciales.

37.4 Respuesta: ii, i y iii (empate) iv. Usted mide que la longitud en reposo de la regla de madera inmóvil y la longitud contraída de la nave espacial son ambos de 1 m. La longitud en reposo de la nave espacial es mayor que la longitud contraída que usted mide, así que debe ser mayor que 1 m. Un observador minúsculo a bordo de la nave espacial mediría una longitud contraída de la regla de madera menor de 1 m. Observe que en el marco de referencia de usted, la nariz y la parte posterior de la nave espacial pueden alinearse simultáneamente con los dos extremos de la regla de madera, ya que en su marco de referencia tienen la misma longitud de 1 m. En el marco de referencia de la nave espacial, estas dos alineaciones no pueden ocurrir de manera simultánea porque la regla de madera es más corta que la nave espacial. La sección 37.2 nos dice que esto no debe sorprendernos; dos sucesos que son simultáneos a los ojos de un observador tal vez no sean simultáneos para un segundo observador que se mueve en relación con el primero.

37.5 Respuestas: *a*) P_1, *b*) P_4 *a*) La última de las ecuaciones (37.21) nos indica las veces que se presentan los dos sucesos en S': $t_1' = \gamma(t_1 - ux_1/c^2)$ y $t_2' = \gamma(t_2 - ux_2/c^2)$. En el marco S los dos sucesos ocurren en la misma coordenada x, así que $x_1 = x_2$, y el suceso P_1 ocurre antes que el suceso P_2, de manera que $t_1 < t_2$. Por lo tanto, podemos ver que $t_1' < t_2'$ y que el suceso P_1 también ocurre antes que P_2 en el marco S'. Esto indica que si el suceso P_1 ocurre antes que P_2 en un marco de referencia S donde los dos sucesos ocurren en la misma posición, entonces P_1 ocurre antes que P_2 en cualquier otro marco de referencia que se mueva en relación con S. *b*) En el marco S los dos sucesos ocurren en diferentes coordenadas x, de tal manera que $x_3 < x_4$, y los sucesos P_3 y P_4 ocurren al mismo tiempo, por lo que $t_3 = t_4$. Por lo tanto, podemos ver que $t_3' = \gamma(t_3 - ux_3/c^2)$ es mayor que $t_4' = \gamma(t_4 - ux_4/c^2)$, así que el suceso P_4 ocurre antes que P_3 en el marco S'. Esto nos dice que aun cuando los dos sucesos son simultáneos en el marco S, no necesitan ser simultáneos en un marco que se mueva en relación con S.

37.7 Respuesta: ii. La ecuación (37.27) nos dice que la magnitud del momento lineal de una partícula con masa m y rapidez v es $p = mv/\sqrt{1 - v^2/c^2}$. Si v aumenta en un factor de 2, el numerador mv se incrementa en un factor de 2 y el denominador $\sqrt{1 - v^2/c^2}$ disminuye. Por lo tanto, p aumenta en un factor mayor que 2. (Observe que para duplicar la rapidez, el valor inicial de la rapidez debe ser menor que $c/2$. Eso se debe a que la rapidez de la luz es el límite último de rapidez).

37.8 Respuesta: i. Conforme el protón se desplaza una distancia s, la fuerza constante de magnitud F realiza trabajo $W = Fs$ y aumenta la energía cinética en una cantidad $\Delta K = W = Fs$. Esto es cierto sin importar cuál sea la rapidez del protón antes de desplazarse esa distancia. Por consiguiente, la fuerza constante aumenta la energía cinética del protón en la misma cantidad durante el primer metro de la trayectoria que durante cualquier metro subsiguiente de la trayectoria. (Es verdad que conforme el protón se acerca al límite último de c, el aumento en la *rapidez* del protón es cada vez menor con cada metro subsiguiente de la trayectoria. Sin embargo, no es eso lo que se pregunta).

Problema práctico

Respuestas: *a*) $0.268c$ ***b*)** 35.6 MeV ***c*)** 145 MeV

FOTONES: ONDAS DE LUZ QUE SE COMPORTAN COMO PARTÍCULAS





? Este cirujano plástico utiliza dos fuentes de luz: una lámpara de cabeza que emite un haz de luz visible y un láser de mano que emite luz infrarroja. La luz de ambas fuentes se emite en forma de paquetes de energía llamados fotones. ¿En cuál fuente los fotones son más energéticos: en la lámpara de cabeza o en el láser?

OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

Al estudiar este capítulo, usted aprenderá:

- De qué manera los experimentos que implican el efecto fotoeléctrico y los rayos x condujeron a una reinterpretación radical de la naturaleza de la luz.
- Cómo el modelo de fotón para la luz propuesto por Einstein explica el efecto fotoeléctrico.
- Cómo los experimentos con rayos x ayudaron a confirmar el modelo de fotón para la luz.
- Cómo los aspectos corpusculares y ondulatorios de la luz se complementan entre sí.
- Cómo el principio de la incertidumbre de Heisenberg impone limitaciones fundamentales sobre lo que es posible medir.

En el capítulo 32 vimos cómo Maxwell, Hertz y otros establecieron con certeza que la luz es una onda electromagnética. La interferencia, difracción y polarización, que describimos en los capítulos 35 y 36, también demuestran esta *naturaleza ondulatoria* de la luz.

Sin embargo, cuando examinamos con más atención la emisión, absorción y dispersión de la radiación electromagnética, descubrimos un aspecto totalmente distinto de la luz. Vemos que la energía de una onda electromagnética está *cuantizada*: se emite y se absorbe en forma de paquetes semejantes a partículas de energía definida, llamados *fotones*. La energía de un solo fotón es proporcional a la frecuencia de la radiación.

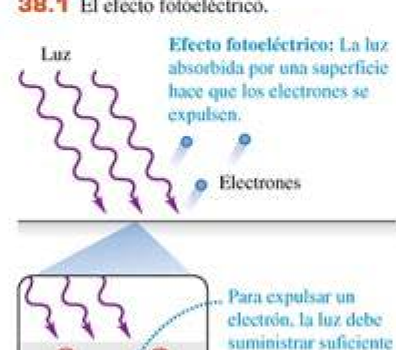
Encontraremos que la luz y otras radiaciones electromagnéticas exhiben la *dualidad onda-partícula*: la luz actúa a veces como onda y a veces como partícula. La interferencia y la difracción demuestran el comportamiento ondulatorio, mientras que la emisión y la absorción de fotones demuestran el comportamiento de partícula. Esta reinterpretación radical de la luz nos conducirá en el siguiente capítulo a hacer algunos cambios radicales en nuestras ideas acerca de la naturaleza de la materia.

38.1 Luz absorbida como fotones: El efecto fotoeléctrico

Un fenómeno que da idea de la naturaleza de la luz es el **efecto fotoeléctrico**, en el cual un material emite electrones de su superficie cuando esta se ilumina (figura 38.1). Para escapar de la superficie, el electrón debe absorber energía suficiente de la luz incidente para superar la atracción de los iones positivos del material, por lo que se forma una barrera de energía potencial. La luz suministra el "impulso" que permite que los electrones escapen de la barrera.

El efecto fotoeléctrico tiene una serie de aplicaciones. Las cámaras digitales y los dispositivos de visión nocturna lo utilizan para convertir la energía de la luz en una

38.1 El efecto fotoeléctrico.



38.2 *a)* Un dispositivo de visión nocturna usa el efecto fotoeléctrico. Los fotones que entran al instrumento chocan contra una placa y emiten electrones que atraviesan un disco delgado, donde hay millones de canales diminutos. La corriente por cada canal se amplifica electrónicamente y se dirige hacia una pantalla, que resplandece cuando pegan los electrones. *b)* La imagen que se forma en la pantalla es una combinación de esos millones de manchas luminosas, y es miles de veces más brillante de lo que ve el ojo al natural.

a)



b)



MasteringPHYSICS

PhET: Photoelectric Effect
ActivPhysics 17.3: Photoelectric Effect

señal eléctrica que se reconstruye en una imagen (figura 38.2). En la Luna, la luz solar que incide sobre la superficie provoca que el polvo de la superficie expulse electrones, lo que deja a las partículas de polvo con una carga positiva. La repulsión mutua eléctrica de estas partículas de polvo cargadas hace que se eleven arriba de la superficie de la Luna, un fenómeno que los astronautas del Apolo observaron desde la órbita lunar.

Frecuencia de umbral y potencial de frenado

En la sección 32.1 se analizó el modelo ondulatorio de la luz, que Maxwell formuló dos décadas antes de que se observara el efecto fotoeléctrico. ¿El efecto fotoeléctrico es congruente con este modelo? La figura 38.3*a* muestra una versión moderna de uno de los experimentos que examinaron este aspecto. Dos electrodos conductores están encerrados en un tubo de vidrio evacuado y conectados por una batería, y el cátodo está iluminado. Dependiendo de la diferencia de potencial V_{AC} entre los dos electrodos, los electrones emitidos por el cátodo iluminado (llamados *fotoelectrones*) pueden viajar a través del ánodo, produciendo una *fotocorriente* en el circuito externo. (El tubo se evacua a una presión de 0.01 Pa o menos para minimizar las colisiones entre los electrones y las moléculas de gas).

El cátodo iluminado emite fotoelectrones con diferentes energías cinéticas. Si el campo eléctrico apunta hacia el cátodo, como se muestra en la figura 38.3*a*, todos los electrones son acelerados hacia el ánodo y contribuyen a la fotocorriente. Pero al invertir el campo y ajustar su intensidad como se muestra en la figura 38.3*b*, se evita que los electrones menos energéticos alcancen el ánodo. De hecho, es posible determinar la energía cinética *máxima* $K_{máx}$ de los electrones emitidos, formando el potencial del ánodo respecto del cátodo, V_{AC}, lo suficientemente negativo para que la corriente se detenga. Esto sucede cuando $V_{AC} = -V_0$, donde V_0 es el **potencial de frenado**. Conforme un electrón se mueve del cátodo al ánodo, el potencial disminuye por V_0 y se realiza trabajo negativo $-eV_0$ sobre el electrón (cargado negativamente). El electrón más energético sale del cátodo con energía cinética $K_{máx} = \frac{1}{2}mv_{máx}{}^2$ y tiene energía cinética cero en el ánodo. Usando el teorema de trabajo-energía, tenemos

$$W_{tot} = -eV_0 = \Delta K = 0 - K_{máx} \qquad \text{(energía cinética máxima}$$
$$K_{máx} = \tfrac{1}{2}mv_{máx}{}^2 = eV_0 \qquad \text{de los fotoelectrones)} \qquad (38.1)$$

Por lo tanto, al medir el potencial de frenado V_0 se puede determinar la energía cinética máxima con la que los electrones salen del cátodo. (No se toma en cuenta ningún efecto debido a diferencias en los materiales del cátodo y el ánodo).

En este experimento, ¿cómo esperamos que la fotocorriente dependa del voltaje a través de los electrodos y de la frecuencia y la intensidad de la luz? Con base en la explicación de Maxwell de la luz como una onda electromagnética, esto es lo que se *podría esperar*:

Predicción 1 del modelo ondulatorio: En la sección 32.4 vimos que la intensidad de una onda electromagnética depende de su amplitud, pero no de su frecuencia. Así, el efecto fotoeléctrico debe ocurrir para cualquier frecuencia de la luz, y *la magnitud de la fotocorriente no debe depender de la frecuencia de la luz.*

Predicción 2 del modelo ondulatorio: Se necesita una cierta cantidad mínima de energía, llamada **función trabajo**, para expulsar un solo electrón de una superficie particular (véase la figura 38.1). Si la luz que incide sobre la superficie es muy débil, puede transcurrir algún tiempo antes de que la energía total absorbida por la superficie sea igual a la función trabajo. Por lo tanto, para iluminación débil, *se espera un tiempo de retardo* entre el momento en que enciende la luz y cuando aparecen fotoelectrones.

Predicción 3 del modelo ondulatorio: Debido a que la energía suministrada a la superficie del cátodo depende de la intensidad de la iluminación, *se espera que el potencial de frenado aumente con el aumento de intensidad de luz.* Como la intensidad no depende de la frecuencia, se espera, además, que *el potencial de frenado no dependa de la frecuencia de la luz.*

Los resultados experimentales demostraron ser *muy* diferentes de estas predicciones. Esto es lo que se encontró en los años comprendidos entre 1877 y 1905:

Resultado experimental 1: *La fotocorriente depende de la frecuencia de la luz.* Para un material dado, la luz monocromática con una frecuencia inferior a una **frecuencia de umbral** mínima *no* produce fotocorriente, independientemente de la intensidad. Para la mayoría de los metales, la frecuencia de umbral está en el ultravioleta (correspondiente a longitudes de onda entre 200 y 300 nm), pero para otros materiales como el óxido de potasio y óxido de cesio se encuentra en el espectro visible (λ entre 380 y 750 nm).

Resultado experimental 2: No existe un *retraso entre el tiempo mensurable* cuando la luz está encendida y cuando el cátodo emite fotoelectrones (suponiendo que la frecuencia de la luz supera la frecuencia de umbral). Esto es cierto sin importar cuán débil es la luz.

Resultado experimental 3: *El potencial de frenado no depende de la intensidad, pero depende de la frecuencia.* La figura 38.4 muestra gráficas de fotocorriente como una función de la diferencia de potencial V_{AC} para la luz de una frecuencia dada y dos intensidades diferentes. La diferencia de potencial inversa $-V_0$ necesaria para reducir la intensidad a cero es el misma para ambas intensidades. El único efecto de aumentar la intensidad es aumentar el número de electrones por segundo y, por lo tanto, la fotocorriente i. (Las curvas se nivelan cuando V_{AC} es grande y positivo, porque en ese momento todos los electrones emitidos llegan al ánodo). Si la intensidad se mantiene constante, pero la frecuencia se incrementa, el potencial de frenado también aumenta. En otras palabras, cuanto mayor es la frecuencia de la luz, mayor es la energía de los fotoelectrones expulsados.

Estos resultados contradicen directamente la descripción de Maxwell de la luz como onda electromagnética. Albert Einstein dio una solución a este dilema en 1905. Su propuesta incluía nada menos que un nuevo modelo para la naturaleza de la luz.

Explicación de Einstein acerca del fotón

Einstein hizo el radical postulado de que un rayo de luz consiste en pequeños paquetes de energía llamados **fotones** o *cuantos*. Este postulado era una extensión de una idea desarrollada, cinco años antes, por Max Planck para explicar las propiedades de la radiación del cuerpo negro, que se estudió en la sección 17.7. (Vamos a explorar las ideas de Planck en la sección 39.5). En la explicación de Einstein, la energía E de un fotón es igual a una constante h por la frecuencia del fotón f. De la relación $f = c/\lambda$ para ondas electromagnéticas en el vacío, se tiene

$$E = hf = \frac{hc}{\lambda} \qquad \text{(energía de un fotón)} \qquad (38.2)$$

donde h es una constante universal llamada **constante de Planck**. El valor numérico de esta constante, con la exactitud con que se conoce en la actualidad, es

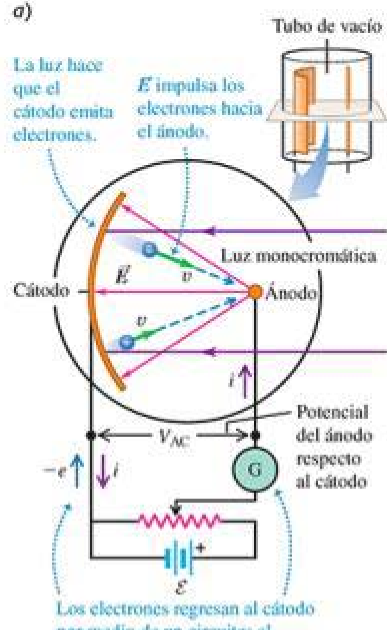
$$h = 6.62606896(33) \times 10^{-34}\ \text{J} \cdot \text{s}$$

CUIDADO **Los fotones no son "partículas" en el sentido usual** Es común imaginar a los fotones como bolas de billar en miniatura o bolitas. Si bien esto es una imagen mental conveniente, no es muy precisa. Por un lado, las bolas de billar y balas tienen una masa en reposo y viajan más lentamente que la velocidad de la luz c, mientras que los fotones viajan a la velocidad de la luz y tienen masa en reposo cero. Por otro lado, los fotones tienen aspectos ondulatorios (frecuencia y longitud de onda) que son fáciles de observar. El hecho es que el concepto de fotón es muy extraño, y la verdadera naturaleza de los fotones es difícil de visualizar de forma sencilla. Hablaremos de la personalidad dual de fotones con más detalle en la sección 38.4.

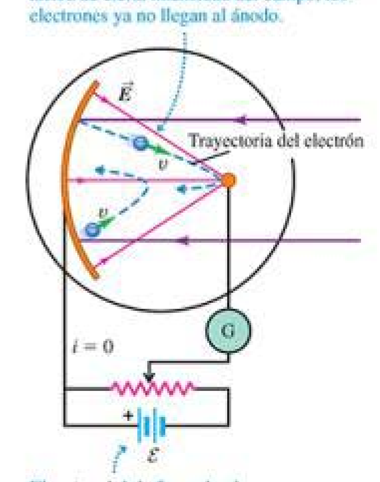
En la explicación de Einstein, cada fotón que llega a la superficie en la figura 38.1*a* o 38.2 es absorbido por un electrón. Esta transferencia de energía es un proceso de todo o nada, a diferencia de la transferencia continua de energía de la teoría ondulatoria de la luz; el electrón obtiene toda la energía del fotón o no obtiene nada. El electrón puede escapar de la superficie solo si la energía que adquiere es mayor que la función

38.3 Un experimento para probar si el efecto fotoeléctrico es congruente con el modelo ondulatorio de la luz.

a)

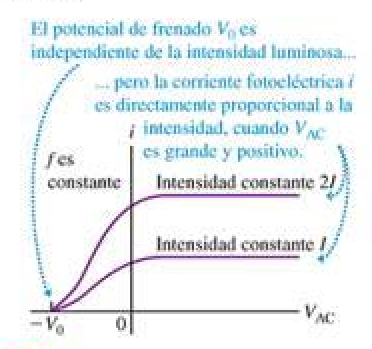


b) Ahora se invierte la dirección del campo eléctrico, de manera que este tiende a repeler a los electrones del ánodo. Por arriba de cierta intensidad del campo, los electrones ya no llegan al ánodo.



El **potencial de frenado** al cual la corriente es cero tiene un valor absoluto V_0.

38.4 Corriente fotoeléctrica i para una frecuencia constante f de luz, en función del potencial V_{AC} del ánodo con respecto al cátodo.



38.5 Potencial de frenado como una función de la frecuencia para un cátodo de un material dado.

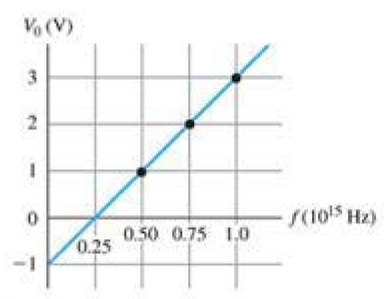
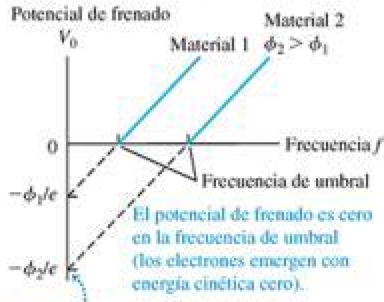


Tabla 38.1 Funciones de trabajo para varios elementos

Elemento	Función trabajo (eV)
Aluminio	4.3
Carbono	5.0
Cobre	4.7
Oro	5.1
Níquel	5.1
Silicio	4.8
Plata	4.3
Sodio	2.7

38.6 El potencial de frenado como una función de frecuencia para dos cátodos de diferente material, cada uno con su correspondiente función trabajo ϕ.



trabajo ϕ. Así los fotoelectrones serán emitidos solo si $hf > \phi$ o $f > \phi/h$. Por lo tanto, el postulado de Einstein explica por qué el efecto fotoeléctrico se produce solo para frecuencias mayores que una frecuencia de umbral mínima. Este postulado también es congruente con la observación de que una mayor intensidad provoca una mayor fotocorriente (figura 38.4). Una mayor intensidad a una frecuencia particular significa un mayor número de fotones absorbidos por segundo y, por consiguiente, un mayor número de electrones emitidos por segundo y una fotocorriente mayor.

El postulado de Einstein también explica por qué no hay ningún retraso entre la iluminación y la emisión de fotoelectrones. Tan pronto como los fotones con suficiente energía pegan en la superficie, los electrones pueden absorberlos y ser emitidos.

Por último, el postulado de Einstein explica por qué el potencial de frenado para una determinada superficie depende solo de la frecuencia de la luz. Recuerde que ϕ es la energía *mínima* necesaria para quitar un electrón de la superficie. Einstein aplicó la conservación de la energía para determinar que la energía cinética *máxima* $K_{máx} = \frac{1}{2}mv_{máx}{}^2$ para un electrón emitido es la energía hf adquirida por un fotón menos la función trabajo ϕ:

$$K_{máx} = \tfrac{1}{2}mv_{máx}{}^2 = hf - \phi \qquad (38.3)$$

Al sustituir $K_{máx} = eV_0$ en la ecuación (38.1), obtenemos

$$eV_0 = hf - \phi \qquad \text{(efecto fotoeléctrico)} \qquad (38.4)$$

La ecuación (38.4) indica que el potencial de frenado V_0 aumenta conforme aumenta la frecuencia f. La intensidad no aparece en la ecuación (38.4), por lo que V_0 es independiente de la intensidad. Como comprobación de la ecuación (38.4), se puede medir el potencial de frenado V_0 para cada uno de varios valores de frecuencia f para un material de cátodo dado (figura 38.5). Una gráfica de V_0 como una función de f es una recta, la comprobación de la ecuación (38.4), y a partir de esta gráfica se puede determinar tanto la función trabajo ϕ para el material como el valor de la cantidad h/e. Después de que en 1909 Robert Millikan midió la carga del electrón $-e$, también es posible determinar la constante de Planck h a partir de estas mediciones.

Las energías de los electrones y las funciones de trabajo se expresan generalmente en electrón volts (eV), definidos en la sección 23.2. Con cuatro cifras significativas,

$$1\text{ eV} = 1.602 \times 10^{-19}\text{ J}$$

Para esta precisión, la constante de Planck es

$$h = 6.626 \times 10^{-34}\text{ J}\cdot\text{s} = 4.136 \times 10^{-15}\text{ eV}\cdot\text{s}$$

La tabla 38.1 lista las funciones de trabajo de varios elementos. Estos valores son aproximados, ya que son muy sensibles a las impurezas superficiales. Cuanto mayor es la función trabajo, mayor será la frecuencia mínima necesaria para emitir fotoelectrones (figura 38.6).

El modelo de fotón explica una serie de fenómenos en los que la luz es absorbida. Un ejemplo es un *bronceado*, que se produce cuando la energía de la luz solar desencadena una reacción química en células de la piel que conduce al aumento de la producción del pigmento melanina. Esta reacción ocurre solo si una molécula específica en la célula absorbe una cierta cantidad mínima de energía. Una longitud de onda corta ultravioleta de un fotón tiene la energía suficiente para activar la reacción, pero un fotón de luz visible con longitud de onda más larga no la tiene. Así, la luz ultravioleta causa bronceado, mientras la luz visible no lo logra.

Momento lineal

El concepto de fotón de Einstein se aplica a *todas* las regiones del espectro electromagnético, incluyendo las ondas de radio, rayos x, etcétera. Un fotón de cualquier radiación electromagnética con frecuencia f y longitud de onda λ tiene energía E dada por la ecuación (38.2). El potencial de frenado como una función de frecuencia para dos cátodos de diferente material, cada uno con su correspondiente función trabajo f.

Además, de acuerdo con la teoría especial de la relatividad, toda partícula con energía también debe tener momento lineal, aun cuando no tenga masa en reposo. La masa en reposo de los fotones es cero. Como vimos en la ecuación (37.40), un fotón de energía E tiene un momento lineal de magnitud p, definida por $E = pc$. Así, la longitud de onda λ de un fotón y la magnitud de su momento lineal p se relacionan en forma sencilla por

$$p = \frac{E}{c} = \frac{hf}{c} = \frac{h}{\lambda} \qquad \text{(momento lineal de un fotón)} \qquad (38.5)$$

La dirección del movimiento del fotón es sencillamente la dirección en la que se mueve la onda electromagnética.

Estrategia para resolver problemas 38.1 Fotones

MP

IDENTIFICAR *los conceptos relevantes:* La energía y el momento lineal de un fotón individual son proporcionales a la frecuencia, e inversamente proporcionales a la longitud de onda. La interpretación de Einstein del efecto fotoeléctrico es que la energía se conserva cuando un fotón expulsa un electrón del material de la superficie.

PLANTEAR *el problema:* Identifique la incógnita. Podría ser la longitud de onda del fotón λ, la frecuencia f, la energía E o el momento lineal p. Si el problema está relacionado con el efecto fotoeléctrico, la incógnita podría ser la energía cinética máxima $K_{máx}$ de los fotoelectrones, el potencial de frenado V_0 o la función trabajo ϕ.

EJECUTAR *la solución* como sigue:

1. Use las ecuaciones (38.2) y (38.5) para relacionar la energía y el momento lineal de un fotón con su longitud de onda y su frecuencia. Si el problema implica al efecto fotoeléctrico, utilice las ecuaciones (38.1), (38.3) y (38.4) para relacionar la frecuencia del fotón, el potencial de frenado, la función trabajo y la energía cinética máxima del fotoelectrón.
2. El electrón-volt (eV), que se introdujo en la sección 23.2, es una unidad conveniente. Es la energía cinética adquirida por un electrón cuando se mueve libremente a través de un aumento de potencial de un volt: $1\ \text{eV} = 1.602 \times 10^{-19}$ J. Si la energía del fotón E se da en electrón volts, utilice $h = 4.136 \times 10^{-15}\ \text{eV}\cdot\text{s}$; si E está en joules, utilice $h = 6.626 \times 10^{-34}\ \text{J}\cdot\text{s}$.

EVALUAR *su respuesta:* Cuando usted empiece a trabajar problemas relacionados con los fotones, es probable que los números no le sean familiares y los errores no resulten evidentes. Es útil recordar que un fotón de luz visible con $\lambda = 600$ nm y $f = 5 \times 10^{14}$ Hz tiene una energía E de alrededor de 2 eV o aproximadamente 3×10^{-19} J.



Ejemplo 38.1 Fotones de un puntero láser

Un puntero láser con una potencia de 5.00 mW emite luz roja (λ = 650 nm). *a*) ¿Cuál es la magnitud del momento lineal de cada fotón? *b*) ¿Cuántos fotones emite el puntero láser cada segundo?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Este problema implica las ideas de *a*) momento lineal del fotón y *b*) energía del fotón. En el inciso *a*) utilizaremos la ecuación (38.5) y la longitud de onda dada para calcular la magnitud del momento lineal de cada fotón. En el inciso *b*), la ecuación (38.2) da la energía por fotón, y la potencia obtenida nos indica la energía emitida por segundo. Al combinar estas cantidades, es posible calcular el número de fotones emitidos por segundo.

EJECUTAR: *a*) Tenemos $\lambda = 650\ \text{nm} = 6.50 \times 10^{-7}$ m; por lo tanto, de acuerdo con la ecuación (38.5), la magnitud del momento lineal de cada fotón es

$$p = \frac{h}{\lambda} = \frac{6.626 \times 10^{-34}\ \text{J}\cdot\text{s}}{6.50 \times 10^{-7}\ \text{m}}$$
$$= 1.02 \times 10^{-27}\ \text{kg}\cdot\text{m/s}$$

(Recuerde que $1\ \text{J} = 1\ \text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}^2$).

b) De la ecuación (38.2), la energía de cada fotón es

$$E = pc = (1.02 \times 10^{-27}\ \text{kg}\cdot\text{m/s})(3.00 \times 10^8\ \text{m/s})$$
$$= 3.06 \times 10^{-19}\ \text{J} = 1.91\ \text{eV}$$

El puntero láser emite 5.00×10^{-3} J/s, por lo que la razón con que se emiten los fotones es

$$\frac{5.00 \times 10^{-3}\ \text{J/s}}{3.06 \times 10^{-19}\ \text{J/fotón}} = 1.63 \times 10^{16}\ \text{fotones/s}$$

EVALUAR: El resultado del inciso *a*) es muy pequeño, una molécula de oxígeno en un cuarto a temperatura ambiente tiene 2500 veces más momento lineal. Como una comprobación del inciso *b*) podemos calcular la energía del fotón utilizando la ecuación (38.2):

$$E = hf = \frac{hc}{\lambda} = \frac{(6.626 \times 10^{-34}\ \text{J}\cdot\text{s})(3.00 \times 10^8\ \text{m/s})}{6.50 \times 10^{-7}\ \text{m}}$$
$$= 3.06 \times 10^{-19}\ \text{J} = 1.91\ \text{eV}$$

Nuestro resultado del inciso *b*) muestra que un número inmenso de fotones sale del puntero láser cada segundo, y cada uno tiene una cantidad infinitesimal de energía. Por consiguiente, no se nota el carácter discreto de los fotones, y parece que la energía irradiada es un flujo continuo.



Ejemplo 38.2 Un experimento de efecto fotoeléctrico

Al realizar un experimento de efecto fotoeléctrico con luz de cierta frecuencia, usted encuentra que se requiere una diferencia de potencial inverso de 1.25 V para reducir la corriente a cero. Calcule *a*) la energía cinética máxima, *b*) la rapidez máxima de los fotoelectrones emitidos.



SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: El valor de 1.25 V es el potencial de frenado V_0 para este experimento. Podemos utilizar este en la ecuación (38.1) para determinar la energía cinética máxima del fotoelectrón $K_{\text{máx}}$ y con ello podemos calcular la rapidez máxima del fotoelectrón.

EJECUTAR: *a*) De acuerdo con la ecuación (38.1),

$$K_{\text{máx}} = eV_0 = (1.60 \times 10^{-19}\ \text{C})(1.25\ \text{V}) = 2.00 \times 10^{-19}\ \text{J}$$

(Recuerde que 1 V = 1 J/C). En términos de electrón volts,

$$K_{\text{máx}} = eV_0 = e(1.25\ \text{V}) = 1.25\ \text{eV}$$

ya que el electrón volt (eV) es la magnitud de la carga del electrón e por un volt (1 V).

b) A partir de $K_{\text{máx}} = \frac{1}{2}mv_{\text{máx}}^2$ se obtiene

$$v_{\text{máx}} = \sqrt{\frac{2K_{\text{máx}}}{m}} = \sqrt{\frac{2(2.00 \times 10^{-19}\ \text{J})}{9.11 \times 10^{-31}\ \text{kg}}}$$
$$= 6.63 \times 10^5\ \text{m/s}$$

EVALUAR: El valor de $v_{\text{máx}}$ es aproximadamente 0.2% de la rapidez de la luz, por lo que se justifica el uso de la ecuación no relativista de la energía cinética. (Una justificación equivalente es que la energía cinética de 1.25 eV del electrón es mucho menor que su energía en reposo $mc^2 = 0.511\ \text{MeV} = 5.11 \times 10^5\ \text{eV}$).



Ejemplo 38.3 Determinación experimental de ϕ y h

Para un cátodo de cierto material en un experimento de efecto fotoeléctrico, usted mide un potencial de frenado de 1.0 V para luz de 600 nm de longitud de onda, 2.0 V para 400 nm y 3.0 V para 300 nm. Determine la función trabajo de este material y el valor de la constante de Planck.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Este ejemplo utiliza la relación entre el potencial de frenado V_0, la frecuencia f y la función trabajo ϕ en el efecto fotoeléctrico. De acuerdo con la ecuación (38.4), una gráfica del potencial de frenado V_0 en función de la frecuencia f debería ser una recta, como en la figura 38.5 o 38.6. Esa gráfica queda totalmente determinada con su pendiente y el valor con el que interseca el eje vertical; los usaremos para determinar los valores de las incógnitas ϕ y h.

EJECUTAR: Replanteamos la ecuación (38.4) como sigue:

$$V_0 = \frac{h}{e}f - \frac{\phi}{e}$$

De esta manera, vemos que la pendiente de la recta es h/e y que la ordenada al origen (correspondiente a $f = 0$) está en $-\phi/e$. Las frecuencias obtenidas con $f = c/\lambda$ y $c = 3.00 \times 10^8$ m/s, son 0.50×10^{15} Hz, 0.75×10^{15} Hz y 1.0×10^{15} Hz, respectivamente. En la figura 38.6 se muestra la gráfica de estos datos; a partir de ella vemos que

$$-\frac{\phi}{e} = \text{ordenada al origen} = -1.0\ \text{V}$$
$$\phi = 1.0\ \text{eV} = 1.6 \times 10^{-19}\ \text{J}$$

y

$$\text{Pendiente} = \frac{\Delta V_0}{\Delta f} = \frac{3.0\ \text{V} - (-1.0\ \text{V})}{1.00 \times 10^{15}\ \text{s}^{-1} - 0} = 4.0 \times 10^{-15}\ \text{J}\cdot\text{s/C}$$
$$h = \text{pendiente} \times e = (4.0 \times 10^{-15}\ \text{J}\cdot\text{s/C})(1.60 \times 10^{-19}\ \text{C})$$
$$= 6.4 \times 10^{-34}\ \text{J}\cdot\text{s}$$

EVALUAR: El valor de la constante de Planck h determinado por su experimento difiere un 3% del valor aceptado. El pequeño valor de $\phi = 1.0$ eV nos indica que la superficie del cátodo no solo está formada por uno de los elementos de la tabla 38.1.

Aplicación Esterilización con fotones de alta energía

Una técnica para eliminar microorganismos dañinos es iluminarlos con luz ultravioleta con una longitud de onda menor de 254 nm. Si un fotón de esta longitud de onda corta incide sobre una molécula de ADN dentro de un microorganismo, la energía del fotón es lo suficientemente grande para romper los enlaces dentro de la molécula. Esto hace que el microorganismo no pueda crecer o reproducirse. Esta irradiación germicida ultravioleta se utiliza para el saneamiento médico, para mantener estériles los laboratorios (como aquí se muestra) y para tratar tanto el agua potable como las aguas residuales.



Evalúe su comprensión de la sección 38.1 Las películas de silicio se vuelven mejores conductores eléctricos cuando se iluminan con fotones de 1.14 eV o más de energía; a este efecto se le llama *fotoconductividad*. ¿Cuál de las siguientes longitudes de onda de la radiación electromagnética causa la fotoconductividad en las películas de silicio? **i.** Luz ultravioleta con $\lambda = 300$ nm; **ii.** luz roja con longitud de onda $\lambda = 600$ nm; **iii.** luz infrarroja con $\lambda = 1200$ nm.



38.2 Luz emitida como fotones: Producción de rayos x

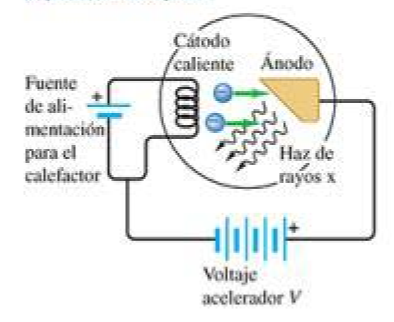
El efecto fotoeléctrico ofrece pruebas convincentes de que la luz se *absorbe* en forma de fotones. Los físicos aceptan el radical concepto de fotones de Einstein; sin embargo, también es necesario demostrar que la luz se *emite* en forma de fotones. Un experi-

mento que demuestra esto de forma convincente es el efecto fotoeléctrico inverso: en lugar de liberar electrones de una superficie haciendo incidir radiación electromagnética sobre ella, hacemos que una superficie emita radiación, específicamente, rayos x mediante el bombardeo de electrones con movimiento rápido.

Fotones de rayos x

El físico alemán Wilhelm Röntgen generó rayos x por primera vez en 1895, utilizando un aparato similar al que se muestra en la figura 38.7. Los electrones se liberan desde el cátodo por *emisión termoiónica*, en la que la energía de escape es suministrada por el calentamiento del cátodo a una temperatura muy alta. (Como en el efecto fotoeléctrico, la energía mínima que debe tener cada electrón para escapar de la superficie del cátodo es igual a la función trabajo de la superficie. En este caso la energía es suministrada a los electrones por medio de calor y no por medio de luz). Los electrones se aceleran entonces hacia el ánodo por una diferencia de potencial V_{AC}. El bulbo es evacuado (presión residual de 10^{-7} atm o menos), de modo que los electrones puedan viajar desde el cátodo hasta el ánodo, sin chocar con moléculas de aire. Cuando V_{AC} es de unos cuantos miles de volts o más, los rayos x se emiten por la superficie del ánodo.

38.7 Aparato utilizado para producir rayos x, similar al aparato de Röntgen en 1895.



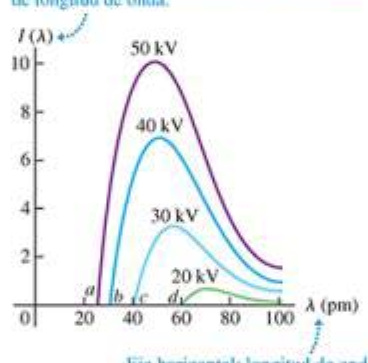
El ánodo produce rayos x, en parte, simplemente frenando de manera abrupta a los electrones. (Recuerde de la sección 32.1 que las cargas aceleradas emiten ondas electromagnéticas). Este proceso se denomina *bremsstrahlung* (en alemán "radiación de frenado"). Como los electrones experimentan aceleraciones de magnitud muy grande, emiten gran parte de su radiación a longitudes de onda cortas en el rango de rayos x, aproximadamente de 10^{-9} a 10^{-12} m (1 nm a 1 pm). (Longitudes de onda de rayos x pueden medirse con bastante precisión mediante las técnicas de difracción de cristal, que hemos estudiado en la sección 36.6). La mayoría de los electrones se frenan por un serie de colisiones e interacciones con los átomos del ánodo, por lo que la radiación de frenado produce un espectro continuo de radiación electromagnética.

Como hicimos para el efecto fotoeléctrico en la sección 38.1, vamos a comparar lo que la teoría ondulatoria de Maxwell de la radiación electromagnética podría predecir sobre esta radiación considerando lo que se observa experimentalmente.

Predicción del modelo ondulatorio: Las ondas electromagnéticas que se producen cuando un electrón incide fuertemente en el ánodo deben ser análogas a las ondas de sonido producidas al chocar dos platillos. Estas ondas incluyen sonidos de todas las frecuencias. De forma análoga, los rayos x producidos por radiación de frenado deberían tener un espectro que incluya *todas* las frecuencias y, por lo tanto, *todas* las longitudes de onda

Resultado experimental: La figura 38.8 muestra los espectros *bremsstrahlung* usando el mismo cátodo y ánodo con cuatro diferentes voltajes de aceleración. Vemos que no se emiten todas las frecuencias y longitudes de onda de los rayos x: cada espectro tiene una frecuencia máxima $f_{\text{máx}}$ y una longitud de onda mínima $\lambda_{\text{mín}}$ correspondiente. A mayor diferencia de potencial V_{AC}, más alta será la frecuencia máxima y más corta la longitud de onda mínima.

38.8 Espectro continuo de rayos x que se produce cuando electrones acelerados por un voltaje V_{AC} hacen contacto con un objetivo de tungsteno. Las curvas representan diferentes valores de V_{AC}; los puntos a, b, c y d muestran la longitud de onda mínima para cada voltaje.



El modelo ondulatorio de la radiación electromagnética no logra explicar estos resultados experimentales, pero podemos entenderlos fácilmente mediante el modelo de fotón. Un electrón tiene su carga $-e$ y gana energía cinética $-eV_{AC}$ cuando se acelera a través de un aumento potencial V_{AC}. El fotón más energético (frecuencia más alta y longitud de onda más corta) se produce si el electrón se frena hasta pararse de una sola vez cuando hace contacto con el ánodo, de modo que la totalidad de su energía cinética es utilizada para producir un fotón, es decir,

$$eV_{AC} = hf_{\text{máx}} = \frac{hc}{\lambda_{\text{mín}}} \qquad \text{(radiación de frenado)} \qquad (38.6)$$

(En esta ecuación despreciamos la función trabajo del ánodo y de la energía cinética inicial de los electrones que "hierven" desde el cátodo. Estas energías son muy pequeñas en comparación con la energía cinética adquirida eV_{AC} debido a la diferencia

de potencial). Si solo se utiliza una parte de la energía cinética de un electrón para producir un fotón, la energía del fotón será menor que eV_{AC} y la longitud de onda será mayor que $\lambda_{mín}$. Como apoyo adicional para el modelo de fotón, los valores medidos de $\lambda_{mín}$ para diferentes valores de eV_{AC} (véase la figura 38.8) concuerdan con la ecuación (38.6). Observe que de acuerdo con la ecuación (38.6), la frecuencia máxima y la longitud de onda mínima en el proceso *bremsstrahlung* no dependen del material que se emplea como blanco, lo que también concuerda con el experimento. Así, se concluye que el modelo de fotón para la radiación electromagnética es válido tanto para la *emisión* como para la absorción de radiación.

El aparato que se muestra en la figura 38.7 también es capaz de generar rayos x por un segundo proceso en el que los electrones transfieren su energía cinética total o parcialmente a los átomos individuales dentro del objetivo. Resulta que este proceso no solo es congruente con el modelo de fotón para la radiación electromagnética, sino que también brinda información acerca de la estructura de los átomos. Volveremos a este proceso en la sección 41.5.

Ejemplo 38.4 Producción de rayos x



En un tubo de rayos x se aceleran electrones mediante una diferencia de potencial de 10.0 kV antes de que suceda el impacto con el blanco. Si un electrón produce un fotón al chocar con el blanco, ¿cuál es la longitud de onda mínima de los rayos x resultantes? Encuentre la respuesta expresando a las energías tanto en unidades del SI como en electrón volts.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Para producir un fotón de rayos x con longitud de onda mínima y, por consiguiente, con energía máxima, toda la energía cinética de un electrón debe transformarse y producir un solo fotón de rayos x. Usaremos la ecuación (38.6) para determinar la longitud de onda.

EJECUTAR: De la ecuación (38.6) y usando unidades del SI tenemos:

$$\lambda_{mín} = \frac{hc}{eV_{AC}} = \frac{(6.626 \times 10^{-34}\ \text{J}\cdot\text{s})(3.00 \times 10^{8}\ \text{m/s})}{(1.602 \times 10^{-19}\ \text{C})(10.0 \times 10^{3}\ \text{V})}$$

$$= 1.24 \times 10^{-10}\ \text{m} = 0.124\ \text{nm}$$

En electrón volts, se tiene que

$$\lambda_{mín} = \frac{hc}{eV_{AC}} = \frac{(4.136 \times 10^{-15}\ \text{eV}\cdot\text{s})(3.00 \times 10^{8}\ \text{m/s})}{e(10.0 \times 10^{3}\ \text{V})}$$

$$= 1.24 \times 10^{-10}\ \text{m} = 0.124\ \text{nm}$$

En el segundo cálculo la "e" para la magnitud de la carga del electrón se elimina con la "e" en las unidades "eV", ya que el electrón volt (eV) es la magnitud de la carga del electrón e por un volt (1 V).

EVALUAR: Para comprobar nuestro resultado, recordemos, del ejemplo 38.1, que un fotón de 1.91 eV de energía tiene una longitud de onda de 650 nm. En este ejemplo, la energía del electrón y, en consecuencia, la energía del fotón de rayos x es 10.0×10^{3} eV = 10.0 keV, aproximadamente 5000 veces mayor que en el ejemplo 38.1, y la longitud de onda es aproximadamente del valor en el ejemplo 38.1. Esto tiene sentido, ya que la longitud de onda y la energía del fotón son inversamente proporcionales.

Aplicaciones de los rayos x

Los rayos x tienen muchas aplicaciones prácticas en la medicina y la industria. Debido a que los fotones de rayos x son de alta energía, pueden penetrar varios centímetros de materia sólida. Por lo tanto, permiten visualizar el interior de los materiales que son opacos a la luz ordinaria, tales como huesos rotos o defectos en el acero estructural. El objeto a visualizar se coloca entre una fuente de rayos x y un detector electrónico (como el que se utiliza en una cámara fotográfica digital) o un trozo de película fotográfica. Cuanto más oscura es un área en la imagen registrada por un detector, mayor será la exposición a la radiación. Los huesos absorben rayos x con mayor eficiencia que el tejido blando, por lo que aparecen como áreas claras. Una grieta o burbuja de aire permite una gran transmisión y se muestra como una zona oscura.

38.9 Esta radióloga está operando un escáner TC (visto a través de una ventana) desde un cuarto separado para evitar la exposición repetida a los rayos x.



Una técnica de rayos x utilizada con frecuencia y mejorada enormemente es la *tomografía computarizada*; el instrumento correspondiente es el llamado *escáner TC*. La fuente de rayos x produce un haz delgado, en forma de abanico que se detecta en el lado opuesto del sujeto por una serie de varios cientos de detectores en línea. Cada detector mide la absorción a lo largo de una línea delgada a través del sujeto. Todo el aparato se gira alrededor del sujeto en el plano del haz, y las tasas de cambio de conteo de fotones de los detectores se registran digitalmente. Una computadora procesa esta información y reconstruye una imagen de la absorción a través de una sección trans-

versal completa del sujeto (véase la figura 38.9). Las diferencias en la absorción tan pequeñas como del 1% o menos se pueden detectar con TC; también permiten detectar tumores y otras anomalías que son demasiado pequeños para verse con técnicas antiguas de rayos x.

Los rayos x causan daño a los tejidos vivos. Cuando se absorben fotones de rayos x en los tejidos, su energía rompe los enlaces moleculares y crea radicales libres altamente reactivos (tales como H y OH neutros), que a la vez pueden alterar la estructura molecular de proteínas y material genético en particular. Las células jóvenes y que crecen con rapidez son particularmente susceptibles, por lo que los rayos x son útiles para la destrucción selectiva de células cancerosas. Sin embargo, a la inversa, es posible que una célula resulte dañada por la radiación pero aún así sobreviva, se siga dividiendo y produzca generaciones de células defectuosas; por ello, los rayos x pueden *causar* cáncer.

Aun cuando el propio organismo no muestre daño aparente, la exposición excesiva a los rayos x suele causar cambios en el sistema reproductivo del organismo que afectarán a la descendencia. Una evaluación cuidadosa del equilibrio entre los riesgos y beneficios de la exposición a la radiación es esencial en cada caso particular.

Aplicación Absorción de rayos x e imágenes médicas
Los electrones atómicos pueden absorber rayos x. Por consiguiente, los materiales con muchos electrones por átomo tienden a ser mejores para absorber rayos x que los materiales con pocos electrones. En esta imagen de rayos x, las zonas más claras muestran dónde se absorben los rayos x conforme pasan a través del cuerpo, mientras que las áreas más oscuras indican regiones que son relativamente transparentes a los rayos x. Los huesos contienen grandes cantidades de elementos tales como el fósforo y calcio, con 15 y 20 electrones por átomo, respectivamente. En el tejido blando, los elementos predominantes son hidrógeno, carbono y oxígeno, con solo 1, 6 y 8 electrones por átomo, respectivamente. Por lo tanto, los rayos x son absorbidos por los huesos, pero pueden pasar con relativa facilidad a través de los tejidos blandos.



Evalúe su comprensión de la sección 38.2 En el aparato que se muestra en la figura 38.7, supongamos que aumenta el número de electrones que son emitidos por el cátodo por segundo mientras se conserva la diferencia de potencial V_{AC}. ¿Cómo afectará la intensidad I y longitud de onda mínima $\lambda_{mín}$ de los rayos x emitidos? **i.** Tanto I como $\lambda_{mín}$ aumentan; **ii.** I aumenta, pero $\lambda_{mín}$ no cambiará; **iii.** I aumentará, pero $\lambda_{mín}$ disminuirá; **iv.** I seguirá igual, pero $\lambda_{mín}$ disminuirá; **v.** ninguno de estos casos.

38.3 Luz dispersada en forma de fotones: Dispersión de Compton y producción de pares

El aspecto final de la luz que debemos contrastar contra el modelo de fotón de Einstein es su comportamiento después de que se produce la luz y antes de que sea absorbida. Podemos hacer esto al considerar la *dispersión* de la luz. Como ya se analizó en la sección 33.6, la dispersión es el fenómeno que sucede cuando la luz rebota en partículas tales como las moléculas en el aire.

Dispersión de Compton

Vamos a ver qué predicen el modelo ondulatorio de Maxwell y el modelo del fotón de Einstein cuando la luz es dispersada por un solo electrón, por ejemplo, un electrón en un átomo.

Predicción del modelo de onda: En la descripción de onda, la dispersión sería un proceso de absorción y re-radiación. Parte de la energía de la onda de luz sería absorbida por el electrón, que oscila en respuesta al campo eléctrico oscilante de la onda. El electrón oscilante actuaría como una antena en miniatura (véase la sección 32.1), al re-irradiar su energía adquirida en forma de ondas dispersas en diferentes direcciones. La frecuencia a la que oscilan los electrones sería la misma que la frecuencia de la luz incidente, y la luz re-irradiada tendría la misma frecuencia que las oscilaciones del electrón. Así, *en el modelo de onda, la luz dispersada y la luz incidente tienen la misma frecuencia e igual longitud de onda.*

Predicción del modelo de fotón: En el modelo de fotón nos imaginamos el proceso de dispersión como una colisión de dos *partículas*: el fotón incidente y un electrón que se encuentra inicialmente en reposo (figura 38.10*a*). El fotón incidente cede parte de su energía y su momento lineal al electrón, que retrocede como consecuencia de este impacto. El fotón disperso que queda puede volar en una variedad de ángulos con respecto a la dirección incidente, pero tiene menos energía y menos momento lineal que el fotón incidente (figura 38.10*b*). La energía y el momento lineal de un fotón están dados por $E = hf = hc/\lambda$ (ecuación 38.2) y $p = hf/c = h/\lambda$ (ecuación 38.5). Por lo tanto, *en el modelo de fotón, la luz dispersada tiene una frecuencia f más baja y más larga de longitud de onda λ de la luz incidente.*

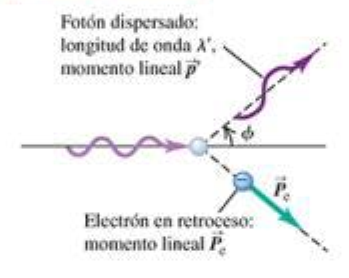
38.10 El modelo de fotón de luz dispersada por un electrón.

a) Antes de colisión: el electrón objetivo está en reposo.

Fotón incidente: longitud de onda λ, momento lineal $\vec{p}$

Electrón objetivo (en reposo)

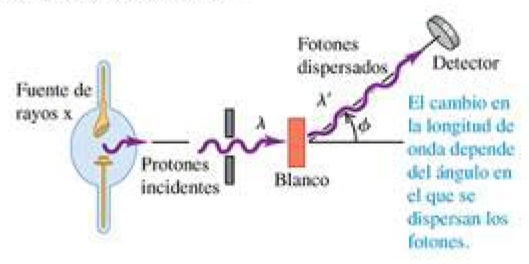
b) Después de la colisión: el ángulo entre las direcciones del fotón disperso y el fotón incidente es ϕ.





ActivPhysics 17.4: Compton Scattering

38.11 Un experimento de efecto Compton.



En 1922 el físico estadounidense Arthur H. Compton realizó el experimento definitivo que puso a prueba las predicciones de los modelos de ondas y del fotón. En su experimento, Compton apuntó un haz de rayos x en un objetivo sólido y midió la longitud de onda de la radiación dispersada por el objetivo (figura 38.11). Se descubrió que algo de la radiación dispersada tiene menor frecuencia (mayor longitud de onda) que la radiación incidente, y que el cambio en la longitud de onda depende del ángulo a través del cual se dispersa la radiación. Esto es precisamente lo que predice el modelo de fotón de la luz dispersada por los electrones en el objetivo, un proceso que ahora se llama **dispersión de Compton**.

Específicamente, si la radiación dispersada emerge en un ángulo ϕ con respecto a la dirección incidente, como se muestra en la figura 38.11, y si λ y λ' son las longitudes de onda de la radiación incidente y dispersada, respectivamente, Compton encontró que

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{mc}(1 - \cos\phi) \qquad \text{(dispersión de Compton)} \qquad (38.7)$$

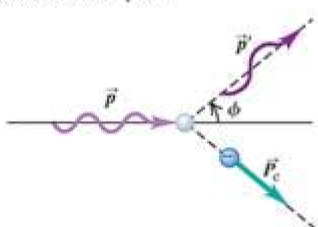
donde m es la masa en reposo del electrón. En otras palabras, λ' es mayor que λ. La cantidad h/mc que aparece en la ecuación (38.7) tiene unidades de longitud. Su valor numérico es

$$\frac{h}{mc} = \frac{6.626 \times 10^{-34}\ \text{J}\cdot\text{s}}{(9.109 \times 10^{-31}\ \text{kg})(2.998 \times 10^{8}\ \text{m/s})} = 2.426 \times 10^{-12}\ \text{m}$$

Compton demostró que la teoría del fotón de Einstein, junto con los principios de conservación de la energía y la conservación del momento lineal, ofrece una explicación atractivamente clara de sus resultados experimentales. Planteamos la deducción a continuación. La energía de retroceso de electrones podría estar en el intervalo relativista, por lo que se tienen que utilizar las relaciones relativistas de momento lineal-energía, ecuaciones (37.39) y (37.40). El fotón incidente tiene una momento lineal $\vec{p}$, con magnitud p y energía pc. El fotón dispersado tiene momento lineal $\vec{p}\,'$, con magnitud p' y energía $p'c$. El electrón está inicialmente en reposo, por lo que su momento lineal inicial es cero y su energía inicial es la energía en reposo mc^2. El momento lineal final $\vec{P}_e$ del electrón tiene magnitud P_e, y la energía final del electrón está dada por $E_e{}^2 = (mc^2)^2 + (P_ec)^2$. Entonces, la conservación de la energía nos da la relación

$$pc + mc^2 = p'c + E_e$$

38.12 Diagrama vectorial que muestra la conservación del momento lineal de la dispersión de Compton.



Reorganizando, encontramos

$$(pc - p'c + mc^2)^2 = E_e{}^2 = (mc^2)^2 + (P_ec)^2 \qquad (38.8)$$

Podemos eliminar el momento lineal final $\vec{P}_e$ del electrón de la ecuación (38.8) usando la conservación del momento lineal. En la figura 38.12 vemos que $\vec{p} = \vec{p}\,' + \vec{P}_e$, o

$$\vec{P}_e = \vec{p} - \vec{p}\,' \qquad (38.9)$$

Tomando el producto escalar de cada vector consigo mismo en cada lado de la ecuación (38.9), encontramos

$$P_e^2 = p^2 + p'^2 - 2pp'\cos\phi \tag{38.10}$$

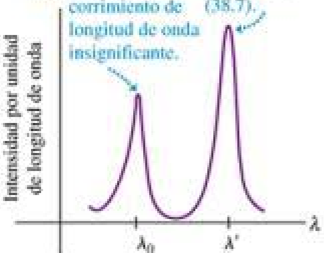
Ahora sustituimos esta expresión para P_e^2 en la ecuación (38.8) y se multiplica por el lado izquierdo. Dividimos entre un factor común c^2; varios términos se eliminan, y cuando la ecuación resultante se divide entre (pp'), se obtiene

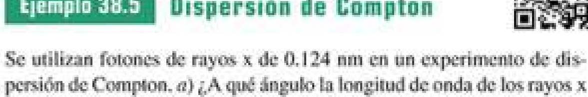
$$\frac{mc}{p'} - \frac{mc}{p} = 1 - \cos\phi \tag{38.11}$$

Por último, sustituimos $p' = h/\lambda'$ y $p = h/\lambda$ y luego multiplicamos por h/mc para obtener la ecuación (38.7).

Cuando se miden las longitudes de onda de los rayos x dispersados en un ángulo determinado, la curva de intensidad por unidad de longitud de onda como una función de longitud de onda tiene dos picos (figura 38.13). El pico de mayor longitud de onda representa la dispersión de Compton. La longitud de onda de menor pico, designada como λ_0, está en la longitud de onda de los rayos x incidentes y corresponde a la dispersión de rayos x de electrones fuertemente unidos. En estos procesos de dispersión, el átomo debe retroceder, por lo que la m de la ecuación (38.7) es la masa del átomo entero, más que de un solo electrón. Los corrimientos de longitud de onda resultantes son insignificantes.

38.13 Intensidad como función de la longitud de onda para fotones dispersados en un ángulo de 135° en un experimento de dispersión de Compton.





Ejemplo 38.5 Dispersión de Compton

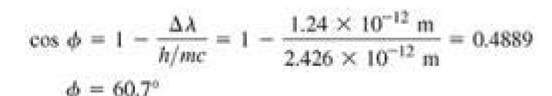
Se utilizan fotones de rayos x de 0.124 nm en un experimento de dispersión de Compton. *a)* ¿A qué ángulo la longitud de onda de los rayos x dispersados es 1.0% mayor que la de los rayos x incidentes? *b)* ¿A qué ángulo es 0.050% mayor?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Usaremos la relación entre el ángulo de dispersión y el corrimiento de longitud de onda en el efecto Compton. En cada caso, nuestra incógnita es el ángulo ϕ (véase la figura 38.10*b*). Despejamos ϕ usando la ecuación (38.7).

EJECUTAR: *a)* En la ecuación (38.7) queremos que $\Delta\lambda = \lambda' - \lambda$ sea el 1.0% de 0.124 nm, por lo que $\Delta\lambda = 0.00124\ \text{nm} = 1.24 \times 10^{-12}$ m. Usando el valor $h/mc = 2.426 \times 10^{-12}$ m, encontramos

$$\Delta\lambda = \frac{h}{mc}(1 - \cos\phi)$$



$$\cos\phi = 1 - \frac{\Delta\lambda}{h/mc} = 1 - \frac{1.24 \times 10^{-12}\ \text{m}}{2.426 \times 10^{-12}\ \text{m}} = 0.4889$$

$$\phi = 60.7°$$

b) Para que $\Delta\lambda$ sea 0.050% de 0.124 nm, es decir, 6.2×10^{-14} m,

$$\cos\phi = 1 - \frac{6.2 \times 10^{-14}\ \text{m}}{2.426 \times 10^{-12}\ \text{m}} = 0.9744$$

$$\phi = 13.0°$$

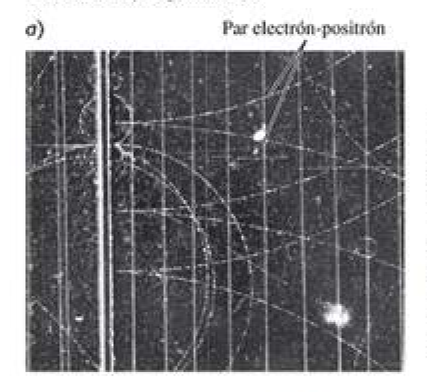
EVALUAR: Nuestros resultados muestran que los pequeños ángulos de dispersión dan pequeños corrimientos de longitud de onda. Así, en una colisión rasante del fotón, la pérdida de energía y la energía de retroceso de electrones son más pequeñas que cuando el ángulo de dispersión es más grande. Esto es justo lo que se podría esperar para una colisión elástica, ya sea entre un fotón y un electrón o entre dos bolas de billar.

Producción de pares

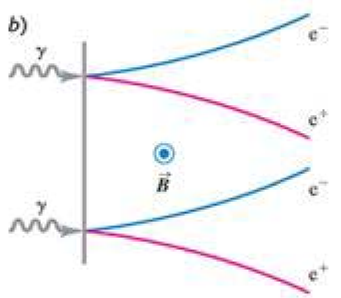
Otro efecto que se explica solo con el modelo de fotón implica a los *rayos gamma*, la radiación electromagnética de longitud de onda más corta y frecuencia más alta. Si un fotón de rayos gamma de longitud de onda suficientemente corta se dispara a un objetivo, tal vez no se disperse. En vez de ello, como se representa en la figura 38.14, podría desaparecer completamente y sustituirse por dos nuevas partículas: un electrón y un **positrón** (una partícula que tiene la misma masa m en reposo que un electrón, pero tiene una carga positiva en lugar de la carga negativa $-e$ del electrón). Este proceso, llamado **producción de pares**, fue observado por primera vez por los físicos Patrick Blackett y Giuseppe Occhialini en 1933. El electrón y el positrón se tienen que producir en pares para conservar la carga eléctrica: el fotón incidente tiene carga cero, y el par electrón-positrón tiene una carga neta $(-e) + (+e) = 0$. Debe haber suficiente energía para la energía en reposo $2mc^2$ de las dos partículas. Con cuatro cifras significativas, esta energía mínima es

38.14 *a*) Fotografía de las trazas dejadas por pares electrón-positrón en una cámara de niebla que se producen cuando fotones de 300 MeV chocan contra una lámina de plomo. Un campo magnético dirigido hacia afuera de la fotografía hace que los electrones (e^-) y positrones (e^+) se curven en direcciones opuestas. *b*) Diagrama que muestra el proceso de producción de pares de dos de los fotones de rayos gamma (γ).

a)



b)





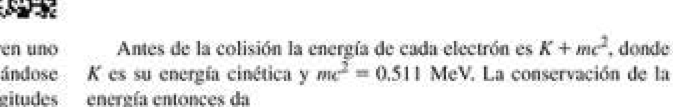
$$E_{\text{mín}} = 2mc^2 = 2(9.109 \times 10^{-31}\ \text{kg})(2.998 \times 10^8\ \text{m/s})^2$$
$$= 1.637 \times 10^{-13}\ \text{J} = 1.022\ \text{MeV}$$

Así, el fotón debe tener al menos esta cantidad de energía para producir un par electrón-positrón. De acuerdo con la ecuación (38.2), $E = hc/\lambda$, la longitud de onda del fotón tiene que ser más corta que

$$\lambda_{\text{máx}} = \frac{hc}{E_{\text{mín}}} = \frac{(6.626 \times 10^{-34}\ \text{J} \cdot \text{s})(2.998 \times 10^8\ \text{m/s})}{1.637 \times 10^{-13}\ \text{J}}$$
$$= 1.213 \times 10^{-12}\ \text{m} = 1.213 \times 10^{-3}\ \text{nm} = 1.213\ \text{pm}$$

Esta es una longitud de onda muy corta, aproximadamente $\frac{1}{1000}$ tan grande como las longitudes de onda de rayos x que Compton utilizó en sus experimentos de dispersión. (La energía del fotón mínima requerida es en realidad un poco mayor que 1.022 MeV, por lo que la longitud de onda del fotón debe ser un poco menos de 1.213 pm. La razón es que cuando el fotón incidente encuentra un núcleo atómico en el objetivo, una parte de la energía del fotón se convierte en energía cinética del núcleo en retroceso). Al igual que para el efecto fotoeléctrico, el modelo de onda de la radiación electromagnética no explica por qué la producción de pares solo se produce cuando se utilizan longitudes de onda muy cortas.

El proceso inverso, *la aniquilación del par electrón-positrón*, ocurre cuando chocan un positrón y un electrón. Ambas partículas desaparecen, y dos (o en ocasiones tres) fotones pueden aparecer con la energía total de al menos $2m_ec^2 = 1.022$ MeV. El decaimiento en un *solo* fotón es imposible, ya que ese proceso no puede conservar tanto la energía como el momento lineal. Es más fácil analizar este proceso de aniquilación en el marco de referencia llamado *sistema del centro de momento lineal*, en el que el momento lineal total es cero. Es la generalización relativista del sistema centro de masa que se analizó en la sección 8.5.



Ejemplo 38.6 Aniquilación de pares

Un electrón y un positrón, inicialmente muy distantes, se mueven uno hacia el otro con la misma velocidad. Chocan de frente, aniquilándose entre sí y produciendo dos fotones. Encuentre las energías, longitudes de onda y las frecuencias de los fotones si las energías cinéticas iniciales del electrón y del positrón son *a*) ambas insignificantes y *b*) ambas de 5.000 MeV. La energía en reposo del electrón es 0.511 MeV.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Al igual que en las colisiones elásticas que estudiamos en el capítulo 8 (vol. 1), tanto el momento lineal como la energía se conservan en la aniquilación del par. El electrón y el positrón están inicialmente muy distantes, por lo que la energía potencial inicial eléctrica es cero y la energía inicial es la suma de las energías cinética y en reposo de las partículas. La energía final es la suma de las energías de los fotones. El momento lineal inicial total es cero, así que el momento lineal total de los dos fotones también debe ser cero. Encontramos la energía E del fotón recurriendo a la conservación de la energía, la conservación del momento lineal y la relación $E = pc$ (véase la sección 38.1). Después, calculamos las longitudes de onda y las frecuencias utilizando $E = hc/\lambda = hf$.

EJECUTAR: Si el momento lineal total de los dos fotones es igual a cero, sus momentos lineales deben tener magnitudes iguales p y direcciones opuestas. A partir de $E = pc = hc/\lambda = hf$, los dos fotones también deben tener la misma energía E, longitud de onda λ y frecuencia f.

Antes de la colisión la energía de cada electrón es $K + mc^2$, donde K es su energía cinética y $mc^2 = 0.511$ MeV. La conservación de la energía entonces da

$$(K + mc^2) + (K + mc^2) = E + E$$

Por lo tanto, la energía de cada fotón es $E = K + mc^2$.

a) En este caso la energía cinética de electrones es despreciable comparada con su energía en reposo mc^2, por lo que cada fotón tiene una energía $E = mc^2 = 0.511$ MeV. La longitud de onda del fotón correspondiente y la frecuencia son

$$\lambda = \frac{hc}{E} = \frac{(4.136 \times 10^{-15}\ \text{eV} \cdot \text{s})(3.00 \times 10^8\ \text{m/s})}{0.511 \times 10^6\ \text{eV}}$$
$$= 2.43 \times 10^{-12}\ \text{m} = 2.43\ \text{pm}$$
$$f = \frac{E}{h} = \frac{0.511 \times 10^6\ \text{eV}}{4.136 \times 10^{-15}\ \text{eV} \cdot \text{s}} = 1.24 \times 10^{20}\ \text{Hz}$$

b) En este caso, $K = 5.000$ MeV, por lo que cada fotón tiene una energía $E = 5.000\ \text{MeV} + 0.511\ \text{MeV} = 5.511$ MeV. Procediendo como en el inciso *a*), usted podrá demostrar que la longitud de onda del fotón es 0.2250 pm y que la frecuencia es 1.333×10^{21} Hz.

EVALUAR: Como una comprobación, recuerde del ejemplo 38.1 que un fotón de 650 nm de luz visible tiene una energía de 1.91 eV y frecuencia de 4.62×10^{14} Hz. La energía de los fotones en el inciso *a*) es aproximadamente 2.5×10^5 veces mayor. Como era de esperar, la longitud de onda del fotón es más corta y su frecuencia superior a las de un fotón de luz visible por el mismo factor. Compruebe los resultados del inciso *b*) de la misma manera.

Evalúe su comprensión de la sección 38.3 Si utilizó fotones de luz visible en el experimento que se muestra en la figura 38.11, ¿los fotones podrían experimentar un corrimiento de la longitud de onda debido a la dispersión? Si es así, ¿es posible detectar el corrimiento con el ojo humano?

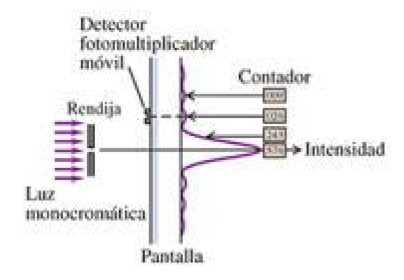
38.4 Dualidad onda-partícula, probabilidad e incertidumbre

Hemos estudiado muchos ejemplos del comportamiento de la luz y de otras radiaciones electromagnéticas. Algunos, que incluyen los efectos de interferencia y difracción descritos en los capítulos 35 y 36, demuestran de manera concluyente la naturaleza *ondulatoria* de la luz. Por otro lado, los temas de este capítulo apuntan con la misma fuerza a la naturaleza *corpuscular* de la luz. A primera vista, estos dos aspectos parecen estar en conflicto directo. ¿Cómo es posible que la luz sea una onda y una partícula al mismo tiempo?

Podemos encontrar la respuesta a este aparente conflicto onda-partícula en el **principio de complementariedad**, establecido por primera vez por el físico danés Niels Bohr en 1928. Las descripciones de onda y de partícula son complementarias. Es decir, se necesitan ambas para completar nuestro modelo de la naturaleza, pero nunca se utilizarán las dos a la vez para describir una sola parte de un suceso.

Difracción e interferencia en la descripción del fotón

Vamos a empezar por considerar de nuevo el patrón de difracción de una sola rendija, que se analizó en las secciones 36.2 y 36.3. En lugar de registrar el patrón en un chip de la cámara digital o en una película fotográfica, se utiliza un detector llamado un *fotomultiplicador*, que en realidad puede detectar cada uno de los fotones. Usando la configuración que se muestra en la figura 38.15, se coloca el fotomultiplicador en varias posiciones para intervalos de tiempo iguales, se cuentan los fotones en cada posición y se hace la gráfica de la distribución de intensidades.



38.15 Patrón de difracción de la luz con una sola rendija observada con un fotomultiplicador móvil. La curva muestra la distribución de la intensidad predicha por el modelo ondulatorio. La distribución de fotones se muestra por el número de fotones contados en distintas posiciones.

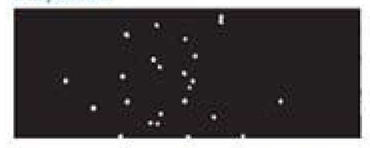
Se encuentra que, en promedio, la distribución de fotones concuerda con nuestras predicciones de la sección 36.3. En los puntos correspondientes a los máximos del patrón, contamos muchos fotones; en los puntos mínimos, no contamos casi ninguno, y así sucesivamente. La gráfica de los conteos en varios puntos da el mismo patrón de difracción que se predijo con la ecuación (36.7).

Pero ahora supongamos que se reduce la intensidad a un nivel tan bajo que solo pasan algunos fotones por segundo a través de la rendija. Ahora registramos una serie de golpes discretos, cada uno representando a un solo fotón. Aunque *no podemos predecir* dónde incidirá algún fotón dado, con el tiempo se acumulan los golpes construyendo el patrón de difracción familiar que esperamos para una onda. Para reconciliar los aspectos de onda y de partícula de este modelo, tenemos que considerar el diseño como una distribución *estadística* que nos dice cuántos fotones, en promedio, caen en cada punto. De manera equivalente, el modelo nos indica la *probabilidad* de que cada fotón caiga en un punto dado. Si brilla un haz de luz tenue en un aparato de doble rendija, se obtiene un resultado análogo (figura 38.16). Una vez más no podemos predecir exactamente dónde chocará cada fotón; el patrón de interferencia es una distribución estadística.

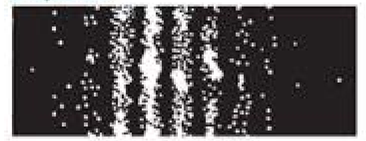
¿Cómo se aplica el principio de complementariedad a estos experimentos de interferencia y difracción? La descripción ondulatoria, no la descripción de partícula, explica los patrones de una y de dos rendijas. Pero la descripción de partícula, no la descripción de onda, explica por qué el fotomultiplicador registra paquetes discretos de energía. Las dos descripciones completan nuestra comprensión de los resultados. Por ejemplo, supongamos que consideramos cada fotón y nos preguntamos "qué camino seguirá" al pasar a través de la rendija. Esta pregunta parece un acertijo, pero esto es porque está enmarcada en términos de una descripción de *partícula*, mientras que la naturaleza *ondulatoria* de la luz determina la distribución de los fotones. A la inversa,

38.16 Estas imágenes registran las posiciones donde cada uno de los fotones en un experimento de interferencia de doble rendija pega en la pantalla. A medida que más fotones llegan a la pantalla, aparece un patrón de interferencia reconocible.

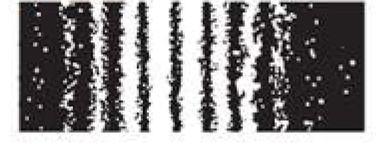
Después de que 21 fotones han llegado a la pantalla:



Después de que 1000 fotones han llegado a la pantalla:



Después de que 10,000 fotones han llegado a la pantalla:



el hecho de que el fotomultiplicador detecte la luz débil como una secuencia de "puntos" no se puede explicar en términos de onda.

MasteringPHYSICS

PhET: Fourier: Making Waves
PhET: Quantum Wave Interference
ActivPhysics 17.6: Uncertainty Principle

Probabilidad e incertidumbre

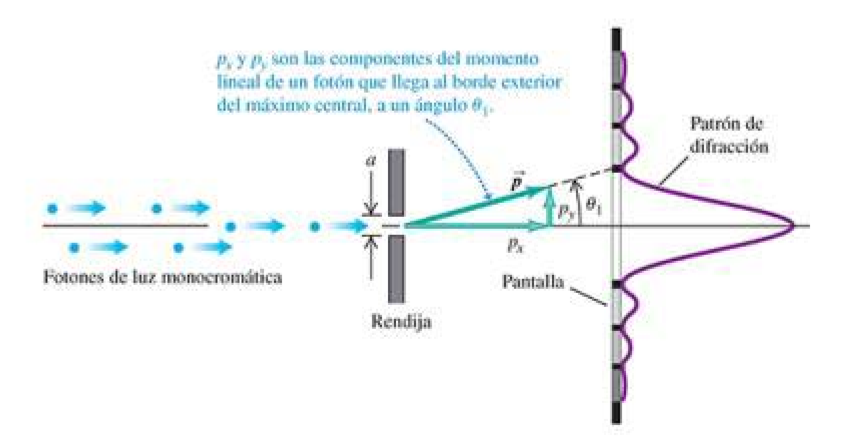
Si bien los fotones tienen una energía y un momento lineal, son muy diferentes del modelo de partículas que se utilizó para la mecánica newtoniana en los capítulos 4 a 8 (vol. 1). El modelo de partículas de Newton trata un objeto como una masa puntual. Podemos describir la ubicación y el estado de movimiento de una partícula en cualquier instante con tres coordenadas espaciales y tres componentes del momento lineal, y entonces es posible predecir el movimiento futuro de la partícula. Este modelo no funciona en absoluto para los fotones; sin embargo, *no podemos* tratar un fotón como un objeto puntual. Esto es porque hay limitaciones fundamentales en la precisión con la que se puede determinar, simultáneamente, la posición y el momento lineal de un fotón. Muchos aspectos del comportamiento de un fotón se establecen en términos de *probabilidades*. (En el capítulo 39 veremos que las ideas no newtonianas que desarrollamos para fotones en esta sección también se aplican a partículas tales como los electrones).

Para obtener una visión más clara acerca del problema de la medición de la posición de un fotón y del momento lineal al mismo tiempo, observemos de nuevo a la difracción de una sola rendija de luz (figura 38.17). Supongamos que la longitud de onda λ es mucho menor que el ancho de la rendija a. Entonces, la mayoría (el 85%) de los fotones entran en el máximo central del patrón de difracción, y el resto entra en otras partes del patrón. Usamos θ_1 para denotar el ángulo entre el máximo central y el primer mínimo. Usando la ecuación (36.2) con $m = 1$, encontramos que θ_1 está dado por sen $\theta_1 = \lambda/a$. Puesto que suponemos que $\lambda = a$, se deduce que θ_1 es muy pequeño, sen θ_1 es casi igual a θ_1 (en radianes), y

$$\theta_1 = \frac{\lambda}{a} \qquad (38.12)$$

A pesar de que los fotones tienen el mismo estado inicial del movimiento, no todos siguen la misma trayectoria. No podemos predecir la trayectoria exacta de cada fotón a partir del conocimiento de su estado inicial, solo podemos describir la *probabilidad* que tiene cada fotón de llegar a un punto dado en la pantalla. Esta indeterminación fundamental no tiene contraparte en la mecánica newtoniana.

Además, existen *incertidumbres* fundamentales en la posición y el momento lineal de una partícula individual, y estas incertidumbres están relacionadas inseparablemente. Para aclarar este punto, regresemos a la figura 38.17. Un fotón que incide sobre la pantalla en el borde exterior del máximo central, a un ángulo θ_1, debe tener una componente de momento lineal p_y en la dirección y, así como una componente p_x en la dirección x, a pesar del hecho de que inicialmente el haz se dirige a lo largo del eje x. De la geometría de la situación, las dos componentes están relacionadas por $p_y/p_x = \tan\theta_1$. Como θ_1 es pequeño, podemos utilizar la aproximación $\tan\theta_1 = \theta_1$, y



38.17 Interpretación de una sola rendija de difracción en términos del momento lineal del fotón.

$$p_y = p_x\theta_1 \tag{38.13}$$

Al sustituir la ecuación (38.12) $\theta_1 = \lambda/a$, en la (38.13), se obtiene

$$p_y = p_x\frac{\lambda}{a} \tag{38.14}$$

La ecuación (38.14) dice que para el 85% de los fotones que llegan al detector dentro del máximo central (es decir, en ángulos entre $-\lambda/a$ y $+\lambda/a$), la componente y del momento lineal se extiende sobre un rango comprendido entre $-p_x\lambda/a$ y $+p_x\lambda/a$. Ahora consideremos *todos* los fotones que pasan a través de la rejilla y llegan a la pantalla. Una vez más, tal vez lleguen arriba o abajo del centro del patrón, por lo que su componente p_y puede ser positiva o negativa. Sin embargo, la simetría del patrón de difracción nos muestra el valor promedio $(p_y)_{med} = 0$. Habrá una *incertidumbre* Δp_y en la componente y del momento lineal al menos tan grande como $p_x\lambda/a$. Es decir,

$$\Delta p_y \geq p_x\frac{\lambda}{a} \tag{38.15}$$

Cuanto más estrecho sea el ancho de la rendija a, más amplio será el patrón de difracción y mayor será la incertidumbre en la componente y del momento lineal p_y.

La longitud de onda λ del fotón está relacionada con el momento lineal p_x por la ecuación (38.5), que podemos rescribir como $\lambda = h/p_x$. El uso de esta relación en la ecuación (38.15) y simplificando, se encuentra que

$$\Delta p_y \geq p_x\frac{h}{p_x a} = \frac{h}{a}$$

$$\Delta p_y a \geq h \tag{38.16}$$

¿Qué significa la ecuación (38.16)? El ancho de la rendija a representa una incertidumbre en la componente y de la *posición* de un fotón a medida que pasa a través de la rendija. No sabemos exactamente en *qué* parte de la rejilla pasa cada fotón. Así pues, tanto la posición y como la componente y del momento lineal tienen incertidumbres, y las dos incertidumbres están relacionadas por la ecuación (38.16). Podemos reducir la incertidumbre en el *momento lineal* Δp_y solo reduciendo el ancho del patrón de difracción. Para ello, hay que aumentar el ancho de la rendija a, lo que aumenta la incertidumbre de la *posición*. A la inversa, cuando *disminuye* la incertidumbre de la posición por el estrechamiento de la rendija, el patrón de difracción se amplía y *aumenta* la correspondiente incertidumbre del momento lineal.

Usted tal vez piense que el hecho de que un fotón no tenga posición y momento lineal definidos no parece congruente con el sentido común que. Pero cabe reiterar que lo que llamamos *sentido común* se basa en la familiaridad adquirida mediante la experiencia. Nuestra experiencia usual incluye muy poco contacto con el comportamiento microscópico de las partículas como los fotones. A veces tenemos que aceptar conclusiones que violan nuestra intuición, en especial cuando se trata de áreas que están muy alejadas de la experiencia cotidiana.

El principio de incertidumbre

En descripciones más generales de relaciones de incertidumbre, se suele describir la incertidumbre de una cantidad en función del concepto estadístico de *desviación estándar*, que es una medida de la extensión o dispersión de un conjunto de números con respecto a su valor promedio. Suponga que comenzamos a describir de este modo las incertidumbres [ni Δp_y ni a, en la ecuación (38.16), son desviaciones estándar]. Si una coordenada x tiene una incertidumbre Δx y si la componente respectiva del momento lineal p_x tiene una incertidumbre Δp_x, se sabe que las incertidumbres en la desviación estándar se relacionan, en general, con la desigualdad

$$\Delta x\,\Delta p_x \geq \hbar/2 \quad \text{(principio de incertidumbre de Heisenberg, para posición y momento lineal)} \tag{38.17}$$

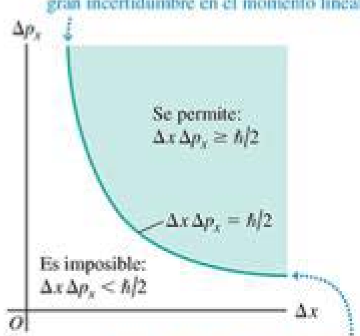
En esta expresión, la cantidad $\hbar$ (se lee "hache barra") es la constante de Planck dividida entre 2π:

$$\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1.054571628(53) \times 10^{-34}\ \text{J}\cdot\text{s}$$

Usaremos con frecuencia esta cantidad, para evitar escribir muchos factores 2π en las ecuaciones posteriores.

CUIDADO **h contra $\hbar$ barra** Es común que los estudiantes piensen en el valor de h cuando lo que realmente queremos es $\hbar = h/2\pi$, o viceversa. Tenga cuidado de no cometer el mismo error, o se encontrará preguntándose ¡por qué su respuesta está mal por un factor de 2π!

38.18 El principio de incertidumbre de Heisenberg para la posición y las componentes del momento lineal. Es imposible que el producto $\Delta x \Delta p_x$ sea menor que $\hbar/2 = h/4\pi$.



La ecuación (38.17) es una forma del **principio de incertidumbre de Heisenberg**, descubierto por el físico alemán Werner Heisenberg (1901-1976). Establece que, en general, ni la posición ni el momento lineal de una partícula se pueden determinar con una precisión arbitrariamente grande, como indicaba la física clásica. En vez de ello, las incertidumbres en las dos cantidades desempeñan papeles complementarios, como ya se explicó. La figura 38.18 muestra la relación entre las dos incertidumbres. Nuestra deducción de la ecuación (38.16) muestra una forma menos refinada del principio de incertidumbre dado por la ecuación (38.17), que indica que este principio tiene sus raíces en el aspecto ondulatorio de los fotones. En el capítulo 39 veremos que los electrones y otras partículas subatómicas tienen también un aspecto ondulatorio, por lo que se les aplica el mismo principio de incertidumbre.

Es tentador suponer que podríamos tener más precisión usando detectores más complejos de posición y de momento lineal. Pero eso no es posible. Para detectar una partícula, el detector debe *interactuar* con ella, y esa interacción modifica irremediablemente el estado de movimiento de la partícula, e introduce incertidumbre con respecto a su estado original. Por ejemplo, podríamos imaginarnos colocar un electrón en un cierto punto en el medio de la rendija en la figura 38.17. Si el fotón pasa por la mitad, veríamos al electrón de retroceso. Sabríamos entonces que el fotón pasa por ese punto en la rendija, y tendríamos más certeza de la coordenada x del fotón. Sin embargo, la colisión entre el fotón y el electrón cambiaría el momento lineal del fotón, dándonos una mayor incertidumbre en el valor de ese momento lineal. Un análisis más detallado de tales experimentos hipotéticos demuestra que las incertidumbres que hemos descrito son fundamentales e intrínsecas. *No se pueden evitar ni siquiera en principio* mediante ninguna técnica experimental, independientemente de lo compleja que sea.

No hay nada especial en el eje x. En un caso tridimensional, con coordenadas (x, y, z), hay una relación de incertidumbre para cada coordenada y su correspondiente componente de momento lineal: $\Delta x \Delta p_x \geq \hbar/2$, $\Delta y \Delta py \geq \hbar/2$ y $\Delta z \Delta p_z \geq \hbar/2$. Sin embargo, la incertidumbre en una coordenada *no* se relaciona con la de una componente diferente del momento lineal. Por ejemplo, Δx no se relaciona en forma directa con Δp_y.

Ondas e incertidumbre

Ahora presentamos una manera alternativa de entender el principio de incertidumbre de Heisenberg en términos de las propiedades de las ondas. Considere una onda electromagnética sinusoidal que se propaga en la dirección x positiva con su campo eléctrico polarizado en la dirección y. Si la onda tiene una longitud de onda λ, frecuencia f y amplitud A, la función de onda se escribe como

$$E_y(x, t) = A\,\text{sen}(kx - \omega t) \qquad (38.18)$$

En esta expresión el número de onda es $k = 2\pi/\lambda$ y la frecuencia angular es $\omega = 2\pi f$. Podemos pensar en la función de onda de la ecuación (38.18) como una descripción de un fotón con una longitud de onda y una frecuencia definidas. En términos de k y ω podemos expresar el momento lineal y la energía del fotón como

$$p_x = \frac{h}{\lambda} = \frac{h}{2\pi}\frac{2\pi}{\lambda} = \hbar k \qquad \text{(momento lineal del fotón en términos del número de onda)} \qquad (38.19a)$$

$$E = hf = \frac{h}{2\pi}2\pi f = \hbar\omega \qquad \text{(energía del fotón en términos de la frecuencia angular)} \qquad (38.19b)$$

Utilizando las ecuaciones (38.19) en la ecuación (38.18), podemos rescribir la ecuación de onda del fotón como

$$E_y(x, t) = A\,\text{sen}[(p_x x - Et)/\hbar] \qquad \text{(función de onda para un fotón con componente } x \text{ del momento lineal } p_x \text{ y energía } E) \qquad (38.20)$$

Puesto que esta función de onda tiene un valor definido para la componente x del momento lineal p_x, *no* hay incertidumbre en el valor de esta cantidad: $\Delta p_x = 0$. El principio de incertidumbre de Heisenberg, ecuación (38.17), dice que $\Delta x \Delta p_x \geq \hbar/2$. Si Δp_x es cero, entonces Δx debe ser infinita. En efecto, la onda descrita por la ecuación (38.20) se extiende a lo largo de todo el eje x y tiene la misma amplitud en todas partes. El precio que pagamos por conocer en forma precisa el momento lineal del fotón ¡es no tener idea de *dónde* se encuentra el fotón!

En situaciones prácticas, siempre tenemos *alguna* idea de dónde está un fotón. Para describir esta situación, necesitamos una función de onda que esté más localizada en el espacio. Podemos crear una mediante la superposición de dos o más funciones sinusoidales. Para simplificar, consideremos solo las ondas que se propagan en la dirección x positiva. Por ejemplo, vamos a sumar dos funciones de onda sinusoidal, como las de las ecuaciones (38.18) y (38.20), pero con longitudes de onda y frecuencias ligeramente diferentes, lo que significa valores ligeramente diferentes de componente x de momento lineal p_{x1} y p_{x2}, y valores de energía E_1 y E_2 que también difieren muy poco entre sí. La función de onda total es

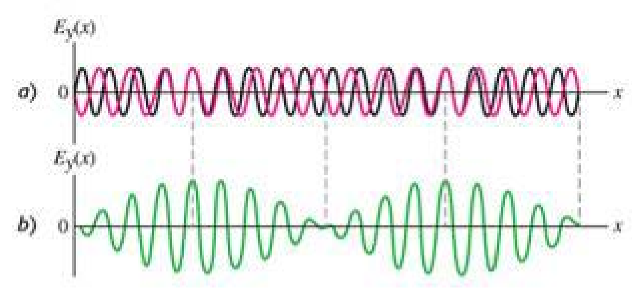
$$E_y(x, t) = A_1\,\text{sen}[(p_{1x}x - E_1t)/\hbar] + A_2\,\text{sen}[(p_{2x}x - E_2t)/\hbar] \qquad (38.21)$$

Considere cómo es esta función de onda en un instante dado del tiempo, por ejemplo, $t = 0$; así que la ecuación (38.21) será

$$E_y(x, t = 0) = A_1\,\text{sen}(p_{1x}x/\hbar) + A_2\,\text{sen}(p_{2x}x/\hbar) \qquad (38.22)$$

La figura 38.19*a* es una gráfica de cada una de las funciones de onda en $t = 0$ para el caso $A_2 = -A_1$, y la gráfica de la figura 38.19*b* es la función de onda combinada $E_y(x, t = 0)$ dada por la ecuación (38.22). Vimos algo muy similar a la figura 38.19*b* en nuestro análisis de pulsos de la sección 16.7: cuando dos ondas sinusoidales con frecuencias ligeramente diferentes se superponen (véase la figura 16.24), la onda resultante presenta variaciones en la amplitud que no están presentes en las ondas originales. De la misma manera, es más probable que un fotón representado por la función de onda en la ecuación (38.21) se encuentre en las regiones donde la amplitud de la función de onda es mayor. Es decir, el fotón está *localizado*. Sin embargo, el momento lineal del fotón ya no tiene un valor definido porque comenzamos con dos diferentes valores de la componente x del momento lineal, p_{x1} y p_{x2}. Esto concuerda con el principio de incertidumbre de Heisenberg: al reducir la incertidumbre en la posición del fotón, hemos aumentado la incertidumbre en su momento lineal.

38.19 *a*) Se muestran dos ondas sinusoidales con números de onda k ligeramente diferentes y, por ende, valores ligeramente distintos del momento lineal $p_x = \hbar k$ en un instante. *b*) La superposición de estas ondas tiene un momento lineal igual a la media de los dos valores del momento lineal. La amplitud varía, dando a la onda total un aspecto áspero que no tenía ninguna de las ondas originales.



Incertidumbre en la energía

Nuestro análisis de la combinación de ondas también muestra que hay un principio de incertidumbre que implica a la *energía* y al *tiempo*. Para ver por qué esto es así, imagine la medición de la función de onda combinada descrita por la ecuación (38.21) en una determinada posición, por ejemplo, $x = 0$, durante un periodo de tiempo. En $x = 0$ la función de onda de la ecuación (38.21) será

$$\begin{aligned} E_y(x, t) &= A_1 \operatorname{sen}(-E_1 t/\hbar) + A_2 \operatorname{sen}(-E_2 t/\hbar) \\ &= -A_1 \operatorname{sen}(E_1 t/\hbar) - A_2 \operatorname{sen}(E_2 t/\hbar) \end{aligned} \tag{38.23}$$

Lo que se mide en $x = 0$ es una combinación de dos campos eléctricos oscilantes con frecuencias angulares ligeramente diferentes $\omega_1 = E_1/\hbar$ y $\omega_2 = E_2/\hbar$. Esto es exactamente el fenómeno de los pulsos que analizamos en la sección 16.7 (compare con la figura 16.24). La amplitud del campo combinado aumenta y disminuye, por lo que el fotón descrito por este campo está localizado tanto en el *tiempo* como en la posición. Es más probable que el fotón se encuentre donde la amplitud es grande. El precio que pagamos por localizar los fotones en el tiempo es que la onda no tiene una energía definida. Por el contrario, si el fotón es descrito por una onda sinousoidal como en la ecuación (38.20), que *tiene* una energía definida E pero que muestra la misma amplitud en todo instante, no tenemos idea de cuándo aparecerá el fotón en $x = 0$. Así, cuanto mejor conocemos la energía del fotón, menos certeza tenemos de cuándo vamos a observarlo.

Al igual que sucede con el principio de incertidumbre de momento lineal-posición, podemos escribir una expresión matemática del principio de incertidumbre que relaciona la energía y el tiempo. De hecho, a no ser por un signo menos, la ecuación (38.23) es idéntica a la ecuación (38.22) si reemplazamos la componente x del momento lineal p_x por la energía E, y la posición x por el tiempo t. Esto nos dice que en la relación de incertidumbre momento lineal-posición, ecuación (38.17), podemos reemplazar la incertidumbre del momento lineal Δp_x por la incertidumbre de la energía ΔE y reemplazar la incertidumbre de la posición Δx por la incertidumbre de tiempo Δt. El resultado es

$$\Delta t\, \Delta E \geq \hbar/2 \quad \text{(principio de incertidumbre de Heinsenberg para la energía y el tiempo)} \tag{38.24}$$

En la práctica, cualquier fotón real tiene una extensión espacial limitada y, por consiguiente, pasa a cualquier punto en una cantidad limitada de tiempo. El siguiente ejemplo ilustra cómo esto afecta el momento lineal y la energía del fotón.

Ejemplo 38.7 Pulsos de láser ultracortos y el principio de incertidumbre



Muchas variedades de los láseres emiten luz en forma de pulsos en lugar de un haz estable. Un láser de telurio-zafiro produce luz con una longitud de onda de 800 nm en pulsos ultracortos que duran solo 4.00×10^{-15} s (4.00 femtosegundos, o 4.00 fs). La energía en un único pulso producido por dicho láser es de $2.00\ \mu\text{J} = 2.00 \times 10^{-6}$ J, y el pulso se propaga en la dirección x positiva. Determine *a*) la frecuencia de la luz, *b*) la energía y la mínima incertidumbre de energía de un solo fotón en el pulso; *c*) la mínima incertidumbre de la frecuencia de la luz en el pulso; *d*) la longitud espacial del pulso, en metros y como un múltiplo de la longitud de onda; *e*) el momento lineal y la mínima incertidumbre del momento lineal de un único fotón en el pulso, y *f*) el número aproximado de fotones en el pulso.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Es importante distinguir entre el pulso de luz en su conjunto (que contiene un gran número de fotones) y un fotón individual dentro del pulso. La duración del pulso de 5.00 fs representa el tiempo que tarda el pulso a emerger del láser; también es la *incertidumbre* de tiempo para un fotón individual dentro del pulso, ya que no sabemos cuándo emerge el fotón durante el pulso. Del mismo modo, la incertidumbre de la posición de un fotón es la longitud espacial del pulso, ya que un fotón dado se puede encontrar en cualquier lugar dentro del pulso. Para encontrar nuestras incógnitas, vamos a utilizar las relaciones de la energía del fotón y del momento lineal de la sección 38.1 y los dos principios de incertidumbre de Heisenberg, ecuaciones (38.17) y (38.24).

EJECUTAR: *a*) A partir de la relación $c = \lambda f$, la frecuencia de luz de 800 nm es

$$f = \frac{c}{\lambda} = \frac{3.00 \times 10^8\ \text{m/s}}{8.00 \times 10^{-7}\ \text{m}} = 3.75 \times 10^{14}\ \text{Hz}$$

b) De acuerdo con la ecuación (38.2), la energía de un solo fotón de 800 nm es

$$\begin{aligned} E = hf &= (6.626 \times 10^{-34}\ \text{J}\cdot\text{s})(3.75 \times 10^{14}\ \text{Hz}) \\ &= 2.48 \times 10^{-19}\ \text{J} \end{aligned}$$

La incertidumbre de tiempo es igual a la duración del pulso, $\Delta t = 4.00 \times 10^{-15}$ s. De acuerdo con la ecuación (38.24), la mínima incertidumbre de la energía corresponde al caso $\Delta t\, \Delta E = \hbar/2$, por lo que

$$\Delta E = \frac{\hbar}{2\Delta t} = \frac{1.055 \times 10^{-34}\ \text{J}\cdot\text{s}}{2(4.00 \times 10^{-15}\ \text{s})} = 1.32 \times 10^{-20}\ \text{J}$$

Esto es 5.3% de la energía del fotón $E = 2.48 \times 10^{-19}$ J, por lo que la energía de un fotón dado tiene una incertidumbre de al menos 5.3%. La incertidumbre podría ser mayor, dependiendo de la forma del pulso.

c) A partir de la relación $f = E/h$, la mínima incertidumbre de la frecuencia es

$$\Delta f = \frac{\Delta E}{h} = \frac{1.32 \times 10^{-20}\ \text{J}}{6.626 \times 10^{-34}\ \text{J}\cdot\text{s}} = 1.99 \times 10^{13}\ \text{Hz}$$

Este es el 5.3% de la frecuencia $f = 3.75 \times 10^{14}$ Hz que encontramos en el inciso *a*). Por lo tanto, estos pulsos ultracortos no tienen una frecuencia definida; la frecuencia media de muchos pulsos será 3.75×10^{14} Hz, pero la frecuencia de cualquier pulso individual podría estar en cualquier lugar entre el 5.3% superior y el 5.3% inferior.

d) La longitud espacial Δx del pulso es la distancia que viaja el frente del pulso durante el tiempo $\Delta t = 4.00 \times 10^{-15}$ s que le toma al pulso emerger desde el láser:

$$\Delta x = c\Delta t = (3.00 \times 10^{8}\ \text{m/s})(4.00 \times 10^{-15}\ \text{s}) = 1.20 \times 10^{-6}\ \text{m}$$

$$\Delta x = \frac{1.20 \times 10^{-6}\ \text{m}}{8.00 \times 10^{-7}\ \text{m/longitud de onda}} = 1.50\ \text{longitudes de onda}$$

Esto justifica el término *ultracorto*. ¡El pulso es menor que dos longitudes de onda de largo!

e) De la ecuación (38.5), el momento lineal de un fotón promedio en el pulso es

$$p_x = \frac{E}{c} = \frac{2.48 \times 10^{-19}\ \text{J}}{3.00 \times 10^{8}\ \text{m/s}} = 8.28 \times 10^{-28}\ \text{kg}\cdot\text{m/s}$$

La incertidumbre espacial es $\Delta x = 1.20 \times 10^{-6}$ m. De acuerdo con la ecuación (38.17) la mínima incertidumbre del momento lineal corresponde a $\Delta x\, \Delta p_x = \hbar/2$, por lo que

$$\Delta p_x = \frac{\hbar}{2\Delta x} = \frac{1.055 \times 10^{-34}\ \text{J}\cdot\text{s}}{2(1.20 \times 10^{-6}\ \text{m})} = 4.40 \times 10^{-29}\ \text{kg}\cdot\text{m/s}$$

Este es el 5.3% del momento lineal promedio p_x del fotón. Un fotón en el pulso puede tener un momento lineal que es 5.3% mayor o menor que el promedio.

f) Para estimar el número de fotones en el pulso, dividimos la energía total del pulso entre la energía del fotón promedio:

$$\frac{2.00 \times 10^{-6}\ \text{J/pulso}}{2.48 \times 10^{-19}\ \text{J/fotón}} = 8.06 \times 10^{12}\ \text{fotones/pulso}$$

La energía de un fotón individual tiene incertidumbre, por lo que este es el número *promedio* de fotones por pulso.

EVALUAR: Los porcentajes de incertidumbre en la energía y en el momento lineal son grandes, ya que este pulso de láser es muy corto. Si el pulso fuera más largo, Δt y Δx serían mayores y las correspondientes incertidumbres en la energía del fotón y en el momento lineal del fotón serían menores.

Nuestro cálculo en el inciso *f*) muestra una importante distinción entre fotones y otros tipos de partículas. En principio, es posible hacer un recuento exacto del número de electrones, protones y neutrones en un objeto como este libro. Si se repite el conteo, se obtendría la misma respuesta como la primera vez. Por el contrario, si se cuenta el número de fotones en un pulso de láser ¡*no* necesariamente se obtiene la misma respuesta cada vez! La incertidumbre en la energía del fotón significa que en cada recuento podría haber un número diferente de fotones cuyas energías sumen 2.00×10^{-6} J. Esta es una más de las muchas propiedades extrañas de los fotones.

Evalúe su comprensión de la sección 38.4 ¿Por cuál de los siguientes ángulos es más probable que un fotón de longitud de onda λ se desvíe después de pasar a través de una rendija de ancho a? Supongamos que λ es mucho menor que a. **i.** $\theta = \lambda/a$; **ii.** $q = 3\lambda/2a$; **iii.** $\theta = 2\lambda/a$; **iv.** $\theta = 3\lambda/a$; **v.** no hay suficiente información para determinarlo.

RESUMEN



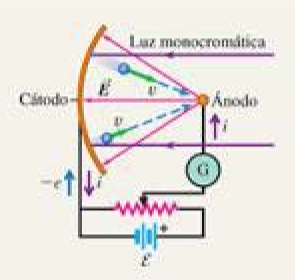
Fotones: La radiación electromagnética se comporta como ondas y como partículas. La energía en una onda electromagnética se propaga en paquetes llamados fotones. La energía E de un fotón es proporcional a la frecuencia de la onda f e inversamente proporcional a la longitud de onda λ; también es proporcional a una cantidad universal h llamada constante de Planck. El momento lineal de un fotón tiene magnitud E/c. (Véase el ejemplo 38.1).

$$E = hf = \frac{hc}{\lambda} \quad (38.2)$$

$$p = \frac{E}{c} = \frac{hf}{c} = \frac{h}{\lambda} \quad (38.5)$$

El efecto fotoeléctrico: En el efecto fotoeléctrico, una superficie puede expulsar un electrón mediante la absorción de un fotón cuya energía hf es mayor que o igual a la función trabajo ϕ del material. El potencial de frenado V_0 es el voltaje necesario para detener una corriente de electrones expulsados e impedir que lleguen al ánodo. (Véase los ejemplos 38.2 y 38.3).

$$eV_0 = hf - \phi \quad (38.4)$$



Producción de fotones, dispersión de fotones y producción de pares: Los rayos x se producen cuando electrones acelerados con una alta energía cinética que pasan a través de un aumento de potencial V_{AC} chocan con un blanco. El modelo de fotón explica por qué la frecuencia máxima y mínima longitud de onda que se producen están dadas por la ecuación (38.6). (Véase el ejemplo 38.4). En la dispersión de Compton un fotón transfiere parte de su energía y momento lineal al electrón con el que colisiona. Para los electrones libres (de masa m), las longitudes de onda de los fotones dispersados e incidentes están relacionadas con el ángulo de dispersión ϕ del fotón mediante la ecuación (38.7). (Véase el ejemplo 38.5). En la producción de pares, un fotón de energía suficiente puede desaparecer y ser reemplazado por un par electrón-positrón. En el proceso inverso, un electrón y un positrón se pueden aniquilar y reemplazarse por un par de fotones. (Véase el ejemplo 38.6).

$$eV_{AC} = hf_{\text{máx}} = \frac{hc}{\lambda_{\text{mín}}} \quad (38.6)$$

(*bremsstrahlung*)

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{mc}(1 - \cos\phi) \quad (38.7)$$

(dispersión de Compton)

Fotón dispersado: longitud de onda λ', momento lineal $\vec{p}'$

Fotón incidente: longitud de onda λ, momento lineal $\vec{p}$

Electrón en retroceso: momento lineal $\vec{P}_e$

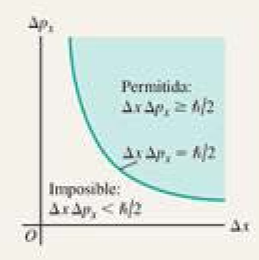
El principio de incertidumbre de Heisenberg: Es imposible determinar tanto la posición de un fotón como su momento lineal al mismo tiempo con una precisión arbitrariamente alta. La precisión de estas mediciones para las componentes x está limitada por el principio de incertidumbre de Heisenberg, ecuación (38.17), hay relaciones correspondientes para las componentes y y z. La incertidumbre ΔE en la energía de un estado que está ocupado durante un tiempo Δt está dada por la ecuación (38.24). En estas expresiones, $\hbar = h/2p$. (Véase el ejemplo 38.7).

$$\Delta x\,\Delta p_x \geq \hbar/2 \quad (38.17)$$

(principio de incertidumbre de Heisenberg, para la posición y el momento lineal)

$$\Delta t\,\Delta E \geq \hbar/2 \quad (38.24)$$

(principio de incertidumbre de Heinsenberg para la energía y el tiempo)





PROBLEMA PRÁCTICO **Dispersión de Compton y retroceso de electrones**

Un fotón incidente de rayos x se dispersa por un electrón libre que está inicialmente en reposo. El fotón se dispersa hacia atrás en un ángulo de 180° a partir de su dirección inicial. La longitud de onda del fotón dispersado es 0.0830 nm. *a*) ¿Cuál es la longitud de onda del fotón incidente? *b*) ¿Cuál es la magnitud del momento lineal y la rapidez del electrón después de la colisión? *c*) ¿Cuál es la energía cinética del electrón después de la colisión?

GUÍA DE SOLUCIÓN

Véase el área de estudio MasteringPhysics® para consultar una solución con Video Tutor.



IDENTIFICAR y PLANTEAR

1. En este problema un fotón se dispersa por un electrón inicialmente en reposo. En la sección 38.3 usted aprendió a relacionar las longitudes de onda de los fotones incidente y dispersado; en este problema también debe encontrar el momento lineal, la rapidez y la energía cinética del electrón en retroceso. Esto es posible porque el momento lineal y la energía se conservan en la colisión.
2. ¿Qué ecuación clave se puede utilizar para encontrar la longitud de onda del fotón incidente? ¿Cuál es el ángulo de dispersión ϕ de los fotones en este problema?

EJECUTAR

3. Use la ecuación seleccionada en el paso 2 para encontrar la longitud de onda del fotón incidente.
4. Utilice la conservación del momento lineal y el resultado del paso 3 para encontrar el momento lineal del electrón en retroceso. (*Sugerencia:* Todos los vectores del momento lineal están a lo largo de la misma línea, pero no todos apuntan en la misma dirección. Tenga cuidado con los signos).
5. Encuentre la rapidez del electrón en retroceso de su resultado del paso 4. (*Sugerencia:* Suponga que el electrón es no relativista, para poder usar la relación entre el momento lineal y la rapidez del capítulo 8 (vol. 1). ¿Esto es aceptable si la rapidez del electrón es menor de aproximadamente $0.1c$?).
6. Utilice el resultado del paso 4 o del paso 5 para encontrar la energía cinética del electrón.

EVALUAR

7. Podrá comprobar su respuesta en el paso 6 al encontrar la diferencia entre las energías del fotón incidente y del dispersado. ¿Este resultado es congruente con la conservación de la energía?

Problemas

Para tareas asignadas por el profesor, visite www.masteringphysics.com



•, ••, •••: Problemas de dificultad creciente. **CP**: Problemas acumulativos que incorporan material de capítulos anteriores. **CALC**: Problemas que requieren cálculo. **BIO**: Problemas de ciencias biológicas.

PREGUNTAS PARA ANÁLISIS

P38.1 ¿De qué manera se parecen los fotones a otras partículas, tales como electrones? ¿Cómo se diferencian? ¿Los fotones tienen masa? ¿Tienen carga eléctrica? ¿Se pueden acelerar? ¿Qué propiedades mecánicas tienen?

P38.2 Existe una cierta probabilidad de que un electrón pueda absorber al mismo tiempo *dos* fotones idénticos de un láser de alta intensidad. ¿Cómo afecta esto a la frecuencia de umbral y a las ecuaciones de la sección 38.1? Explique su respuesta.

P38.3 De acuerdo con el modelo de fotón, la luz porta su energía en paquetes llamados cuantos o fotones. ¿Por qué entonces no vemos una serie de destellos cuando nos fijamos en los objetos?

P38.4 ¿Es de esperar que los efectos debidos a la naturaleza de fotones de la luz generalmente sean más importantes en el extremo de baja frecuencia del espectro electromagnético (ondas de radio) o en el final de la alta frecuencia (rayos x y rayos gamma)? ¿Por qué?

P38.5 Durante el efecto fotoeléctrico, la luz saca electrones de los metales. Entonces, ¿por qué los metales que hay en su casa no pierden sus electrones cuando se encienden las luces?

P38.6 La mayoría de las películas fotográficas de blanco y negro (excepto algunas de aplicación especial) son menos sensibles a la luz roja que a la luz azul, y casi no tienen sensibilidad al infrarrojo. ¿Cómo se explican estas propiedades desde el punto de vista de los fotones?

P38.7 La piel humana es relativamente insensible a la luz visible, pero la radiación ultravioleta puede causarle quemaduras graves. ¿Tiene esto algo que ver con las energías de los fotones? Explique su respuesta.

P38.8 Explique por qué la figura 38.4 muestra que la mayoría de los fotoelectrones tienen energías cinéticas menores que $hf - \phi$; también explique cómo se pueden presentar menores energías cinéticas.

P38.9 En un experimento de efecto fotoeléctrico, la fotocorriente i para grandes valores positivos de V_{AC} tiene el mismo valor sin importar la frecuencia de la luz f (suponiendo que f es mayor que la frecuencia de umbral f_0). Explique por qué.

P38.10 En un experimento relacionado con el efecto fotoeléctrico, si la intensidad de la luz incidente (que tiene una frecuencia más alta que la frecuencia de umbral) se reduce por un factor de 10, mientras todo lo demás permanece igual, ¿cuál (si acaso) de los siguientes enunciados acerca de este proceso será verdad? *a*) Lo más probable es que el número de fotoelectrones se reduzca en un factor de 10. *b*) Lo más probable es que la energía cinética máxima de los fotoelectrones expulsados se reduzca por un factor de 10. *c*) Lo más probable es que la rapidez máxima de los fotoelectrones expulsados se reduzca por un factor de 10. *d*) Lo más probable es que la rapidez máxima de los fotoelectrones expulsados se reduzca por un factor de $\sqrt{10}$. *e*) El tiempo para que el primer fotoelectrón sea expulsado se incrementa en un factor de 10.

P38.11 Los materiales llamados *fósforos* que recubren el interior de una lámpara fluorescente convierten la radiación ultravioleta (de la descarga del vapor de mercurio dentro del tubo) en luz visible. ¿Sería posible elaborar un fósforo que convierta luz visible a rayos ultravioleta? Explique.

P38.12 En un experimento del efecto fotoeléctrico, ¿cuál de los siguientes hechos aumentará la energía cinética máxima de los fotoelectrones? *a*) Utilizar luz de mayor intensidad, *b*) utilizar luz de frecuencia alta;

c) utilizar luz de mayor longitud de onda, *d*) utilizar una superficie de metal con una mayor función trabajo. En cada caso, justifique su respuesta.

P38.13 Un fotón de frecuencia f experimenta dispersión de Compton de un electrón en reposo y se dispersa en un ángulo ϕ. La frecuencia del fotón dispersado es f'. ¿Cómo se relaciona f' con f? ¿Su respuesta depende de ϕ? Explique.

P38.14 ¿Puede ocurrir dispersión de Compton con protones, al igual que con electrones? Por ejemplo, supongamos que un haz de rayos x se dirige a un blanco de hidrógeno líquido. (Recuerde que el núcleo de hidrógeno consta de un solo protón). En comparación con la dispersión de Compton de electrones, ¿qué similitudes y diferencias cabe esperar? Explique.

P38.15 ¿Por qué los ingenieros y científicos deben protegerse de los rayos x producidos en equipos de alto voltaje?

P38.16 En un intento por reconciliar los modelos de onda y de partícula de la luz, algunas personas han sugerido que el fotón sube en las crestas y baja en los valles de la onda electromagnética. ¿Qué es *incorrecto* en esta descripción?

P38.17 Algunos láseres emiten luz en pulsos que tienen una duracion de solo 10^{-12} s. La longitud de un pulso es $(3 \times 10^8 \text{ m/s})(10^{-12} \text{ s}) = 3 \times 10^{-4} \text{ m} = 0.3$ mm. ¿Pueden ser monocromáticos los pulsos de luz láser como sucede con la luz de un láser que emite un haz estable y continuo? Explique.

EJERCICIOS

Sección 38.1 Luz absorbida como fotones: El efecto fotoeléctrico

38.1 •• *a*) Un protón se mueve con una velocidad mucho menor que la velocidad de la luz. Tiene una energía cinética K_1 y un momento lineal p_1. Si el momento lineal del protón se duplica, de manera que $p_2 = 2p_1$, ¿cuál es su nueva energía cinética K_2 en relación con K_1? *b*) Un fotón con energía E_1 tiene momento lineal p_1. Si otro fotón tiene un momento lineal p_2 que es el doble de p_1, ¿cómo es la energía E_2 del segundo fotón en relación con E_1?

38.2 • BIO **Respuesta del ojo.** El ojo humano es más sensible a la luz verde de longitud de onda de 505 nm. Los experimentos han encontrado que cuando las personas se mantienen en un cuarto oscuro hasta que sus ojos se adapten a la oscuridad, un *solo* fotón de luz verde activará las células receptoras de los bastones que están en la retina. *a*) ¿Cuál es la frecuencia de este fotón? *b*) ¿Cuánta energía (en joules y electrón volts) llega a las células receptoras? *c*) Para apreciar lo que es una pequeña cantidad de energía, calcule la rapidez con la que una bacteria típica de masa 9.5×10^{-12} g se movería si tuviera esa cantidad de energía.

38.3 • Un fotón de luz verde tiene una longitud de onda de 520 nm. Encuentre la frecuencia, la magnitud del momento lineal y la energía del fotón. Exprese la energía, tanto en joules como en electrón volts.

38.4 • BIO Un láser que se utiliza para soldar el desprendimiento de retina emite luz con una longitud de onda de 652 nm en pulsos que son de 20.0 ms de duración. La potencia media durante cada pulso es de 0.600 W. *a*) ¿Cuánta energía, en joules, tiene cada pulso? ¿Y en electrón volts? *b*) ¿Cuál es la energía, en joules, de un fotón? ¿Y en electrón volts? *c*) ¿Cuántos fotones hay en cada pulso?

38.5 • Una fuente de luz de 75 W consume 75 W de potencia eléctrica. Suponga que toda esta energía se transforma en luz de longitud de onda 600 nm. *a*) Calcule la frecuencia de la luz emitida. *b*) ¿Cuántos fotones por segundo emite la fuente? *c*) ¿Las respuestas a los incisos *a*) y *b*) son iguales? ¿La frecuencia de la luz es algo así como el número de fotones emitidos por segundo? Explique su respuesta.

38.6 • Un fotón tiene un momento lineal de magnitud 8.24×10^{-28} kg · m/s. *a*) ¿Cuál es la energía de este fotón? Dé su respuesta en joules y en electrón volts. *b*) ¿Cuál es la longitud de onda de este fotón? ¿En qué región del espectro electromagnético se encuentra?

38.7 • La gráfica en la figura E38.7 muestra el potencial de frenado como una función de la frecuencia de la luz incidente que cae sobre una superficie de metal. *a*) Encuentre la función trabajo para este metal. *b*) ¿Qué valor de la constante de Planck se obtiene de la gráfica? *c*) ¿Por qué la gráfica *no* se extiende por debajo del eje *x*? *d*) Si se utilizara un metal diferente, ¿qué características de la gráfica se puede esperar que sean las mismas y cuáles serían diferentes?

Figura **E38.7**

Potencial de frenado (V)
7.0
6.0
5.0
4.0
3.0
2.0
1.0
O 0.50 1.0 1.5 2.0 2.5 3.0 $f\,(10^{15}\text{ Hz})$

38.8 • La longitud de onda de umbral de los fotoelectrones de una superficie de tungsteno es 272 nm. Calcule la energía cinética máxima de los electrones expulsados de esta superficie de tungsteno por radiación ultravioleta de frequencia 1.45×10^{15} Hz. Exprese la respuesta en electrón volts.

38.9 •• Una superficie de níquel limpia se expone a luz cuya longitud de onda es de 235 nm. ¿Cuál es la velocidad máxima de los fotoelectrones emitidos de esta superficie? Utilice la tabla 38.1.

38.10 •• ¿Cuál sería la función trabajo mínima de un metal para que la luz visible (380-750 nm) expulsara fotoelectrones?

38.11 •• Cuando luz ultravioleta con una longitud de onda de 400.0 nm incide sobre una cierta superficie metálica, la energía cinética máxima de los fotoelectrones emitidos es de 1.10 eV. ¿Cuál es la energía cinética máxima de los fotoelectrones cuando luz de longitud de onda de 300.0 nm incide sobre la misma superficie?

38.12 •• La función trabajo para el efecto fotoeléctrico en el potasio es de 2.3 eV. Si luz que tiene una longitud de onda de 250 nm llega al potasio, encuentre *a*) el potencial de frenado en volts; *b*) la energía cinética, en electrón volts, de los electrones expulsados con mayor energía; *c*) la rapidez de estos electrones.

38.13 • Cuando sobre una superficie de cobre limpia incide luz ultravioleta con una longitud de onda de 254 nm, el potencial de frenado necesario para detener la emisión de fotoelectrones es de 0.181 V. *a*) ¿Cuál es la longitud de onda de umbral fotoeléctrica para esta superficie de cobre? *b*) ¿Cuál es la función trabajo de esta superficie, y cómo se compara el valor calculado con el que se presenta en la tabla 38.1?

Sección 38.2 Luz emitida como fotones: Producción de rayos x

38.14 • Los tubos de rayos catódicos que generaron la imagen en los primeros televisores a color eran fuentes de rayos x. Si el voltaje de aceleración en un tubo de televisión es de 15.0 kV, ¿cuáles son las longitudes de onda más corta de rayos x producidos por el televisor? (Los televisores modernos contienen blindaje para detener estos rayos x).

38.15 • Unos protones son acelerados a partir del reposo por una diferencia de potencial de 4.00 kV y colisionan con un blanco metálico. Si un protón produce un fotón en el impacto, ¿cuál es la longitud de onda mínima de los rayos x resultantes? ¿Cómo se compara su respuesta con la longitud de onda mínima si se utilizan electrones de 4.00 keV en lugar de protones? ¿Por qué los tubos de rayos x utilizan electrones en lugar de protones para producir rayos x?

38.16 •• *a*) ¿Cuál es la mínima diferencia de potencial entre el filamento y el blanco en un tubo de rayos x si se producen rayos x con una

longitud de onda de 0.150 nm? *b*) ¿Cuál es la longitud de onda más corta producida en un tubo de rayos x operado a 30.0 kV?

Sección 38.3 Luz dispersada en forma de fotones: Dispersión de Compton y producción de pares

38.17 • Un electrón que está inicialmente en reposo recibe el impacto de un rayo x que tiene una longitud de onda de 0.100 nm. La longitud de onda final del rayo x es de 0.110 nm. ¿Cuál es la energía cinética final del electrón?

38.18 • Se producen rayos x en un tubo que opera a 18.0 kV. Después de que emergen del tubo, los rayos x con la longitud de onda mínima llegan a un blanco y se dispersan por efecto Compton en un ángulo de 45.0°. *a*) ¿Cuál es la longitud de onda original de los rayos x? *b*) ¿Cuál es la longitud de onda de los rayos x dispersados? *c*) ¿Cuál es la energía de los rayos x dispersados (en electrón volts)?

38.19 •• Unos rayos x con longitud de onda inicial de 0.0665 nm experimentan dispersión de Compton. ¿Cuál es la mayor longitud de onda que se encuentra en los rayos x dispersados? ¿En que ángulo de dispersión se observa esta longitud de onda?

38.20 • Un haz de rayos x con longitud de onda de 0.0500 nm experimenta dispersión de Compton por electrones de una muestra. ¿A qué ángulo, respecto del haz incidente, se debe buscar para encontrar rayos x con una longitud de onda de *a*) 0.0542 nm; *b*) 0.0521 nm; *c*) 0.0500 nm?

38.21 •• Si un fotón de longitud de onda de 0.04250 nm colisiona con un electrón libre y se dispersa en un ángulo de 35.0° respecto de su dirección original, determine *a*) el cambio en la longitud de onda de este fotón; *b*) la longitud de onda de la luz dispersada; *c*) el cambio en la energía del fotón (¿es una pérdida o una ganancia?); *d*) la energía obtenida por el electrón.

38.22 •• Un fotón se dispersa en la dirección hacia atrás ($\phi = 180°$) de un protón libre que está inicialmente en reposo. ¿Cuál debe ser la longitud de onda del fotón incidente si se desea que experimente un cambio del 10.0% en la longitud de onda, como resultado de la dispersión?

38.23 •• En una dispersión de Compton los rayos x tienen inicialmente una longitud de onda de 0.900×10^{-10} m. ¿Para qué ángulo de dispersión la longitud de onda de los rayos x dispersados es 1.0% mayor que la de los rayos x incidentes?

38.24 •• Un fotón con longitud de onda $\lambda = 0.1385$ nm es dispersado por un electrón que está inicialmente en reposo. ¿Cuál debe ser el ángulo entre la dirección de propagación de los fotones incidentes y dispersados si la rapidez del electrón inmediatamente después de la colisión es 8.90×10^6 m/s?

38.25 • Un electrón y un positrón se mueven uno hacia el otro con una rapidez de 0.500*c* en el marco de referencia del laboratorio. *a*) ¿Cuál es la energía cinética de cada partícula? *b*) El e^+ y el e^- colisionan de frente y se aniquilan. ¿Qué energía tiene cada fotón producido? *c*) ¿Cuál es la longitud de onda de cada fotón? ¿Cómo se compara esta longitud de onda con la longitud de onda del fotón cuando la energía cinética inicial del e^+ y del e^- es insignificantemente pequeña? (Véase el ejemplo 38.6).

Sección 38.4 Dualidad onda-partícula, probabilidad e incertidumbre

38.26 • Un láser produce una luz de longitud de onda de 625 nm en un pulso ultracorto. ¿Cuál es la duración mínima del impulso si la incertidumbre mínima en la energía de los fotones es del 1.0%?

38.27 • Un pulso ultracorto tiene una duración de 9.00 fs y produce luz con una longitud de onda de 556 nm. ¿Cuáles son el momento lineal e incertidumbre del momento lineal de un fotón en el pulso?

38.28 • Un haz horizontal de luz láser de longitud de onda de 585 nm pasa a través de una rendija estrecha que tiene un ancho de 0.0620 mm. La intensidad de la luz se mide en una pantalla vertical que está a 2.00 m de la rendija. *a*) ¿Cuál es la incertidumbre mínima en la componente vertical del momento lineal de cada fotón en el haz después de que el fotón pasa a través de la rendija? *b*) Use el resultado del inciso *a*) para estimar el ancho del máximo central de difracción que se observa en la pantalla.

PROBLEMAS

38.29 • **Exposición de una película fotográfica.** El compuesto sensible a la luz en la mayoría de las películas fotográficas es el bromuro de plata, AgBr. Una película es "expuesta", cuando la energía de la luz absorbida disocia esta molécula en sus átomos. (El proceso real es más complejo, pero el resultado cuantitativo no difiere mucho). La energía de disociación del AgBr es 1.00×10^5 J/mol. Para un fotón que es exactamente capaz de disociar una sola molécula de bromuro de plata, encuentre *a*) la energía de los fotones en electrón volts; *b*) la longitud de onda del fotón; *c*) la frecuencia del fotón. *d*) ¿Cuál es la energía, en electrón volts, de un fotón que tiene una frecuencia de 100 MHz? *e*) La luz de una luciérnaga es capaz de exponer una película fotográfica, pero la radiación de una estación de radio FM de 50,000 W a 100 MHz no lo es. Explique por qué esto es así.

38.30 •• *a*) Si la frecuencia media emitida por la luz de una bombilla de 200 W es 5.00×10^{14} Hz, y 10.0% de la potencia se emite como luz visible, ¿aproximadamente cuántos fotones de luz visible se emiten por segundo? *b*) ¿A qué distancia correspondería 1.00×10^{11} de fotones de luz visible por centímetro cuadrado por segundo, si la luz se emite de manera uniforme en todas direcciones?

38.31 • Cuando una superficie fotoeléctrica dada se ilumina con luz de diferentes longitudes de onda, se observan los siguientes potenciales de frenado:

Longitud de onda (nm)	Potencial de frenado (V)
366	1.48
405	1.15
436	0.93
492	0.62
546	0.36
579	0.24

Elabore una gráfica del potencial de frenado en el eje vertical contra la frecuencia de la luz en el eje horizontal. Determine *a*) la frecuencia de umbral; *b*) la longitud de onda de umbral; *c*) la función trabajo del material (en electrón volts); *d*) el valor de la constante de Planck *h* (suponiendo que el valor de *e* es conocido).

38.32 • Un haz de luz de 2.50 W y con longitud de onda de 124 nm incide sobre una superficie de metal. Se observa que la energía cinética máxima de los electrones emitidos es de 4.16 eV. Suponga que cada fotón en el haz expulsa un fotoelectrón. *a*) ¿Cuál es la función trabajo (en electrón volts) de este metal? *b*) ¿Cuántos fotoelectrones son expulsados cada segundo de este metal? *c*) Si la potencia del haz de luz, pero no su longitud de onda, se redujera a la mitad, ¿cuál podría ser la respuesta del inciso *b*)? *d*) Si la longitud de onda del haz, pero no su potencia, se redujera a la mitad, ¿cuál sería la respuesta del inciso *b*)?

38.33 •• PA BIO **Eliminación de lesiones vasculares.** Un láser de colorante pulsado emite una luz de longitud de onda de 585 nm en pulsos de 450 μs. Ya que esta longitud de onda es fuertemente absorbida por la hemoglobina en la sangre, el método es especialmente eficaz para la eliminación de varios tipos de manchas debidas a la sangre, como las manchas rojas de nacimiento. Para obtener una estimación razonable de la potencia necesaria para la cirugía láser, se puede considerar que la sangre tiene calor específico y calor de vaporización iguales a los del agua (4190 J/kg · K, 2.256×10^6 J/kg). Suponga que cada pulso debe eliminar 2.0 μg de sangre por la evaporación de esta, comenzando a 33°C. *a*) ¿Cuánta energía debe entregar cada pulso a la mancha? *b*) ¿Cuál debe ser la potencia de este láser? *c*) ¿Cuántos fotones entrega cada pulso a la mancha?

38.34 • Las funciones trabajo del efecto fotoeléctrico para muestras particulares de ciertos metales son las siguientes: cesio, 2.1 eV;

cobre, 4.7 eV; potasio, 2.3 eV, y zinc, 4.3 eV. *a*) ¿Cuál es la longitud de onda de umbral para cada superficie metálica? *b*) ¿Cuál de estos metales *no* podría emitir fotoelectrones al irradiarse con luz visible (380 a 750 nm)?

38.35 •• Un fotón incidente de rayos x con una longitud de onda de 0.0900 nm se dispersa en la dirección hacia atrás al chocar con un electrón libre que está inicialmente en reposo. *a*) ¿Cuál es la magnitud del momento lineal del fotón dispersado? *b*) ¿Cuál es la energía cinética del electrón después de que se dispersa el fotón?

38.36 •• **PA** Un fotón con longitud de onda $\lambda = 0.0900$ nm colisiona con un electrón que está inicialmente en reposo. Si el fotón se dispersa en la dirección hacia atrás, ¿cuál es la magnitud y la dirección del momento lineal del electrón justo después de la colisión con el fotón?

38.37 •• **PA** Un fotón con longitud de onda $\lambda = 0.1050$ nm incide sobre un electrón que está inicialmente en reposo. Si el fotón se dispersa con un ángulo de 60.0° de su dirección original, ¿cuáles son la magnitud y la dirección del momento lineal del electrón justo después de la colisión con el fotón?

38.38 •• **PA** Un tubo de rayos x está operando con un voltaje V y corriente I. *a*) Si solo una fracción p de la energía eléctrica suministrada se convierte en rayos x, ¿qué tan rápido se está entregando energía al blanco? *b*) Si el blanco tiene masa m y calor específico c (en J/kg·K), ¿con qué tasa promedio elevaría su temperatura si no hubiera pérdidas de calor? *c*) Evalúe los resultados de los incisos *a*) y *b*) para un tubo de rayos x operando a 18.0 kV y 60.0 mA que convierte 1.0% de la potencia eléctrica en rayos x. Suponga que el blanco de 0.250 kg se hizo de plomo ($c = 130$ J/kg·K). *d*) ¿Cuáles deben ser las propiedades físicas del material de un blanco en la práctica? ¿Cuáles serían algunos elementos para construir el blanco adecuado?

38.39 •• Las reacciones de fusión nuclear en el centro del Sol producen fotones de rayos gamma con energías de aproximadamente 1 MeV (10^6 eV). En cambio, lo que vemos que emana de la superficie del Sol son fotones de luz visible con longitudes de onda de aproximadamente 500 nm. Un modelo sencillo que explica esta diferencia en la longitud de onda es que un fotón experimenta dispersión de Compton varias veces —de hecho, aproximadamente 10^{26} veces, como se sugiere en los modelos del interior del Sol—, al pasar del centro del Sol hasta su superficie. *a*) Estime el aumento de la longitud de onda de un fotón en un suceso promedio de dispersión de Compton. *b*) Calcule el ángulo, en grados, en el que se dispersa el fotón en el suceso de dispersión descrito en el inciso *a*). (*Sugerencia:* Una aproximación útil es $\cos\phi \approx 1 - \phi^2/2$, que es válida para $\phi \ll 1$. Observe que ϕ está en radianes en esta expresión). *c*) Se estima que un fotón tarda aproximadamente 10^6 años en viajar desde el centro hasta la superficie del Sol. Encuentre la distancia media que la luz puede viajar en el interior del Sol sin ser dispersada. (Esta distancia equivale aproximadamente a la distancia que alguien podría ver si estuviera dentro del Sol y pudiera soportar las temperaturas extremas de allí. Como indica su respuesta, el interior del Sol es *muy* opaco).

38.40 •• *a*) Obtenga una expresión para el corrimiento total en la longitud de onda del fotón después de dos dispersiones de Compton sucesivas, con electrones en reposo. El fotón es dispersado por un ángulo θ_1 en la primera dispersión y θ_2 en la segunda. *b*) En general, ¿el corrimiento total de la longitud de onda producida por dos dispersiones sucesivas de un ángulo $\theta/2$ es igual que para una dispersión simple de ángulo θ? De no ser así, ¿hay algunos valores específicos de θ, diferentes de $\theta = 0°$, para los cuales los corrimientos totales sean los mismos? *c*) Use el resultado del inciso *a*) para calcular la longitud de onda total del corrimiento producido por dos dispersiones de Compton sucesivas, de 30.0° cada una. Exprese su respuesta en términos de h/mc. *d*) ¿Cuál es el corrimiento de longitud de onda producido por una sola dispersión de Compton de 60.0°? Compare con la respuesta del inciso *c*).

38.41 •• Un fotón con longitud de onda de 0.1100 nm choca con un electrón libre que está inicialmente en reposo. Después de la colisión, la longitud de onda es de 0.1132 nm. *a*) ¿Cuál es la energía cinética del electrón después de la colisión? ¿Cuál es su rapidez? *b*) Si el electrón se detiene repentinamente (por ejemplo, en un blanco sólido), la totalidad de su energía cinética se utiliza para crear un fotón. ¿Cuál es la longitud de onda de este fotón?

38.42 •• Un fotón de rayos x es dispersado por un electrón libre (masa m) en reposo. La longitud de onda del fotón dispersado es λ', y la rapidez final del electrón colisionado es v. *a*) ¿Cuál es la longitud de onda inicial λ del fotón? Exprese su respuesta en términos de λ', v y m. (*Sugerencia:* Utilice la expresión relativista para la energía cinética del electrón). *b*) ¿En qué ángulo ϕ se dispersa el fotón? Exprese su respuesta en términos de λ, λ' y m. *c*) Evalúe sus resultados de los incisos *a*) y *b*) para una longitud de onda de 5.10×10^{-3} nm para el fotón dispersado y una rapidez final del electrón de 1.80×10^8 m/s. El ángulo ϕ debe expresarse en grados.

38.43 •• *a*) Calcule el aumento máximo en la longitud de onda del fotón que puede ocurrir en la dispersión de Compton. *b*) ¿Cuál es la energía (en electrón volts) del fotón de menor energía de rayos x para el cual la dispersión de Compton podría dar como resultado la duplicación de la longitud de onda original?

PROBLEMAS DE DESAFÍO

38.44 ••• Considere la posibilidad de dispersión de Compton de un fotón debida a un electrón en *movimiento*. Antes de la colisión, el fotón tiene la longitud de onda λ y se mueve en la dirección $+x$, y el electrón se mueve en la dirección $-x$ con energía total E (incluida su energía en reposo mc^2). El fotón y el electrón chocan de frente. Después de la colisión, ambos se mueven en la dirección $-x$ (es decir, el fotón se ha dispersado por 180°). *a*) Deduzca una expresión para la longitud de onda λ' del fotón dispersado. Demuestre que si $E \gg mc^2$, donde m es la masa en reposo del electrón, su resultado se reduce a

$$\lambda' = \frac{hc}{E}\left(1 + \frac{m^2c^4\lambda}{4hcE}\right)$$

b) Un haz de radiación infrarroja de un láser de CO_2 ($\lambda = 10.6\ \mu$m) choca frontalmente con un haz de electrones, cada uno de energía total $E = 10.0$ GeV (1 GeV $= 10^9$ eV). Calcule la longitud de onda λ' de los fotones dispersados, suponiendo que el ángulo de dispersión es de 180°. *c*) ¿Qué clase de fotones dispersados son estos (infrarrojos, microondas, ultravioleta, etcétera)? ¿Se le ocurre alguna aplicación de este efecto?

Respuestas

Pregunta inicial del capítulo 

La energía E de un fotón es inversamente proporcional a su longitud de onda λ. Cuanto más corta sea la longitud de onda, más energético será el fotón. Puesto que la luz visible tiene longitudes de onda más cortas que la luz infrarroja, la lámpara de cabeza emite fotones de mayor energía. Sin embargo, la luz del láser infrarrojo es mucho más *intensa* (entrega mucho más energía por unidad de área por segundo a la piel del paciente), ya que emite muchos más fotones por segundo que la lámpara de cabeza y los concentra en un área muy pequeña.

Preguntas de las secciones Evalúe su comprensión

38.1 Respuestas: i y ii. De acuerdo con la ecuación (38.2), un fotón de energía $E = 1.14$ eV tiene longitud de onda $\lambda = hc/E = (4.136 \times 10^{-15}\ \text{eV})\cdot(3.00 \times 10^{8}\ \text{m/s})/(1.14\text{eV}) = 1.09 \times 10^{-6}\ \text{m} = 1090$ nm. Esta se encuentra en la región infrarroja del espectro. Como la longitud de onda es inversamente proporcional a la energía del fotón, la energía *mínima* del fotón de 1.14 eV corresponde a la longitud de onda *máxima* que causa la fotoconductividad en el silicio. Así, la longitud de onda debe ser 1090 nm o menos.

38.2 Respuesta: ii. La ecuación (38.6) muestra que la longitud de onda mínima de rayos x producidos por radiación de frenado depende de la diferencia de potencial V_{AC}, pero *no* depende de la tasa con la que los electrones inciden en el ánodo. Cada electrón produce cuando mucho un fotón, así que al aumentar el número de electrones por segundo se provoca un incremento en el número de fotones de rayos x emitidos por segundo (es decir, en la intensidad de los rayos x).

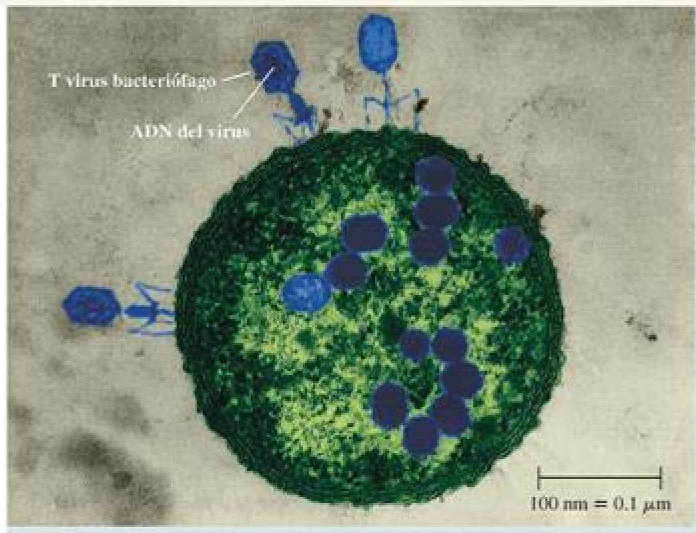
38.3 Respuestas: sí, no La ecuación (38.7) muestra que el corrimiento de la longitud de onda $\Delta\lambda = \lambda' - \lambda$ depende solamente del ángulo de dispersión del fotón dispersado, y no de la longitud de onda del fotón incidente. Así que un fotón de luz visible dispersado en un ángulo ϕ experimenta el mismo corrimiento de longitud de onda que un fotón de rayos x. La ecuación (38.7) también indica que este corrimiento es del orden de $h/mc = 2.426 \times 10^{-12}\ \text{m} = 0.002426$ nm. Este es un pequeño porcentaje de la longitud de onda de los rayos x (véase el ejemplo 38.5), por lo que el efecto es notable en la dispersión de rayos x. Sin embargo, h/mc es una fracción insignificante de la longitud de onda de la luz visible (entre 380 y 750 nm). El ojo humano no logra distinguir estas diferencias tan pequeñas en la longitud de onda (es decir, las diferencias en color).

38.4 Respuesta: ii. Hay *cero* probabilidad de que un fotón sea desviado hacia uno de los ángulos donde el patrón de difracción tiene intensidad cero. Estos ángulos se dan por $a \text{ sen } \theta = m\lambda$ con $m = \pm1, \pm2, \pm3, \ldots$ Ya que λ es mucho menor que a, podemos escribir estos ángulos como $\theta = m\lambda/a = \pm\lambda/a, \pm2\lambda/a, \pm3\lambda/a, \ldots$ Estos valores incluyen las respuestas **i**, **iii** y **iv**, por lo que es imposible para un fotón desviarse en cualquiera de estos ángulos. La intensidad no es cero en $\theta = 3\lambda/2a$ (localizado entre dos ceros en el patrón de difracción), de modo que hay cierta probabilidad de que un fotón sea desviado en este ángulo.

Problema práctico

Respuestas: ***a***) 0.0781 nm
b) 1.65×10^{-23} kg · m/s, 1.81×10^{7} m/s
c) 1.49×10^{-16} J

39 PARTÍCULAS QUE SE COMPORTAN COMO ONDAS



? Los virus (que se muestran en azul) que están sobre una bacteria de *E. coli* han inyectado su ADN, convirtiendo la bacteria en una fábrica de virus. Esta imagen en color falso se realizó con un haz de electrones en lugar de un haz de luz. ¿Qué propiedades de los electrones son útiles para la formación de imágenes con estos detalles finos?

OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

Al estudiar este capítulo, usted aprenderá:

- La propuesta de De Broglie de que los electrones, protones y otras partículas se pueden comportar como ondas.
- Cómo los experimentos de difracción de electrones aportaron evidencias para las ideas de De Broglie.
- Cómo los microscopios electrónicos ofrecen un aumento mucho mayor que los microscopios de luz visible.
- De qué manera los físicos descubrieron el núcleo atómico.
- Cómo el modelo de Bohr de las órbitas de electrones explica los espectros de átomos de hidrógeno e hidrogenoides.
- Cómo funciona un láser.
- Cómo el concepto de los niveles de energía, acoplado con el modelo de fotones de luz, explica el espectro de luz emitido por un objeto opaco y caliente.
- Qué dice el principio de incertidumbre acerca de la naturaleza del átomo.

En el capítulo 38 descubrimos un aspecto de la naturaleza de la dualidad onda-partícula: la luz y otras radiaciones electromagnéticas actúan algunas veces como ondas y otras como partículas. La interferencia y difracción demuestran un comportamiento de onda, mientras que la emisión y la absorción de fotones demuestran el comportamiento de partículas.

Si las ondas de luz se pueden comportar como partículas, ¿acaso las partículas materiales se pueden comportar como ondas? Como descubriremos, la respuesta es un sí rotundo. Los electrones producen interferencia y se difractan igual que otras clases de ondas. Veremos que la naturaleza ondulatoria de los electrones no es simplemente una curiosidad de laboratorio: es la razón fundamental por la cual los átomos, que de acuerdo con la física clásica deberían ser profundamente inestables, son capaces de existir. En este capítulo vamos a utilizar la naturaleza ondulatoria de la materia para ayudarnos a comprender la estructura de los átomos, los principios de funcionamiento de un láser, y las curiosas propiedades de la luz emitida por un objeto caliente e incandescente. Sin el modelo ondulatorio de la materia, no habría manera de explicar tales fenómenos.

En el capítulo 40 presentaremos un modelo ondulatorio aún más completo de la materia, llamado *mecánica cuántica*. En lo que resta del libro vamos a utilizar las ideas de la mecánica cuántica para entender la naturaleza de las moléculas, los sólidos, los núcleos atómicos y las partículas fundamentales, que son los componentes básicos de nuestro universo.

39.1 Ondas del electrón

En 1924 un físico francés perteneciente a la nobleza, el príncipe Louis de Broglie (figura 39.1), hizo una propuesta sorprendente acerca de la naturaleza de la materia. Su razonamiento, parafraseado libremente, era el siguiente: la naturaleza ama la simetría. La luz es de naturaleza dual, se comporta en determinadas situaciones como ondas y en otras como partículas. Si la naturaleza es simétrica, esta dualidad también se debería aplicar a la materia. Los electrones y los protones, que normalmente se consideran como *partículas*, en algunos casos se comportan como *ondas*.

Si una partícula actúa como una onda, debe tener una longitud de onda y una frecuencia. De Broglie postuló que una partícula libre con masa m en reposo, que se mueve con rapidez v no relativista, debe tener una longitud de onda λ relacionada con su momento lineal $p = mv$ exactamente de la misma manera que un fotón, tal como se expresa por la ecuación (38.5): $\lambda = h/p$. La **longitud de onda de De Broglie** de una partícula es entonces

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv} \qquad \text{(longitud de onda de De Broglie de una partícula)} \qquad (39.1)$$

donde h es la constante de Planck. Si la rapidez de la partícula es una fracción considerable de la rapidez de la luz c, utilizamos la ecuación (37.27) para sustituir mv en la ecuación (39.1) por $\gamma mv = mv/\sqrt{1 - v^2/c^2}$. La frecuencia f, según De Broglie, también está relacionada con la energía E de la partícula en la misma forma que para un fotón, es decir,

$$E = hf \qquad (39.2)$$

Así, en la hipótesis de De Broglie, las relaciones entre longitud de onda y momento lineal así como entre frecuencia y energía son exactamente las mismas tanto para partículas libres como para fotones.

CUIDADO **No todas las ecuaciones de fotones se aplican a partículas con masa** Tenga cuidado al aplicar la relación $E = hf$ a partículas con masa en reposo diferente de cero, como los electrones y los protones. A diferencia de un fotón, estos *no* viajan con la rapidez c, por lo que las ecuaciones $f = c/\lambda$ y $E = pc$ ¡*no* se aplican a estos!

39.1 Louis-Victor de Broglie, séptimo duque de Broglie (1892-1987), rompió con la tradición familiar al elegir la carrera de física, en lugar de la diplomacia. En su tesis doctoral publicó su propuesta revolucionaria de que las partículas tenían características de onda, por la cual recibió en 1929 el Premio Nobel de Física.

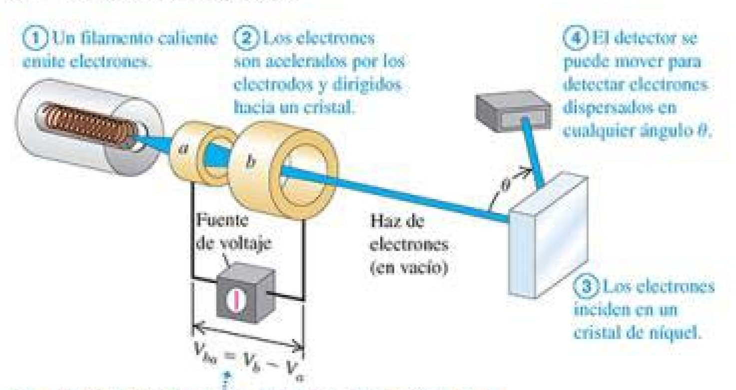


Observación de la naturaleza ondulatoria de los electrones

La propuesta de De Broglie fue audaz, y se realizó en un momento en que no había evidencia experimental directa de que las partículas tuvieran características de ondas. Pero a los pocos años de la publicación de las ideas de De Broglie, se comprobaron contundentemente gracias a un experimento de difracción de electrones. Este experimento era análogo al que se describe en la sección 36.6, en el que los átomos en un cristal actúan como una rejilla de difracción tridimensional para rayos x. Un haz de rayos x se refleja fuertemente cuando incide en un cristal en un ángulo que da una interferencia constructiva entre las ondas dispersadas por los diferentes átomos en el cristal. Estos efectos de interferencia demuestran la naturaleza *ondulatoria* de los rayos x.

En 1927, los físicos estadounidenses Clinton Davisson y Lester Germer, quienes trabajaban en los Laboratorios Bell Telephone, estudiaban la superficie de una pieza de níquel dirigiendo un haz de *electrones* en la superficie y observando cuántos electrones rebotaban en diferentes ángulos. La figura 39.2 muestra un montaje experimental como el de ellos. Como muchos metales ordinarios, la muestra era *policristalina*: se componía de muchos cristales microscópicos aleatoriamente orientados y unidos entre sí. Como resultado, el haz de electrones se refleja de forma difusa, como la luz que rebota en una superficie rugosa (véase la figura 33.6*b*), con una distribución homogénea de la intensidad en función del ángulo θ.

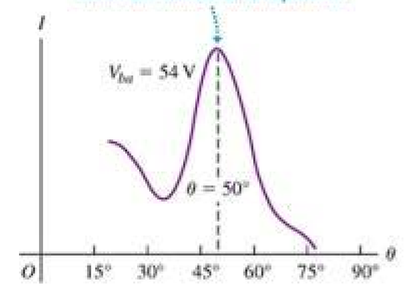
MasteringPHYSICS
PhET: Davisson-Germer: Electron Diffraction
ActivPhysics 17.5: Electron Interference



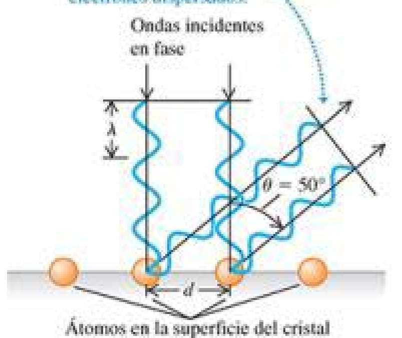
39.2 Un aparato similar al utilizado por Davisson y Germer para descubrir la difracción de electrones.

39.3 *a*) Intensidad del haz de electrones dispersado en la figura 39.2 como una función del ángulo de dispersión θ. *b*) Las ondas de los electrones dispersados por dos átomos adyacentes interfieren constructivamente cuando $d \operatorname{sen} \theta = m\lambda$. En el caso que aquí se muestra, $\theta = 50°$ y $m = 1$.

a)

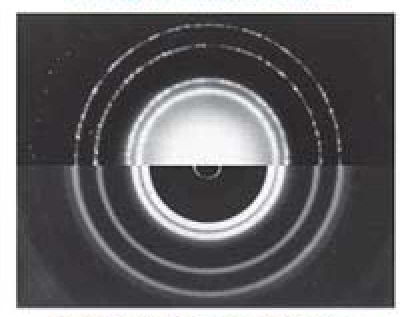


b)



39.4 Difracción de rayos x y de electrones. La mitad superior de la foto muestra el patrón de difracción para rayos x de 71 pm que pasan a través de la lámina de aluminio. En la mitad inferior, con una escala diferente, se muestra el patrón de difracción para electrones de 600 eV por el aluminio. La similitud indica que los electrones experimentan la misma clase de difracción que los rayos x.

Parte superior: difracción de rayos x



Parte inferior: difracción de electrones

Durante el experimento se produjo un accidente que permitió la entrada de aire a la cámara de vacío, y se formó una película de óxido sobre la superficie del metal. Para retirar esta película, Davisson y Germer calentaron la muestra en un horno de alta temperatura, casi lo suficientemente caliente como para que se fundiera. Desconocido para ellos, esto tenía el efecto de crear grandes regiones de planos cristalinos dentro del níquel que eran continuos a todo lo ancho del haz de electrones. Desde la perspectiva de los electrones, la muestra parecía un *monocristal* de níquel.

Cuando se repitieron las observaciones con esta muestra, los resultados fueron completamente diferentes. Ahora los grandes máximos en la intensidad del haz de electrones reflejado ocurrían en ángulos específicos (figura 39.3*a*), en contraste con la suave variación de la intensidad con el ángulo que Davisson y Germer habían observado antes del accidente. Las posiciones angulares de los máximos dependían del voltaje de aceleración V_{ba} utilizado para producir el haz de electrones. Davisson y Germer estaban familiarizados con la hipótesis de De Broglie, y se dieron cuenta de la similitud de este comportamiento con la difracción de rayos x. Este no era el efecto que habían estado buscando, pero inmediatamente reconocieron que el haz de electrones se estaba *difractando*. Habían descubierto una confirmación experimental muy directa de la hipótesis ondulatoria.

Davisson y Germer podrían determinar las rapideces de los electrones a partir del voltaje de aceleración, de modo que podían calcular la longitud de onda de De Broglie a partir de la ecuación (39.1). Si un electrón se acelera desde el reposo del punto a al punto b a través de un aumento de potencial $V_{ba} = V_b - V_a$, como se muestra en la figura 39.2, el trabajo realizado sobre el electrón eV_{ba} es igual a su energía cinética K. Usando $K = (\frac{1}{2})mv^2 = p^2/2m$ para una partícula no relativista, tenemos

$$eV_{ba} = \frac{p^2}{2m} \qquad p = \sqrt{2meV_{ba}}$$

Sustituyendo esto en la ecuación (39.1), la expresión para la longitud de onda de De Broglie del electrón es:

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2meV_{ba}}} \quad \text{(longitud de onda de De Broglie de un electrón)} \qquad (39.3)$$

Cuanto mayor sea el voltaje de aceleración V_{ba}, más corta será la longitud de onda del electrón.

Para predecir los ángulos en los que se produce la reflexión fuerte, observe que los electrones se dispersan principalmente por los planos de átomos cerca de la superficie del cristal. Los átomos en un plano de la superficie están dispuestos en filas, con una distancia d que se puede medir por técnicas de difracción de rayos x. Estas filas actúan como una rejilla de difracción reflectante; los ángulos en que se produce la reflexión fuerte son los mismos que para una rejilla con distancia d de centro a centro entre sus rendijas (figura 39.3*b*). De acuerdo con la ecuación (36.13), los ángulos de reflexión máxima están dados por

$$d \operatorname{sen} \theta = m\lambda \qquad (m = 1, 2, 3, \ldots) \qquad (39.4)$$

donde θ es el ángulo que se muestra en la figura 39.2. [Observe que la geometría de la figura 39.3*b* es distinta de la correspondiente a la figura 36.22, por lo que la ecuación (39.4) es diferente de la (36.16)]. Davisson y Germer encontraron los ángulos predichos por esta ecuación, usando la longitud de onda de De Broglie dada por la ecuación (39.3), de acuerdo con los valores observados (figura 39.3*a*). Así, el descubrimiento accidental de la **difracción de electrones** fue la primera evidencia directa que confirmaba la hipótesis de De Broglie.

En 1928, justo un año después del descubrimiento de Davisson-Germer, el físico inglés G. P. Thomson realizó experimentos de difracción de electrones utilizando una delgada lámina metálica policristalina como blanco. Debye y Sherrer habían utilizado una técnica similar varios años antes para estudiar difracción de rayos x con muestras policristalinas. En estos experimentos, el haz pasa *a través* del blanco en lugar de ser reflejado por este. Debido a las orientaciones aleatorias de los cristales microscópicos individuales en la lámina, el patrón de difracción consiste en máximos de intensidad formando anillos alrededor de la dirección del haz incidente. Los resultados de

Thomson confirmaron una vez más la relación de De Broglie. La figura 39.4 muestra tanto el patrón de difracción para rayos x como el de electrones para una lámina de aluminio policristalino. (G. P. Thomson era el hijo de J. J. Thomson, quien 31 años antes descubriera el electrón. Davisson y el joven Thomson compartieron en 1937 el Premio Nobel de Física por sus descubrimientos).

Pronto se llevaron a cabo nuevos experimentos de difracción en muchos laboratorios utilizando no solo los electrones, sino también varios iones y neutrones de baja energía. Todos ellos concordaron con las predicciones audaces de De Broglie. Así, la naturaleza ondulatoria de las partículas, que parecía tan extraña en 1924, se estableció firmemente en los años que siguieron.

Estrategia para resolver problemas 39.1 Propiedades ondulatorias de las partículas



IDENTIFICAR *los conceptos relevantes:* Las partículas tienen propiedades de onda. La longitud de onda (de De Broglie) de una partícula es inversamente proporcional a su momento lineal, y su frecuencia es proporcional a su energía.

PLANTEAR *el problema:* Identifique las incógnitas y determine las ecuaciones que se utilizarán para su cálculo.

EJECUTAR *la solución* como sigue:

1. Utilice la ecuación (39.1) para relacionar el momento lineal p de la partícula con su longitud de onda λ; emplee la ecuación (39.2) para relacionar su energía E con su frecuencia f.
2. La energía cinética no relativista se puede expresar ya sea como $K = \frac{1}{2}mv^2$ o (ya que $p = mv$) como $K = p^2/2m$. Esta última forma es útil en cálculos que implican la longitud de onda de De Broglie.
3. Usted puede expresar las energías, ya sea en joules o en electrón volts, usando $h = 6.626 \times 10^{-34}$ J·s o $h = 4.136 \times 10^{15}$ eV·s, según sea el caso.

EVALUAR *su respuesta:* Para comprobar los resultados numéricos, es útil recordar algunos órdenes de magnitud aproximados. A continuación se presenta una lista parcial:

Tamaño de un átomo: 10^{-10} m = 0.1 nm

Masa de un átomo: 10^{-26} kg

Masa del electrón: $m = 10^{-30}$ kg; $mc^2 = 0.511$ MeV

Magnitud de la carga del electrón: 10^{-19} C

kT a temperatura ambiente: $\frac{1}{40}$ eV

Diferencia entre los niveles de energía de un átomo (que se analizan en la sección 39.3): 1 a 10 eV

Rapidez del electrón en el modelo de Bohr del átomo de hidrógeno (que se estudiará en la sección 39.3): 10^6 m/s

Ejemplo 39.1 Un experimento de difracción de electrones



En un experimento de difracción de electrones se utiliza un voltaje de aceleración de 54 V, se produce una intensidad máxima para $\theta = 50°$ (véase la figura 39.3*a*). La difracción de rayos x indica que el espaciado atómico en el objetivo es $d = 2.18 \times 10^{-10}$ m = 0.218 nm. Los electrones tienen una energía cinética insignificante antes de ser acelerados. Calcule la longitud de onda del electrón.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Determinaremos λ partir de la ecuación de De Broglie, ecuación (39.3), y de la ecuación de difracción, ecuación (39.4). De acuerdo con la ecuación (39.3),

$$\lambda = \frac{6.626 \times 10^{-34}\ \text{J}\cdot\text{s}}{\sqrt{2(9.109 \times 10^{-31}\ \text{kg})(1.602 \times 10^{-19}\ \text{C})(54\ \text{V})}}$$
$$= 1.7 \times 10^{-10}\ \text{m} = 0.17\ \text{nm}$$

Alternativamente, usando la ecuación (39.4) y suponiendo que $m = 1$,

$$\lambda = d\,\text{sen}\,\theta = (2.18 \times 10^{-10}\ \text{m})\ \text{sen}\,50° = 1.7 \times 10^{-10}\ \text{m}$$

EVALUAR: Los dos números concuerdan dentro de la precisión de los resultados experimentales, lo que nos da una comprobación excelente en nuestros cálculos. Observe que esta longitud de onda de los electrones es menor que la separación entre los átomos.

Ejemplo 39.2 Energía de un neutrón térmico



Determine la rapidez y la energía cinética de un neutrón ($m = 1.675 \times 10^{-27}$ kg) con longitud de onda de De Broglie $\lambda = 0.200$ nm, un espaciamiento típico interatómico en cristales. Compare esta energía con la energía cinética de traslación promedio de una molécula de gas ideal a temperatura ambiente ($T = 20°\text{C} = 293$ K).

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Este problema utiliza las relaciones entre la rapidez de las partículas y la longitud de onda, entre la rapidez de la partícula y la energía cinética, y entre la temperatura del gas y la energía cinética promedio de una molécula de gas. Encontraremos la rapidez del neutrón v usando la ecuación (39.1) y, a partir de ella, la energía cinética del neutrón $K = \frac{1}{2}mv^2$. Utilizaremos la ecuación (18.16) para determinar la energía cinética promedio de una molécula de gas.

EJECUTAR: De acuerdo con la ecuación (39.1), la rapidez del neutrón es

$$v = \frac{h}{\lambda m} = \frac{6.626 \times 10^{-34}\ \text{J}\cdot\text{s}}{(0.200 \times 10^{-9}\ \text{m})(1.675 \times 10^{-27}\ \text{kg})}$$
$$= 1.98 \times 10^3\ \text{m/s}$$

La energía cinética del neutrón es

$$K = \tfrac{1}{2}mv^2 = \tfrac{1}{2}(1.675 \times 10^{-27}\ \text{kg})(1.98 \times 10^3\ \text{m/s})^2$$
$$= 3.28 \times 10^{-21}\ \text{J} = 0.0205\ \text{eV}$$

Continúa

Según la ecuación (18.16), la energía cinética promedio de traslación de una molécula de gas ideal a $T = 293$ K es

$$\tfrac{1}{2}m(v^2)_{\text{med}} = \tfrac{3}{2}kT = \tfrac{3}{2}(1.38 \times 10^{-23}\ \text{J/K})(293\ \text{K})$$
$$= 6.07 \times 10^{-21}\ \text{J} = 0.0379\ \text{eV}$$

Las dos energías son comparables en magnitud; por esa razón, un neutrón con energía cinética en tal rango se denomina *neutrón térmico*. La difracción de neutrones térmicos se utiliza para estudiar cristales y estructuras moleculares de la misma manera que la difracción de rayos x. La difracción de neutrones ha demostrado ser especialmente útil en el estudio de grandes moléculas orgánicas.

EVALUAR: Observe que la rapidez calculada del neutrón es mucho menor que la rapidez de la luz. Esto justifica el uso de la forma no relativista de la ecuación (39.1).

Ondas de De Broglie y el mundo macroscópico

Si el esquema de De Broglie es correcto y la materia tiene aspectos ondulatorios, uno se podría preguntar por qué no vemos estos aspectos en la vida cotidiana. Como un ejemplo, se sabe que las ondas se difractan cuando se envían a través de una sola rendija. Sin embargo, cuando caminamos a través del umbral de una puerta (una especie de una rendija individual), ¡no nos preocupamos por la difracción de nuestro cuerpo!

La razón principal de que no veamos estos efectos en escalas humanas es que la constante h de Planck tiene un valor muy pequeño. Como resultado, las longitudes de onda de De Broglie incluso de los más pequeños objetos cotidianos que se pueden ver son extremadamente diminutas, y los efectos ondulatorios no son importantes. Por ejemplo, ¿cuál es la longitud de onda de un grano de arena que cae? Si la masa del grano es 5×10^{-10} kg y su diámetro es de 0.07 mm $= 7 \times 10^{-5}$ m, caerá en el aire con una rapidez terminal de aproximadamente 0.4 m/s. La magnitud de su momento lineal es entonces $p = mv = (5 \times 10^{-10}\ \text{kg})(0.4\ \text{m/s}) = 2 \times 10^{-10}\ \text{kg}\cdot\text{m/s}$. La longitud de onda de De Broglie de este grano de arena que cae es entonces

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{6.626 \times 10^{-34}\ \text{J}\cdot\text{s}}{2 \times 10^{-10}\ \text{kg}\cdot\text{m/s}} = 3 \times 10^{-24}\ \text{m}$$

Esta longitud de onda no solo es mucho menor que el diámetro del grano de arena, sino que también es mucho más pequeña que el tamaño de un átomo típico (alrededor de 10^{-10} m). Un objeto más masivo que se mueve más rápido tendría un momento lineal aún mayor y una longitud de onda de De Broglie aún menor. Los efectos de estas ínfimas longitudes de onda son tan pequeños que no se notan en la vida diaria.

Microscopio electrónico

El **microscopio electrónico** es un ejemplo importante e interesante del juego recíproco de propiedades ondulatorias y corpusculares de los electrones. Un haz de electrones, casi igual que un rayo de luz, permite formar una imagen de un objeto. Un rayo de luz es susceptible de desviarse por reflexión o refracción, y la trayectoria de un electrón se desvía con un campo eléctrico o magnético. Los rayos de luz que divergen de un punto en un objeto se pueden hacer converger con una lente convergente o un espejo cóncavo, y los electrones que divergen de una región pequeña convergen con la ayuda de campos eléctricos y/o magnéticos.

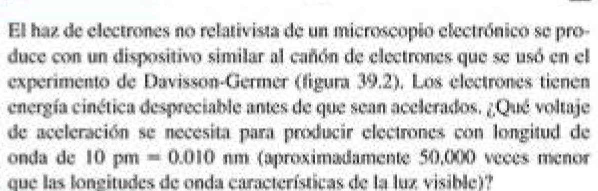
La analogía entre los rayos de luz y los electrones es más profunda. El modelo de *rayos* de la óptica geométrica es una representación aproximada del modelo *ondulatorio* más general. La óptica geométrica (óptica de rayos) es válida siempre que se desprecien los efectos de interferencia y difracción. De manera similar, el modelo de un electrón como una partícula que sigue una trayectoria lineal es una descripción aproximada del comportamiento real del electrón; este modelo es útil cuando se pueden despreciar los efectos relacionados con la naturaleza ondulatoria de los electrones.

¿Por qué un microscopio electrónico es superior a un microscopio óptico? La *resolución* de un microscopio óptico está limitada por efectos de difracción, como se describió en la sección 36.7. Puesto que un microscopio óptico usa longitudes de onda de alrededor de 500 nm, no logra captar a detalle objetos menores de algunos cientos de nanómetros, independientemente del cuidado que se tenga en la fabricación de las lentes. Asimismo, la resolución de un microscopio electrónico está limitada por las longitudes de onda de los electrones, pero esas longitudes de onda son muchos miles de veces menores que las de la luz visible. El resultado es que el aumento de un microscopio electrónico es miles de veces mayor que el de un microscopio óptico.

Observe que la capacidad de un microscopio electrónico para formar una imagen ampliada *no* depende de las propiedades ondulatorias de los electrones. Dentro de las limitaciones del principio de incertidumbre de Heisenberg (que estudiamos en la sección 39.6), es posible calcular las trayectorias de los electrones considerándolos como partículas clásicas cargadas, sometidas a la acción de fuerzas eléctricas y magnéticas. Solo cuando se habla de la resolución, son importantes las propiedades ondulatorias.



Ejemplo 39.3 Un microscopio electrónico



El haz de electrones no relativista de un microscopio electrónico se produce con un dispositivo similar al cañón de electrones que se usó en el experimento de Davisson-Germer (figura 39.2). Los electrones tienen energía cinética despreciable antes de que sean acelerados. ¿Qué voltaje de aceleración se necesita para producir electrones con longitud de onda de 10 pm = 0.010 nm (aproximadamente 50,000 veces menor que las longitudes de onda características de la luz visible)?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Podemos usar los mismos conceptos que utilizamos para entender el experimento de Davisson-Germer. El voltaje de aceleración es la cantidad V_{ba} en la ecuación (39.3). Reescribimos esta ecuación para despejar V_{ba}:

$$V_{ba} = \frac{h^2}{2me\lambda^2}$$

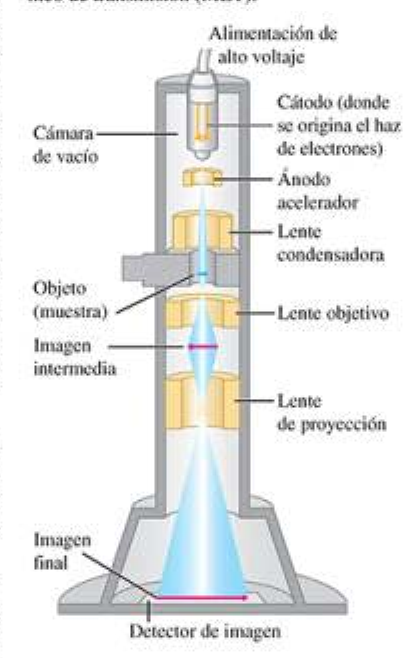
$$= \frac{(6.626 \times 10^{-34}\ \text{J}\cdot\text{s})^2}{2(9.109 \times 10^{-31}\ \text{kg})(1.602 \times 10^{-19}\ \text{C})(10 \times 10^{-12}\ \text{m})^2}$$

$$= 1.5 \times 10^4\ \text{V} = 15{,}000\ \text{V}$$

EVALUAR: Es fácil alcanzar voltajes de aceleración de 15 kV a partir de la línea de voltaje de 120 o 240 V usando un transformador (sección 31.6) y un rectificador (sección 31.1). Los electrones acelerados tienen energía cinética de 15 keV; ya que la energía en reposo del electrón es 0.511 MeV = 511 keV, entonces, estos electrones son no relativistas.

Tipos de microscopios electrónicos

La figura 39.5 muestra el esquema de un *microscopio electrónico de transmisión*, en el que los electrones realmente pasan a través de la muestra en estudio. La muestra a observarse puede tener de 10 a 100 nm de espesor, de modo que los electrones no se desaceleran apreciablemente a medida que pasan a través de esta. Los electrones usados en un microscopio de transmisión de electrones se emiten desde un cátodo caliente y se aceleran por una diferencia de potencial, típicamente de 40 a 400 kV. Después pasan a través de una "lente" condensadora que utiliza campos magnéticos para enfocar los electrones en un haz paralelo antes de que pasen a través de la muestra. El haz pasa entonces a través de dos lentes magnéticas más: una lente objetivo que forma una imagen intermedia de la muestra y una lente de proyección que produce una imagen final real de la imagen intermedia. Las lentes objetivo y de proyección desempeñan los papeles de las lentes objetivo y ocular, respectivamente, de un microscopio óptico compuesto (sección 34.8). La imagen final se proyecta sobre una pantalla fluorescente para observarse o fotografiarse. El aparato completo, incluyendo la muestra, se debe encerrar en un contenedor al vacío; de lo contrario, los electrones se podrían dispersar en las moléculas de aire y la imagen perdería nitidez. La imagen al inicio de este capítulo se hizo con un microscopio electrónico de transmisión.



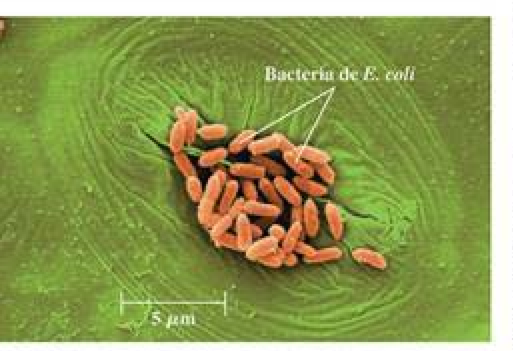
39.5 Diagrama de un microscopio electrónico de transmisión (MET).

Podríamos pensar que cuando la longitud de onda de los electrones es de 0.01 nm (como en el ejemplo 39.3), la resolución también sería de 0.01 nm. De hecho, rara vez es mejor que 0.1 nm, en parte debido a que la distancia focal de una lente magnética depende de la rapidez de los electrones, que nunca es exactamente la misma para todos los electrones en el haz.

Una variación importante es el *microscopio electrónico de barrido*. El haz de electrones se concentra en una línea muy fina para escanear a través de la muestra. El haz incide, golpea y arranca electrones de la muestra. Estos electrones expulsados son recolectados en un ánodo que se mantiene a un potencial de unos cuantos cientos de volts positivos con respecto a la muestra. La corriente eléctrica de estos electrones que fluyen hacia el ánodo varía conforme el haz del microscopio de barrido recorre la muestra. Esta corriente variable se utiliza entonces para crear un "mapa" de la muestra escaneada, y dicho mapa forma una imagen muy ampliada de la muestra.

Este esquema tiene varias ventajas. La muestra puede ser gruesa porque el haz no necesita pasar a través de esta. Además, la producción de electrones arrancados de la muestra depende del *ángulo* en que incide el haz en su superficie. Así, las micrografías

39.6 Esta imagen de un microscopio electrónico de barrido muestra a las bacterias *Escherichia coli* amontonadas en un estoma, un orificio para respirar, en la superficie de una hoja de lechuga. (Se agregó color falso). Si no se lava la lechuga antes de comerse, estas bacterias representan un peligro para la salud. La micrografía electrónica de *transmisión* al inicio de este capítulo muestra una vista muy amplificada de la superficie de una bacteria *E. coli*.



electrónicas de barrido tienen una apariencia que es mucho más tridimensional que las micrografías convencionales de luz visible (figura 39.6). Por lo común, la resolución es del orden de 10 nm, no tan buena como en un microscopio electrónico de transmisión, pero aún mucho más fina que en los mejores microscopios ópticos.

Evalúe su comprensión de la sección 39.1 *a*) Un protón tiene una masa ligeramente más pequeña que un neutrón. En comparación con el neutrón descrito en el ejemplo 39.2, ¿podría un protón de la misma longitud de onda tener **i.** más energía cinética, **ii.** menos energía cinética, o **iii.** la misma energía cinética? *b*) El ejemplo 39.1 muestra que, para dar a los electrones una longitud de onda de 1.7×10^{-10} m, estos deben acelerarse a partir del reposo a través de un voltaje de 54 V y así adquirir una energía cinética de 54 eV. ¿Un fotón con esta misma energía también tiene una longitud de onda de 1.7×10^{-10} m? ❙

39.2 Átomo nuclear y espectros atómicos

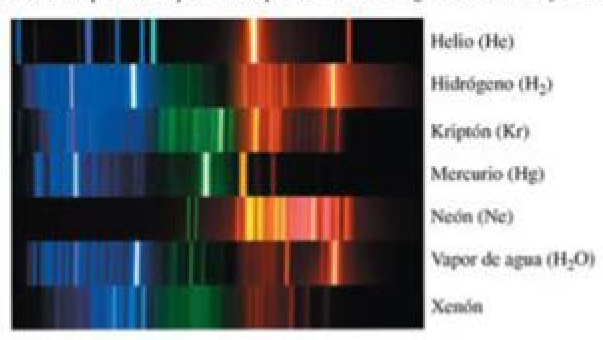
Cada átomo neutro contiene al menos un electrón. ¿Cómo afecta el aspecto ondulatorio de los electrones a la estructura atómica? Como veremos más adelante, es crucial entender no solo la estructura de los átomos, sino también la forma en que interactúan con la luz. En el pasado, la búsqueda para entender la naturaleza del átomo estaba íntimamente relacionada tanto con la idea de que los electrones tienen características ondulatorias como con el concepto de que la luz tiene características corpusculares. Antes de explorar cómo estas ideas conforman la teoría atómica, es útil examinar lo que se conocía acerca de los átomos, así como lo que quedaba de misterioso en la primera década del siglo XX.

Espectro de líneas

Todo el mundo sabe que los materiales calientes emiten luz, y que los diferentes materiales emiten distintos tipos de luz. Las bobinas de un tostador resplandecen en color rojo cuando está en funcionamiento, la llama de un fósforo tiene un color amarillo característico, y la llama de una estufa de gas es de una tonalidad azul. Para analizar estos diferentes tipos de luz, se utiliza un prisma o una rejilla de difracción para separar las diferentes longitudes de onda en un haz de luz en un espectro. Si la fuente de luz es un sólido caliente (tal como el filamento de una lámpara incandescente) o un líquido caliente, el espectro es *continuo*; luz de todas las longitudes de onda está presente (figura 39.7*a*). Pero si la fuente es un *gas* caliente, como las luces de neón en un anuncio publicitario o el vapor de sodio que se forma cuando se echa sal de mesa en la fogata de un campamento, el espectro incluye solo unos cuantos colores en forma de líneas paralelas aisladas agudas (figura 39.7*b*). (Cada "línea" es una imagen de la rendija del espectrógrafo, desviada a través de un ángulo que depende de la longitud de onda de la luz que forma esta imagen; véase la sección 36.5). Un espectro de este tipo se denomina **espectro de líneas de emisión**, y las líneas se llaman **líneas espectrales**. Cada línea espectral corresponde a una longitud de onda y frecuencia definidas.



39.7 *a*) Espectro continuo producido por el filamento de una bombilla incandescente. *b*) Espectro de líneas, emitido por una lámpara que contiene gas caliente.



39.8 Espectros de líneas de emisión de varios tipos de átomos y moléculas. No hay dos iguales. Observe que el espectro de vapor de agua (H_2O) es similar al del hidrógeno (H_2), pero existen diferencias importantes que hacen que sea fácil distinguir estos dos espectros.

A principios del siglo XIX se descubrió que cada elemento en su estado gaseoso tiene un único conjunto de longitudes de onda en su espectro de líneas. El espectro del hidrógeno contiene siempre un cierto conjunto de longitudes de onda; el mercurio produce un conjunto diferente, el neón otro, y así sucesivamente (figura 39.8). Los científicos consideran que los espectros para identificar los elementos y compuestos son una herramienta invaluable. Por ejemplo, los astrónomos han detectado los espectros de más de 100 diferentes moléculas en el espacio interestelar, incluyendo algunos que no se encuentran naturalmente en la Tierra.

Mientras que un gas *calentado emite* selectivamente solo ciertas longitudes de onda, un gas *frío absorbe* selectivamente ciertas longitudes de onda. Si pasamos luz blanca (espectro continuo) a través de gas y vemos la luz *transmitida* con un espectrómetro, nos encontramos con una serie de líneas oscuras que corresponden a las longitudes de onda absorbidas (figura 39.9). Esto se llama un **espectro de líneas de absorción**. Es más, un determinado tipo de átomo o molécula absorbe el *mismo* conjunto característico de longitudes de onda cuando está frío que las que emite cuando se calienta. Por lo tanto, los científicos pueden utilizar espectros de líneas de absorción para identificar las sustancias de la misma manera que utilizan los espectros de líneas de emisión.

Tan útiles son los espectros de líneas de emisión como los espectros de líneas de absorción. Esto que presentó un dilema a los científicos: *¿por qué* un determinado tipo de átomos emite y absorbe solo algunas longitudes de onda muy específicas? Para responder esta pregunta, necesitamos tener una mejor idea de cómo es el interior de un átomo. Sabemos que los átomos son mucho más pequeños que las longitudes de onda de la luz visible, por lo que no hay ninguna esperanza de *ver* realmente un átomo con esa luz. Sin embargo, aún se puede describir cómo se distribuyen la masa y la carga eléctrica en todo el volumen del átomo.

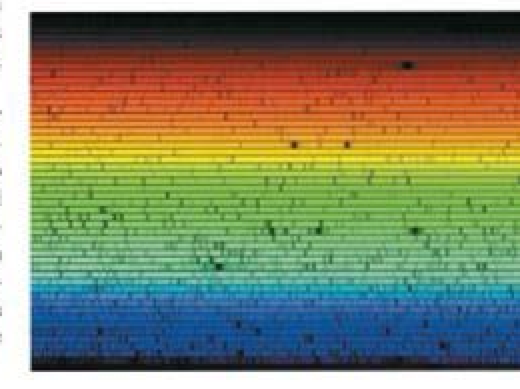
El panorama en 1910 era el siguiente. En 1897 el físico inglés J. J. Thomson (Premio Nobel 1906) había descubierto el electrón y midió la razón entre carga y masa e/m. En 1909, el físico estadounidense Robert Millikan (Premio Nobel 1923) había hecho las primeras mediciones de la carga del electrón $-e$. Estos y otros experimentos mostraron que casi toda la masa de un átomo tenía que estar asociada con la carga *positiva*, no con los electrones. También se sabía que el tamaño global de los átomos es del orden de 10^{-10} m y que todos los átomos, excepto el del hidrógeno, contienen más de un electrón.

En 1910 el mejor modelo disponible de la estructura atómica fue desarrollado por Thomson. Tuvo la visión del átomo como una esfera de alguna sustancia aún no identificada con carga positiva, dentro de la cual los electrones estaban incrustados como pasas en pastel. Este modelo ofrece una explicación de los espectros de líneas. Si el átomo colisiona con otro átomo, como en un gas caliente, cada electrón oscila alrededor de su posición de equilibrio con una frecuencia característica y emite radiación electromagnética con esa frecuencia. Si el átomo se ilumina con luz de muchas frecuencias, cada electrón absorbe selectivamente luz cuya frecuencia corresponde a la frecuencia natural de oscilación del electrón. (Este es el fenómeno de resonancia que estudiamos en la sección 14.8).

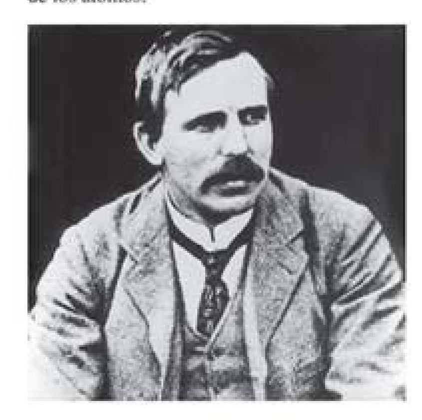
Aplicación Uso de espectros para analizar una nube de gas interestelar
La luz de esta nube de gas incandescente situada en la Pequeña Nube de Magallanes, una pequeña galaxia satélite de la Vía Láctea a unos 200,000 años luz (1.9×10^{18} km) de la Tierra, tiene un espectro de líneas de emisión. A pesar de su inmensa distancia, los astrónomos pueden decir que esta nube está compuesta principalmente de hidrógeno, ya que su espectro está dominado por la luz roja con una longitud de onda de 656.3 nm, una longitud de onda emitida por el hidrógeno y por ningún otro elemento.



39.9 Espectro de líneas de absorción del Sol. (El espectro de "líneas" se lee de izquierda a derecha y de arriba hacia abajo, como el texto de una página). El espectro es producido por la atmósfera relativamente fría del Sol, que absorbe fotones de las capas más profundas y más calientes. Las líneas de absorción indican así qué clase de átomos están presentes en la atmósfera solar.



39.10 Nacido en Nueva Zelanda, Ernest Rutherford (1871-1937) pasó su vida profesional en Inglaterra y Canadá. Antes de realizar los experimentos que establecieron la existencia de los núcleos atómicos, compartió (con Frederick Soddy) en 1908 el Premio Nobel de Química al demostrar que la radiactividad resulta de la desintegración de los átomos.



MasteringPHYSICS

PhET: Rutherford Scattering
ActivPhysics 19.1: Particle Scattering

Exploración de Rutherford del átomo

Los primeros experimentos diseñados para probar el modelo de Thomson explorando la estructura interna del átomo se realizaron entre 1910 y 1911 por Ernest Rutherford (figura 39.10) y dos de sus discípulos, Hans Geiger y Ernest Marsden, de la Universidad de Manchester en Inglaterra. Estos experimentos consistieron en lanzar un haz de partículas cargadas en láminas delgadas de elementos diferentes y observar cómo la lámina desviaba las partículas.

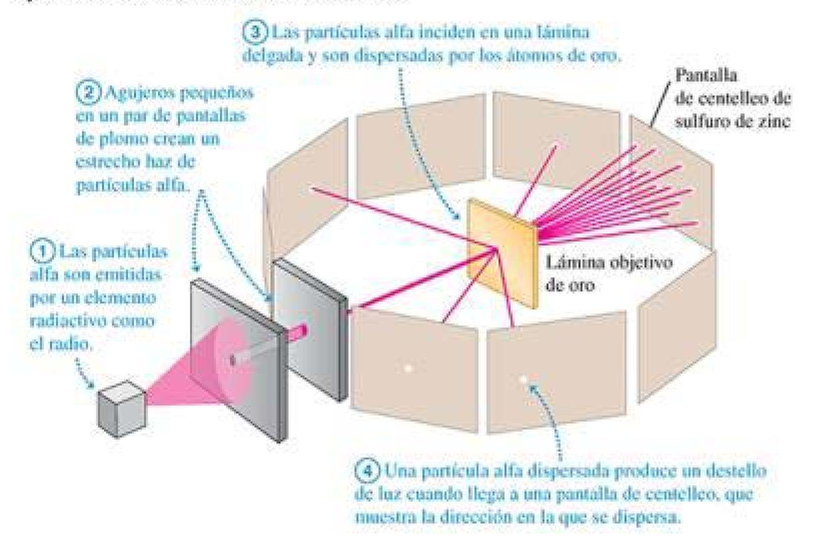
Los aceleradores de partículas ahora de uso común en los laboratorios aún no se habían inventado, y los proyectiles de Rutherford fueron *partículas alfa* emitidas por elementos radiactivos naturales. La naturaleza de estas partículas alfa no estaba completamente entendida, pero se sabía que son expulsadas de núcleos inestables con una rapidez del orden de 10^7 m/s, cargadas positivamente, y que pueden viajar varios centímetros a través del aire o aproximadamente 0.1 mm a través de materia sólida antes de alcanzar el reposo por las colisiones.

La figura 39.11 es una vista esquemática de la configuración experimental de Rutherford. Una sustancia radiactiva a la izquierda emite partículas alfa. Pantallas gruesas de plomo detienen todas las partículas excepto las de un haz estrecho. El haz pasa a través de la lámina objetivo (hecha de oro, plata o cobre) y pega en pantallas recubiertas con sulfuro de zinc, creando un destello momentáneo, o *centelleo*. Rutherford y sus alumnos contaron el número de partículas desviadas a través de diferentes ángulos.

Los átomos de una lámina de metal se empaquetan como canicas (no separadas) en una caja. Debido a que el haz de partículas pasa a través de la lámina, las partículas alfa deben pasar por el interior de los átomos. Dentro de un átomo, la partícula alfa cargada interactuará con los electrones y la carga positiva. (Puesto que la carga *total* del átomo es cero, las partículas alfa sienten una pequeña fuerza eléctrica fuera de un átomo). Un electrón tiene aproximadamente 7300 veces menos masa que una partícula alfa, por lo que las consideraciones del momento lineal indican que los electrones del átomo no pueden desviar mucho a la partícula alfa, no más que lo que un enjambre de mosquitos desvía una piedra que se le lanza. Cualquier desviación se deberá a la carga positiva que constituye casi la totalidad de la masa del átomo.

En el modelo de Thomson, la carga positiva y los electrones negativos se distribuyen a través de todo el átomo. Por lo tanto, el campo eléctrico en el interior del átomo debe ser bastante pequeño, y la fuerza eléctrica sobre una partícula alfa que entra en el átomo debería ser bastante débil. La deflexión máxima prevista es entonces de solo unos cuantos grados (figura 39.12*a*). Los resultados de los experimentos de Rutherford fueron *muy* diferentes de la predicción de Thomson. Algunas partículas alfa estaban

39.11 Los experimentos de dispersión de Rutherford investigaron lo que ocurre con las partículas alfa incidiendo sobre una lámina de oro fino. Los resultados de este experimento ayudaron a revelar la estructura de los átomos.



dispersas casi 180°, es decir, casi en línea recta hacia atrás (figura 39.12*b*). Rutherford escribiría más tarde:

> **Fue casi el evento más increíble que me sucedió en la vida. Casi tan increíble como si usted hubiera disparado un proyectil de 15 pulgadas contra un trozo de pañuelo desechable, y este rebotara y le pegara a usted.**

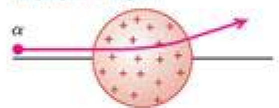
Es evidente que el modelo de Thomson era incorrecto y que se necesitaba un nuevo modelo. Suponga que la carga positiva, en vez de estar distribuida en una esfera con las dimensiones atómicas (del orden de 10^{-10} m), está concentrada en un volumen mucho *más pequeño*. Entonces actuaría como una carga puntual a distancias mucho menores. El campo eléctrico máximo que repele a la partícula alfa sería mucho más grande, y podría ocurrir el sorprendente gran ángulo de dispersión que Rutherford observó. Rutherford desarrolló este modelo y llamó a la concentración de carga positiva el **núcleo**. Calculó de nuevo el número de partículas que esperaba que se dispersaran a través de diferentes ángulos. Dentro de la precisión de sus experimentos, los resultados calculados y medidos concordaron hasta distancias del orden de 10^{-14} m. Sus experimentos establecieron que el átomo tiene un núcleo, una estructura muy pequeña y muy densa, no mayor de 10^{-14} m de diámetro. El núcleo ocupa solo alrededor de 10^{-12} del volumen total del átomo o menos, pero contiene *toda* la carga positiva y al menos el 99.95% de la masa total del átomo.

La figura 39.13 muestra una simulación con computadora de partículas alfa con una energía cinética de 5.0 MeV que son dispersadas por un núcleo de oro de radio 7.0×10^{-15} m (valor real) y por un núcleo con un radio hipotético diez veces más grande. En el segundo caso, *no* hay gran ángulo de dispersión. La presencia de un gran ángulo de dispersión en los experimentos de Rutherford atestiguó el pequeño tamaño del núcleo.

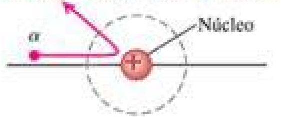
Experimentos posteriores mostraron que todos los núcleos están compuestos de protones cargados positivamente (descubiertos en 1918) y los neutrones eléctricamente neutros (descubiertos en 1930). Por ejemplo, los átomos de oro en los experimentos de Rutherford tienen 79 protones y 118 neutrones. De hecho, una partícula alfa en sí es el núcleo de un átomo de helio, con dos protones y dos neutrones. Es mucho más masiva que un electrón, pero su masa es solo alrededor del 2% de la de un núcleo de oro, lo que ayuda a explicar por qué las partículas alfa son dispersadas por núcleos de oro, pero no por electrones.

39.12 Comparación de los modelos de Thomson y de Rutherford del átomo.

a) Modelo de Thomson del átomo: una partícula alfa se dispersa solo a través de un pequeño ángulo.

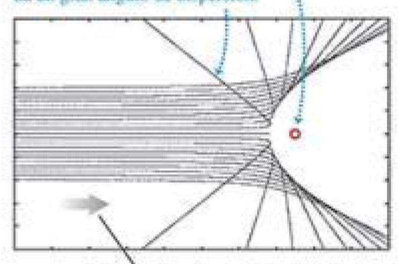


b) Modelo de Rutherford del átomo: una partícula alfa puede ser dispersada con un ángulo grande por el núcleo compacto, cargado positivamente (no dibujado a escala).



39.13 Simulación por computadora de la dispersión de partículas alfa de 5.0 MeV por un núcleo de oro. Cada curva muestra una posible trayectoria de las partículas alfa. *a*) Las curvas de dispersión concuerdan con los datos experimentales de Rutherford si se supone un radio de 7.0×10^{-15} m para un núcleo de oro. *b*) Un modelo con un radio mucho mayor para el núcleo de oro no concuerda con los datos.

a) Un núcleo de oro con radio de 7.0×10^{-15} m da un gran ángulo de dispersión.



b) Un núcleo con 10 veces el radio del núcleo en *a*) *no* presenta la dispersión a gran escala.

Movimiento de partículas alfa incidentes de 5.0 MeV



Ejemplo 39.4 Un experimento de Rutherford

Una partícula alfa (carga $2e$) se dirige directamente a un núcleo de oro (con carga $79e$). ¿Cuál es la energía cinética mínima inicial que debe tener la partícula alfa al acercarse a menos de 5.0×10^{-14} m del centro del núcleo de oro antes de invertir la dirección? Suponga que el núcleo de oro, que tiene aproximadamente 50 veces la masa de una partícula alfa, permanece en reposo.

Continúa

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: La fuerza de repulsión eléctrica ejercida por el núcleo de oro hace que la partícula alfa disminuya su rapidez hasta detenerse conforme se aproxima, y luego invierte la dirección. Esta fuerza es conservativa, por lo que la energía mecánica total (energía cinética de la partícula alfa más energía potencial eléctrica del sistema) se conserva.

PLANTEAR: Consideremos que el punto 1 representa la posición inicial de la partícula alfa, muy lejos del núcleo de oro, y que el punto 2 está a 5.0×10^{-14} m del centro del núcleo de oro. Nuestra incógnita es la energía cinética K_1 de la partícula alfa en el punto 1 que permite que alcance el punto 2 con $K_2 = 0$. Para esto vamos a usar la ley de conservación de la energía y la ecuación (23.9) para la energía potencial eléctrica, $U = qq_0/4\pi\epsilon_0 r$.

EJECUTAR: En el punto 1, la separación r de la partícula alfa y el núcleo de oro es efectivamente infinita, por lo que, a partir de la ecuación (23.9), $U_1 = 0$. En el punto 2, la energía potencial es

$$\begin{aligned} U_2 &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{qq_0}{r} \\ &= (9.0 \times 10^9\ \mathrm{N\cdot m^2/C^2})\frac{(2)(79)(1.60 \times 10^{-19}\ \mathrm{C})^2}{5.0 \times 10^{-14}\ \mathrm{m}} \\ &= 7.3 \times 10^{-13}\ \mathrm{J} = 4.6 \times 10^6\ \mathrm{eV} = 4.6\ \mathrm{MeV} \end{aligned}$$

Por conservación de energía, $K_1 + U_1 = K_2 + U_2$, así que $K_1 = K_2 + U_2 - U_1 = 0 + 4.6\ \mathrm{MeV} - 0 = 4.6$ MeV. Por lo tanto, para acercarse a menos de 5.0×10^{-14} m, la partícula alfa debe tener una energía cinética inicial $K_1 = 4.6$ MeV.

EVALUAR: Las partículas alfa emitidas de elementos radiactivos de forma natural suelen tener energías en el rango de 4 a 6 MeV. Por ejemplo, el isótopo común de radio, ^{226}Ra, emite una partícula alfa con energía de 4.78 MeV.

¿Era válido suponer que el núcleo de oro se mantiene en reposo? Para saberlo, observe que cuando la partícula alfa se detiene momentáneamente, la totalidad de su momento lineal inicial se ha transferido al núcleo de oro. Una partícula alfa tiene una masa $m_\alpha = 6.64 \times 10^{-27}$ kg; si su energía cinética inicial $K_1 = \frac{1}{2}mv_1^2$ es 7.3×10^{-13} J, usted puede demostrar que su rapidez inicial es $v_1 = 1.5 \times 10^7$ m/s, y su momento lineal inicial es $p_1 = m_\alpha v_1 = 9.8 \times 10^{-20}$ kg·m/s. Un núcleo de oro (masa $m_{Au} = 3.27 \times 10^{-25}$ kg) con este momento lineal tiene una rapidez mucho menor, $v_{Au} = 3.0 \times 10^5$ m/s, y energía cinética $K_{Au} = \frac{1}{2}mv_{Au}{}^2 = 1.5 \times 10^{-14}$ J $= 0.092$ MeV. Esta *energía cinética de retroceso* del núcleo de oro es de solo el 2% de la energía total en esta situación, por lo que se justifica despreciarla.

Fracaso de la física clásica

El descubrimiento de Rutherford del núcleo atómico genera una pregunta importante: ¿qué impide que los electrones cargados negativamente caigan en el núcleo cargado positivamente debido a la atracción electrostática fuerte? Rutherford sugirió que quizá los electrones *giraban* en órbitas alrededor del núcleo, al igual que los planetas giran alrededor del Sol.

Pero de acuerdo con la teoría electromagnética clásica, toda carga eléctrica acelerada (ya sea oscilando o girando) radia ondas electromagnéticas. Un ejemplo es la radiación de una carga puntual oscilante que se representa en la figura 32.3 (sección 32.1). Un electrón que orbita dentro de un átomo siempre tendría una aceleración centrípeta hacia el núcleo, y así debe estar emitiendo radiación *en todo momento*. La energía de un electrón en órbita, por lo tanto, disminuye de forma continua, su órbita debe ser más y más pequeña, y debería hacer una espiral hacia el núcleo en una fracción de un segundo (figura 39.14). Incluso algo más, de acuerdo con la teoría clásica, la *frecuencia* de las ondas electromagnéticas emitidas debería ser igual a la frecuencia de revolución. Como los electrones radian energía, sus rapideces angulares cambiarían continuamente, y emitirían un espectro *continuo* (una mezcla de todas las frecuencias), no el espectro de *líneas* que realmente se observa.

Así, el modelo de Rutherford de electrones que orbitan alrededor del núcleo, el cual se basa en la mecánica newtoniana y en la teoría electromagnética clásica, hace tres predicciones completamente *erróneas* acerca de los átomos: deberían emitir luz continua, deberían ser inestables, y la luz que emiten debería tener un espectro continuo. Era evidente que se necesitaba un replanteamiento radical de la física a escala atómica. En la siguiente sección veremos la idea audaz que llevó a una nueva interpretación del átomo, y veremos cómo esta idea engrana con el concepto no menos audaz de De Broglie de que los electrones tienen atributos de onda.

39.14 La física clásica hace predicciones acerca del comportamiento de los átomos que no coinciden con la realidad.

DE ACUERDO CON LA FÍSICA CLÁSICA:

- Un electrón en órbita se está acelerando, por lo que debería radiar ondas electromagnéticas.
- Las ondas se llevarían energía, por lo que el electrón debería perder energía y describir una espiral hacia adentro.
- La rapidez angular del electrón aumentaría conforme su órbita se contrae, por lo que la frecuencia de las ondas radiadas debería aumentar.

Por lo tanto, la física clásica dice que los átomos deberían colapsar en una fracción de segundo y emitir luz con un espectro continuo.



DE HECHO:

- Los átomos son estables.
- Emiten luz solo cuando están excitados y solo en frecuencias específicas (como un espectro de líneas).

Evalúe su comprensión de la sección 39.2 Suponga que se repitió el experimento de dispersión de Rutherford con una fina capa de hidrógeno sólido en lugar de la lámina de oro. (El hidrógeno es un sólido a temperaturas inferiores a 14.0 K). El núcleo de un átomo de hidrógeno tiene un solo protón, con aproximadamente un cuarto de la masa de una partícula alfa. En comparación con el experimento original con la lámina de oro, ¿cabe esperar que las partículas alfa en este caso experimenten **i.** dispersión con un ángulo más grande, **ii.** el mismo ángulo grande de dispersión o **iii.** reduzcan el gran ángulo de dispersión?

39.3 Niveles de energía y el modelo atómico de Bohr

En 1913, un joven físico danés que trabajaba con Ernest Rutherford en la Universidad de Manchester hizo una propuesta revolucionaria para explicar tanto la estabilidad de los átomos como sus espectros de líneas de emisión y de absorción. El físico era Niels Bohr (figura 39.15), y su innovación fue la de combinar el concepto de fotón que presentamos en el capítulo 38 con una idea totalmente novedosa: la energía de un átomo puede tener solo ciertos valores particulares. Su hipótesis representó una clara ruptura con las ideas del siglo XIX.

39.15 Niels Bohr (1885-1962) era un joven investigador de postdoctorado cuando propuso la novedosa idea de que la energía de un átomo puede tener solo ciertos valores discretos. En 1922 ganó el Premio Nobel de Física por estas ideas. Bohr hizo contribuciones fundamentales a la física nuclear y se convirtió en un apasionado partidario del libre intercambio de ideas científicas entre todas las naciones.



Emisión de fotones y absorción por los átomos

El razonamiento de Bohr fue así. El espectro de líneas de emisión de un elemento nos indica que los átomos de ese elemento emiten fotones solo con ciertas frecuencias f específicas y, por lo tanto, ciertas energías específicas $E = hf$. Durante la emisión de un fotón, la energía interna del átomo cambia en una cantidad igual a la energía del fotón. Por lo tanto, dice Bohr, cada átomo debe ser capaz de existir con solo ciertos valores específicos de energía interna. Cada átomo tiene un conjunto de **niveles de energía** posibles. Un átomo puede tener una cantidad de energía interna igual a cualquiera de estos niveles, pero *no puede* tener una energía *intermedia* entre dos niveles. Todos los átomos aislados de un elemento dado tienen el mismo conjunto de niveles de energía, pero los átomos de elementos diferentes tienen distintos conjuntos.

Supongamos que un átomo se eleva, o *se excita*, a un nivel de energía alto. (En un gas caliente esto ocurre cuando átomos en movimiento rápido experimentan colisiones inelásticas entre sí o con las paredes del recipiente de gas. En un tubo de descarga eléctrica, tal como los utilizados en un tubo de luz de neón, los átomos son excitados por colisiones con electrones en movimiento rápido). De acuerdo con Bohr, un átomo excitado puede tener una *transición* desde un nivel de energía a un nivel inferior emitiendo un fotón con una energía igual a la *diferencia* de energía entre los niveles inicial y final (figura 39.16). Si E_i es la energía inicial del átomo antes de dicha transición, E_f es la energía final después de la transición, y la energía del fotón es $hf = hc/\lambda$, entonces la conservación de la energía establece que

39.16 Un átomo excitado emitiendo un fotón.



$$hf = \frac{hc}{\lambda} = E_i - E_f \qquad \text{(energía del fotón emitido)} \qquad (39.5)$$

Por ejemplo, un átomo de litio excitado emite luz roja, con longitud de onda λ = 671 nm. La energía del fotón correspondiente es

$$E = \frac{hc}{\lambda} = \frac{(6.63 \times 10^{-34}\ \text{J}\cdot\text{s})(3.00 \times 10^{8}\ \text{m/s})}{671 \times 10^{-9}\ \text{m}}$$
$$= 2.96 \times 10^{-19}\ \text{J} = 1.85\ \text{eV}$$



PhET: Models of the Hydrogen Atom
ActivPhysics 18.1: The Bohr Model

Este fotón es emitido durante una transición como la que se muestra en la figura 39.16 entre dos niveles del átomo que difieren en energía por $E_i - E_f = 1.85$ eV.

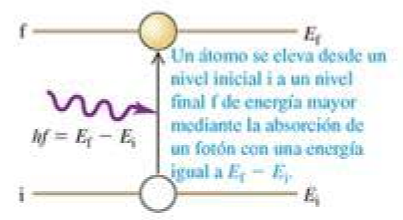
Los espectros de líneas de emisión que se muestran en la figura 39.8 presentan muchas longitudes de onda diferentes emitidas por cada átomo. Por lo tanto, cada tipo de átomo debe tener un número de niveles de energía, con diferentes espaciamientos de energía entre ellos. Cada longitud de onda en el espectro corresponde a una transición entre dos niveles de energía específicos del átomo.

CUIDADO **Producción de un espectro de líneas** Las líneas de un espectro de líneas de emisión, como el espectro de helio que se observa en la parte superior de la figura 39.8, *no* son todas producidas por un solo átomo. La muestra de gas helio que produjo el espectro en la figura 39.8 contenía un gran número de átomos de helio, que fueron excitados en un tubo de descarga eléctrica a diferentes niveles de energía. El espectro de gas muestra la luz emitida desde todas las distintas transiciones que ocurrieron en átomos diferentes de la muestra.

La observación de que los átomos son estables significa que cada átomo tiene un nivel de energía *más bajo*, llamado el **nivel fundamental** o **base**. Los niveles con energías

superiores al nivel fundamental se denominan **niveles excitados**. Un átomo en un nivel excitado, llamado un *átomo excitado*, puede efectuar una transición del nivel fundamental emitiendo un fotón como se muestra en la figura 39.16. Pero puesto que no hay niveles por debajo del nivel fundamental, un átomo en el nivel fundamental no puede perder energía y, por lo tanto, no es capaz de emitir un fotón.

39.17 Un átomo absorbe un fotón. (Compare con la figura 39.16).



Las colisiones no son la única manera de que la energía de un átomo se puede elevar de un nivel a uno superior. Si un átomo que inicialmente está en el nivel de energía inferior como en la figura 39.16 es alcanzado por un fotón con la cantidad justa de energía, el fotón puede ser *absorbido* y el átomo va a terminar en el nivel superior (figura 39.17). Como un ejemplo, ya se ha mencionado que el átomo de litio tiene dos niveles con una diferencia de energía de 1.85 eV. Para que un fotón sea absorbido y excite al átomo desde el nivel inferior al superior, el fotón debe tener una energía de 1.85 eV y una longitud de onda de 671 nm. En otras palabras, un átomo *absorbe* las mismas longitudes de onda que *emite*. Esto explica la correspondencia entre el espectro de líneas de emisión de un elemento y su espectro de líneas de absorción que se describió en la sección 39.2.

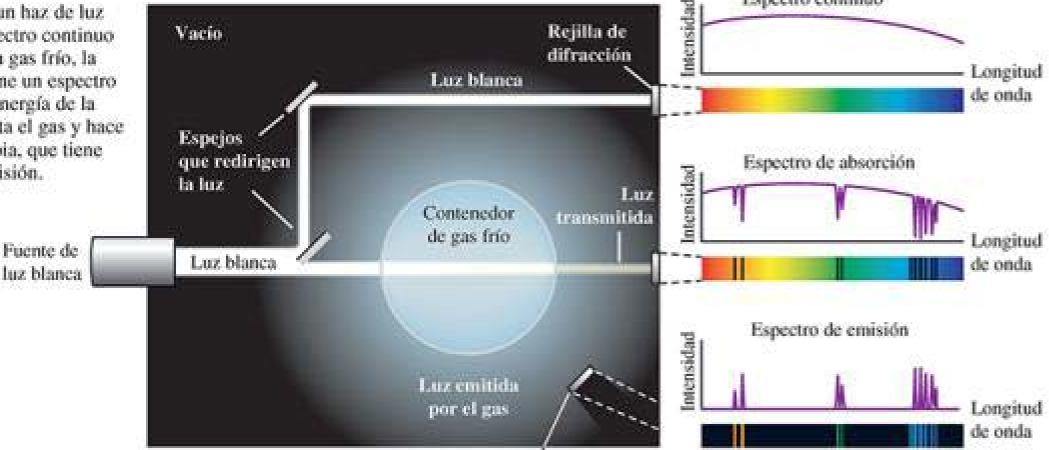
Observe que un átomo de litio *no puede* absorber un fotón con una longitud de onda un poco mayor (por ejemplo, 672 nm) o uno con una longitud de onda ligeramente menor (por ejemplo, 670 nm). Eso es porque tales fotones tienen, respectivamente, una energía ligeramente menor o mayor para aumentar la energía del átomo de un nivel a otro, y un átomo no puede tener una energía intermedia entre los niveles. Esto explica por qué los espectros de líneas de absorción tienen distintas líneas oscuras (véase la figura 39.9): los átomos solo absorben fotones con longitudes de onda específicas.

Un átomo que ha sido excitado a un nivel de energía mayor, ya sea mediante la absorción de fotones o por colisiones, no permanece en este por mucho tiempo. Después de un corto periodo de tiempo, denominado *tiempo de vida* del nivel (por lo regular, alrededor de 10^{-8} s), el átomo excitado emite un fotón y efectúa una transición a un nivel excitado más bajo o al nivel fundamental. La luz blanca, al iluminar un gas frío, produce un espectro de líneas de *absorción*, pero también produce un espectro de líneas de *emisión* debido a que se emiten fotones en todas las direcciones cuando los átomos pasan a niveles menos excitados (figura 39.18). Para mantener un gas de átomos brillando, se le debe proporcionar energía de manera continua con la finalidad de que los átomos sean excitados nuevamente y se emitan más fotones. Si se apaga la fuente de energía (por ejemplo, desconectando el suministro de corriente eléctrica al bulbo de luz de neón, o apagando la fuente de luz blanca en la figura 39.18), los átomos regresarán a su nivel fundamental y dejarán de emitir luz.

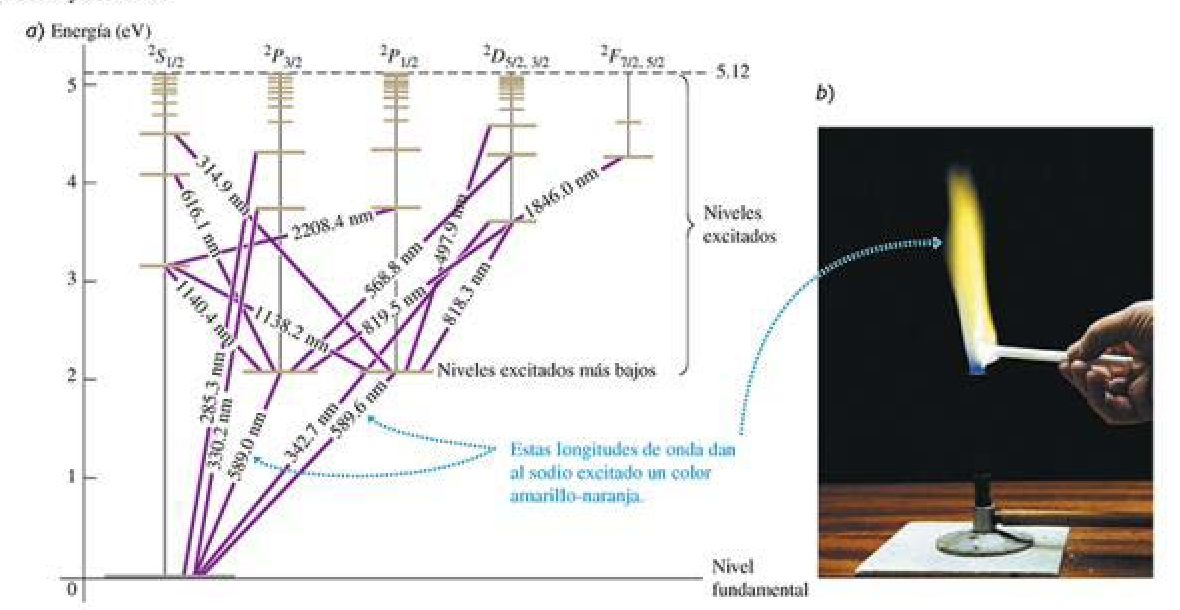


Al volver la vista hacia el espectro de líneas de emisión observado de un elemento, los físicos pueden deducir la disposición de niveles de energía en un átomo de ese elemento. Como ejemplo, la figura 39.19*a* muestra algunos de los niveles de energía de

39.18 Cuando un haz de luz blanca con un espectro continuo pasa a través de un gas frío, la luz transmitida tiene un espectro de absorción. La energía de la luz absorbida excita el gas y hace que emita luz propia, que tiene un espectro de emisión.



39.19 *a*) Niveles de energía del átomo de sodio, respecto del nivel fundamental. Los números en las líneas entre los niveles son las longitudes de onda de la luz emitida o absorbida durante las transiciones entre estos niveles. Los encabezados de columna, como $^2S_{1/2}$, representan algunos estados cuánticos del átomo. *b*) Cuando se coloca un compuesto de sodio en la flama, se excitan los átomos de sodio en los niveles bajos de excitación. Cuando regresan al nivel fundamental, los átomos emiten fotones de luz en la región amarillo-naranja con longitudes de onda de 589.0 y 589.6 nm.



un átomo de sodio. Tal vez usted haya observado la luz amarillo-naranja emitida por el vapor de sodio de las luces del alumbrado Los átomos de sodio emiten esta luz característica de color amarillo-naranja con longitudes de onda de 589.0 y 589.6 nm debido a la transición desde cada uno de los dos niveles muy próximos, denominados *niveles excitados más bajos*, hacia el nivel fundamental. Una prueba estándar para determinar la presencia de compuestos de sodio es buscar esta luz amarillo-naranja a partir de una muestra colocada en una flama (figura 39.19*b*).



Ejemplo 39.5 Espectros de emisión y absorción

Un átomo hipotético (figura 39.20*a*) tiene niveles de energía en 0.00 eV (nivel fundamental), 1.00 eV y 3.00 eV. *a*) ¿Cuáles son las frecuencias y longitudes de onda de las líneas espectrales que este átomo puede emitir cuando se excita? *b*) ¿Qué longitudes de onda puede absorber este átomo si se encuentra en su nivel fundamental?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: La energía se conserva cuando un fotón se emite o se absorbe. En cada transición, la energía del fotón es igual a la diferencia entre las energías de los niveles implicados en la transición.

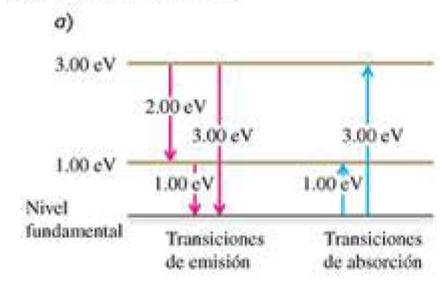
EJECUTAR: *a*) Las energías posibles de los fotones emitidos son 1.00 eV, 2.00 eV y 3.00 eV. Para 1.00 eV, la ecuación (39.2) da

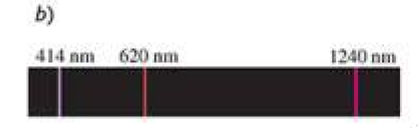
$$f = \frac{E}{h} = \frac{1.00 \text{ eV}}{4.136 \times 10^{-15} \text{ eV} \cdot \text{s}} = 2.42 \times 10^{14} \text{ Hz}$$

Para 2.00 eV y 3.00 eV, $f = 4.84 \times 10^{14}$ Hz y 7.25×10^{14} Hz, respectivamente. Para fotones de 1.00 eV,

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3.00 \times 10^8 \text{ m/s}}{2.42 \times 10^{14} \text{ Hz}} = 1.24 \times 10^{-6} \text{ m} = 1240 \text{ nm}$$

39.20 *a*) Diagrama de niveles de energía para el átomo hipotético, que muestra las transiciones posibles para la emisión de niveles excitados y para la absorción desde el nivel fundamental. *b*) Espectro de emisión de este átomo hipotético.





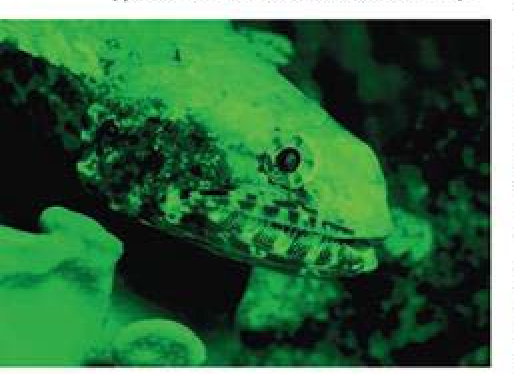
Continúa

Esto se encuentra en la región infrarroja del espectro (figura 39.20*b*). Para 2.00 eV y 3.00 eV, las longitudes de onda son 620 nm (rojo) y 414 nm (violeta), respectivamente.

b) A partir del nivel fundamental, solo un fotón de 1.00 eV o uno de 3.00 eV puede ser absorbido (figura 39.20*a*), un fotón de 2.00 eV no puede ser absorbido porque el átomo no tiene el nivel de energía 2.00 eV por encima del nivel fundamental. La luz que pasa de un sólido caliente a través de un gas de estos átomos hipotéticos (casi todos estarían en el nivel fundamental si el gas estuviera frío) daría un espectro con líneas de absorción oscuras en 1240 y 414 nm.

EVALUAR: Observe que si un gas de estos átomos estuviera a una temperatura suficientemente alta, las colisiones excitarían muchos átomos en el nivel de energía de 1.00 eV. Estos átomos excitados *pueden* absorber fotones de 2.00 eV, como muestra la figura 39.20*a*, y se presenta una línea a 620 nm en el espectro de absorción. Así, el espectro observado de una sustancia dada depende de sus niveles de energía y de su temperatura.

Aplicación Pez fluorescente Cuando está iluminado por luz azul, este pez lagarto tropical (familia *Synodontidae*) es fluorescente y emite luz verde de mayor longitud de onda. La fluorescencia es una señal sexual, o bien, una manera en la que los peces se camuflan entre el coral (que también tiene una fluorescencia verde).



Supongamos que en el ejemplo 39.5 tenemos un gas de átomos hipotéticos que se ilumina con luz violeta de 414 nm de longitud de onda. Los átomos en el nivel fundamental pueden absorber este fotón y efectuar una transición al nivel de 3.00 eV. Algunos de estos átomos harán una transición de vuelta al nivel fundamental emitiendo un fotón de 414 nm. Pero otros átomos volverán al nivel fundamental en dos etapas, primero emitiendo un fotón de 620 nm para la transición al nivel de 1.00 eV, y después un fotón de 1240 nm para la transición de regreso al nivel fundamental. Así, este gas emite radiación de longitud de onda mayor que la que absorbe, un fenómeno llamado *fluorescencia*. Por ejemplo, la descarga eléctrica en una lámpara fluorescente provoca que el vapor de mercurio en el tubo emita radiación ultravioleta. Esta radiación es absorbida por los átomos de la capa en el interior del tubo. Los átomos del recubrimiento entonces vuelven a emitir luz con mayor longitud de onda, en la parte visible del espectro. Las lámparas fluorescentes son más eficientes que las incandescentes en la conversión de energía eléctrica en luz visible debido a que no pierden tanta energía produciendo fotones infrarrojos (invisibles).

Nuestro análisis de los niveles de energía y de los espectros se ha concentrado en los *átomos*, pero las mismas ideas se aplican a las *moléculas*. La figura 39.8 muestra los espectros de líneas de emisión de dos moléculas: hidrógeno (H_2) y agua (H_2O). Al igual que sucede con el sodio u otros átomos, los físicos pueden trabajar a la inversa a partir de estos espectros moleculares y deducir la disposición de los niveles de energía para cada tipo de molécula. Vamos a regresar al tema de las moléculas y la estructura molecular en el capítulo 42.

Experimento de Franck-Hertz: ¿Son reales los niveles de energía?

¿Los niveles de energía atómicos son reales o solo son una ficción conveniente que nos ayuda a explicar los espectros? En 1914, los físicos alemanes James Franck y Gustav Hertz respondieron esta pregunta cuando encontraron evidencia experimental directa de la existencia de niveles de energía atómica.

Franck y Hertz estudiaron el movimiento de electrones a través de vapor de mercurio bajo la acción de un campo eléctrico. Encontraron que cuando la energía cinética de los electrones era de 4.9 eV o más, el vapor emitía luz ultravioleta de longitud de onda de 250 nm. Suponga que los átomos de mercurio tienen un nivel de energía de excitación de 4.9 eV por encima del nivel fundamental. Un átomo puede elevarse a ese nivel por la colisión con un electrón, y más tarde decaer de nuevo al nivel fundamental emitiendo un fotón. De acuerdo con la fórmula del fotón $E = hc/\lambda$, la longitud de onda del fotón debe ser

$$\lambda = \frac{hc}{E} = \frac{(4.136 \times 10^{-15}\ \text{eV}\cdot\text{s})(3.00 \times 10^{8}\ \text{m/s})}{4.9\ \text{eV}}$$
$$= 2.5 \times 10^{-7}\ \text{m} = 250\ \text{nm}$$

Esto es igual a la longitud de onda que midieron Franck y Hertz, lo que demuestra que este nivel de energía realmente existe en el átomo de mercurio. Experimentos similares con otros átomos producen el mismo tipo de evidencias para niveles de energía atómica. Franck y Hertz compartieron en 1925 el Premio Nobel de Física por sus investigaciones.

Ondas de electrones y el modelo de Bohr del hidrógeno

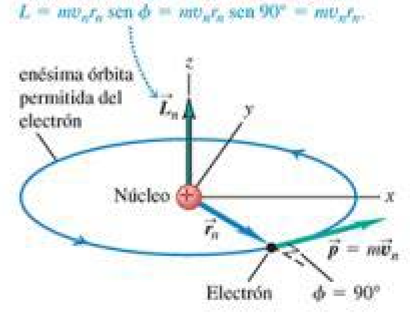
La hipótesis de Bohr estableció la relación entre los espectros atómicos y los niveles de energía. Sin embargo, por sí misma, no establece los principios generales para *pre-*

decir los niveles de energía de un átomo en particular. Bohr enfrentó este problema en el caso del átomo más sencillo, el hidrógeno, que tiene solo un electrón. Revisemos los conceptos que hay detrás del **modelo de Bohr** del átomo de hidrógeno.

Bohr postuló que cada nivel de energía de un átomo de hidrógeno corresponde a una órbita circular *estable* específica del electrón alrededor del núcleo. Rompiendo con la física clásica, Bohr postuló además que un electrón en tal órbita *no* radiaba. En cambio, un átomo emite energía cuando un electrón realiza una transición desde una órbita de energía E_i a una órbita diferente con menor energía E_f, emitiendo un fotón de energía $hf = E_i - E_f$ en el proceso.

Como resultado de un argumento bastante complicado que relaciona la frecuencia angular de la luz emitida con la rapidez angular del electrón en los niveles de energía altamente excitados, Bohr encontró que la magnitud del momento angular del electrón está *cuantizada*, es decir, esta magnitud debe ser un múltiplo entero de $h/2\pi$. (Ya que $1\ \text{J} = 1\ \text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}^2$, las unidades en el SI de la constante h de Planck, J·s, son las mismas unidades en el SI del momento angular, generalmente escritas como $\text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}$). Representemos el número de órbitas con un entero n, donde $n = 1, 2, 3, \ldots$, y denotemos al radio de la órbita n como r_n y a la rapidez del electrón en esa órbita v_n. El valor n para cada órbita se llama el **número cuántico principal** de la órbita. De acuerdo con la sección 10.5, ecuación (10.28), la magnitud del momento angular de un electrón de masa m en una órbita así es $L_n = mv_nr_n$ (figura 39.21). De manera que el argumento de Bohr conduce a

$$L_n = mv_nr_n = n\frac{h}{2\pi} \qquad \text{(cuantización del momento angular)} \qquad (39.6)$$



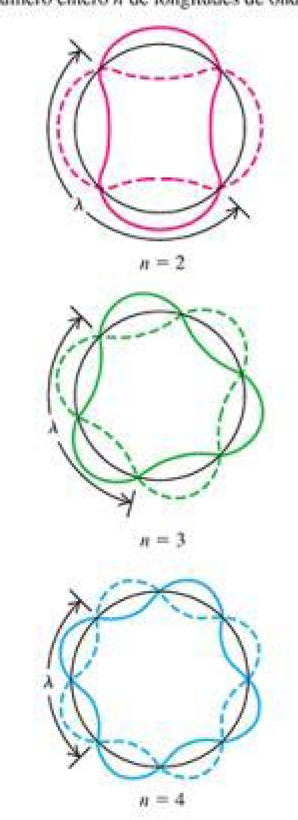
39.21 Cálculo del momento angular de un electrón en una órbita circular alrededor de un núcleo atómico.

En vez de recurrir al argumento de Bohr para justificar la ecuación (39.6), podemos usar el modelo de De Broglie de las ondas electrónicas. En lugar de visualizar el electrón en órbita como una partícula que se mueve alrededor del núcleo en una trayectoria circular, se concibe como una *onda estacionaria* sinusoidal con longitud de onda λ que se extiende alrededor de la circunferencia. Una onda estacionaria en una cuerda no transmite energía (véase la sección 15.7), y los electrones en las órbitas de Bohr no radian energía. Para que la onda "empalme" y se una consigo misma sin problemas, la circunferencia debe incluir algún *número entero* de longitudes de onda, como sugiere la figura 39.22. Por lo tanto, para una órbita con radio r_n y circunferencia $2\pi r_n$, debemos tener $2\pi r_n = n\lambda_n$, donde λ_n es la longitud de onda y $n = 1, 2, 3, \ldots$ De acuerdo con la relación de De Broglie, ecuación (39.1), la longitud de onda de una partícula con masa en reposo m que se mueve con rapidez no relativista v_n es $\lambda_n = h/mv_n$. Combinando $2\pi r_n = n\lambda_n$ y $\lambda_n = h/mv_n$, encontramos $2\pi r_n = nh/mv_n$ o

$$mv_nr_n = n\frac{h}{2\pi}$$

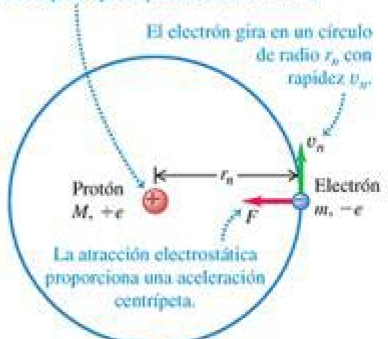
Este es el mismo resultado de Bohr, ecuación (39.6). Así, una imagen ondulatoria del electrón lleva naturalmente a la cuantización del momento angular del electrón.

39.22 Estos diagramas ilustran la idea de ajustar una onda electrónica estacionaria alrededor de una órbita circular. Para que la onda se una suavemente consigo misma, la circunferencia de la órbita debe ser un número entero n de longitudes de onda.



Ahora vamos a considerar un modelo del átomo de hidrógeno que es newtoniano en espíritu, pero incorpora esta supuesta cuantización (figura 39.23). Dicho átomo está formado por un solo electrón de masa m y carga $-e$ en una órbita circular alrededor de un solo protón con carga $+e$. El protón tiene casi 2000 veces la masa del electrón, por lo que podemos suponer que el protón no se mueve. En la sección 5.4 aprendimos que cuando una partícula con masa m se mueve con rapidez v_n en una órbita circular de radio r_n, su aceleración centrípeta (hacia adentro) es v_n^2/r_n. De acuerdo con la segunda ley de Newton, una fuerza neta radialmente hacia adentro con magnitud $F = mv_n^2/r_n$ es necesaria para causar esta aceleración. Se ha estudiado en la sección 12.4 cómo la atracción gravitacional proporciona la fuerza hacia adentro para las órbitas satelitales. En el hidrógeno, la fuerza F es suministrada por la atracción eléctrica entre el protón positivo y el electrón negativo. De acuerdo con la ley de Coulomb, ecuación (21.2)

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^2}{r_n^2}$$



39.23 Modelo de Bohr del átomo de hidrógeno.

Por lo tanto, la segunda ley de Newton establece que

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^2}{r_n^{\ 2}} = \frac{mv_n^{\ 2}}{r_n} \tag{39.7}$$

Al resolver las ecuaciones (39.6) y (39.7) simultáneamente para despejar r_n y v_n, obtenemos

$$r_n = \epsilon_0 \frac{n^2h^2}{\pi me^2} \quad \text{(radios orbitales en el modelo de Bohr)} \tag{39.8}$$

$$v_n = \frac{1}{\epsilon_0}\frac{e^2}{2nh} \quad \text{(rapideces orbitales en el modelo de Bohr)} \tag{39.9}$$

La ecuación (39.8) muestra que el radio de la órbita r_n es proporcional a n^2, por lo que el menor radio de la órbita corresponde a $n = 1$. Vamos a denotar este radio mínimo, llamado *radio de Bohr*, como a_0:

$$a_0 = \epsilon_0 \frac{h^2}{\pi me^2} \quad \text{(radio de Bohr)} \tag{39.10}$$

Entonces, podemos rescribir la ecuación (39.8) como

$$r_n = n^2 a_0 \tag{39.11}$$

Las órbitas permitidas tienen radios a_0, $4a_0$, $9a_0$, y así sucesivamente.

Se pueden encontrar los valores numéricos de las cantidades en el lado derecho de la ecuación (39.10) en el apéndice F. Utilizando estos valores, encontramos que el radio a_0 de la órbita de Bohr más pequeña es

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{(8.854 \times 10^{-12}\ \mathrm{C^2/N \cdot m^2})(6.626 \times 10^{-34}\ \mathrm{J \cdot s})^2}{\pi(9.109 \times 10^{-31}\ \mathrm{kg})(1.602 \times 10^{-19}\ \mathrm{C})^2} \\ &= 5.29 \times 10^{-11}\ \mathrm{m} \end{aligned}$$

Esto da un diámetro atómico de aproximadamente 10^{-10} m = 0.1 nm, que es congruente con las dimensiones atómicas estimadas por otros métodos.

La ecuación (39.9) muestra que la rapidez orbital v_n es proporcional a $1/n$. Por lo tanto, cuanto mayor sea el valor de n, mayor es el radio de la órbita del electrón y menor es su rapidez orbital. (Vimos la misma relación entre el radio de la órbita y la rapidez de las órbitas de satélite en la sección 13.4). Dejamos al lector la tarea de calcular la rapidez en la órbita $n = 1$, que es la rapidez máxima posible del electrón en el átomo de hidrógeno (véase el ejercicio 39.29); el resultado es $v_1 = 2.19 \times 10^6$ m/s. Esto es menos del 1% de la rapidez de la luz, por lo que las consideraciones relativistas no son significativas.

Niveles de energía del hidrógeno en el modelo de Bohr

Ahora podemos utilizar las ecuaciones (39.8) y (39.9) para encontrar las energías potencial y cinética, U_n y K_n, cuando el electrón está en la órbita con número cuántico n:

$$K_n = \tfrac{1}{2}mv_n^{\ 2} = \frac{1}{\epsilon_0^2}\frac{me^4}{8n^2h^2} \quad \text{(energías cinéticas en el modelo de Bohr)} \tag{39.12}$$

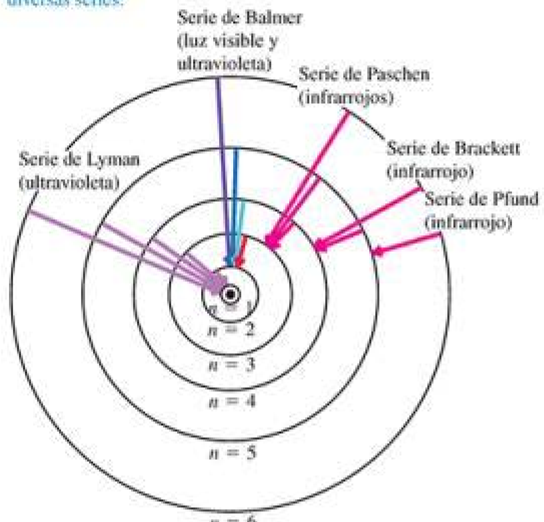
$$U_n = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^2}{r_n} = -\frac{1}{\epsilon_0^2}\frac{me^4}{4n^2h^2} \quad \text{(energías potenciales en el modelo de Bohr)} \tag{39.13}$$

La energía potencial tiene un signo negativo porque se ha tomado la energía potencial eléctrica igual a cero cuando el electrón está infinitamente lejos del núcleo. Estamos interesados solo en las *diferencias* de energía entre las órbitas, por lo que la posición de referencia no importa. La energía total E_n es la suma de las energías cinética y potencial:

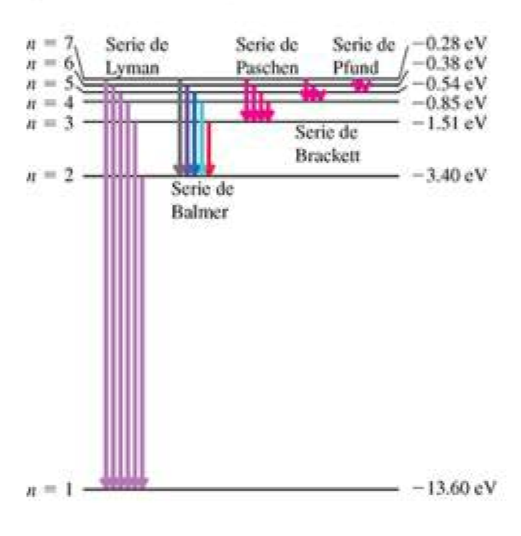
$$E_n = K_n + U_n = -\frac{1}{\epsilon_0^2}\frac{me^4}{8n^2h^2} \quad \text{(energías totales en el modelo de Bohr)} \tag{39.14}$$

39.24 Dos formas de representar los niveles de energía del átomo de hidrógeno y las transiciones entre ellos. Observe que el radio de la enésima órbita permitida es en realidad n^2 por el radio de la órbita $n = 1$.

a) Órbitas permitidas de un electrón en el modelo de Bohr del átomo de hidrógeno (no a escala). Las flechas indican las transiciones responsables de algunas de las líneas de diversas series.



b) Diagrama de niveles de energía de hidrógeno, que muestra algunas transiciones correspondientes a las distintas series.



Ya que E_n en la ecuación (39.14) tiene un valor diferente para cada n, se observa que esta ecuación da los *niveles de energía* del átomo de hidrógeno en el modelo de Bohr. Cada órbita distinta corresponde a un nivel de energía diferente.

La figura 39.24 muestra las órbitas y los niveles de energía. Etiquetamos los posibles niveles de energía del átomo mediante valores del número cuántico n. Para cada valor de n hay valores correspondientes de radio de la órbita r_n, rapidez v_n, momento angular $L_n = nh/2\pi$ y energía total E_n. La energía del átomo es menor cuando $n = 1$ y E_n tiene su valor más negativo. Este es el *nivel fundamental* del átomo de hidrógeno; es el nivel de la órbita más pequeña, de radio a_0. Para $n = 2, 3, \ldots$, el valor absoluto de E_n es más pequeño y la energía es progresivamente mayor (menos negativa).

La figura 39.24 también muestra algunas de las posibles transiciones de la órbita de un electrón a una órbita de menor energía. Considere la transición de la órbita n_U (superior; el subíndice corresponde a la inicial de *upper*) a una órbita más pequeña n_L (inferior, por la inicial de *lower*), con $n_L < n_U$, o de manera equivalente, del *nivel* n_U a un *nivel* inferior n_L. Entonces la energía hc/λ del fotón emitido de longitud de onda λ es igual a $E_{n_U} - E_{n_L}$. Antes de usar esta relación para despejar λ, es conveniente reescribir la ecuación (39.14) para las energías como

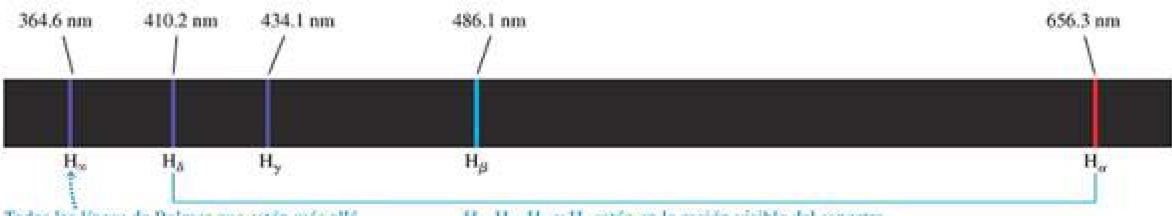
$$E_n = -\frac{hcR}{n^2}, \qquad \text{donde} \qquad R = \frac{me^4}{8\epsilon_0^2 h^3 c} \qquad \text{(energías totales en el modelo de Bohr)} \qquad (39.15)$$

La cantidad R en la ecuación (39.15) se denomina la **constante de Rydberg** (llamada así por el físico sueco Johannes Rydberg, quien realizó un trabajo pionero en el espectro del hidrógeno). Al sustituir los valores numéricos de las constantes físicas fundamentales m, c, e, h y ϵ_0, que se pueden determinar con bastante independencia de la teoría de Bohr, encontramos que $R = 1.097 \times 10^7\ \text{m}^{-1}$. Ahora despejamos la longitud de onda del fotón emitido en una transición desde el nivel n_U al nivel n_L:

$$\frac{hc}{\lambda} = E_{n_U} - E_{n_L} = \left(-\frac{hcR}{n_U^2}\right) - \left(-\frac{hcR}{n_L^2}\right) = hcR\left(\frac{1}{n_L^2} - \frac{1}{n_U^2}\right)$$

$$\frac{1}{\lambda} = R\left(\frac{1}{n_L^2} - \frac{1}{n_U^2}\right) \qquad \text{(longitudes de onda de hidrógeno en el modelo de Bohr, } n_L < n_U\text{)} \qquad (39.16)$$

39.25 Serie de Balmer de líneas espectrales del hidrógeno atómico. Se observan estas mismas líneas en el espectro del hidrógeno *molecular* (H_2) que se muestra en la figura 39.8, así como las líneas adicionales que están presentes solamente cuando se combinan dos átomos de hidrógeno para formar una molécula.





PhET: Neon Lights and Other Discharge Lamps
ActivPhysics 18.2: Spectroscopy

La ecuación (39.16) es una *predicción teórica* de las longitudes de onda que se encuentran en el espectro de líneas de *emisión* de átomos de hidrógeno. Cuando un átomo de hidrógeno *absorbe* un fotón, un electrón hace una transición desde un nivel n_L a un nivel *mayor* n_U. Esto solo ocurre si la energía del fotón hc/λ es igual a $E_{n_U} - E_{n_L}$, que es la misma condición expresada por la ecuación (39.16). Así que esta ecuación también predice las longitudes de onda que se encuentran en el espectro de líneas de *absorción* del hidrógeno.

¿Cómo se compara esta predicción con el experimento? Si $n_L = 2$, correspondiente a las transiciones al segundo nivel de energía en la figura 39.24, las longitudes de onda predichas por la ecuación (39.16) se encuentran en las partes visible y ultravioleta del espectro electromagnético. Estas longitudes de onda se conocen colectivamente como la *serie de Balmer* (figura 39.25). Si consideramos que $n_L = 2$ y $n_U = 3$ en la ecuación (39.16), obtenemos la longitud de onda de la línea H_α:

$$\frac{1}{\lambda} = (1.097 \times 10^7 \text{ m}^{-1})\left(\tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{9}\right) \qquad \text{o} \qquad \lambda = 656.3 \text{ nm}$$

Con $n_L = 2$ y $n_U = 4$ se obtiene la longitud de onda de la línea de H_β, y así sucesivamente. Con $n_L = 2$ y $n_U = \infty$ obtenemos la longitud de onda más corta de la serie, $\lambda =$ 364.6 nm. Estas predicciones teóricas ¡están dentro del 0.1% de las longitudes de onda observadas del hidrógeno! Esta concordancia tan cercana confirma de manera directa y contundente la teoría de Bohr.

El modelo de Bohr también predice muchas otras longitudes de onda en el espectro de hidrógeno, como se muestra en la figura 39.24. Las longitudes de onda observadas de todas estas series, cada una de las cuales lleva el nombre de su descubridor, coinciden con los valores predichos con el mismo porcentaje de exactitud que la serie de Balmer. La *serie de Lyman* de líneas espectrales es causada por transiciones entre el nivel fundamental y los niveles excitados, que corresponden a $n_L = 1$ y $n_U = 2, 3, 4, \ldots$ en la ecuación (39.16). La diferencia de energía entre el nivel fundamental y cualquiera de los niveles excitados es grande, de modo que los fotones emitidos tienen longitudes de onda en la parte ultravioleta del espectro electromagnético. Las transiciones entre los niveles de energía más altos implican una diferencia de energía mucho menor, de modo que los fotones emitidos en estas transiciones tienen poca energía y longitudes de onda infrarrojas grandes. Este es el caso tanto para la *serie de Brackett* ($n_L = 3$ y $n_U = 4, 5, 6, \ldots$, correspondiente a las transiciones entre el tercer nivel y niveles los más altos de energía) y la *serie de Pfund* ($n_L = 4$ y $n_U = 5, 6, 7, \ldots$, con transiciones entre el cuarto nivel y los niveles más altos de energía).

La figura 39.24 muestra solo las transiciones en las que un átomo de hidrógeno pierde energía y se emite un fotón. Pero, como ya estudiamos, las longitudes de onda de los fotones que un átomo puede *absorber* son los mismos que los que puede emitir. Por ejemplo, un átomo de hidrógeno en el nivel $n = 2$ es capaz de absorber un fotón de 656.3 nm y terminar en el nivel $n = 3$.

Una prueba adicional del modelo de Bohr es su valor predicho de la *energía de ionización* del átomo de hidrógeno. Esta es la energía necesaria para remover completamente el electrón del átomo. La ionización corresponde a una transición desde el nivel fundamental ($n = 1$) a un radio de órbita infinitamente grande ($n = \infty$), por lo que la energía que se debe agregar al átomo es $E_\infty - E_1 = 0 - E_1 = -E_1$ (recuerde que E_1 es negativa).

Sustituyendo las constantes del apéndice F en la ecuación (39.15) se obtiene una energía de ionización de 13.606 eV. También es posible medir la energía de ionización directamente; el resultado es 13.60 eV. Estos dos valores concuerdan dentro de 0.1%.



Ejemplo 39.6 Exploración del modelo de Bohr

Calcule las energías cinética, potencial y total del átomo de hidrógeno en el primer nivel excitado, y determine la longitud de onda del fotón emitido en una transición de ese nivel al nivel fundamental.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Este problema utiliza las ideas del modelo de Bohr. Usamos versiones simplificadas de las ecuaciones (39.12), (39.13) y (39.14) para encontrar las energías del átomo, y la ecuación (39.16), $hc/\lambda = E_{n_U} - E_{n_L}$, para encontrar la longitud de onda λ de fotones en una transición de $n_U = 2$ (primer nivel excitado) a $n_L = 1$ (nivel fundamental).

EJECUTAR: Podríamos evaluar las ecuaciones (39.12), (39.13) y (39.14) para el enésimo nivel sustituyendo los valores de m, e, ϵ_0 y h. Pero podemos simplificar el cálculo comparando con la ecuación (39.15), la que demuestra que la constante $me^4/8\epsilon_0^2h^2$ que aparece en las ecuaciones (39.12), (39.13) y (39.14) es igual a hcR:

$$\frac{me^4}{8\epsilon_0^2h^2} = hcR$$
$$= (6.626 \times 10^{-34}\ \text{J}\cdot\text{s})(2.998 \times 10^8\ \text{m/s}) \times (1.097 \times 10^7\ \text{m}^{-1})$$
$$= 2.179 \times 10^{-18}\ \text{J} = 13.60\ \text{eV}$$

Esto nos permite reescribir las ecuaciones (39.12), (39.13) y (39.14) como

$$K_n = \frac{13.60\ \text{eV}}{n^2} \qquad U_n = \frac{-27.20\ \text{eV}}{n^2} \qquad E_n = \frac{-13.60\ \text{eV}}{n^2}$$

Para el primer nivel excitado ($n = 2$), tenemos $K_2 = 3.40$ eV, $U_2 = -6.80$ eV y $E_2 = -3.40$ eV. Para el nivel fundamental ($n = 1$), $E_1 = -13.60$ eV. La energía del fotón emitido es entonces $E_2 - E_1 = -3.40\ \text{eV} - (-13.60\ \text{eV}) = 10.20$ eV y

$$\lambda = \frac{hc}{E_2 - E_1} = \frac{(4.136 \times 10^{-15}\ \text{eV}\cdot\text{s})(3.00 \times 10^8\ \text{m/s})}{10.20\ \text{eV}}$$
$$= 1.22 \times 10^{-7}\ \text{m} = 122\ \text{nm}$$

Esta es la longitud de onda de la línea Lyman-alfa (L_α), la línea de longitud de onda más larga en la serie de líneas de Lyman ultravioleta en el espectro del hidrógeno (véase la figura 39.24).

EVALUAR: La energía mecánica total para cualquier nivel es negativa y es igual a la mitad de la energía potencial. Se encuentra la misma relación de energía de las órbitas de satélite de Newton de la sección 12.4. Las situaciones son similares porque tanto las fuerzas electrostáticas como las gravitacionales son inversamente proporcionales a $1/r^2$.

Movimiento nuclear y la masa reducida de un átomo

El modelo de Bohr es tan exitoso que está justificado preguntarse por qué sus predicciones para las longitudes de onda y la energía de ionización del hidrógeno difieren de los valores medidos por alrededor de 0.1%. La explicación es que hemos supuesto que el núcleo (un protón) permanece en reposo. Sin embargo, como muestra la figura 39.26, el *protón* y el *electrón* giran en órbitas circulares alrededor de su centro de masa (véase la sección 8.5). Resulta que podemos tomar en cuenta este movimiento muy sencillamente utilizando en las ecuaciones de Bohr no la masa en reposo m del electrón, sino una cantidad llamada **masa reducida** m_r del sistema. Para un sistema compuesto por dos cuerpos de masas m_1 y m_2, la masa reducida es

$$m_r = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \tag{39.17}$$

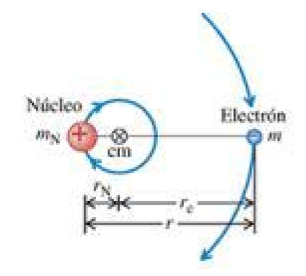
Para el hidrógeno ordinario igualamos m_1 a m, y m_2 a la masa del protón, $m_p = 1836.2m$. Así, el sistema protón-electrón del hidrógeno ordinario tiene una masa reducida de

$$m_r = \frac{m(1836.2m)}{m + 1836.2m} = 0.99946m$$

Cuando se utiliza este valor en lugar de la masa m de electrones en las ecuaciones de Bohr, los valores predichos concuerdan muy bien con los valores medidos.

En un átomo de deuterio, también llamado *hidrógeno pesado*, el núcleo no es un solo protón, sino un protón y un neutrón unidos para formar un cuerpo compuesto llamado *deuterón*. La masa reducida del átomo de deuterio resulta ser de 0.99973m. Las ecuaciones (39.15) y (39.16) (con m sustituida por m_r) demuestran que todas las longitudes de onda son inversamente proporcionales a m_r. Así, las longitudes de onda del

39.26 Tanto el núcleo como el electrón orbitan alrededor de su centro de masa común. La distancia r_N se exageró para mayor claridad; para hidrógeno ordinario en realidad es igual a $r_e/1836.2$.



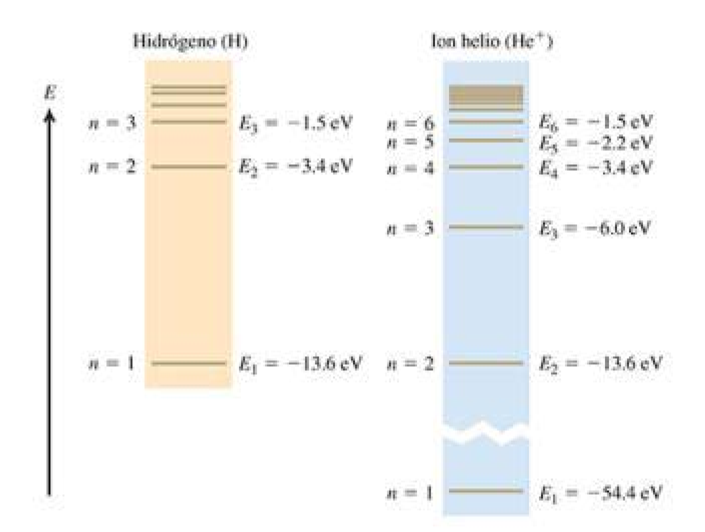
espectro del deuterio deberían ser las de hidrógeno dividido entre $(0.99973m)/(0.99946m) = 1.00027$. Este es un efecto pequeño, pero que está dentro de la precisión de los espectrómetros modernos. Este pequeño corrimiento de la longitud de onda condujo al científico estadounidense Harold Urey al descubrimiento del deuterio en 1932, un logro que le valió en 1934 el Premio Nobel de Química.

Átomos hidrogenoides

Es posible extender el modelo de Bohr a otros átomos de un electrón, tales como el helio simplemente ionizado (He^+), el litio doblemente ionizado (Li^{2+}), y así sucesivamente. Estos átomos se llaman átomos *hidrogenoides*. En estos átomos, la carga nuclear no es e sino Ze, donde Z es el *número atómico*, igual al número de protones en el núcleo. El efecto en el análisis anterior es reemplazar e^2 en todas partes por Ze^2. En particular, los radios orbitales r_n dados por la ecuación (39.8) serán menores por un factor de Z, y los niveles de energía E_n dados por la ecuación (39.14) se multiplican por Z^2. Le invitamos a comprobar estas afirmaciones. La corrección de masa reducida en estos casos es incluso de menos del 0.1% debido a que los núcleos son más masivos que el único protón del hidrógeno ordinario. La figura 39.27 compara los niveles de energía de H y de He^+, que tiene $Z = 2$.

Los átomos de los metales alcalinos (en el extremo izquierdo de la tabla periódica; véase el apéndice D) tienen un electrón fuera de la coraza formada por el núcleo y los electrones internos, con carga neta de la coraza $+e$. Estos átomos son aproximadamente hidrogenoides, especialmente en niveles excitados. Los físicos han estudiado átomos alcalinos en los que el electrón exterior se ha excitado en una órbita muy grande, con $n = 1000$. De acuerdo con la ecuación (39.8), el radio de un *átomo de Rydberg* con $n = 1000$ es $n^2 = 10^6$ veces el radio de Bohr, o alrededor de 0.05 mm, aproximadamente el mismo tamaño de un pequeño grano de arena.

Aunque el modelo de Bohr predijo los niveles de energía del átomo de hidrógeno correctamente, planteó tantas preguntas como respuestas. Se combinaron elementos de la física clásica con nuevos postulados que eran incompatibles con las ideas clásicas. El modelo no proporcionó información sobre lo que ocurre durante una transición de una órbita a otra; las rapideces angulares del movimiento de los electrones no eran, en general, las frecuencias angulares de la radiación emitida, un resultado que es contrario a la electrodinámica clásica. Los intentos de extender el modelo a átomos con dos o más electrones no tuvieron éxito. Un electrón que se mueve en una órbita circular de Bohr forma un circuito de corriente y debería producir un momento dipolar magnético (véase la sección 27.7). Sin embargo, un átomo de hidrógeno en su nivel fundamental *no* tiene momento magnético debido al movimiento orbital. En los capítulos 40 y 41 se verá que se necesitaba una salida aún más radical a partir de los conceptos clásicos antes de que pudiera progresar más la comprensión de la estructura atómica.



39.27 Niveles de energía de H y He^+. La expresión para la energía, ecuación (39.14), se multiplica por $Z^2 = 4$ para He^+, por lo que la energía de un ion de He^+ con una n dada es casi exactamente cuatro veces la de un átomo de H con la misma n. (Hay pequeñas diferencias del orden de 0.05% debido a que las masas reducidas son ligeramente diferentes).

Evalúe su comprensión de la sección 39.3 Considere las posibles transiciones entre niveles de energía en un ion de He^+. ¿Para cuáles de estas transiciones en He^+ la longitud de onda del fotón emitido será casi la misma que una de las longitudes de onda emitidas por los átomos de H excitados? **i.** $n = 2$ a $n = 1$, **ii.** $n = 3$ a $n = 2$, **iii.** $n = 4$ a $n = 3$, **iv.** $n = 4$ a $n = 2$, **v.** más de uno de estos, **vi.** ninguno de estos. ❙

39.4 El láser

MasteringPHYSICS

PhET: Lasers

El **láser** es una fuente de luz que produce un haz de luz altamente coherente y casi monocromática como resultado de la emisión de muchos átomos en conjunto. El nombre "láser" es un acrónimo de "amplificación de luz por emisión estimulada de radiación" (*light amplification by stimulated emission of radiation*). Podemos entender los principios de funcionamiento del láser a partir de lo que hemos aprendido acerca de los niveles de energía atómica y los fotones. Para ello, tendremos que estudiar dos nuevos conceptos: la *emisión estimulada* y la *inversión de población*.

Emisión espontánea y estimulada

Consideremos un gas de átomos en un recipiente transparente. Cada átomo está inicialmente en su nivel fundamental de energía E_g, y también tiene un nivel excitado de energía E_{ex}. Si el recipiente se ilumina con luz de frecuencia f, un átomo puede absorber uno de los fotones siempre que la energía del fotón $E = hf$ sea igual a la diferencia de energía $E_{ex} - E_g$, entre los niveles. La figura 39.28*a* muestra este proceso, en el que cada uno de los tres átomos A absorbe un fotón que lo lleva a un nivel excitado. Después de cierto tiempo, los átomos excitados (que denotamos como A*) regresan al nivel fundamental emitiendo un fotón de la misma frecuencia que la que originalmente se absorbió (figura 39.28*b*). Este proceso se denomina **emisión espontánea**. La dirección y la fase de los fotones emitidos espontáneamente son aleatorias.

39.28 Tres procesos en los que los átomos interactúan con la luz.

a) Absorción

Nivel excitado

E_{ex}

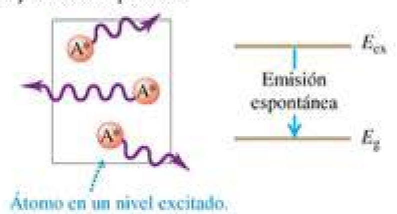
Absorción

E_g

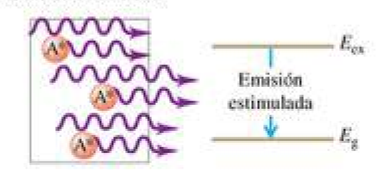
Nivel fundamental

Átomo en su nivel fundamental.

b) Emisión espontánea



c) Emisión estimulada



En la **emisión estimulada** (figura 39.28*c*), cada fotón incidente se encuentra con un átomo excitado previamente. Una especie de efecto de resonancia induce a cada átomo a emitir un segundo fotón con la misma frecuencia, dirección, fase y polarización que la del fotón incidente, los cuales no se modifican por el proceso. Para cada átomo hay un fotón antes de una emisión estimulada y dos fotones después; de ahí el nombre de *amplificación de la luz*. Debido a que los dos fotones tienen la misma fase, se emiten juntos como radiación *coherente*. El láser utiliza la emisión estimulada para producir un haz que consiste en un gran número de dichos fotones coherentes.

Para analizar la emisión estimulada de átomos en niveles excitados, necesitamos saber algo acerca de cuántos átomos hay en cada uno de los diferentes niveles de energía. En primer lugar, tenemos que hacer la distinción entre los términos *nivel de energía* y *estado*. Un sistema puede tener más de una forma de alcanzar un nivel de energía dado; cada forma diferente corresponde a un **estado** distinto. Por ejemplo, hay dos maneras de llevar un resorte ideal sin estirar a un nivel de energía dado. Recordando que la energía potencial del resorte es $U = \frac{1}{2}kx^2$, se podría comprimir el resorte por $x = -b$ o lo podríamos estirar por $x = +b$ para obtener la misma $U = \frac{1}{2}kb^2$. El modelo de Bohr tenía solo un estado en cada nivel de energía, pero en el capítulo 41 veremos que el átomo de hidrógeno (figura 39.24*b*) en realidad tiene dos estados en su nivel fundamental de −13.60 eV, ocho estados en su primer nivel excitado de −3.40 eV, y así sucesivamente.

La función de distribución de Maxwell-Boltzmann (véase la sección 18.5) determina el número de átomos en un estado dado en un gas. La función establece que cuando el gas está en equilibrio térmico a la temperatura absoluta T, el número n_i de átomos en un estado con energía E_i es igual a $Ae^{-E_i/kT}$, donde k es la constante de Boltzmann y A es otra constante determinada por el número total de los átomos del gas. (En la sección 18.5, E es la energía cinética $\frac{1}{2}mv^2$ de una molécula de gas; aquí estamos hablando de la energía interna de un átomo). Debido al exponente negativo, pocos átomos están en estados de alta energía, como era de esperar. Si E_g es una energía del estado fundamental y E_{ex} es la energía de un estado excitado, entonces el cociente entre el número de átomos en los dos estados es

$$\frac{n_{ex}}{n_g} = \frac{Ae^{-E_{ex}/kT}}{Ae^{-E_g/kT}} = e^{-(E_{ex}-E_g)/kT} \qquad (39.18)$$

Por ejemplo, supongamos que $E_{ex} - E_g = 2.0$ eV $= 3.2 \times 10^{-19}$ J, la energía de un fotón de luz visible de 620 nm. En $T = 3000$ K (la temperatura del filamento en una bombilla incandescente),

$$\frac{E_{ex} - E_g}{kT} = \frac{3.2 \times 10^{-19}\ \text{J}}{(1.38 \times 10^{-23}\ \text{J/K})(3000\ \text{K})} = 7.73$$

y

$$e^{-(E_{ex}-E_g)/kT} = e^{-7.73} = 0.00044$$

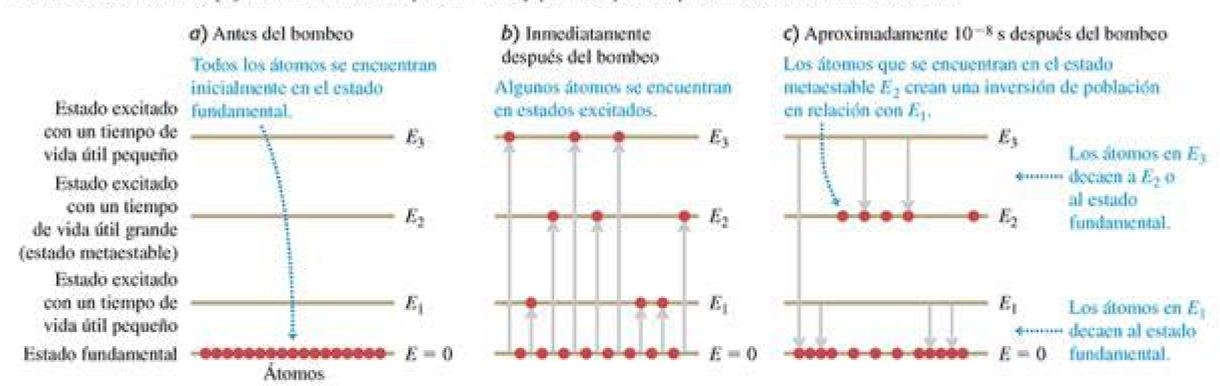
Esto es, la fracción de átomos en un estado de 2.0 eV por arriba de un estado fundamental es extremadamente pequeña, aun a esa temperatura tan alta. El argumento es que, a cualquier temperatura razonable, no hay átomos suficientes en los estados excitados para que suceda la emisión estimulada desde esos estados en una cantidad apreciable. Más bien, es casi seguro que un fotón emitido por uno de los raros átomos excitados será absorbido por un átomo en el estado fundamental en vez de encontrarse con otro átomo excitado.

Aumento de la emisión estimulada: Inversiones de población

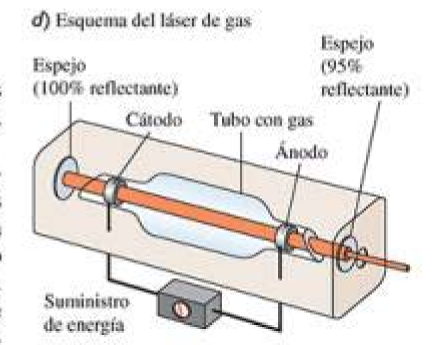
Para hacer un láser, se necesita promover la emisión estimulada aumentando el número de átomos en estados excitados. ¿Esto se logra simplemente iluminando el recipiente con la radiación de frecuencia $f = E/h$ correspondiente a la diferencia de energía $E = E_{ex} - E_g$, como se muestra en la figura 39.28*a*? Algunos de los átomos absorben los fotones de energía E y se elevan a un estado excitado, y el cociente de la población n_{ex}/n_g aumenta momentáneamente. Pero debido a que n_g es originalmente mucho más grande que n_{ex}, se necesitaría un haz de luz sumamente intenso para aumentar momentáneamente n_{ex} a un valor comparable a n_g. La rapidez con la que se *absorbe* energía del haz por los átomos en el estado fundamental n_g excede con mucho a la rapidez con que se agrega energía al haz por emisión estimulada de los átomos excitados (n_{ex}) relativamente raros.

Se necesita crear una situación de *no equilibrio* en la que la cantidad de átomos en un estado de mayor energía sea más grande que la que hay en un estado de menor energía. Ese caso se denomina **inversión de población**. Entonces, la rapidez de radiación de energía por emisión estimulada puede *exceder* a la rapidez de absorción, y el sistema trabaja como una *fuente* neta de radiación con energía E de sus fotones. Resulta que se puede alcanzar una inversión de población, comenzando con átomos que tienen las clases correctas de estados excitados. La figura 39.29*a* muestra un diagrama de niveles de energía para uno de esos átomos con un estado fundamental y *tres* estados excitados de energía E_1, E_2 y E_3. Un láser que utiliza un material con niveles de energía como estos se llama *láser de cuatro niveles*. Para que funcione el láser, los estados de energías E_1 y E_3 deben tener tiempos de vida ordinaria breves de alrededor de 10^{-8} s, mientras que el estado de energía E_2 debe tener un tiempo de vida útil extraordinariamente grande, de alrededor de 10^{-3} s. Este **estado metaestable** de vida larga puede ocurrir si, por ejemplo, existen restricciones impuestas por la conservación del momento angular que obstaculizan la emisión de fotones a partir de este estado. (Hablaremos de estas restricciones en el capítulo 41). El estado metaestable es el que queremos poblar.

Para producir una inversión de población, se *bombea* el material para excitar átomos del estado fundamental a los estados con energías E_1, E_2 y E_3 (figura 39.29*b*). Si los átomos están en un gas, este bombeo se puede hacer mediante la inserción de dos electrodos en el recipiente del gas. Cuando un voltaje suficientemente alto se aplica a los electrodos, se produce una descarga eléctrica. Las colisiones entre átomos ionizados y electrones que transportan la corriente de descarga excitan entonces a los átomos a estados de energía diferentes. Dentro de aproximadamente 10^{-8} s, los átomos que se excitan a los estados E_1 y E_3 experimentan emisión de fotones espontánea, por lo que estos estados acaban despoblados. Pero los átomos se "apilan" en el estado metaestable con energía E_2. El número de átomos en el estado metaestable es *menor* que el número en el estado fundamental, pero es *mucho mayor* que en el estado casi desocupado de energía E_1. Por lo tanto, hay una inversión de población del estado E_2 con respecto al estado E_1



39.29 *a*), *b*), *c*) Etapas en el funcionamiento de un láser de cuatro niveles. *d*) La luz emitida por los átomos hace que las transiciones espontáneas del estado E_2 al estado E_1 se reflejen entre los espejos, por lo que esto continúa con la emisión estimulada y da lugar a la luz coherente. Un espejo está transmitiendo parcialmente y permite que escape el haz de luz de alta intensidad.



(figura 39.29*c*). El lector podrá ver por qué necesitamos los dos niveles E_1 y E_3: los átomos que experimentan emisión espontánea del nivel E_3 ayudan a poblar el nivel E_2, y la presencia del nivel E_1 hace posible una inversión de población.

En los siguientes 10^{-3} s, algunos de los átomos que se encuentran en el estado metaestable E_2 de larga vida hacen una transición a E_1, por emisión espontánea. Los fotones emitidos de energía $hf = E_2 - E_1$ se envían hacia atrás y hacia adelante a través del gas muchas veces por un par de espejos paralelos (figura 39.29*d*), de modo que puedan *estimular* la emisión de tantos átomos en el estado E_2 como sea posible. El resultado neto de todos estos procesos es un haz de luz de frecuencia f que puede ser bastante intenso, que tiene rayos paralelos, es altamente monocromático, y es espacialmente *coherente* en todos los puntos dentro de una sección transversal dada, es decir, un haz de láser. Uno de los espejos es parcialmente transparente, por lo que emerge una parte del haz.

Lo que hemos descrito es un láser *pulsado* que produce una luz coherente cada vez que se bombean los átomos. Los láseres pulsados se utilizan en la cirugía ocular LASIK (acrónimo de *laser-assisted in situ keratomileusis*) para remodelar la córnea y corregir la miopía, la hipermetropía o el astigmatismo. En un láser *continuo*, como los que se encuentran en los escáneres de códigos de barras utilizados en las cajas registradoras, se suministra energía a los átomos de forma continua (por ejemplo, la fuente de alimentación en la figura 39.29*d* suministra un voltaje constante a los electrodos) y un haz continuo de luz emerge del láser. Para este láser, el bombeo debe ser lo suficientemente intenso como para mantener la inversión de población, por lo que la tasa con que se agregan átomos al nivel E_2 a través del bombeo es igual a la tasa con la que los átomos en este nivel emiten un fotón y hacen una transición al nivel E_1.

Puesto que se requiere un arreglo especial de los niveles de energía para la acción del láser, no es sorprendente que solo ciertos materiales resulten útiles para hacer un láser. Algunos tipos de láser utilizan un material sólido y transparente como el vidrio de neodimio en lugar de un gas. El tipo más común de láser utilizado en impresoras láser (sección 21.2), en los punteros láser y para leer los datos en el disco en un reproductor de DVD o un reproductor de Blu-ray es un *láser semiconductor*, que no utiliza en absoluto niveles de energía atómica. Como veremos en el capítulo 42, estos láseres utilizan niveles de energía de los electrones que están libres de moverse por todo el volumen de los semiconductores.

Evalúe su comprensión de la sección 39.4 Un foco ordinario de luz de neón como los utilizados en carteles publicitarios emite luz roja de longitud de onda de 632.8 nm. También se utilizan átomos de neón en un láser de helio-neón (un tipo de láser de gas). La luz emitida por un foco de luz de neón es **i.** la emisión espontánea, **ii.** la emisión estimulada, **iii.** la emisión espontánea y estimulada.



|



PhET: Blackbody Spectrum
PhET: The Greenhouse Effect

39.5 Espectros continuos

Los espectros de línea son emitidos por materia en estado gaseoso, en la que los átomos están tan alejados entre sí, que su interacción es despreciable, y cada uno se comporta como un sistema aislado. En cambio, un sólido o líquido (en el que los átomos están cerca entre sí) caliente emite casi siempre radiación con una distribución *continua* de longitudes de onda, y no un espectro de líneas.

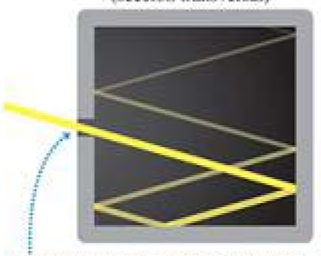
A continuación se presenta una analogía que sugiere por qué hay una diferencia. Un diapasón emite ondas sonoras de una sola frecuencia definida (un sonido puro) cuando se golpea. Pero si se sacude una maleta llena de diapasones, la proximidad de los diapasones entre sí afecta al sonido que producen. Lo que se escucha es sobre todo ruido, que es el sonido con una distribución continua de todas las frecuencias. De la misma manera, los átomos aislados en un gas emiten luz de ciertas frecuencias diferentes cuando están excitados, pero si los mismos átomos se aglomeran en forma de un sólido o líquido, producen un espectro continuo de luz.

En esta sección vamos a estudiar un caso idealizado del espectro continuo de radiación de un objeto caliente y denso. Así como fue el caso para el espectro de líneas de emisión de luz de un átomo, veremos que podemos entender el espectro continuo solo si usamos las ideas de los niveles de energía y de fotones.

De la misma manera que el espectro de emisión de un átomo tiene las mismas líneas que su espectro de absorción, la superficie ideal para *emitir* luz con un espectro continuo es aquella que también *absorbe* todas las longitudes de onda de la radiación electromagnética. Esta superficie ideal se llama *cuerpo negro* porque parece totalmente negra cuando se ilumina; no refleja ninguna luz en absoluto. El espectro continuo de radiación que un cuerpo negro emite se llama **radiación de cuerpo negro**. Al igual que un plano inclinado que no ejerce fricción alguna o una cuerda de masa despreciable, un cuerpo negro perfecto no existe, pero es una idealización útil.

39.30 Una caja hueca con una pequeña abertura se comporta como un cuerpo negro. Cuando la caja se calienta, la radiación electromagnética que emerge de la abertura tiene un espectro de cuerpo negro.

Caja hueca con una abertura pequeña (sección transversal)



La luz que entra en la caja finalmente es absorbida. Por lo tanto, una caja se aproxima a un cuerpo negro perfecto.

Una buena aproximación a un cuerpo negro es una caja hueca con una pequeña abertura en una pared (figura 39.30). La luz que entra en la abertura finalmente será absorbida por las paredes de la caja, de modo que la caja es un absorbedor casi perfecto. Por el contrario, cuando calentamos la caja, la luz que emana de la abertura es radiación del cuerpo negro casi ideal, con un espectro continuo.

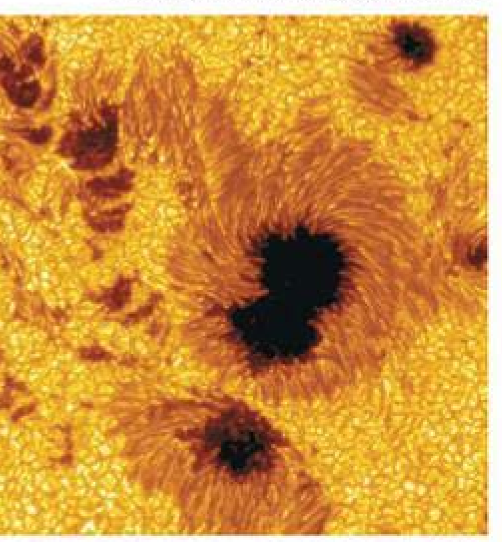
En 1900 se había estudiado ampliamente la radiación de cuerpo negro, y se habían establecido tres características. En primer lugar, la intensidad total I (la razón media de radiación de energía por unidad de superficie o de potencia media por área) emitida desde la superficie de un radiador ideal es proporcional a la cuarta potencia de la temperatura absoluta (figura 39.31). Se estudió esta relación en la sección 17.7 durante nuestro estudio de los mecanismos de transferencia de calor. Esta intensidad total I emitida a temperatura absoluta T está dada por la **ley de Stefan-Boltzmann**:

$$I = \sigma T^4 \quad \text{(ley de Stefan-Boltzmann para un cuerpo negro)} \qquad (39.19)$$

donde σ es una constante física fundamental llamada *constante de Stefan-Boltzmann*. En unidades del SI,

$$\sigma = 5.670400(40) \times 10^{-8} \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot \text{K}^4}$$

39.31 Esta vista cercana de la superficie del Sol muestra dos manchas solares oscuras. Su temperatura es de aproximadamente 4000 K, mientras que el material solar circundante está a $T = 5800$ K. De acuerdo con la ley de Stefan-Boltzmann, la intensidad de un área dada de la mancha solar es de solo $(4000\ \text{K}/5800\ \text{K})^4 = 0.23$ de la intensidad de un área igual del material que la rodea; esta es la causa de que las manchas aparezcan oscuras.



En segundo lugar, la intensidad no se distribuye uniformemente sobre todas las longitudes de onda. Su distribución se mide y se describe mediante la intensidad por intervalo de longitud de onda $I(\lambda)$, llamada la *emitancia espectral*. Así $I(\lambda)\,d\lambda$ es la intensidad correspondiente a longitudes de onda en el intervalo de λ a $\lambda + d\lambda$. La intensidad *total* I, dada por la ecuación (39.19), es la *integral* de la función de distribución $I(\lambda)$ sobre todas las longitudes de onda, que es igual al área bajo la curva de $I(\lambda)$ como función de λ:

$$I = \int_0^\infty I(\lambda)\,d\lambda \qquad (39.20)$$

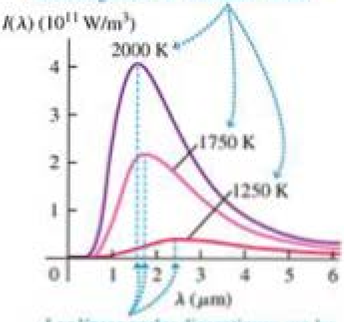
CUIDADO **Emitancia espectral contra intensidad** Aunque utilizamos el símbolo $I(\lambda)$ para la emitancia espectral, tenga en cuenta que la emitancia espectral *no* es lo mismo que la intensidad I. Intensidad es la potencia por unidad de área, con unidades W/m^2. La emitancia espectral es potencia por unidad de área *por unidad de intervalo de longitud de onda*, con unidades W/m^3.

La figura 39.32 muestra las emitancias espectrales $I(\lambda)$ medidas para la radiación de cuerpo negro a tres temperaturas diferentes. Cada una tiene un máximo en la longitud de onda λ_m en el que la intensidad emitida por intervalo de longitud de onda es más grande. Los experimentos muestran que λ_m es inversamente proporcional a T, de modo que su producto es constante. Esta observación se llama **ley del desplazamiento de Wien**. El valor experimental de la constante es 2.90×10^{-3} m · K:

$$\lambda_m T = 2.90 \times 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{K} \qquad \text{(ley de desplazamiento de Wien)} \qquad (39.21)$$

Conforme la temperatura aumenta, el máximo de $I(\lambda)$ se hace mayor y se desplaza hacia longitudes de onda más cortas. La luz amarilla tiene menor longitud de onda que la luz roja, por lo que un cuerpo que se ilumina de color amarillo es más caliente y más brillante que uno del mismo tamaño que se ilumina en rojo.

En tercer lugar, los experimentos muestran que la *forma* de la función de distribución es la misma para todas las temperaturas. Podemos hacer que una curva de una temperatura se ajuste a una temperatura diferente, simplemente cambiando la escala de la gráfica.



39.32 Estas gráficas muestran la emitancia espectral $I(\lambda)$ para la radiación de un cuerpo negro a tres temperaturas diferentes.

Rayleigh y la "catástrofe ultravioleta"

Durante la última década del siglo XIX, se hicieron muchos intentos para deducir estos resultados empíricos acerca de la radiación del cuerpo negro a partir de principios básicos. En un intento, el físico inglés Lord Rayleigh consideró luz encerrada en una caja rectangular como la que se muestra en la figura 39.30. Esta caja —de acuerdo con el razonamiento de Rayleigh— tiene una serie de *modos normales* posibles para las ondas electromagnéticas, como vimos en la sección 32.5. También parecía razonable suponer que la distribución de energía entre los diferentes modos estaría determinada por el principio de equipartición (véase la sección 18.4), que se había utilizado con éxito en el análisis de las capacidades caloríficas.

Incluyendo las energías tanto de campo eléctrico como de campo magnético, Rayleigh supuso que la energía total de cada modo normal era igual a kT. Entonces, al calcular el *número* de modos normales correspondientes a un intervalo de longitud de onda $d\lambda$, Rayleigh calculó la distribución esperada de longitudes de onda de la radiación del interior de la caja. Por último, calculó la distribución de intensidad $I(\lambda)$ predicha para la radiación que sale del orificio. Su resultado fue bastante sencillo:

$$I(\lambda) = \frac{2\pi ckT}{\lambda^4} \qquad \text{(cálculo de Rayleigh)} \qquad (39.22)$$

Para longitudes de onda grandes, esta fórmula concuerda bastante bien con los resultados experimentales que se muestran en la figura 39.32, pero hay un grave desacuerdo a pequeñas longitudes de onda. Las curvas experimentales en la figura 39.32 tienden a cero para λ pequeñas. Por el contrario, la predicción de Rayleigh en la ecuación (39.22) se va en dirección opuesta, ya que tiende a infinito como $1/\lambda^4$, un resultado que se llamó en los tiempos de Rayleigh la "catástrofe ultravioleta". Lo que es peor, la integral de la ecuación (39.22) sobre todas las λ es infinita, lo que indica una intensidad *total* radiada infinitamente grande. Es claro que algo está mal.

Planck y la hipótesis cuántica

Por último, en 1900, el físico alemán Max Planck tuvo éxito al deducir una función, que ahora se conoce como la **ley de radiación de Planck**, la cual concordaba muy bien con las curvas experimentales de distribución de intensidad. En su deducción planteó lo que, en su momento, parecía ser una hipótesis descabellada. Planck supuso que los osciladores electromagnéticos (los electrones) en las paredes de la caja de Rayleigh que vibran con una frecuencia f solo podrían tener ciertos valores de energía iguales

a nhf, donde $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ y resultó que h fue la constante que ahora lleva el nombre de Planck. Estos osciladores estaban en equilibrio con las ondas electromagnéticas en la caja, de modo que ambos emitían y absorbían luz. Su suposición produjo niveles cuantizados de energía e indicaba que la energía en cada modo normal también era un múltiplo de hf, lo cual estaba en contraposición con el punto de vista de Rayleigh de que cada modo normal podría tener cualquier cantidad de energía.

Planck no se sentía cómodo con su hipótesis cuántica, pues la consideraba como un truco de cálculo más que un principio fundamental. En una carta a un amigo, la llamó "un acto de desesperación" al que se vio obligado porque "había que encontrar una explicación teórica a toda costa, y a cualquier precio". Sin embargo, cinco años más tarde, Einstein identificó el cambio de energía hf entre niveles como la energía de un fotón para explicar el efecto fotoeléctrico (véase la sección 38.1), y rápidamente se acumularon más pruebas. En 1915 había pocas dudas acerca de la validez del concepto cuántico y de la existencia de fotones. Al estudiar los espectros atómicos *antes* que los espectros continuos, nos hemos apartado del orden histórico de los acontecimientos. El crédito de la invención del concepto de la cuantización de los niveles de energía se debe a Planck, aun cuando no lo creía al principio. En 1918 recibió el Premio Nobel de Física por sus logros.

39.33 Niveles de energía para dos de los osciladores que Planck visualizó en las paredes de un cuerpo negro como el que se muestra en la figura 39.30. La separación entre los niveles de energía adyacentes para cada oscilador es hf, que es más pequeña para el oscilador de baja frecuencia.

Oscilador de baja frecuencia: $12hf$, $11hf$, $10hf$, $9hf$, $8hf$, $7hf$, $6hf$, $5hf$, $4hf$, $3hf$, $2hf$, $1hf$, hf, 0

Oscilador de alta frecuencia: $2hf$, hf, 0

La figura 39.33 presenta diagramas de niveles de energía para dos de los osciladores que Planck visualizó en las paredes de la caja rectangular, uno con baja frecuencia y el otro con frecuencia alta. La separación entre los niveles adyacentes de energía es hf. Esta separación es pequeña para el oscilador de baja frecuencia que emite y absorbe fotones de baja frecuencia f y de longitud de onda larga $\lambda = c/f$. La separación de energía es mayor para el oscilador de alta frecuencia, que emite fotones de alta frecuencia de longitud de onda corta.

De acuerdo con el esquema de Rayleigh, ambos osciladores tienen la misma cantidad de energía kT y son igualmente eficaces para emitir radiación. Sin embargo, en el modelo de Planck, el oscilador de alta frecuencia es muy ineficiente como una fuente de luz. Para ver por qué, podemos utilizar las ideas de la sección 39.4 acerca de las poblaciones de estados de energía diferentes. Si consideramos todos los osciladores de una frecuencia f dada en una caja a temperatura T, el número de osciladores que tienen energía nhf es $Ae^{-nhf/kT}$. El cociente entre el número de osciladores en el primer estado excitado ($n = 1$, energía hf) y el número de osciladores en el estado fundamental ($n = 0$, energía cero) es

$$\frac{n_1}{n_0} = \frac{Ae^{-hf/kT}}{Ae^{-(0)/kT}} = e^{-hf/kT} \tag{39.23}$$

Vamos a evaluar la ecuación (39.23) para $T = 2000$ K, una de las temperaturas que se consideran en la figura 39.32. A esta temperatura, $kT = 2.76 \times 10^{-20}$ J $= 0.172$ eV. Para un oscilador que emite fotones de longitud de onda $\lambda = 3.00\ \mu$m, podemos demostrar que $hf = hc/\lambda = 0.413$ eV; para un oscilador de alta frecuencia que emite fotones de longitud de onda $\lambda = 0.500\ \mu$m, $hf = hc/\lambda = 2.48$ eV. Para estos dos casos, la ecuación (39.23) da

$$\frac{n_1}{n_0} = e^{-hf/kT} = 0.0909 \text{ para } \lambda = 3.00\ \mu\text{m}$$

$$\frac{n_1}{n_0} = e^{-hf/kT} = 5.64 \times 10^{-7} \text{ para } \lambda = 0.500\ \mu\text{m}$$

El valor de $\lambda = 3.00\ \mu$m significa que de todos los osciladores que son capaces de emitir luz con esta longitud de onda, 0.0909 de ellos, aproximadamente uno de cada 11, se encuentran en el primer estado excitado. Cada uno de estos osciladores excitados puede emitir un fotón de 3.00 μm y contribuir a la radiación dentro de la caja. Por lo tanto, esperaríamos que esta radiación fuera bastante abundante en el espectro de la radiación de un cuerpo negro de 2000 K. En cambio, el valor de $\lambda = 0.500\ \mu$m significa que solo 5.64×10^{-7} (aproximadamente uno de cada dos millones) de los osciladores que pueden emitir esta longitud de onda se encuentran en el primer estado excitado.

Un oscilador no puede emitir si está en el estado fundamental, por lo que la cantidad de radiación en la caja en esta longitud de onda es *muy* pequeña comparada con la predicción de Rayleigh. Por eso, la curva de emitancia espectral para 2000 K en la figura 39.32 tiene un valor bajo en $\lambda = 0.500\ \mu$m y en las longitudes de onda más cortas. Así, la hipótesis cuántica de Planck representó una forma natural para eliminar la emitancia espectral de un cuerpo negro para longitudes de onda cortas, con lo que evita la catástrofe ultravioleta que afecta los cálculos de Rayleigh.

No vamos a entrar en todos los detalles de la deducción de Planck de la emitancia espectral. Presentamos su resultado:

$$I(\lambda) = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5(e^{hc/\lambda kT} - 1)} \quad \text{(ley de radiación de Planck)} \qquad (39.24)$$

donde h es la constante de Planck, c es la rapidez de la luz, k es la constante de Boltzmann, T es la temperatura absoluta y λ es la longitud de onda. Resulta que esta función concuerda bien con las curvas de emitancia experimentales, como las que se presentan en la figura 39.32.

La ley de radiación de Planck también contempla como consecuencias la ley del desplazamiento de Wien y la ley de Stefan-Boltzmann. Para deducir la ley de Wien, se encuentra el valor de λ para el cual $I(\lambda)$ es máxima tomando la derivada de la ecuación (39.24) e igualándola a cero. Se deja al lector la tarea de completar los detalles; el resultado es

$$\lambda_{\text{m}} = \frac{hc}{4.965kT} \qquad (39.25)$$

Para obtener este resultado, se tiene que resolver la ecuación

$$5 - x = 5e^{-x} \qquad (39.26)$$

La raíz de esta ecuación, que se encuentra por ensayo y error o por métodos más sofisticados, es 4.965 con cuatro cifras significativas. Usted debe evaluar la constante $hc/4.965k$ y demostrar que concuerda con el valor experimental de 2.90×10^{-3} m · K dado en la ecuación (39.21).

Podemos obtener la ley de Stefan-Boltzmann para un cuerpo negro integrando la ecuación (39.24) sobre toda λ para determinar la intensidad *total* radiada (véase el problema 39.67). Esta no es una integral sencilla; el resultado es

$$I = \int_0^\infty I(\lambda)\, d\lambda = \frac{2\pi^5 k^4}{15c^2h^3}T^4 = \sigma T^4 \qquad (39.27)$$

que concuerda con la ecuación (39.19). Nuestro resultado en la ecuación (39.27) también muestra que la constante σ en esa ley se puede expresar como una combinación de otras constantes fundamentales:

$$\sigma = \frac{2\pi^5 k^4}{15c^2h^3} \qquad (39.28)$$

El lector debe sustituir los valores de k, c y h del apéndice F y comprobar que obtiene el valor $\sigma = 5.6704 \times 10^{-8}\ \text{W/m}^2 \cdot \text{K}^4$ para la constante de Stefan-Boltzmann.

La ley de radiación de Planck, ecuación (39.24), se ve tan diferente de la poco exitosa expresión de Rayleigh, ecuación (39.22), que parece poco probable que ambas concuerden para grandes valores de λ. Sin embargo, cuando λ es grande, el exponente del denominador de la ecuación (39.24) es muy pequeño. Entonces, podemos utilizar la aproximación $e^x \approx 1 + x$ (para $x = 1$). Usted debería verificar que cuando se hace esto, el resultado se aproxima a la ecuación (39.22), lo que demuestra que las dos expresiones concuerdan en el límite de λ muy grande. También observe que la expresión de Rayleigh no contiene a h. En longitudes de onda muy largas (energías fotónicas muy pequeñas), los efectos cuánticos se vuelven poco importantes.



Ejemplo 39.7 Luz del Sol

Una buena aproximación es considerar que la superficie del Sol es un cuerpo negro con una temperatura superficial de 5800 K. (Estamos despreciando la absorción producida por la atmósfera solar, que se muestra en la figura 39.9). *a*) ¿Cuál es la longitud de onda que el Sol emite más fuertemente? *b*) ¿Cuál es la potencia total radiada por unidad de área?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Nuestras incógnitas son las longitudes de onda λ_m de intensidad máxima y la potencia radiada por unidad de área I. Por lo tanto, vamos a utilizar la ley del desplazamiento de Wien, ecuación (39.21) (que relaciona λ_m con la temperatura T de un cuerpo negro), y la ley de Stefan-Boltzmann, ecuación (39.19) (que relaciona I con T).

EJECUTAR: *a*) De acuerdo con la ecuación (39.21),

$$\lambda_m = \frac{2.90 \times 10^{-3}\ \text{m} \cdot \text{K}}{T} = \frac{2.90 \times 10^{-3}\ \text{m} \cdot \text{K}}{5800\ \text{K}}$$
$$= 0.500 \times 10^{-6}\ \text{m} = 500\ \text{nm}$$

b) De la ecuación (39.19),

$$I = \sigma T^4 = (5.67 \times 10^{-8}\ \text{W/m}^2 \cdot \text{K}^4)(5800\ \text{K})^4$$
$$= 6.42 \times 10^7\ \text{W/m}^2 = 64.2\ \text{MW/m}^2$$

EVALUAR: La longitud de onda de 500 nm determinada en el inciso *a*) está cerca de la mitad del espectro visible. No es un resultado sorprendente: el ojo humano evolucionó para aprovechar al máximo la luz natural.

El enorme valor $I = 64.2\ \text{MW/m}^2$ determinado en el inciso *b*) es la intensidad en la *superficie* del Sol, una esfera de radio 6.96×10^8 m. Cuando esta potencia radiada llega a la Tierra, a 1.50×10^{11} m de distancia, la intensidad ha disminuido en un factor de $[(6.96 \times 10^8\ \text{m})/(1.50 \times 10^{11}\ \text{m})]^2 = 2.15 \times 10^{-5}$ de los aún impresionantes $1.4\ \text{kW/m}^2$.



Ejemplo 39.8 Una rebanada de la luz solar

Determine la potencia por unidad de área que radia la superficie del Sol en el intervalo de longitudes de onda de 600.0 a 605.0 nm.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Esta pregunta se refiere a la potencia emitida por un cuerpo negro en un estrecho intervalo de longitudes de onda y, por consiguiente, a la emitancia espectral $I(\lambda)$ dada por la ley de radiación de Planck, ecuación (39.24). Esto requiere que encontremos el área bajo la curva $I(\lambda)$ entre 600.0 y 605.0 nm. Ahora haremos una *aproximación* de esta área como el producto de la altura de la curva en la longitud de onda media $\lambda = 602.5$ nm y el ancho del intervalo, $\Delta\lambda = 5.0$ nm. Del ejemplo 39.7, $T = 5800$ K.

EJECUTAR: Para obtener la altura de la curva $I(\lambda)$ en $\lambda = 602.5\ \text{nm} = 6.025 \times 10^{-7}$ m, primero se evalúa la cantidad $hc/\lambda kT$ y luego se sustituye el resultado en la ecuación (39.24):

$$\frac{hc}{\lambda kT} = \frac{(6.626 \times 10^{-34}\ \text{J} \cdot \text{s})(2.998 \times 10^8\ \text{m/s})}{(6.025 \times 10^{-7}\ \text{m})(1.381 \times 10^{-23}\ \text{J/K})(5800\ \text{K})} = 4.116$$

$$I(\lambda) = \frac{2\pi(6.626 \times 10^{-34}\ \text{J} \cdot \text{s})(2.998 \times 10^8\ \text{m/s})^2}{(6.025 \times 10^{-7}\ \text{m})^5(e^{4.116} - 1)}$$
$$= 7.81 \times 10^{13}\ \text{W/m}^3$$

La intensidad en el intervalo de 5.0 nm de 600.0 a 605.0 nm es entonces aproximadamente

$$I(\lambda)\Delta\lambda = (7.81 \times 10^{13}\ \text{W/m}^3)(5.0 \times 10^{-9}\ \text{m})$$
$$= 3.9 \times 10^5\ \text{W/m}^2 = 0.39\ \text{MW/m}^2$$

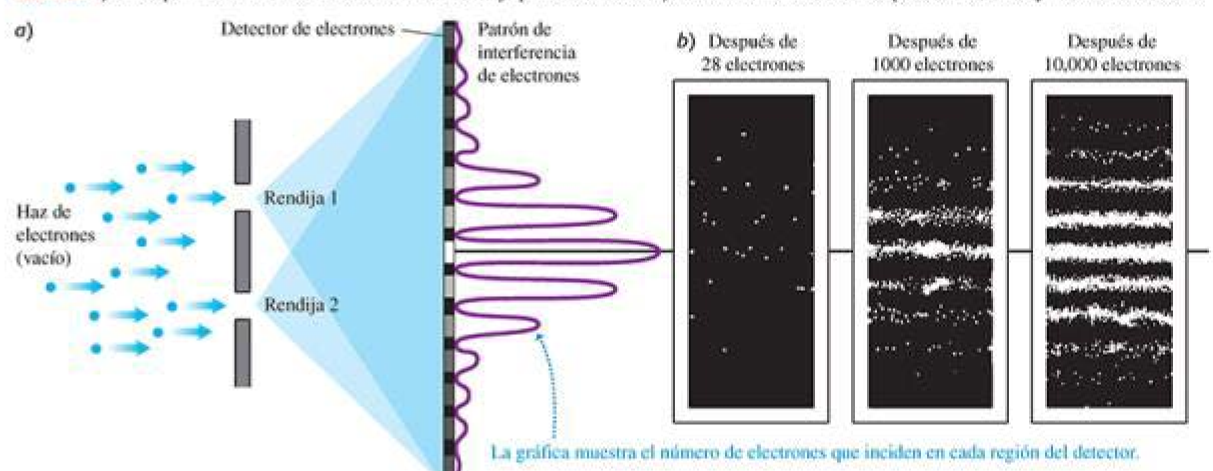
EVALUAR: En el inciso *b*) del ejemplo 39.7, determinamos que la potencia radiada por unidad de área por el Sol en *todas* las longitudes de onda era $I = 64.2\ \text{MW/m}^2$; aquí determinamos que la potencia radiada por unidad de área en el intervalo de longitud de onda desde 600 a 605 nm es $I(\lambda)\Delta\lambda = 0.39\ \text{MW/m}^2$, aproximadamente el 0.6% del total.

Evalúe su comprensión de la sección 39.5 *a*) ¿Un cuerpo negro a 2000 K emite rayos x? *b*) ¿Emite ondas de radio? ❙

39.6 Revisión del principio de incertidumbre

El descubrimiento de la naturaleza dual onda-partícula de la materia nos obliga a reevaluar el lenguaje cinemático que usamos para describir la posición y el movimiento de una partícula. En la mecánica clásica newtoniana pensamos en una partícula como un punto. Podemos describir su ubicación y estado de movimiento en cualquier instante con tres coordenadas espaciales y tres componentes de la rapidez. Pero debido a que la materia también tiene un aspecto de onda, cuando nos fijamos en el comportamiento en una escala lo suficientemente pequeña, comparable con la longitud de onda de De Broglie de la partícula, ya no se puede utilizar la descripción newtoniana. Desde luego, ninguna partícula newtoniana experimentaría difracción como lo hacen los electrones (sección 39.1).

39.34 *a*) Un experimento de interferencia de doble rendija para electrones. *b*) Patrón de interferencia después de 28, 1000 y 10,000 electrones.



Para demostrar cómo puede ser el comportamiento no newtoniano de la materia, vamos a ver un experimento de interferencia de doble rendija de electrones (figura 39.34). Dirigimos un haz de electrones a dos rendijas paralelas, tal como lo hicimos para la luz en la sección 38.4. (El experimento de electrones tiene que hacerse en el vacío, de manera que los electrones no choquen con las moléculas de aire). ¿Qué tipo de patrón aparece en el detector al otro lado de las rendijas? La respuesta es: ¡*exactamente el mismo* tipo de patrón de interferencia que vimos para los fotones de la sección 38.4! Además, el principio de complementariedad, que se presentó en la sección 38.4, nos dice que no podemos aplicar los modelos de ondas y de partículas al mismo tiempo para describir cualquier elemento de este experimento. Por lo tanto, *no podemos* predecir exactamente en qué lugar del patrón (un fenómeno ondulatorio) llegará cada electrón (una partícula). Ni siquiera podemos preguntar por qué rendija pasó cada electrón. Si tratamos de ver a dónde fueron los electrones haciendo incidir luz sobre ellos, es decir, dispersando fotones en ellos, los electrones se desviarían, por lo que modificarían sus movimientos, así que ya no aparecerían en el patrón de interferencia de doble rendija.

CUIDADO **La interferencia de doble rendija de un electrón no es interferencia entre dos electrones** Es un error común decir que el patrón de la figura 39.34*b* se debe a la interferencia entre dos ondas de electrones, que representan a cada electrón que pasa a través de una rendija. Para mostrar que este no es el caso, podemos enviar un solo electrón a la vez a través del aparato. Esto no hace ninguna diferencia; nos encontramos con el mismo patrón de interferencia. En cierto sentido, cada onda de un electrón interfiere consigo misma.

Principio de incertidumbre de Heisenberg para la materia

Así como los electrones y los fotones muestran el mismo comportamiento en un experimento de interferencia de doble rendija, los electrones y otras formas de materia obedecen los mismos principios de incertidumbre de Heisenberg que los fotones:

$$\Delta x \Delta p_x \geq \hbar/2 \qquad \Delta y \Delta p_y \geq \hbar/2 \qquad \Delta z \Delta p_z \geq \hbar/2 \quad \text{(principio de incertidumbre de Heisenberg para posición y momento lineal)} \quad (39.29)$$

$$\Delta t \, \Delta E \geq \hbar/2 \quad \text{(principio de incertidumbre de Heisenberg para energía e intervalo de tiempo)} \quad (39.30)$$

En estas ecuaciones $\hbar = h/2\pi = 1.055 \times 10^{-34}$ J·s. El principio de incertidumbre para energía e intervalo de tiempo tiene una aplicación directa en los niveles de energía. Hemos supuesto que cada nivel de energía en un átomo tiene una energía muy bien definida. Sin embargo, la ecuación (39.30) dice que esto no es cierto para todos los niveles de energía. Un sistema que permanece en un estado metaestable durante un tiempo muy largo (Δt grande) puede tener una energía muy bien definida (ΔE pequeña), pero si se mantiene en un estado solo por un tiempo corto (Δt pequeña), la incertidumbre en la energía debe ser proporcionalmente mayor (ΔE grande). La figura 39.35 ilustra esta idea.

Ejemplo 39.9 Principio de incertidumbre: posición y momento lineal



Un electrón está confinado dentro de una región de 5.000×10^{-11} m de ancho (aproximadamente el radio de Bohr). *a*) Estime la incertidumbre mínima en la componente *x* del momento lineal del electrón. *b*) ¿Cuál es la energía cinética de un electrón con esta magnitud del momento lineal? Exprese su respuesta en joules y en electrón volts.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Este problema utiliza el principio de incertidumbre de Heisenberg para la posición y el momento lineal, así como la relación entre el momento lineal de una partícula y su energía cinética. El electrón podría estar en cualquier lugar dentro de la región, por lo que tomamos $\Delta x = 5.000 \times 10^{-11}$ m como su incertidumbre de posición. Después se encuentra la incertidumbre del momento lineal Δp_x usando la ecuación (39.29) y la energía cinética usando las relaciones $p = mv$ y $K = \frac{1}{2}mv^2$.

EJECUTAR: *a*) De las ecuaciones (39.29), para un valor dado de Δx, la incertidumbre en el momento lineal es mínima cuando el producto Δx Δp_x es igual a $\hbar$. Por lo tanto,

$$\Delta p_x = \frac{\hbar}{2\Delta x} = \frac{1.055 \times 10^{-34}\ \text{J}\cdot\text{s}}{2(5.000 \times 10^{-11}\ \text{m})} = 1.055 \times 10^{-24}\ \text{J}\cdot\text{s/m}$$
$$= 1.055 \times 10^{-24}\ \text{kg}\cdot\text{m/s}$$

b) Podemos rescribir la expresión no relativista de la energía cinética como

$$K = \tfrac{1}{2}mv^2 = \frac{(mv)^2}{2m} = \frac{p^2}{2m}$$

Por lo tanto, un electrón con una magnitud de momento lineal igual a Δp_x del inciso *a*) tiene una energía cinética

$$K = \frac{p^2}{2m} = \frac{(1.055 \times 10^{-24}\ \text{kg}\cdot\text{m/s})^2}{2(9.11 \times 10^{-31}\ \text{kg})}$$
$$= 6.11 \times 10^{-19}\ \text{J} = 3.81\ \text{eV}$$

EVALUAR: Esta energía es común en las energías de los electrones en los átomos. Esto sugiere que el principio de incertidumbre está profundamente involucrado en la estructura atómica.

Un cálculo similar explica por qué los electrones en los átomos no se encuentran en el núcleo. Si un electrón estuviera confinado al interior de un núcleo, su incertidumbre de la posición sería $\Delta x \approx 10^{-14}$ m. Esto daría al electrón una incertidumbre de momento lineal aproximadamente 5000 veces mayor que la del electrón en este ejemplo, y una energía cinética tan grande que el electrón sería inmediatamente expulsado del núcleo.

Ejemplo 39.10 Principio de incertidumbre: Energía y tiempo



Un átomo de sodio en uno de los estados denominados "niveles excitados más bajos" de la figura 39.19*a* permanece en ese estado, en promedio, por 1.6×10^{-8} s antes que haga una transición al nivel fundamental, emitiendo un fotón con longitud de onda de 589.0 nm y 2.105 eV de energía. ¿Cuál es la incertidumbre en la energía de ese estado excitado? ¿Cuál es la dispersión de longitud de onda de la línea espectral correspondiente?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Este problema utiliza el principio de incertidumbre de Heisenberg para la energía y el intervalo de tiempo, y la relación entre la energía del fotón y la longitud de onda. El tiempo promedio que permanece un átomo en este estado excitado es igual a Δt en la ecuación (39.30). Determinamos la incertidumbre mínima en la energía del nivel excitado sustituyendo el signo $\geq$ en la ecuación (39.30) con un signo igual y despejando ΔE.

EJECUTAR: De acuerdo con la ecuación (39.30),

$$\Delta E = \frac{\hbar}{2\Delta t} = \frac{1.055 \times 10^{-34}\ \text{J}\cdot\text{s}}{2(1.6 \times 10^{-8}\ \text{s})}$$
$$= 3.3 \times 10^{-27}\ \text{J} = 2.1 \times 10^{-8}\ \text{eV}$$

El átomo permanece en el nivel fundamental de forma indefinida, por lo que en ese nivel *no* hay incertidumbre de energía. La incertidumbre fraccionaria en la energía del *fotón* es, por lo tanto,

$$\frac{\Delta E}{E} = \frac{2.1 \times 10^{-8}\ \text{eV}}{2.105\ \text{eV}} = 1.0 \times 10^{-8}$$

Puede utilizar algunos cálculos sencillos y la relación $E = hc/\lambda$ para demostrar que $\Delta\lambda/\lambda \approx \Delta E/E$, por lo que la dispersión correspondiente en la longitud de onda, o "ancho", de la línea espectral es de aproximadamente

$$\Delta\lambda = \lambda\frac{\Delta E}{E} = (589.0\ \text{nm})(1.0 \times 10^{-8}) = 0.0000059\ \text{nm}$$

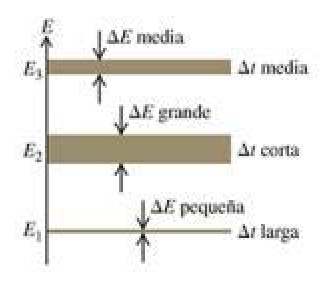
EVALUAR: Esta incertidumbre irreductible $\Delta\lambda$ se llama el *ancho natural de la línea* de esta línea espectral en particular. Aunque es muy pequeña, está dentro de los límites de resolución de los espectrómetros actuales. Normalmente, el ancho natural de la línea es mucho menor que el ancho de la línea debida a otras causas tales como efecto Doppler y colisiones entre los átomos en movimiento rápido.

Principio de incertidumbre y límites del modelo de Bohr

En la sección 39.3 vimos que el modelo de Bohr del átomo de hidrógeno era tremendamente exitoso. Sin embargo, el principio de incertidumbre de Heisenberg para la posición y el momento lineal indica que este modelo *no es* una descripción correcta de cómo se comporta un electrón en un átomo. La figura 39.22 muestra que en el modelo de Bohr como lo interpreta De Broglie, la onda de un electrón se mueve en un plano alrededor del núcleo. Llamemos a este el plano xy, por lo que el eje z es perpendicular al plano. Por lo tanto, el modelo de Bohr dice que un electrón se encuentra siempre en $z = 0$, y la componente z de su momento lineal, p_z, siempre es cero (el electrón no se mueve fuera del plano xy). Pero esto implica que *no* hay incertidumbres en z o en p_z, así que $\Delta z = 0$ y $\Delta p_z = 0$. Esto contradice directamente la ecuación (39.29), la cual establece que el producto $\Delta z \Delta p_z$ debe ser mayor que o igual a $\hbar$.

Esta conclusión no es muy sorprendente, ya que el electrón en el modelo de Bohr es una mezcla las ideas de partícula y de onda (que el electrón se mueve en una órbita como un planeta en miniatura, pero tiene una longitud de onda). Para tener una idea exacta de cómo se comportan los electrones dentro de un átomo y en todas partes, necesitamos una descripción que se base *completamente* en las propiedades ondulatorias del electrón. Nuestro objetivo en el capítulo 40 será el desarrollo de esta descripción, lo que llamamos *mecánica cuántica*. Para hacerlo vamos a introducir la *ecuación de Schrödinger*, la ecuación fundamental que describe la dinámica de las ondas de materia. Esta ecuación, como veremos, es tan fundamental para la mecánica cuántica como las leyes de Newton lo son para la mecánica clásica o como lo son las ecuaciones de Maxwell para el electromagnetismo.

39.35 Cuanto más prolongado sea el tiempo de vida Δt de un estado, menor será su dispersión de energía (que se muestra por el ancho de los niveles de energía).



Evalúe su comprensión de la sección 39.6 Ordene las siguientes situaciones en función de la incertidumbre del momento lineal x, de mayor a menor. La masa del protón es 1836 veces la masa del electrón. **i.** Un electrón cuya coordenada x se sabe que está dentro de 2×10^{-15} m; **ii.** un electrón cuya coordenada x se sabe que está dentro de 4×10^{-15} m; **iii.** un protón cuya coordenada x se sabe que está dentro de 2×10^{-15} m; **iv.** un protón cuya coordenada x se sabe que está dentro de 4×10^{-15} m.

MP

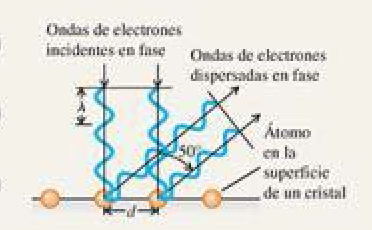


Ondas de De Broglie y difracción de electrones: Los electrones y otras partículas tienen propiedades ondulatorias. La longitud de onda de una partícula depende de su momento lineal, de la misma forma que para los fotones. Si se acelera un electrón no relativista a partir del reposo a través de una diferencia de potencial V_{ba}, su longitud de onda se determina con la ecuación (39.3). Los microscopios electrónicos utilizan longitudes de onda muy pequeñas de electrones en rápido movimiento para formar imágenes cuya resolución es miles de veces mayor que la que se logra con microscopios de luz visible. (Véase los ejemplos 39.1 a 39.3).

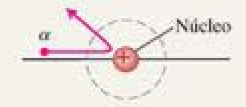
$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv} \quad (39.1)$$

$$E = hf \quad (39.2)$$

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2meV_{ba}}} \quad (39.3)$$

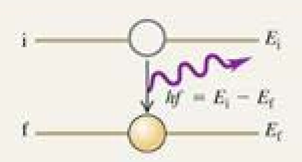


El átomo nuclear: Los experimentos de dispersión de Rutherford demuestran que la mayor parte de la masa de un átomo y la totalidad de su carga positiva se concentran en un núcleo diminuto y denso en el centro del átomo. (Véase el ejemplo 39.4).



Espectros atómicos de líneas y niveles de energía: Las energías de los átomos están cuantizadas: solo pueden tener ciertos valores definidos, llamados niveles de energía. Cuando un átomo efectúa una transición desde un nivel de energía E_i a un nivel inferior E_f, emite un fotón de energía $E_i - E_f$. El mismo fotón puede ser absorbido por un átomo en el nivel de energía inferior, lo que excita el átomo al nivel superior. (Véase el ejemplo 39.5).

$$hf = \frac{hc}{\lambda} = E_i - E_f \quad (39.5)$$



El modelo de Bohr: En el modelo de Bohr del átomo de hidrógeno, los valores permitidos para el momento angular son múltiplos enteros de $h/2\pi$. El multiplicador entero n se llama número cuántico principal del nivel. Los radios orbitales son proporcionales a n^2 y las rapideces orbitales son proporcionales a $1/n$. Los niveles de energía del átomo de hidrógeno están dados por la ecuación (39.15), donde R es la constante de Rydberg. (Véase el ejemplo 39.6).

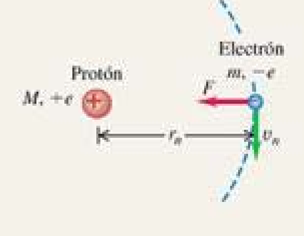
$$L_n = mv_nr_n = n\frac{h}{2\pi}$$
$$(n = 1, 2, 3, \ldots) \quad (39.6)$$

$$r_n = \epsilon_0\frac{n^2h^2}{\pi me^2} = n^2a_0 \quad (39.8)$$

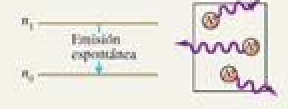
$$= n^2(5.29 \times 10^{-11}\ \text{m}) \quad (39.10)$$

$$v_n = \frac{1}{\epsilon_0}\frac{e^2}{2nh} = \frac{2.19 \times 10^6\ \text{m/s}}{n} \quad (39.9)$$

$$E_n = -\frac{hcR}{n^2} = -\frac{13.60\ \text{eV}}{n^2} \quad (39.15)$$
$$(n = 1, 2, 3, \ldots)$$



El láser: El láser funciona de acuerdo con el principio de emisión estimulada, por el cual se emiten muchos fotones con longitud de onda y fase idénticas. El funcionamiento del láser requiere una condición de desequilibrio llamada inversión de población, en la que hay más átomos en un estado de mayor energía que los que se encuentran en un estado de menor energía.

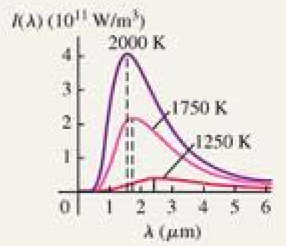


Radiación de cuerpo negro: La intensidad total radiada (potencia media radiada por unidad de área) de una superficie de cuerpo negro es proporcional a la cuarta potencia de la temperatura absoluta T. La cantidad $\sigma = 5.67 \times 10^{-8}\ \text{W/m}^2\cdot\text{K}^4$ se llama la constante de Stefan-Boltzmann. La longitud de onda λ_m a la que un cuerpo negro radia con más intensidad es inversamente proporcional a T. La ley de radiación de Planck determina la emitancia espectral $I(\lambda)$ (intensidad por intervalo de longitud de onda en la radiación de cuerpo negro). (Véase los ejemplos 39.7 y 39.8).

$$I = \sigma T^4$$
(ley de Stefan-Boltzmann) (39.19)

$$\lambda_m T = 2.90 \times 10^{-3}\ \text{m}\cdot\text{K}$$
(ley del desplazamiento de Wien) (39.21)

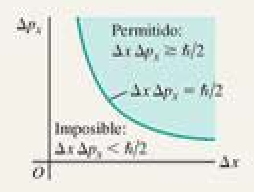
$$I(\lambda) = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5(e^{hc/\lambda kT} - 1)}$$
(ley de radiación de Planck) (39.24)



El principio de incertidumbre de Heisenberg para partículas: Las consideraciones de incertidumbre que se aplican a los fotones también se aplican a las partículas tales como los electrones. La incertidumbre ΔE en la energía de un estado que está ocupado durante un tiempo Δt se determina con la ecuación (39.30). (Véase los ejemplos 39.9 y 39.10).

$$\Delta x \Delta p_x \geq \hbar/2$$
$$\Delta y \Delta p_y \geq \hbar/2 \quad \text{(principio de incertidumbre de Heisenberg de posición y momento lineal)} \quad (39.29)$$
$$\Delta z \Delta p_z \geq \hbar/2$$

$$\Delta t \, \Delta E \geq \hbar/2 \quad \text{(principio de incertidumbre de Heisenberg de energía e intervalo de tiempo)} \quad (39.30)$$



PROBLEMA PRÁCTICO Estrellas calientes y nubes de hidrógeno

La figura 39.36 muestra una nube o *nebulosa*, de hidrógeno que brilla intensamente en el espacio interestelar. Los átomos en esta nube se excitan por la radiación de onda corta emitida por las estrellas brillantes azules en el centro de la nebulosa. *a*) Las estrellas azules actúan como cuerpos negros y emiten luz con un espectro continuo. ¿Cuál es la longitud de onda a la que una estrella con una temperatura superficial de 15,100 K (aproximadamente $2\frac{1}{2}$ veces la temperatura de la superficie del Sol) tiene la emitancia espectral máxima? ¿En qué región del espectro electromagnético se encuentra? *b*) La figura 39.32 muestra que la mayor parte de la energía radiada por un cuerpo negro está a longitudes de onda entre aproximadamente una mitad y tres veces la longitud de onda de la emitancia máxima. Si un átomo de hidrógeno cerca de la estrella en el inciso *a*) se encuentra inicialmente en el nivel fundamental, ¿cuál es el número cuántico principal del nivel de energía más alto al que podría ser excitado por un fotón en este intervalo de longitud de onda? *c*) El color rojo de la nebulosa se debe principalmente a átomos de hidrógeno que efectúan una transición de $n = 3$ a $n = 2$ y emiten fotones de longitud de onda de 656.3 nm. En el modelo de Bohr de acuerdo con la interpretación de De Broglie, ¿cuáles son las longitudes de onda del *electrón* en los niveles $n = 2$ y $n = 3$?

GUÍA DE SOLUCIÓN

Véase el área de estudio MasteringPhysics® para consultar una solución con Video Tutor.



39.36 La nebulosa Roseta.



IDENTIFICAR y PLANTEAR

1. Para resolver este problema, debe utilizar sus conocimientos tanto de la radiación de cuerpo negro (sección 39.5) como del modelo de Bohr del átomo de hidrógeno (sección 39.3).
2. En el inciso *a*) la incógnita es la longitud de onda con la que la estrella emite con más intensidad; en el inciso *b*) la incógnita es un número cuántico principal, y en el inciso *c*) es la longitud de onda de De Broglie de un electrón en las órbitas de Bohr, $n = 2$ y $n = 3$ (véase la figura 39.24). Seleccione las ecuaciones que se necesitan para encontrar las incógnitas. (*Sugerencia:* En la sección 39.5 aprendió a encontrar el cambio de energía implicado en una transición entre dos niveles dados en un átomo de hidrógeno. El inciso *b*) es una variante de esto: usted debe determinar el nivel final de una transición que se inicia en el nivel $n = 1$ e implica la absorción de un fotón de una longitud de onda dada y, por lo tanto, de una energía dada).

EJECUTAR

3. Utilice la ley de desplazamiento de Wien para encontrar la longitud de onda a la que la estrella tiene una emitancia espectral máxima. ¿En qué parte del espectro electromagnético está la longitud de onda?
4. Utilice el resultado del paso 3 para encontrar el intervalo de longitudes de onda en el que la estrella radia la mayor parte de su energía. ¿Qué extremo de este intervalo corresponde a un fotón con la mayor energía?
5. Escriba una expresión para la longitud de onda de un fotón que se debe absorber para provocar una transición de electrones del nivel fundamental ($n = 1$) a un nivel n más alto. Despeje el valor de n que corresponde a los fotones de alta energía en el intervalo calculado en el paso 4. (*Sugerencia:* Recuerde que n debe ser un entero).
6. Encuentre las longitudes de onda de los electrones que corresponden a las órbitas $n = 2$ y $n = 3$ que se muestran en la figura 39.22.

EVALUAR

7. Compruebe el resultado del paso 5 mediante el cálculo de la longitud de onda necesaria para excitar un átomo de hidrógeno del nivel fundamental a un nivel *arriba* del nivel de la mayor energía que encontró en el paso 5. ¿Es posible que la luz en el intervalo de longitudes de onda que encontró en el paso 4 excite a los átomos de hidrógeno del nivel fundamental a este nivel?
8. ¿Cómo se comparan las longitudes de onda de los electrones que encontró en el paso 6 con la longitud de onda del *fotón* emitido en una transición del nivel $n = 3$ al nivel $n = 2$?

Problemas

Para tareas asignadas por el profesor, visite www.masteringphysics.com 

•, ••, •••: Problemas de dificultad creciente. **PA**: Problemas acumulativos que incorporan material de capítulos anteriores. **CALC**: Problemas que requieren cálculo. **BIO**: Problemas de ciencias biológicas.

PREGUNTAS PARA ANÁLISIS

P39.1 Si un protón y un electrón tienen la misma rapidez, ¿cuál tiene la mayor longitud de onda de De Broglie? Explique por qué.

P39.2 Si un protón y un electrón tienen la misma energía cinética, ¿cuál tiene la mayor longitud de onda de De Broglie? Explique por qué.

P39.3 ¿Un fotón tiene una longitud de onda de De Broglie? Si es así, ¿cómo se relaciona con la longitud de onda de la onda electromagnética asociada? Explique por qué.

P39.4 Cuando un haz de electrones pasa a través de un orificio muy pequeño, produce un patrón de difracción en una pantalla, al igual que la luz. ¿Significa esto que un electrón se dispersa al pasar por el orificio? ¿Qué indica este patrón?

P39.5 Las galaxias tienden a ser fuertes emisores de fotones Lyman-α (de la transición $n = 2$ a $n = 1$ en el hidrógeno atómico). Sin embargo, el medio intergaláctico, que es un gas muy tenue entre las galaxias, tiende a *absorber* a los fotones Lyman-α. ¿Qué se puede deducir de estas observaciones acerca de la temperatura en los dos ambientes? Explique.

P39.6 Un átomo de litio doblemente ionizado (Li^{++}) es aquel al que se le han removido dos de sus tres electrones. Los niveles de energía del ion restante con un solo electrón están estrechamente relacionados con los de los átomos de hidrógeno. La carga nuclear para el litio es $\pm 3e$ en vez de $+e$. ¿Cómo están relacionados los niveles de energía con los de hidrógeno? ¿Cómo es el *radio* del ion en el nivel fundamental con respecto al del átomo de hidrógeno? Explique.

P39.7 La emisión de un fotón por un átomo aislado es un proceso de retroceso en el cual se conserva el momento lineal. Por lo tanto, la ecuación (39.5) debería incluir una energía cinética de retroceso K_r para el átomo. ¿Por qué tal energía es despreciable en esta ecuación?

P39.8 ¿Cómo se podrían medir los niveles de energía de un átomo directamente, es decir, sin recurrir a los análisis espectrales?

P39.9 Los elementos en estado gaseoso emiten espectros de líneas con longitudes de onda bien definidas. Pero los cuerpos sólidos calientes siempre emiten un espectro continuo, es decir, una mancha continua de longitudes de onda. ¿Puede explicar esta diferencia?

P39.10 Conforme un cuerpo se calienta a una temperatura muy alta se vuelve luminoso, el color aparente de la radiación emitida se corre del rojo al amarillo y, por último, al azul conforme aumenta la temperatura. ¿A qué se debe el corrimiento de color? ¿Qué otros cambios suceden en las características de la radiación?

P39.11 La longitud de onda de máxima intensidad de las estrellas enanas rojas, que tienen temperaturas superficiales de alrededor de 3000 K, es aproximadamente de 1000 nm, que está más lejos del espectro visible. ¿Por qué somos capaces de ver estas estrellas, y por qué se ven de color rojo?

P39.12 Se le ha pedido diseñar un sistema de imanes para dirigir un haz de electrones de 54 eV, como los que se describen en el ejemplo 39.1 (sección 39.1). El objetivo es dirigir el haz de electrones hasta una ubicación específica con una precisión de ±1.0 mm. En su diseño, ¿necesita considerar la naturaleza ondulatoria de los electrones? Explique.

P39.13 ¿Se justifica realizar el gasto de construir un microscopio electrónico para estudiar objetos muy pequeños tales como las moléculas orgánicas? ¿Acaso no bastaría con usar ondas electromagnéticas extremadamente cortas, que son mucho más baratas de generar?

P39.14 ¿Qué tiene más energía total: un átomo de hidrógeno con un electrón en una capa alta (n grande) o en una capa baja (n pequeña)? ¿Qué se está moviendo más rápido: el electrón de la capa alta o el de la capa baja? ¿Aquí hay una contradicción? Explique.

P39.15 ¿El principio de incertidumbre tiene algo que ver con la buena puntería? Es decir, ¿la precisión con la que se puede dirigir una bala a un objetivo está limitada por el principio de incertidumbre? Explique.

P39.16 Suponga que se realiza un experimento de interferencia de doble rendija utilizando un haz de electrones. ¿Se formaría el mismo patrón de interferencia si se descubre primero una rendija y después la otra, en vez de las dos a la vez? Si no es así, ¿por qué no? ¿No pasa cada electrón por una rendija o por la otra? ¿O es que cada electrón pasa por ambas rendijas? Analice esta última posibilidad a la luz del principio de complementariedad.

P39.17 La ecuación (39.30) indica que la energía de un sistema puede tener incertidumbre. ¿Significa esto que el principio de conservación de la energía ya no es válido? Explique por qué.

P39.18 La luz láser se debe a las transiciones de estados metaestables de larga vida. ¿Por qué es más monocromática que la luz ordinaria?

P39.19 ¿Podría realizarse un experimento de difracción de electrones con tres o cuatro rendijas? ¿Con una rejilla de muchas rendijas? ¿Qué clase de resultados se esperarían con una rejilla? ¿Se violaría el principio de incertidumbre? Explique por qué.

P39.20 Como se muestra en la mitad inferior de la figura 39.4, el patrón de difracción formado por electrones que atraviesan una lámina de aluminio es una serie de anillos concéntricos. Pero si se sustituye la lámina de aluminio por un monocristal de aluminio, en el patrón solo aparecen algunos puntos en estos anillos. Explique por qué.

P39.21 ¿Por qué un microscopio electrónico brinda una mayor ampliación que un microscopio ordinario?

P39.22 Cuando usted revisa la presión de aire en un neumático, siempre se escapa un poco de aire; el proceso de medición modifica la cantidad que se mide. Piense en otros ejemplos de mediciones que cambian o perturban la cantidad que se está midiendo.

EJERCICIOS

Sección 39.1 Ondas del electrón

39.1 • *a*) Un electrón se mueve con una rapidez de 4.70×10^6 m/s. ¿Cuál es su longitud de onda de De Broglie? *b*) Un protón se mueve con la misma rapidez. Determine su longitud de onda de De Broglie.

39.2 •• Para experimentos de difracción de cristales (que se analizan en la sección 39.1), con frecuencia son adecuadas longitudes de onda del orden de 0.20 nm. Determine la energía en electrón volts de una partícula con esta longitud de onda, si la partícula es *a*) un fotón; *b*) un electrón; *c*) una partícula alfa ($m = 6.64 \times 10^{-27}$ kg).

39.3 • Un electrón tiene una longitud de onda de De Broglie de 2.80×10^{-10} m. Determine *a*) la magnitud de su momento lineal y *b*) su energía cinética (en joules y en electrón volts).

39.4 •• **Longitud de onda de una partícula alfa.** Una partícula alfa ($m = 6.64 \times 10^{-27}$ kg) emitida en el decaimiento radiactivo del uranio-238 tiene una energía de 4.20 MeV. ¿Cuál es su longitud de onda de De Broglie?

39.5 • En el modelo de Bohr del átomo de hidrógeno, ¿cuál es la longitud de onda de De Broglie para el electrón cuando está *a*) en el nivel

$n = 1$ y *b*) en el nivel $n = 4$? En cada caso, compare la longitud de onda de De Broglie con la circunferencia $2\pi r_n$ de la órbita.

39.6 • *a*) Una partícula libre no relativista de masa *m* tiene energía cinética *K*. Deduzca una expresión para la longitud de onda de De Broglie de la partícula en términos de *m* y *K*. *b*) ¿Cuál es la longitud de onda de De Broglie de un electrón de 800 eV?

39.7 • **¿Por qué no *nos* difractamos?** *a*) Calcule la longitud de onda de De Broglie de una persona común que pasa por un portón. Realice aproximaciones razonables de las cantidades necesarias. *b*) ¿La persona del inciso *a*) exhibe un comportamiento ondulatorio cuando pasa por la "única rendija" de un portón? ¿Por qué?

39.8 •• ¿Cuál es la longitud de onda de De Broglie de un electrón con rapidez *a*) $v = 0.480c$ y *b*) $v = 0.960c$? (*Sugerencia:* Si es necesario, utilice la ecuación relativista adecuada para el momento lineal).

39.9 • *a*) Si un fotón y un electrón tienen la misma energía de 20.0 eV, determine la longitud de onda de cada uno. *b*) Si un fotón y un electrón tienen la misma longitud de onda de 250 nm, determine la energía de cada uno. *c*) Se desea estudiar una molécula orgánica que es de unos 250 nm de longitud utilizando ya sea un microscopio óptico o uno electrónico. Aproximadamente, ¿cuál es la longitud de onda que debería utilizar? ¿Cuál técnica, electrones o fotones, probablemente dañará menos a la molécula?

39.10 • ¿Con qué rapidez tendría que moverse un electrón para que su longitud de onda de De Broglie sea de 1.00 mm?

39.11 • **Longitud de onda de una bala.** Calcule la longitud de onda de De Broglie de una bala de 5.00 g que se mueve a 340 m/s. ¿La bala presentará propiedades ondulatorias?

39.12 •• Encuentre las longitudes de onda de un fotón y de un electrón que tienen la misma energía de 25 eV. (*Nota:* La energía del electrón es su energía cinética).

39.13 •• *a*) ¿Qué potencial de aceleración es necesario para producir electrones de longitud de onda de 5.00 nm? *b*) ¿Cuál sería la energía de fotones que tienen la misma longitud de onda de los electrones del inciso *a*)? *c*) ¿Cuál podría ser la longitud de onda de los fotones que tienen la misma energía que los electrones del inciso *a*)?

39.14 •• ¿A través de qué diferencia de potencial se deben acelerar los electrones para que tengan *a*) la misma longitud de onda que los rayos x de longitud de onda de 0.150 nm y *b*) la misma energía que los rayos x del inciso *a*)?

39.15 • *a*) Aproximadamente, ¿qué tan rápido se debe mover un electrón para que tenga una longitud de onda que lo haga útil para medir la distancia entre los átomos adyacentes en cristales comunes (alrededor de 0.10 nm)? *b*) ¿Cuál es la energía cinética del electrón del inciso *a*)? *c*) ¿Cuál sería la energía de un fotón de la misma longitud de onda del electrón en el inciso *b*)? *d*) ¿Cuál sería un método más eficaz de medición para pequeñas estructuras: los electrones o los fotones? ¿Por qué?

39.16 •• PA Un haz de electrones se acelera a partir del reposo a través de una diferencia de potencial de 0.100 kV y luego pasa por una rendija delgada. El haz difractado muestra su primer mínimo de difracción en ±11.5° desde la dirección original del haz visto desde la rendija. *a*) ¿Es necesario utilizar fórmulas relativistas? ¿Cómo lo sabe? *b*) ¿Qué tan ancha es la rendija?

39.17 •• Un haz de neutrones con la misma energía se dispersa en átomos que están a una distancia de 0.0910 nm en el plano de la superficie de un cristal. La intensidad máxima $m = 1$ se produce cuando el ángulo θ en la figura 39.2 es de 28.6°. ¿Cuál es la energía cinética (en electrón volts) de cada neutrón en el haz?

39.18 • Un haz de electrones de 188 eV incide perpendicularmente sobre una superficie cristalina, como se muestra en la figura 39.3*b*. La intensidad máxima $m = 2$ se produce en un ángulo $\theta = 60.6°$. *a*) ¿Cuál es la distancia entre átomos adyacentes en la superficie? *b*) ¿En qué otro ángulo o ángulos hay una intensidad máxima? *c*) ¿Para qué energía de los electrones (en electrón volts) se produciría la intensidad máxima $m = 1$ en $\theta = 60.6°$? ¿Para esta energía, hay una intensidad má-xima en $m = 2$? Explique por qué.

39.19 • Se utiliza un CD-ROM en lugar de un cristal en un experimento de difracción de electrones. La superficie del CD-ROM tiene pistas formadas por agujeros diminutos con una distancia uniforme de 1.60 μm. *a*) Si la rapidez de los electrones es de 1.26×10^4 m/s, ¿en qué valores de θ se presentará la intensidad máxima en $m = 1$ y en $m = 2$? *b*) Los electrones dispersados en estos máximos llegan con incidencia normal a una película fotográfica que está a 50.0 cm del CD-ROM. ¿Cuál es la distancia entre estos máximos en la película?

39.20 • *a*) En un microscopio electrónico, ¿qué voltaje de aceleración se necesita para producir electrones con longitud de onda de 0.0600 nm? *b*) Si se utilizan protones en vez de electrones, ¿qué voltaje de aceleración se necesita para producir protones con longitud de onda de 0.0600 nm? (*Sugerencia:* En cada caso, la energía cinética inicial es despreciable).

39.21 •• Usted quiere estudiar una muestra biológica por medio de una longitud de onda de 10.0 nm, y tiene la opción de usar ondas electromagnéticas o un microscopio electrónico. *a*) Calcule la proporción de la energía de un fotón de 10.0 nm de longitud de onda con respecto a la energía cinética de un electrón de 10.0 nm de longitud de onda. *b*) En vista de su respuesta al inciso *a*), ¿qué sería menos perjudicial para la muestra que está estudiando: los fotones o los electrones?

Sección 39.2 Átomo nuclear y espectros atómicos

39.22 •• PA Una partícula alfa de 4.78 MeV emitida en el decaimiento del ^{226}Ra tiene una colisión de frente con un núcleo de uranio. Un núcleo de uranio tiene 92 protones. *a*) ¿Cuál es la distancia de aproximación máxima de la partícula alfa con respecto al centro del núcleo? Suponga que el núcleo de uranio permanece en reposo y que la distancia de aproximación máxima es mucho mayor que el radio del núcleo de uranio. *b*) ¿Cuál es la fuerza sobre la partícula alfa en el instante en que se encuentra a la distancia de aproximación máxima?

39.23 • Un haz de partículas alfa está incidiendo sobre un blanco de plomo. Una partícula alfa específica se aproxima de "frente" a un núcleo de plomo dado y se detiene a 6.50×10^{-14} m de distancia del centro del núcleo. (Este punto está completamente fuera del núcleo). Suponga que el núcleo de plomo, que tiene 82 protones, permanece en reposo. La masa de la partícula alfa es de 6.64×10^{-27} kg. *a*) Calcule la energía potencial electrostática en el instante en que se detiene la partícula alfa. Exprese su resultado en joules y en MeV. *b*) ¿Qué energía cinética inicial (en joules y en MeV) tenía la partícula alfa? *c*) ¿Cuál era la rapidez inicial de la partícula alfa?

Sección 39.3 Niveles de energía y el modelo atómico de Bohr

39.24 • El enlace silicio-silicio que constituye la base de la criatura mítica Horta (de la serie de televisión *Viaje a las estrellas*) basada en silicio tiene una fuerza de enlace de 3.80 eV. ¿Qué longitud de onda del fotón se necesita en un arma de desintegración (mítica) fasorial para destruir la Horta?

39.25 •• Un átomo de hidrógeno se encuentra en un estado con energía −1.51 eV. En el modelo de Bohr, ¿cuál es el momento angular del electrón en el átomo, con respecto a un eje en el núcleo?

39.26 • Un átomo de hidrógeno inicialmente en el nivel fundamental absorbe un fotón, que lo excita al nivel $n = 4$. Determine la longitud de onda y la frecuencia del fotón.

39.27 • Un ion berilio triplemente ionizado, Be^{3+} (un átomo de berilio al que se le han removido tres electrones), se comporta de forma muy similar al átomo de hidrógeno, pero la carga nuclear es cuatro veces mayor. *a*) ¿Cuál es la energía del nivel fundamental del Be^{3+}? ¿Cómo se compara esta con la energía del nivel fundamental del átomo de hidrógeno? *b*) ¿Cuál es la energía de ionización del Be^{3+}? ¿Cómo se

compara esta con la energía de ionización del átomo de hidrógeno? *c*) Para el átomo de hidrógeno, la longitud de onda del fotón emitido en la transición de $n = 2$ a $n = 1$ es 122 nm (véase el ejemplo 39.6). ¿Cuál es la longitud de onda del fotón emitido cuando un ion Be^{3+} experimenta esta transición? *d*) Para un valor dado de n, ¿cómo se compara el radio de una órbita en el Be^{3+} con la correspondiente del hidrógeno?

39.28 •• *a*) Demuestre que, conforme n se hace muy grande, los niveles de energía del átomo de hidrógeno se acercan cada vez más en energía. *b*) ¿Los radios de estos niveles de energía también se acercan?

39.29 • *a*) Usando el modelo de Bohr, calcule la rapidez del electrón en un átomo de hidrógeno en los niveles $n = 1$, 2 y 3. *b*) Calcule el periodo orbital en cada uno de estos niveles. *c*) El tiempo de vida promedio del primer nivel excitado de un átomo de hidrógeno es 1.0×10^{-8} s. En el modelo de Bohr, ¿cuántas órbitas describe un electrón en el nivel $n = 2$ antes de regresar al nivel fundamental?

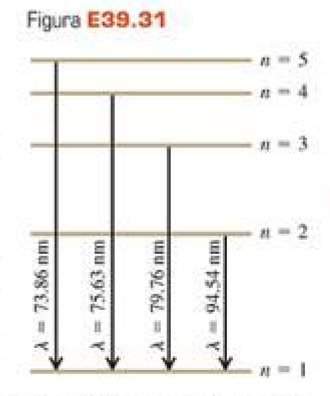
39.30 • PA El esquema de niveles de energía para el hipotético elemento Searsium de un electrón se presenta en la figura E39.30. La energía potencial se toma como cero para un electrón a una distancia infinita del núcleo. *a*) ¿Cuánta energía (en electrón volts) se necesita para ionizar un electrón desde el nivel fundamental? *b*) Un fotón de 18 eV es absorbido por un átomo de Searsium en su nivel fundamental. Cuando el átomo regresa a su nivel fundamental, ¿qué energías posibles pueden tener los fotones emitidos? Suponga que puede haber transiciones entre todos los pares de niveles. *c*) ¿Qué pasará si un fotón con una energía de 8 eV choca con un átomo de Searsium en su nivel fundamental? ¿Por qué? *d*) Los fotones emitidos en las transiciones $n = 3 \rightarrow n = 2$ y $n = 3 \rightarrow n = 1$ del Searsium emitirán fotoelectrones de un metal desconocido, pero el fotón emitido a partir de la transición $n = 4 \rightarrow n = 3$ no los emitirá. ¿Cuáles son los límites (valores máximos y mínimos posibles) de la función de trabajo del metal?

Figura **E39.30**



39.31 • En un conjunto de experimentos con un átomo hipotético de un electrón, se miden las longitudes de onda de los fotones emitidos a partir de las transiciones que terminan en el estado fundamental ($n = 1$), como se muestra en el diagrama de niveles de energía en la figura E39.31. También observe que se requieren 17.50 eV para ionizar este átomo. *a*) ¿Cuál es la energía del átomo en cada uno de los niveles ($n = 1$, $n = 2$, etcétera) que se muestran en la figura? *b*) Si un electrón hiciera una transición del estado $n = 4$ al nivel $n = 2$, ¿qué longitud de onda de luz emitiría?

Figura **E39.31**



39.32 • Encuentre las longitudes de onda más largas y más cortas en las series de Lyman y de Paschen para el hidrógeno. ¿En qué región del espectro electromagnético está cada serie?

39.33 • *a*) Un átomo inicialmente en un nivel de energía $E = -6.52$ eV absorbe un fotón que tiene longitud de onda de 860 nm. ¿Cuál es la energía interna del átomo después de absorber el fotón? *b*) Un átomo que inicialmente está en un nivel de energía con $E = -2.68$ eV emite un fotón de longitud de onda de 420 nm. ¿Cuál es la energía interna del átomo después de emitir el fotón?

39.34 •• Utilice la fórmula de Balmer para calcular *a*) la longitud de onda, *b*) la frecuencia y *c*) la energía del fotón para la línea H_γ de la serie de Balmer del hidrógeno.

Sección 39.4 El láser

39.35 • BIO **Cirugía láser.** Utilizando una mezcla de CO_2, N_2 y, algunas veces, He, los láseres de CO_2 emiten una longitud de onda de 10.6 μm. Con potencia de salida de 0.100 kW, estos láseres se utilizan en cirugía. ¿Cuántos fotones por segundo entrega un láser de CO_2 al tejido durante su uso en una operación?

39.36 • BIO **Extracción de marcas de nacimiento.** Los láseres de colorante pulsado emiten luz de longitud de onda de 585 nm en pulsos de 0.45 ms para eliminar manchas de la piel, tales como marcas de nacimiento. El haz se centra generalmente en una mancha circular de 5.0 mm de diámetro. Suponga que la salida de este láser es de 20.0 W. *a*) ¿Cuál es la energía de cada fotón, en eV? *b*) ¿Cuántos fotones por milímetro cuadrado se entregan a la mancha durante cada pulso?

39.37 • ¿Cuántos fotones por segundo emite un láser de 7.50 mW de CO_2 cuya longitud de onda es de 10.6 μm?

39.38 • BIO **Cirugía PRK.** La queratectomía fotorrefractiva (PRK) es un procedimiento quirúrgico basado en láser que corrige la miopía y la hipermetropía eliminando parte del cristalino del ojo para modificar su curvatura y, por lo tanto, su distancia focal. Este procedimiento puede eliminar capas de 0.25 μm de espesor usando pulsos de 12.0 ns de duración de un haz láser de 193 nm de longitud de onda. Se pueden utilizar haces de baja intensidad porque cada fotón tiene suficiente energía para romper los enlaces covalentes del tejido. *a*) ¿En qué parte del espectro electromagnético se ubica esta luz? *b*) ¿Cuál es la energía de un solo fotón? *c*) Si se utiliza un haz de 1.50 mW, ¿cuántos fotones llegan al cristalino en cada pulso?

39.39 • Un gran número de átomos de neón están en equilibrio térmico. ¿Cuál es la proporción del número de átomos en un estado 5*s* con respecto a los que hay en un estado 3*p* a *a*) 300 K, *b*) 600 K; *c*) 1200 K? Las energías de estos estados, con respecto al estado fundamental, son $E_{5s} = 20.66$ eV y $E_{3p} = 18.70$ eV. *d*) A cualquiera de estas temperaturas, la rapidez con que un gas de neón emite una radiación de 632.8 nm espontáneamente es muy baja. Explique por qué.

39.40 • La figura 39.19*a* muestra los niveles de energía del átomo de sodio. Los dos niveles excitados más bajos se muestran en las columnas bajo los títulos $^2P_{3/2}$ y $^2P_{1/2}$. Calcule la proporción entre el número de átomos en un estado $^2P_{3/2}$ con respecto al número de átomos en un estado $^2P_{1/2}$ para un gas de sodio en equilibrio térmico a 500 K. ¿En qué estado hay más átomos?

Sección 39.5 Espectros continuos

39.41 •• Una bombilla de luz incandescente de 100 W tiene un filamento de forma cilíndrica de tungsteno de 30.0 cm de longitud, 0.40 mm de diámetro y con una emisividad de 0.26. *a*) ¿Cuál es la temperatura del filamento? *b*) ¿Para qué longitud de onda es máxima la emitancia espectral de la bombilla? *c*) Las bombillas incandescentes no son fuentes muy eficaces de la luz visible. Explique por qué.

39.42 • Determine λ_m, la longitud de onda en el máximo de la distribución de Planck, y la frecuencia f correspondiente, a estas temperaturas: *a*) 3.00 K, *b*) 300 K; *c*) 3000 K.

39.43 • Se ha detectado radiación procedente del espacio que es característica de un radiador ideal a $T = 2.728$ K. (Esta radiación es un vestigio del Big Bang en el comienzo del Universo). Para esta temperatura, ¿a qué longitud de onda es máxima la distribución de Planck? ¿En qué parte del espectro electromagnético se encuentra esta longitud de onda?

39.44 • La menor longitud de onda visible es de aproximadamente 400 nm. ¿Cuál es la temperatura de un radiador ideal cuya emitancia espectral es máxima en esta longitud de onda?

39.45 •• Dos estrellas, que se comportan como cuerpos negros ideales, radian la misma energía total por segundo. La más fría tiene una temperatura T en su superficie y un diámetro que es 3.0 veces el de la estrella más caliente. *a*) ¿Cuál es la temperatura de la estrella más caliente en términos de T? *b*) ¿Cuál es el cociente de la longitud de onda de la máxima intensidad de la estrella caliente entre la longitud de onda de la máxima intensidad de la estrella fría?

39.46 • **Sirio B.** La estrella más brillante del cielo es Sirio o Estrella Can. En realidad es un sistema binario de dos estrellas, la más pequeña (Sirio B) es una enana blanca. El análisis espectral de Sirio B indica que su temperatura superficial es de 24,000 K y que radia energía con una potencia de 1.0×10^{25} W. Suponga que se comporta como un cuerpo negro ideal. *a*) ¿Cuál es la intensidad total radiada por Sirio B? *b*) ¿Cuál es la longitud de onda de máxima intensidad? ¿Es visible esta longitud de onda para los seres humanos? *c*) ¿Cuál es el radio de Sirio B? Exprese su respuesta en kilómetros y como una fracción de radio de nuestro Sol. *d*) ¿Qué estrella radia más energía *total* por segundo, la caliente Sirio B o el (relativamente) frío Sol con una temperatura superficial de 5800 K? Para descubrirlo, calcule el cociente de la potencia total radiada por nuestro Sol entre la potencia radiada por Sirio B.

39.47 •• **Supergigantes azules.** Una típica estrella supergigante azul (como las que explotan y dejan un agujero negro) tiene una temperatura superficial de 30,000 K y una luminosidad visual de 100,000 veces la de nuestro Sol. Nuestro Sol radia con una potencia de 3.86×10^{26} W. (La luminosidad visual es la potencia total radiada en longitudes de onda visibles). *a*) Suponiendo que esta estrella se comporta como un cuerpo negro ideal, ¿cuál es la longitud de onda principal que radia? ¿Es visible esta luz? Utilice su respuesta para explicar por qué son azules estas estrellas. *b*) Si suponemos que la energía radiada por la estrella también es 100,000 veces mayor que la de nuestro Sol, ¿cuál es el radio de esta estrella? Compare su tamaño con el de nuestro Sol, cuyo radio mide 6.96×10^5 km. *c*) ¿Es realmente correcto decir que la luminosidad visual es proporcional a la potencia total radiada? Explique.

Sección 39.6 Revisión del principio de incertidumbre

39.48 • Un molesto mosquito de 1.5 mg está zumbando cuando usted intenta estudiar física en su habitación, que es de 5.0 m de ancho y 2.5 m de altura. Decide aplastar al molesto insecto, cuando vuela hacia usted, pero necesita estimar su rapidez para dar un golpe certero. *a*) ¿Cuál es la incertidumbre máxima en la posición horizontal del mosquito? *b*) ¿Qué límite impone el principio de incertidumbre de Heisenberg a su capacidad de conocer la velocidad horizontal de este mosquito? ¿Dicha limitación impide considerablemente su intento de aplastarlo?

39.49 • Mediante mediciones extremadamente cuidadosas, se determina la coordenada x del centro de masa de un automóvil con una incertidumbre de solo 1.00 μm. El automóvil tiene una masa de 1200 kg. *a*) ¿Cuál es la incertidumbre mínima en la componente x de la velocidad del centro de masa del auto de acuerdo con el principio de incertidumbre de Heisenberg? *b*) ¿El principio de incertidumbre impone un límite práctico a nuestra capacidad de hacer mediciones simultáneas de las posiciones y velocidades de objetos ordinarios como automóviles, libros o incluso de las personas? Explique.

39.50 • Una canica de 10.0 g se coloca suavemente sobre una mesa horizontal que tiene 1.75 m de ancho. *a*) ¿Cuál es la incertidumbre máxima en la posición horizontal de la canica? *b*) De acuerdo con el principio de incertidumbre de Heisenberg, ¿cuál es la incertidumbre mínima en la velocidad horizontal de la canica? *c*) De acuerdo con su respuesta del inciso *b*), ¿cuál es el tiempo máximo que podría permanecer la canica en la mesa? Compare este tiempo con la edad del Universo, que es aproximadamente de 14 mil millones de años. (*Sugerencia:* ¿Puede usted saber que la velocidad horizontal de la canica es *exactamente* cero?).

39.51 • Un científico ha desarrollado un nuevo método para aislar partículas individuales. Él afirma que este método le permite detectar simultáneamente la posición de una partícula a lo largo de un eje con una desviación estándar de 0.12 nm y su componente del momento lineal a lo largo de este eje con una desviación estándar de 3.0×10^{-25} kg · m/s. Aplique el principio de incertidumbre de Heisenberg para evaluar la validez de su afirmación.

39.52 • *a*) La coordenada x de un electrón se mide con una incertidumbre de 0.20 mm. ¿Cuál es la componente x de la velocidad del electrón, v_x, si la incertidumbre porcentual mínima en una medición simultánea de v_x es 1.0%? *b*) Repita el inciso *a*) para un protón.

39.53 • Un átomo en un estado metaestable tiene un tiempo de vida de 5.2 ms. ¿Cuál es la incertidumbre en la energía de ese estado metaestable?

39.54 • *a*) La incertidumbre de la componente y de la posición de un protón es de 2.0×10^{-12} m. ¿Cuál es la incertidumbre mínima en una medición simultánea de la componente y de la velocidad del protón? *b*) La incertidumbre en la componente z de la velocidad de un electrón es 0.250 m/s. ¿Cuál es la incertidumbre mínima en la medición simultánea de la coordenada z del electrón?

PROBLEMAS

39.55 •• El muón negativo tiene una carga igual a la de un electrón, pero su masa es 207 veces mayor. Considere un átomo hidrogenoide que consiste en un protón y un muón. *a*) ¿Cuál es la masa reducida del átomo? *b*) ¿Cuál es la energía de nivel fundamental (en electrón volts)? *c*) ¿Cuál es la longitud de onda de la radiación emitida en la transición del nivel $n = 2$ al nivel $n = 1$?

39.56 • Un átomo de masa m emite un fotón de longitud de onda λ. *a*) ¿Cuál es la rapidez de retroceso del átomo? *b*) ¿Cuál es la energía cinética K del átomo en retroceso? *c*) Encuentre la proporción K/E, donde E es la energía del fotón emitido. Si esta proporción es mucho menor que la unidad, se puede despreciar el retroceso del átomo en el proceso de emisión. ¿El retroceso del átomo es más importante para las masas atómicas pequeñas o grandes? ¿Y para longitudes de onda largas o cortas? *d*) Calcule K (en electrón volts) y K/E para un átomo de hidrógeno (masa 1.67×10^{-27} kg) que emite un fotón ultravioleta de 10.2 eV de energía. ¿El retroceso es una consideración importante en el proceso de emisión?

39.57 • *a*) ¿Cuál es la cantidad mínima de energía en electrón volts que se debe suministrar a un átomo de hidrógeno que inicialmente está en su nivel fundamental para que pueda emitir la línea H_α en la serie de Balmer? *b*) ¿Cuántas diferentes posibilidades de emisiones de líneas espectrales hay para este átomo cuando el electrón inicia en el nivel $n = 3$ y termina en el nivel fundamental? Calcule la longitud de onda del fotón emitido en cada caso.

39.58 • Un gran número de átomos de hidrógeno están en equilibrio térmico. Sea n_2/n_1 la razón entre el número de átomos en un estado excitado $n = 2$ y el número de átomos en un estado fundamental $n = 1$. ¿A qué temperatura es n_2/n_1 igual a *a*) 10^{-12}; *b*) 10^{-8}; *c*) 10^{-4}? *d*) Como el Sol, otras estrellas tienen espectros continuos con líneas de absorción oscuras (véase la figura 39.9). La absorción tiene lugar en la atmósfera de la estrella, que en todas las estrellas se compone principalmente de hidrógeno. Explique por qué las líneas de absorción de Balmer son relativamente débiles en las estrellas con bajas temperaturas atmosféricas como el Sol (temperatura atmosférica de 5800 K), pero fuertes en estrellas con temperaturas atmosféricas más altas.

39.59 ••• Una muestra de átomos de hidrógeno se irradia con luz con 85.5 nm de longitud de onda, y se observan electrones que salen del gas. *a*) Si cada átomo de hidrógeno estaba inicialmente en su nivel fundamental, ¿cuál sería la máxima energía cinética en electrón volts de estos fotoelectrones? *b*) Se detectan unos cuantos electrones con energías hasta de 10.2 eV mayores que la energía cinética máxima calculada en el inciso *a*). ¿Cómo es posible esto?

39.60 • PA **Órbitas de Bohr de un satélite.** Un satélite de 20.0 kg gira alrededor de la Tierra una vez cada 2.00 h, en una órbita con un radio de 8060 km. *a*) Suponiendo que el resultado de Bohr del momento angular ($L = nh/2\pi$) se aplica a los satélites de la misma manera que se hace con un electrón en el átomo de hidrógeno, encuentre el número cuántico n de la órbita del satélite. *b*) Demuestre a partir del resultado de Bohr del momento angular y de la ley de la gravitación de Newton que el radio de una órbita de satélite terrestre es directamente proporcional al cuadrado del número cuántico $r = kn^2$, donde k es la constante de proporcionalidad. *c*) Utilizando el resultado del inciso *b*), calcule la distancia entre la órbita del satélite en este problema y su siguiente órbita "permitida". (Calcule un valor numérico). *d*) Comente acerca de la posibilidad de observar la separación de las dos órbitas adyacentes. *e*) ¿A este satélite corresponden órbitas clásicas y cuantizadas? ¿Cuál es el método "correcto" de cálculo de las órbitas?

39.61 •• **La supergigante roja Betelgeuse.** La estrella Betelgeuse tiene una temperatura superficial de 3000 K, y 600 veces el diámetro de nuestro Sol. (Si nuestro Sol fuera tan grande, ¡estaríamos dentro de él!) Suponga que esta estrella radia como un cuerpo negro ideal. *a*) Si Betelgeuse radiara toda esta energía en la longitud de onda de máxima intensidad, ¿cuántos fotones por segundo radiaría? *b*) Determine el cociente entre la potencia radiada por Betelgeuse y la potencia radiada por el Sol (a 5800 K).

39.62 •• PA Se analiza luz procedente de un cuerpo negro ideal esférico de 15.0 cm de diámetro mediante una rejilla de difracción que tiene 3850 líneas/cm. Cuando se hace pasar luz a través de la rejilla, se observa que la longitud de onda de máxima intensidad forma una franja brillante de primer orden a $\pm 11.6°$ con respecto a la franja brillante central. *a*) ¿Cuál es la temperatura del cuerpo negro? *b*) ¿Cuánto tiempo tardará esta esfera en radiar 12.0 MJ de energía?

39.63 • ¿Cuál debe ser la temperatura de un cuerpo negro ideal para que los fotones de su luz radiada que tienen la longitud de onda de máxima intensidad puedan excitar al electrón en el átomo de hidrógeno del modelo de Bohr del estado fundamental al tercer estado excitado?

39.64 • PA Un cuerpo negro esférico ideal de 24.0 cm de diámetro se mantiene a 225°C por un calentador eléctrico interno y se sumerge en un tanque de agua muy grande descubierto en su cara superior que se mantiene hirviendo debido a la energía radiada por la esfera. Desprecie cualquier transferencia de calor por conducción y convección. Consulte la tabla 17.4 (vol. 1), cuando sea necesario. *a*) ¿Con qué rapidez, en g/s, se evapora el agua del tanque? *b*) Si un organismo termófilo conocedor de la física está observando este proceso en el agua caliente, ¿cuál sería su medición en el máximo de intensidad **i.** de la longitud de onda y **ii.** de la frecuencia de las ondas electromagnéticas emitidas por la esfera?

39.65 ••• Cuando un fotón es emitido por un átomo, este debe retroceder para conservar su momento lineal. Esto significa que el fotón y el átomo que retrocede comparten la energía de transición. *a*) Para un átomo con masa m, calcule la corrección $\Delta\lambda$ debida al retroceso de la longitud de onda de un fotón emitido. Sea λ la longitud de onda del fotón si no se considera el retroceso. (*Sugerencia:* La corrección es muy pequeña, como sugiere el problema 39.56, así que $|\Delta\lambda|/\lambda \ll 1$. Utilice este hecho para obtener una expresión aproximada pero muy precisa para $\Delta\lambda$). *b*) Evalúe la corrección de un átomo de hidrógeno en el que un electrón en el enésimo nivel regresa al nivel fundamental. ¿Cómo depende el resultado de n?

39.66 •• **Un cuerpo negro ideal.** Una gran cavidad con un orificio muy pequeño y que se mantiene a una temperatura T es una buena aproximación para un radiador ideal o un cuerpo negro. La radiación puede entrar o salir de la cavidad solo a través del orificio. La cavidad es un absorbedor perfecto, ya que cualquier radiación incidente en el orificio queda atrapada dentro de la cavidad. Esta cavidad a 200°C tiene un agujero de 4.00 mm² de área. ¿Cuánto tiempo tarda la cavidad en radiar 100 J de energía a través del orificio?

39.67 •• CALC *a*) Escriba la ley de distribución de Planck, en términos de la frecuencia f, y no de la longitud de onda λ, para obtener $I(f)$. *b*) Demuestre que

$$\int_0^\infty I(\lambda)\,d\lambda = \frac{2\pi^5 k^4}{15c^2h^3}T^4$$

donde $I(\lambda)$ es la fórmula de distribución de Planck de la ecuación (39.24). (*Sugerencia:* Cambie la variable de integración de λ a f. Tendrá que utilizar la siguiente integral tabulada:

$$\int_0^\infty \frac{x^3}{e^{\alpha x}-1}dx = \frac{1}{240}\left(\frac{2\pi}{\alpha}\right)^4$$

c) El resultado del inciso *b*) es I y tiene la forma de la ley de Stefan-Boltzmann, $I = \sigma T^4$ (ecuación 39.19). Evalúe las constantes en el inciso *b*) para demostrar que s tiene el valor dado en la sección 39.5.

39.68 •• PA Un haz de electrones de 40 eV que viaja en la dirección $+x$ pasa por una rendija, la cual es paralela al eje y de 5.0 μm de ancho. El patrón de difracción se registra en una pantalla a 2.5 m de la rendija. *a*) ¿Cuál es la longitud de onda de De Broglie de los electrones? *b*) ¿Cuánto tardan los electrones en ir de la rendija a la pantalla? *c*) Utilice el ancho del patrón central de difracción para calcular la incertidumbre en la componente y del momento lineal de un electrón justo después de que ha pasado por la rendija. *d*) Utilice el resultado del inciso *c*) y el principio de incertidumbre de Heisenberg (ecuación 39.29 para y) para estimar la incertidumbre mínima en la coordenada y de un electrón justo después de que ha pasado por la rendija. Compare su resultado con el ancho de la rendija.

39.69 • *a*) ¿Cuál es la energía de un fotón que tiene 0.10 μm de longitud de onda? *b*) ¿Aproximadamente con qué diferencia de potencial deben acelerarse los electrones para que muestren la naturaleza ondulatoria al pasar por un orificio producido por un alfiler de 0.10 μm de diámetro? ¿Cuál es la rapidez de estos electrones? *c*) Si se utilizan protones en lugar de electrones, ¿a través de qué diferencia de potencial tendrían que acelerarse los protones para que presenten la naturaleza ondulatoria al pasar por este orificio? ¿Cuál sería la rapidez de estos protones?

39.70 • PA Electrones pasan por una sola rendija de 150 nm de ancho y llegan a una pantalla a 24.0 cm de distancia. Usted se da cuenta de que no llegan electrones a la pantalla en ángulos de $\pm 20.0°$, pero que sí los hay en todos los puntos más cercanos al centro. *a*) ¿Con qué rapidez se movían estos electrones al pasar por la rendija? *b*) ¿Cuáles serán los siguientes ángulos mayores en los que no llegan electrones a la pantalla?

39.71 •• PA Un haz de electrones se acelera a partir del reposo y luego pasa por un par de rendijas delgadas idénticas que están separadas 1.25 nm. Usted observa que la primera franja oscura de interferencia de doble rendija ocurre a $\pm 18.0°$ de la dirección original del haz, vista en una pantalla lejana. *a*) ¿Estos electrones son relativistas? ¿Cómo lo sabe? *b*) ¿A través de qué diferencia de potencial se aceleraron los electrones?

39.72 •• PA Un haz de protones y un haz de partículas alfa (de masa 6.64×10^{-27} kg y carga de $+2e$) se aceleran a partir del reposo a través de la misma diferencia de potencial, y pasan por orificios circulares idénticos en una película opaca muy delgada. Visto desde el orificio, el haz de protones difractado forma su primer anillo oscuro a 15° con respecto a su dirección original. Cuando se observa de forma similar, ¿con qué ángulo la partícula alfa formará su primer anillo oscuro?

39.73 •• PA Un haz de electrones y otro de fotones pasan por rendijas idénticas. En una pantalla lejana, la primera franja oscura ocurre en el mismo ángulo para ambos haces. Las rapideces de los electrones son mucho

menores que la rapidez de la luz. *a*) Exprese la energía de un fotón en términos de la energía cinética K de uno de los electrones. *b*) ¿Cuál es mayor, la energía de un fotón o la energía cinética de un electrón?

39.74 • **PA** Se pasa luz coherente a través de dos rendijas angostas, cuya separación es de 40.0 μm. La franja clara de segundo orden en el patrón de interferencia está a un ángulo de 0.0300 rad. Si se usaran electrones en vez de luz, ¿cuál debe ser su energía cinética (en electrón volts) para generar un patrón de interferencia que también tenga el máximo de segundo orden a 0.0300 rad?

39.75 • **BIO** ¿Cuál es la longitud de onda de De Broglie de un glóbulo rojo, con masa de 1.00×10^{-11} g, que se mueve a 0.400 cm/s? ¿Debemos preocuparnos por la naturaleza ondulatoria de las células sanguíneas al describir el flujo de la sangre en el organismo?

39.76 • Calcule la energía en electrón volts de *a*) un electrón que tiene una longitud de onda de De Broglie de 400 nm y *b*) un fotón que tiene longitud de onda de 400 nm.

39.77 • Para explorar la estructura interior del núcleo atómico se usan electrones de alta rapidez. Para ellos sigue siendo válida la ecuación $\lambda = h/p$, pero se debe usar la ecuación relativista del momento lineal $p = mv/\sqrt{1 - v^2/c^2}$. *a*) Demuestre que la rapidez de un electrón cuya longitud de onda λ de De Broglie es

$$v = \frac{c}{\sqrt{1 + (mc\lambda/h)^2}}$$

b) La cantidad h/mc es igual a 2.426×10^{-12} m. [Como vimos en la sección 38.8, esta misma cantidad aparece en la ecuación (38.7), de la dispersión de Compton de fotones por electrones]. Si λ es pequeña en comparación con h/mc, el denominador en la ecuación determinada en el inciso *a*) se acerca a la unidad, y la rapidez v se acerca mucho a c. En este caso, conviene escribir $v = (1 - \Delta)c$ y expresar la rapidez del electrón en función de Δ y no de v. Deduzca una ecuación para Δ que sea válida cuando $\lambda \ll h/mc$. [*Sugerencia:* Use el desarrollo del binomio $(1 + z)^n = 1 + nz + n(n-1)z^2/2 + \cdots$, válido para el caso $|z| < 1$]. *c*) ¿Con qué rapidez se debe mover un electrón para que su longitud de onda de De Broglie sea de 1.00×10^{-15} m, comparable con el tamaño de un protón? Exprese su respuesta en la forma $v = (1 - \Delta)c$, y determine el valor de Δ.

39.78 • Suponga que la incertidumbre en la posición de un electrón es igual al radio de la órbita $n = 1$ de Bohr del hidrógeno. Calcule la incertidumbre mínima simultánea de la componente del momento lineal correspondiente, y compárela con la magnitud del momento lineal para el electrón en la órbita $n = 1$ de Bohr. Analice sus resultados.

39.79 • **PA** *a*) Una partícula de masa m tiene energía cinética igual a tres veces su energía en reposo. ¿Cuál es la longitud de onda de De Broglie para esta partícula? (*Sugerencia:* Debe usar la ecuación relativista del momento lineal y de la energía cinética: $E^2 = (pc)^2 + (mc^2)^2$ y $K = E - mc^2$). *b*) Determine el valor numérico de la energía cinética (en MeV) y la longitud de onda (en metros), si la partícula del inciso *a*) es **i.** un electrón y **ii.** un protón.

39.80 • **Energía del protón en un núcleo.** Los radios de los núcleos atómicos son del orden de 5.0×10^{-15} m. *a*) Estime la incertidumbre mínima en el momento lineal de un protón, si se confina dentro de un núcleo. *b*) Suponga que esta incertidumbre en el momento lineal es una estimación de la magnitud del momento lineal. Use la relación relativista entre la energía y el momento lineal, ecuación (37.39), para obtener una estimación de la energía cinética de un protón confinado dentro de un núcleo. *c*) Para que un protón permanezca unido dentro de un núcleo, ¿cuál debe ser la magnitud de la energía potencial (negativa)? Exprese su respuesta en eV y en MeV. Compárela con la energía potencial de un electrón en un átomo de hidrógeno, cuya magnitud es de algunas decenas de eV. (Esto explica por qué la interacción que mantiene unido al núcleo se llama "fuerza nuclear fuerte").

39.81 • **Energía del electrón en un núcleo.** Los radios de los núcleos atómicos son del orden de 5.0×10^{-15} m. *a*) Estime la incertidumbre mínima en el momento lineal de un electrón, si está confinado dentro de un núcleo. *b*) Suponga que esta incertidumbre en el momento lineal es una estimación de la magnitud del momento lineal. Use la relación relativista entre energía y momento lineal, ecuación (37.39), para obtener un estimado de la energía cinética de un electrón confinado dentro de un núcleo. *c*) Compare la energía calculada en el inciso *b*) con la magnitud de la energía potencial de Coulomb de un protón y un electrón separados una distancia de 5.0×10^{-15} m. Con base en su resultado, ¿podría haber electrones dentro del núcleo? (*Nota:* Es interesante comparar este resultado con el del problema 39.80).

39.82 • En un cinescopio de TV, el voltaje de aceleración es de 15.0 kV, y el haz de electrones pasa por una abertura de 0.50 mm de diámetro, y llega a una pantalla que está a 0.300 m. *a*) ¿Cuál es la incertidumbre de la componente de la velocidad del electrón perpendicular a la línea entre la abertura y la pantalla? *b*) ¿Cuál es la incertidumbre en la posición del punto donde el electrón llega a la pantalla? *c*) ¿Esta incertidumbre afecta mucho la calidad de la imagen? (Use ecuaciones no relativistas para el movimiento de los electrones. Es bastante exacto y, desde luego, adecuado para obtener una estimación de los efectos de la incertidumbre).

39.83 • El pión neutro (π^0) es una partícula inestable producida en choques de partículas con alta energía. Su masa aproximada es 264 veces la del electrón, y su duración promedio es de 8.4×10^{-17} s antes de desintegrarse en dos fotones de rayos gamma. Use la relación $E = mc^2$ entre la masa en reposo y la energía, para calcular la incertidumbre en la masa de la partícula, y exprésela como fracción de esa masa.

39.84 • **¿Efectos cuánticos en la vida cotidiana?** Un insecto de 1.25 mg vuela a través de un orificio con diámetro de 4.00 mm en un mosquitero para ventana común. El espesor del mosquitero es de 0.500 mm. *a*) ¿Cuáles deberían ser la longitud de onda aproximada y la rapidez del insecto como para que aquella muestre comportamiento ondulatorio conforme pasa por el orificio? *b*) Con la rapidez calculada para el inciso *a*), ¿cuánto tardaría el insecto en pasar por los 0.500 mm de espesor del orificio en el mosquitero? Compare este tiempo con la edad del Universo (que es de 14 mil millones de años). ¿Esperaría ver la "difracción del insecto" en la vida cotidiana?

39.85 • **Difracción en el umbral de una puerta.** Si la longitud de onda de usted fuera de 1.0 m, sufriría mucha difracción al pasar por una puerta. *a*) ¿Cuál debe ser su rapidez para tener esa longitud de onda? (Suponga que su masa es de 60.0 kg). *b*) Con la rapidez calculada en el inciso *a*), ¿cuántos años tardaría en moverse 0.80 m (un paso)? ¿Notará los efectos de difracción cuando usted pase por las puertas?

39.86 • **Incertidumbres en los espectros atómicos.** Cierto átomo tiene un nivel de energía de 2.58 eV arriba del nivel fundamental. Una vez excitado hasta este nivel, permanece allí durante 1.64×10^{-7} s (en promedio) antes de emitir un fotón y regresar al nivel fundamental. *a*) ¿Cuál es la energía del fotón (en electrón volts)? ¿Cuál es su longitud de onda (en nanómetros)? *b*) ¿Cuál será la mínima incertidumbre posible en la energía del fotón? Exprese su respuesta en electrón volts. *c*) Demuestre que $|\Delta E/E| = |\Delta\lambda/\lambda|$ si $|\Delta \lambda/\lambda| \ll 1$. Use esto para calcular la magnitud de la incertidumbre mínima posible en la longitud de onda del fotón. Exprese su respuesta en nanómetros.

39.87 •• Usted intenta usar un microscopio electrónico para estudiar la estructura de algunos cristales. Para una resolución precisa, usted desea que la longitud de onda de los electrones sea de 1.00 nm. *a*) ¿Estos electrones son relativistas? ¿Cómo lo sabe? *b*) ¿Qué potencial de aceleración se necesita? *c*) ¿Cuál es la energía cinética de los electrones que usted está utilizando? Para saber si es lo suficientemente grande como para dañar los cristales que estudia, compárela con la energía potencial

de una molécula típica de NaCl, que es de aproximadamente 6.0 eV. *d*) Si usted decide usar ondas electromagnéticas como su método, ¿qué energía deberían tener sus protones para generar la misma resolución que los electrones? ¿Esta energía dañaría el cristal?

39.88 •• Para rayos x con longitud de onda de 0.0300 nm, la intensidad máxima $m = 1$ para un cristal tiene lugar cuando el ángulo θ de la figura 39.2 es de 35.8°. ¿A qué ángulo θ ocurre el máximo $m = 1$ cuando se utiliza un haz de electrones de 4.50 keV? Suponga que los electrones también se dispersan de los átomos en el plano superficial de este mismo cristal.

39.89 •• **PA** También se puede producir difracción de electrones cuando hay interferencia entre ondas de electrones que se dispersan de átomos en la superficie de un cristal, y ondas que se dispersan de átomos en el plano siguiente abajo de la superficie, a una distancia d de ella (véase la figura 36.23*c*). *a*) Deduzca una ecuación para determinar los ángulos θ en los que hay un máximo de intensidad de ondas de electrones con longitud de onda λ. *b*) La distancia entre los planos cristalinos de cierto metal es de 0.091 nm. Si se usan electrones de 71.0 eV, calcule el ángulo en el que hay un máximo de intensidad debido a la interferencia entre las ondas dispersadas en planos cristalinos adyacentes. El ángulo se mide como se observa en la figura 36.23*c*. *c*) El ángulo real del máximo de intensidad es un poco distinto de su resultado en el inciso *b*). La causa es la función de trabajo ϕ del metal (véase la sección 38.1), que cambia la energía potencial del electrón en $-e\phi$ al moverse desde el vacío al interior del metal. Si se tiene en cuenta el efecto de la función de trabajo, ¿el ángulo de intensidad máxima es mayor o menor que el valor calculado en el inciso *b*)? Explique por qué.

39.90 •• Un cierto átomo tiene un nivel de energía de 3.50 eV arriba del estado fundamental. Cuando se excita a este estado, permanece en promedio 4.0 μs, antes de emitir un fotón y regresar al estado fundamental. *a*) ¿Cuál es la energía del fotón? ¿Cuál es su longitud de onda? *b*) ¿Cuál es la incertidumbre más pequeña posible en la energía del fotón?

39.91 •• **BIO** **Estructura de un virus.** Para investigar la estructura de objetos extremadamente pequeños, tales como los virus, la longitud de onda de la onda de prueba debe ser aproximadamente de una décima parte del tamaño del objeto para obtener imágenes nítidas. Pero conforme la longitud de onda se hace más corta, la energía de un fotón de luz se hace mayor y puede dañar o destruir el objeto estudiado. Una alternativa es el uso de ondas de electrones materiales en lugar de luz. Los virus varían considerablemente en tamaño, pero es común 50 nm. Suponga que queremos estudiar este tipo de virus, utilizando una onda de longitud de onda de 5.00 nm. *a*) Si se utiliza luz de esta longitud de onda, ¿cuál sería la energía (en eV) de un solo fotón? *b*) Si utiliza un electrón de esta longitud de onda, ¿cuál sería su energía cinética (en eV)? ¿Es ahora claro por qué las ondas de materia (como las del microscopio electrónico) son con frecuencia preferibles a las ondas electromagnéticas para estudiar objetos microscópicos?

39.92 •• **CALC** **Energía de punto cero.** Considere una partícula de masa m que se mueve en un potencia $U = \frac{1}{2}kx^2$, como en el sistema de masa-resorte. La energía total de la partícula es $E = p^2/2m + \frac{1}{2}kx^2$. Suponga que p y x se relacionan aproximadamente por el principio de incertidumbre de Heisenberg, $px \approx h$. *a*) Calcule el valor mínimo posible de la energía E, y el valor de x que produce la E mínima. Esta energía mínima posible, que no es cero, se llama *energía de punto cero*. *b*) Para la x calculada en el inciso *a*), ¿cuál es la proporción de la energía cinética con la energía potencial de la partícula?

39.93 •• **CALC** Una partícula de masa m se mueve en un potencial $U(x) = A|x|$, siendo A una constante positiva. En una imagen simplificada, los quarks (que forman los protones, neutrones y otras partículas, como se explicará en el capítulo 44) tienen energía potencial de interacción que tiene aproximadamente esta forma, donde x representa la distancia entre un par de quarks. Ya que $U(x) \rightarrow \infty$ cuando $x \rightarrow \infty$, no es posible separar los quarks entre sí (fenómeno que se llama *confinamiento de quarks*). *a*) Según la física clásica, ¿cuál es la fuerza que actúa sobre esta partícula en función de x? *b*) Aplicando el principio de incertidumbre como en el problema 39.92, determine en forma aproximada la energía de punto cero de la partícula.

39.94 •• Imagine otro universo donde el valor de la constante de Planck sea de 0.0663 J · s, pero donde las leyes físicas y todas las demás constantes físicas son iguales a las de nuestro universo. En ese universo, dos estudiantes de física están atrapando pelotas. Están ubicados a 12 m de distancia, y uno lanza una pelota de 0.25 kg directamente hacia el otro, con una rapidez de 6.0 m/s. *a*) ¿Cuál es la incertidumbre en el momento lineal horizontal de la pelota, en una dirección perpendicular a aquella en la que se lanzó, si el estudiante que la lanzó conoce que está dentro de un cubo de 125 cm^3 al momento de lanzarla? *b*) ¿A qué distancia horizontal del segundo estudiante llegará la pelota?

PROBLEMAS DE DESAFÍO

39.95 ••• *a*) Demuestre que en el modelo de Bohr, la frecuencia de revolución de un electrón en su órbita circular alrededor de un núcleo estacionario de hidrógeno es $f = me^4/4\epsilon_0^2n^3h^3$. *b*) En física clásica, la frecuencia de revolución del electrón es igual a la frecuencia de la radiación que emite. Demuestre que cuando n es muy grande, la frecuencia de revolución en efecto es igual a la frecuencia radiada calculada a partir de la ecuación (39.5) para una transición de $n_1 = n + 1$ a $n_2 = n$. (Esto ilustra el *principio de correspondencia* de Bohr, que se utiliza a menudo como una comprobación de los cálculos cuánticos. Cuando n es pequeña, la física cuántica da resultados que son muy diferentes de los de la física clásica. Cuando n es grande, las diferencias no son significativas, y entonces los dos métodos "corresponden". En efecto, cuando Bohr abordó por primera vez el problema del átomo de hidrógeno, buscó determinar la f como una función de n de manera que correspondiera con los resultados clásicos para n grande).

39.96 ••• **PA** **CALC** Usted entró a un concurso donde se trata de dejar caer una canica de 20.0 g desde el techo de un edificio para que caiga en un blanco pequeño, a 25.0 m abajo. De acuerdo con consideraciones de incertidumbre, ¿cuál es la distancia característica a la que fallará del blanco, considerando que le apunta con la máxima precisión posible? (*Sugerencia:* Considere que la incertidumbre Δx_f en la coordenada x de la canica, al llegar al suelo, se debe en parte a la incertidumbre Δx_i en la coordenada x inicial y en parte a la incertidumbre en v_x inicial. Esta última da lugar a una incertidumbre Δv_x en el movimiento horizontal de la canica al momento de caer. Los valores de Δx_i y Δv_x se relacionan por el principio de incertidumbre. Una Δx_i pequeña produce una Δv_x grande, y viceversa. Determine el valor de Δx_i que produzca una incertidumbre total mínima en x al llegar al piso. Desprecie todos los efectos de la resistencia del aire).

Respuestas

Pregunta de inicio de capítulo 

El detalle visible más pequeño en una imagen es comparable con la longitud de onda utilizada para formar la imagen. Los electrones fácilmente pueden adquirir un momento lineal grande p y, por lo tanto, una longitud de onda corta $\lambda = h/p$, por lo que sirven para mostrar detalles extremadamente pequeños. (Véase la sección 39.1).

Preguntas de las secciones

Evalúe su comprensión

39.1 Respuestas: *a*) i, *b*) no De acuerdo con el ejemplo 39.2, la rapidez de una partícula es $v = h/\lambda m$ y la energía cinética es $K = \frac{1}{2}mv^2 = (m/2)(h/\lambda m)^2 = h^2/2\lambda^2 m$. Esto demuestra que para determinada longitud de onda, la energía cinética es inversamente proporcional a la masa. Por lo tanto, el protón, que tiene menor masa, tiene más energía cinética que el neutrón. Para el inciso *b*), la energía de un fotón es $E = hf$ y la frecuencia del fotón es $f = c/\lambda$. Por consiguiente, $E = hc/\lambda$ y $\lambda = hc/E = (4.136 \times 10^{-15}\ \text{eV}\cdot\text{s})(2.998 \times 10^8\ \text{m/s})/(54\ \text{eV}) = 2.3 \times 10^{-8}$ m. Es más de 100 veces mayor que la longitud de onda de un electrón con la misma energía. Mientras que los fotones y los electrones manifiestan propiedades ondulatorias, tienen distintas relaciones entre su energía y su momento lineal y, en consecuencia, entre su energía y su longitud de onda.

39.2 Respuesta: iii. Debido a que la partícula alfa es más masiva, no rebotará ni siquiera en un choque frontal con un protón que está inicialmente en reposo, no más de lo que rebotaría un bolo de boliche al chocar con una pelota de ping-pong en reposo (véase la figura 8.22*b*). Por lo tanto, en este caso *no* habría una dispersión de gran ángulo. Rutherford vio la dispersión de un gran ángulo en su experimento porque los núcleos de oro son más masivos que las partículas alfa (véase la figura 8.22*a*).

39.3 Respuesta: iv. La figura 39.27 muestra que muchos (aunque *no* todos) de los niveles de energía del He^+ son los mismos que los de H. Por lo tanto, los fotones emitidos durante las transiciones entre los correspondientes pares de niveles de He^+ y H tienen la misma energía E y la misma longitud de onda $\lambda = hc/E$. Un átomo de H que decae del nivel $n = 2$ al nivel $n = 1$ emite un fotón de energía de 10.20 eV y longitud de onda de 122 nm (véase el ejemplo 39.6); un ion He^+ emite un fotón de la misma energía y longitud de onda cuando decae del nivel $n = 4$ al nivel $n = 2$. Al inspeccionar la figura 39.27, encontrará que cada nivel con numeración par en He^+ coincide con un nivel de H, mientras que ninguno de los niveles impares de He^+ lo hacen. Las primeras tres transiciones descritas en la pregunta ($n = 2$ a $n = 1$, $n = 3$ a $n = 2$ y $n = 4$ a $n = 3$) implican un nivel con numeración impar, por lo que ninguna de sus longitudes de onda concuerda con una longitud de onda emitida por los átomos de H.

39.4 Respuesta: i. En un letrero de neón, se aplica una gran diferencia de potencial entre los extremos de un tubo de vidrio lleno de neón. Esto hace que se ionicen algunos de los átomos de neón y permiten el paso de una corriente de electrones por el gas. Algunos de los átomos de neón son golpeados por electrones en movimiento rápido haciendo la transición a un nivel excitado. Desde este nivel, los átomos experimentan emisión *espontánea*, como se muestra en la figura 39.28*b* y emiten fotones de 632.8 nm en el proceso. No se produce inversión de población, y los fotones no quedan atrapados por los espejos que se muestran en la figura 39.29*d*, por lo que no hay emisión estimulada. Por todo lo anterior, no hay acción láser.

39.5 Respuestas: *a*) sí, *b*) sí La ley de radiación de Planck, ecuación (39.24), indica que un cuerpo negro ideal emite radiación en *todas* las longitudes de onda: la emitancia espectral $I(\lambda)$ es cero solo cuando $\lambda = 0$, y en el límite $\lambda \to \infty$. Entonces, un cuerpo negro a 2000 K sí emite tanto rayos x como ondas de radio. Sin embargo, la figura 39.32 muestra que la emitancia espectral a esta temperatura es muy baja para longitudes de onda mucho menores que 1 μm (incluyendo los rayos x) y para longitudes de onda mucho mayores que unos cuantos μm (incluyendo las ondas de radio). Por lo anterior, ese cuerpo negro emite muy pocos rayos x u ondas de radio.

39.6 Respuesta: i y iii (empate), ii y iv (empate) De acuerdo con el principio de incertidumbre de Heisenberg, cuanto menor sea la incertidumbre Δx en la coordenada x, mayor será la incertidumbre Δp_x en la componente x del momento lineal. La relación entre Δx y Δp_x no depende de la masa de la partícula, y de esta manera es la misma para un protón que para un electrón.

Problema práctico

Respuestas: ***a*)** 192 nm; ultravioleta ***b*)** $n = 4$

***c*)** $\lambda_2 = 0.665$ nm, $\lambda_3 = 0.997$ nm

40 MECÁNICA CUÁNTICA



? Estos recipientes contienen una solución de partículas semiconductoras microscópicas de diferentes tamaños. Las partículas brillan cuando se exponen a la luz ultravioleta. ¿Por qué las partículas más pequeñas (a la izquierda) brillan en azul, en tanto que las partículas más grandes (a la derecha) brillan en rojo?

OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

Al estudiar este capítulo, usted aprenderá:

- Acerca de la función de onda que describe el comportamiento de la partícula y la ecuación de Schrödinger que debe satisfacer esta función.
- Cómo calcular las funciones de onda y los niveles de energía de una partícula confinada a una caja.
- Cómo analizar el comportamiento mecánico-cuántico de la partícula en un pozo de potencial.
- Cómo la mecánica cuántica hace posible que las partículas lleguen a donde la mecánica newtoniana indica que no llegan.
- Cómo utilizar la mecánica cuántica para analizar un oscilador armónico.

En el capítulo 39 vimos que a veces las partículas se comportan como ondas. De hecho, resulta que podemos usar el modelo ondulatorio para describir completamente el comportamiento de la partícula. Este método, llamado *mecánica cuántica*, es la clave para entender el comportamiento de la materia a escala molecular, atómica y nuclear. En este capítulo vamos a ver cómo encontrar la *función de onda* de una partícula mediante la resolución de la *ecuación de Schrödinger*, que es tan fundamental en la mecánica cuántica como lo son las leyes de Newton en la mecánica clásica o las ecuaciones de Maxwell en electromagnetismo.

Vamos a comenzar con un análisis de la mecánica cuántica de una *partícula libre* que se mueve a lo largo de una línea recta sin que actúen fuerzas de ningún tipo. Después, consideraremos que las partículas actúan en función de las fuerzas y se encuentran atrapadas en los *estados confinados*, de la misma manera que los electrones están ligados a un átomo. Veremos que al resolver la ecuación de Schrödinger automáticamente se obtienen los niveles de energía para el sistema.

Además de las energías, al resolver la ecuación de Schrödinger se obtienen las probabilidades de encontrar la partícula en diversas regiones. Un resultado sorprendente es que hay una probabilidad diferente de cero de que las partículas microscópicas pasen a través de barreras delgadas, a pesar de que este proceso está prohibido por la mecánica newtoniana.

En este capítulo vamos a considerar la ecuación de Schrödinger solamente para el movimiento unidimensional. En el capítulo 41 veremos cómo extender esta ecuación a problemas en tres dimensiones, tales como el átomo de hidrógeno. Las funciones de onda del átomo de hidrógeno, a la vez, constituyen la base de nuestro análisis de los átomos más complejos, de la tabla periódica de los elementos, de los niveles de energía de rayos x y de otras propiedades de los átomos.



PhET: Fourier: Making Waves

40.1 Funciones de onda y la ecuación de Schrödinger unidimensional

Ya hemos visto pruebas convincentes de que a una escala atómica o subatómica, un objeto, como un electrón, no se puede describir simplemente como una partícula puntual clásica, newtoniana. En vez de ello, hay que tener en cuenta las características de

las *ondas*. En el modelo de Bohr del átomo de hidrógeno (sección 39.3) hemos tratado de considerar ambos aspectos: representar al electrón como una partícula clásica en una órbita circular alrededor del núcleo, y utilizar la relación de De Broglie entre momento lineal de una partícula y la longitud de onda para explicar por qué en las órbitas solo se permiten ciertos radios. Sin embargo, como vimos en la sección 39.6, el principio de incertidumbre de Heisenberg nos dice que la descripción híbrida de este tipo no es totalmente correcta. En esta sección vamos a explorar cómo describir el estado de una partícula utilizando *solamente* el lenguaje de ondas. Esta nueva descripción, llamada **mecánica cuántica**, sustituirá al esquema clásico de descripción del estado de la partícula con sus coordenadas y componentes de la velocidad.

El nuevo esquema de la mecánica cuántica para describir la partícula tiene mucho en común con el lenguaje del movimiento ondulatorio clásico. En la sección 15.3 del capítulo 15 (vol. 1), describimos las ondas transversales en una cuerda especificando la posición de cada punto de la cuerda en cada instante por medio de la *función de onda* $y(x, t)$ que representa el desplazamiento del equilibrio, en el tiempo t, de un punto en la cuerda que está a una distancia x del origen (figura 40.1). Una vez que conocemos la función de onda para el movimiento de una onda dada, sabemos todo lo que hay que saber acerca del movimiento. Por ejemplo, podemos encontrar la velocidad y la aceleración de cualquier punto de la cuerda en cualquier momento. Trabajamos en formas específicas de estas funciones para ondas *sinusoidales*, en las que cada partícula experimenta un movimiento armónico simple.

40.1 Estos niños utilizan un "teléfono" formado por un vaso y una cuerda para conversar. El desplazamiento de la cuerda está descrito por completo por una función de onda $y(x, t)$. Asimismo, una partícula está descrita plenamente por la función de onda mecánico-cuántica $\Psi(x, y, z, t)$.



Hemos seguido un patrón similar para las ondas de sonido en el capítulo 16 (vol. 1). La función de onda $p(x, t)$ para una onda que viaja a lo largo de la dirección x representaba la variación de la presión en cualquier punto x y cualquier tiempo t. Se utilizó este lenguaje una vez más en la sección 32.3, donde se emplearon *dos* funciones de onda para describir los campos eléctrico y magnético de una onda electromagnética.

Por lo tanto, es natural utilizar la función de onda en el elemento central de nuestro nuevo lenguaje de la mecánica cuántica. El símbolo habitual para esta función de onda es la letra griega psi, Ψ o ψ. En general, vamos a utilizar una Ψ mayúscula para denotar una función de todas las coordenadas de espacio y tiempo, y la ψ minúscula como una función solo de las coordenadas espaciales, *no* del tiempo. Al igual que la función de onda $y(x, t)$ para las ondas mecánicas en una cuerda ofrece una descripción completa del movimiento, la función de onda $\Psi(x, y, z, t)$ para una partícula contiene toda la información que se puede saber acerca de la partícula.

CUIDADO **Ondas de partículas contra ondas mecánicas** A diferencia de las ondas mecánicas en una cuerda o las ondas de sonido en el aire, la función de onda para una partícula *no* es una onda mecánica que necesite algún medio para propagarse. La función de onda describe la partícula, pero no podemos definir la función en sí misma en términos de algo material. Solo podemos describir cómo se relaciona con los efectos físicamente observables.

Ondas en una dimensión

La función de onda de una partícula depende, en general, de las tres dimensiones espaciales. Sin embargo, por sencillez, vamos a comenzar nuestro estudio de estas funciones considerando el movimiento *unidimensional*, en el que una partícula de masa m se mueve paralelamente al eje x, y la función de onda Ψ solo depende de la coordenada x y del tiempo t. (De la misma manera, estudiamos cinemática en una dimensión en el capítulo 2 (vol. 1) antes de estudiar el movimiento en dos y tres dimensiones en el capítulo 3 (vol. 1).

¿A qué se parece una onda de mecánica cuántica unidimensional, y qué determina sus propiedades? Podemos responder a esta pregunta recordando en primer lugar las propiedades de la onda en la cuerda. Ya vimos en la sección 15.3 (vol. 1) que cualquier función de onda $y(x, t)$ que describe una onda en la cuerda debe satisfacer la *ecuación de onda*:

$$\frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} \quad \text{(ecuación de onda para ondas en una cuerda)} \tag{40.1}$$

En la ecuación (40.1) v es la velocidad de la onda, que es la misma sin importar la longitud de onda. Como ejemplo, considere la siguiente función de onda para una

onda de longitud de onda λ y frecuencia f que se mueve en la dirección positiva x a lo largo de una cuerda

$$y(x, t) = A\cos(kx - \omega t) + B\,\text{sen}(kx - \omega t) \quad \text{(onda sinusoidal en una cuerda)} \tag{40.2}$$

Aquí, $k = 2\pi/\lambda$ es el *número de onda* y $\omega = 2\pi f$ es la *frecuencia angular*. (Se utilizaron estas mismas cantidades para ondas mecánicas en el capítulo 15 (vol. 1) y las ondas electromagnéticas en el capítulo 32). Las cantidades A y B son constantes que determinan la amplitud y la fase de la onda. La expresión en la ecuación (40.2) es una función de onda válida si y solo si satisface la ecuación de onda, ecuación (40.1). Para comprobarlo, tome la primera y segunda derivadas de $y(x, t)$ con respecto a x y tome la primera y segunda derivadas con respecto a t:

$$\frac{\partial y(x, t)}{\partial x} = -kA\,\text{sen}(kx - \omega t) + kB\cos(kx - \omega t) \tag{40.3a}$$

$$\frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} = -k^2A\cos(kx - \omega t) - k^2B\,\text{sen}(kx - \omega t) \tag{40.3b}$$

$$\frac{\partial y(x, t)}{\partial t} = \omega A\,\text{sen}(kx - \omega t) - \omega B\cos(kx - \omega t) \tag{40.3c}$$

$$\frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} = -\omega^2A\cos(kx - \omega t) - \omega^2B\,\text{sen}(kx - \omega t) \tag{40.3d}$$

Si sustituimos las ecuaciones (40.3*b*) y (40.3*d*) en la ecuación de onda, ecuación (40.1), obtenemos

$$-k^2A\cos(kx - \omega t) - k^2B\,\text{sen}(kx - \omega t) = \frac{1}{v^2}\left[-\omega^2A\cos(kx - \omega t) - \omega^2B\,\text{sen}(kx - \omega t)\right] \tag{40.4}$$

Para que se satisfaga la ecuación 40.4 en todas las coordenadas x y en todo tiempo t, los coeficientes de la función coseno deben ser iguales en ambos lados de la ecuación, del mismo modo que los coeficientes de la función seno. Como se observa, las dos condiciones se cumplen si

$$k^2 = \frac{\omega^2}{v^2} \quad \text{o} \quad \omega = vk \quad \text{(ondas en una cuerda)} \tag{40.5}$$

De acuerdo con las definiciones de la frecuencia angular ω y número de onda k, la ecuación (40.5) es equivalente a

$$2\pi f = v\frac{2\pi}{\lambda} \quad \text{o} \quad v = \lambda f \quad \text{(ondas en una cuerda)}$$

Esta ecuación es la conocida relación entre velocidad de onda, longitud de onda y la frecuencia de las ondas en una cuerda. Así que nuestro cálculo indica que la ecuación (40.2) es válida para la función de onda de las ondas en una cuerda para cualquier valor de A y B, suponiendo que ω y k están relacionadas por la ecuación (40.5).

Lo que necesitamos es una versión cuántica de la ecuación de onda, ecuación (40.1), que sea válida para ondas de partículas. Esperamos que esta ecuación implique derivadas parciales de la función de onda $\Psi(x, t)$ con respecto a x y a t. Sin embargo, esta nueva ecuación *no puede* ser la misma que la ecuación (40.1) para ondas en una cuerda, debido a que la relación entre ω y k es diferente. Podemos demostrar esto considerando una **partícula libre**, que no experimenta ninguna fuerza mientras se mueve a lo largo del eje x. Para esta partícula, la energía potencial $U(x)$ tiene el mismo valor para toda x (recuerde del capítulo 7 (vol. 1) que $F_x = -dU(x)/dx$, de manera que fuerza cero significa que la energía potencial tiene derivada cero). Para simplificar, sea $U = 0$ para toda x. Entonces, la energía de la partícula libre es igual a su energía cinética, que se expresa en términos de su momento lineal p:

$$E = \tfrac{1}{2}mv^2 = \frac{m^2v^2}{2m} = \frac{(mv)^2}{2m} = \frac{p^2}{2m} \quad \text{(energía de una partícula libre)} \tag{40.6}$$

Las relaciones de De Broglie que introdujimos en la sección 39.1 nos dicen que la energía E es proporcional a la frecuencia angular ω, y el momento lineal p es proporcional al número de onda:

$$E = hf = \frac{h}{2\pi}2\pi f = \hbar\omega \qquad (40.7a)$$

$$p = \frac{h}{\lambda} = \frac{h}{2\pi}\frac{2\pi}{\lambda} = \hbar k \qquad (40.7b)$$

Recuerde que $\hbar = h/2\pi$. Si sustituimos las ecuaciones (40.7) en la ecuación (40.6), encontramos que la relación entre ω y k para una partícula libre es

$$\hbar\omega = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \quad \text{(partícula libre)} \qquad (40.8)$$

La ecuación (40.8) es *muy* diferente de la relación correspondiente para las ondas en una cuerda, ecuación (40.5): la frecuencia angular ω para ondas de partículas es proporcional al *cuadrado* del número de onda, mientras que para ondas en una cuerda ω es directamente proporcional a k. Nuestra tarea consiste, por lo tanto, en construir una versión mecánico-cuántica de la ecuación de onda cuyas soluciones de partícula libre satisfagan la ecuación (40.8).

Vamos a enfrentar este problema suponiendo una función de onda sinusoidal $\Psi(x, t)$ de la misma forma que la ecuación (40.2) para una onda sinusoidal en una cuerda. Para una onda en una cuerda, la ecuación (40.2) representa una onda de longitud de onda $\lambda = 2\pi/k$, y la frecuencia $f = \omega/2\pi$ se propaga en la dirección x positiva. Por analogía, nuestra función de onda $\Psi(x, t)$ representa una partícula libre de masa m, momento lineal $p = \hbar k$, y energía $E = \hbar\omega$, que se mueve en la dirección x positiva:

$$\Psi(x, t) = A\cos(kx - \omega t) + B\,\text{sen}(kx - \omega t) \quad \text{(función de onda sinusoidal que representa una partícula libre)} \qquad (40.9)$$

El número de onda k y la frecuencia angular ω de la ecuación (40.9) debe satisfacer la ecuación (40.8). Si observa la ecuación (40.3*b*), verá que al tomar la segunda derivada de $\Psi(x, t)$ en la ecuación (40.9) con respecto a x nos da $\Psi(x, t)$ multiplicada por $-k^2$. Por lo tanto, si multiplicamos $\partial^2\Psi(x, t)/\partial x^2$ por $-\hbar^2/2m$, obtenemos

$$\begin{aligned}
-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\Psi(x, t)}{\partial x^2} &= -\frac{\hbar^2}{2m}\left[-k^2 A\cos(kx - \omega t) - k^2 B\,\text{sen}(kx - \omega t)\right] \\
&= \frac{\hbar^2 k^2}{2m}\left[A\cos(kx - \omega t) + B\,\text{sen}(kx - \omega t)\right] \qquad (40.10) \\
&= \frac{\hbar^2 k^2}{2m}\Psi(x, t)
\end{aligned}$$

La ecuación (40.10) sugiere que $(-\hbar^2/2m)\partial^2\Psi(x, t)/\partial x^2$ debe ser un lado de nuestra ecuación de onda de la mecánica cuántica, con el otro lado igual a $\hbar\omega\Psi(x, t)$ con la finalidad de satisfacer la ecuación (40.8). Si observa la ecuación (40.3*c*), verá que tomar la *primera* derivada de $\Psi(x, t)$ en la ecuación (40.9) le conduce a factorizar ω. Así que haremos la conjetura de que el lado derecho de nuestra ecuación de onda de mecánica cuántica implica multiplicar $\hbar = h/2\pi$ por $\partial\Psi(x, t)/\partial t$. De esta forma, nuestra ecuación provisional es

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\Psi(x, t)}{\partial x^2} = C\hbar\frac{\partial\Psi(x, t)}{\partial t} \qquad (40.11)$$

En este punto se incluye una constante C como un "factor conveniente" para asegurar que todo está bien. Ahora vamos a sustituir la función de onda de la ecuación (40.9) en la (40.11). De las ecuaciones (40.10) y (40.3*c*), obtenemos

$$\frac{\hbar^2 k^2}{2m}[A\cos(kx-\omega t)+B\,\text{sen}(kx-\omega t)]$$
$$= C\hbar\omega[A\,\text{sen}(kx-\omega t)-B\cos(kx-\omega t)] \quad (40.12)$$

De la ecuación (40.8), $\hbar\omega = \hbar^2 k^2/2m$, por lo que es posible eliminar estos factores en los dos lados de la ecuación (40.12). Lo que queda es

$$A\cos(kx-\omega t)+B\,\text{sen}(kx-\omega t) = CA\,\text{sen}(kx-\omega t) - CB\cos(kx-\omega t) \quad (40.13)$$

Al igual que en nuestro análisis anterior de la ecuación de onda para las ondas en una cuerda, para que todos los valores de x y de t satisfagan la ecuación (40.13), los coeficientes de la función coseno deben ser iguales en ambos lados de la ecuación, y también los coeficientes de la función seno. Por lo tanto, tenemos las siguientes relaciones entre los coeficientes A y B en la ecuación (40.9) y el coeficiente C en la ecuación (40.11):

$$A = -CB \quad (40.14a)$$

$$B = CA \quad (40.14b)$$

Si utilizamos la ecuación (40.14*b*) para eliminar B de la ecuación (40.14*a*), obtenemos $A = -C^2A$, lo que significa que $C^2 = -1$. Así, C es igual al número *imaginario*, $i = \sqrt{-1}$, y la ecuación (40.11) se convierte en

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\Psi(x,t)}{\partial x^2} = i\hbar\frac{\partial\Psi(x,t)}{\partial t} \quad \text{(ecuación de Schrödinger unidimensional)} \quad (40.15)$$

La ecuación (40.15) es la **ecuación de Schrödinger** unidimensional para una partícula libre, desarrollada en 1926 por el físico austriaco Erwin Schrödinger (figura 40.2). La presencia del número imaginario i en la ecuación (40.15) significa que las soluciones de la ecuación de Schrödinger son cantidades complejas con una parte real y una parte imaginaria. (La parte imaginaria de $\Psi(x, t)$ es una función real multiplicada por el número imaginario $i = \sqrt{-1}$). Un ejemplo es nuestra función de onda de partícula libre de la ecuación (40.9). Ya que hemos encontrado $C = i$ en las ecuaciones (40.14), se deduce de la ecuación (40.14*b*) que $B = iA$. Entonces la ecuación (40.9) será

$$\Psi(x,t) = A[\cos(kx-\omega t)+i\,\text{sen}(kx-\omega t)] \quad \text{(función de onda sinusoidal que representa una partícula libre)} \quad (40.16)$$

La parte real de $\Psi(x, t)$ es $\text{Re}\Psi(x, t) = A\cos(kx - \omega t)$ y la parte imaginaria es $\text{Im}\,\Psi(x, t) = A\,\text{sen}(kx - \omega t)$. La figura 40.3 representa gráficamente las partes real e imaginaria de $\Psi(x, t)$ en $t = 0$, así que $\Psi(x, 0) = A\cos kx + iA\,\text{sen}\,kx$.

Podemos reescribir la ecuación (40.16) usando la *fórmula de Euler*, la cual establece que para cualquier ángulo θ,

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta$$
$$e^{-i\theta} = \cos(-\theta) + i\,\text{sen}(-\theta) = \cos\theta - i\,\text{sen}\,\theta \quad (40.17)$$

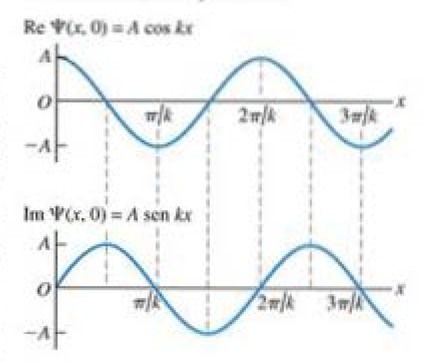
Así, nuestra función de onda sinusoidal de partícula libre se convierte en

$$\Psi(x,t) = Ae^{i(kx-\omega t)} = Ae^{ikx}e^{-i\omega t} \quad \text{(función de onda sinusoidal que representa una partícula libre)} \quad (40.18)$$

40.2 Erwin Schrödinger (1887-1961) desarrolló en 1926 la ecuación que lleva su nombre, un logro por el que compartió (con el físico británico P. A. M. Dirac) el Premio Nobel de Física en 1933. La lápida de su tumba tiene inscrita una gran letra ψ.



Si k es positiva en la ecuación (40.16), la función de onda representa una partícula libre en movimiento en la dirección x positiva con momento lineal $p = \hbar k$ y energía $E = \hbar\omega = \hbar^2k^2/2m$. Si k es negativa, el momento lineal y, por lo tanto, el movimiento están en la dirección x negativa. (Con un valor negativo de k, la longitud de onda es $\lambda = 2\pi/|k|$).



40.3 La función de onda espacial $\Psi(x, t) = Ae^{i(kx-\omega t)}$ para una partícula libre con momento lineal definido $p = \hbar k$ es una función compleja: tiene tanto parte real como parte imaginaria. Estos se representan aquí como funciones de x para $t = 0$.

Interpretación de la función de onda

La naturaleza compleja de la función de onda para una partícula libre hace que esta función sea difícil de interpretar. (Por cierto, hasta ahora no habíamos necesitado números imaginarios para describir fenómenos físicos reales). Ahora analicemos esta función: $\Psi(x, t)$ describe la *distribución* de una partícula en el espacio, así como las funciones de onda electromagnética describen la distribución de los campos eléctrico y magnético. Cuando estudiamos los patrones de interferencia y difracción en los capítulos 35 y 36, vimos que la intensidad I de la radiación en cualquier punto de dichos patrones es proporcional al cuadrado de la magnitud del campo eléctrico, esto es, a E^2. En la interpretación de la interferencia y difracción de fotones (véase la sección 38.4), la intensidad en cada punto es proporcional a la cantidad de fotones que inciden en torno de ese punto o, también, a la *probabilidad* de que algún fotón individual llegue cerca de ese punto. Así, el cuadrado de la magnitud del campo eléctrico en cada punto es proporcional a la probabilidad de encontrar un fotón cerca de ese punto.

Exactamente de esa misma forma, el cuadrado de la función de onda de una partícula en cada punto nos indica la probabilidad de encontrar la partícula cerca de ese punto. Con más precisión, deberíamos decir el cuadrado del *valor absoluto* de la función de onda, $|\Psi|^2$. Esto es necesario porque, como ya vimos, la función de onda es una cantidad compleja con partes real e imaginaria.

Para una partícula que se mueve solo a lo largo de la dirección x, la cantidad $|\Psi(x, t)|^2\,dx$ muestra la probabilidad de que la partícula se encuentre, en el tiempo t, en una coordenada en el intervalo de x a $x + dx$. Es más probable que la partícula se encuentre en regiones donde $|\Psi|^2$ sea grande, etcétera. Esta interpretación, hecha por primera vez por el físico alemán Max Born (figura 40.4), requiere que la función de onda Ψ esté *normalizada*. Es decir, que la integral de $|\Psi(x, t)|^2\,dx$ sobre todos los valores posibles de x debe ser exactamente igual a 1. En otras palabras, la probabilidad de que la partícula esté *en algún lugar* es exactamente 1, o equivalente a 100 por ciento.

40.4 En 1926 el físico alemán Max Born (1882-1970) desarrolló la interpretación para $|\Psi|^2$ que corresponde a la función de distribución de probabilidad para una partícula que está descrita por la función de onda Ψ. También acuñó el término "mecánica cuántica" (originalmente en alemán, *Quantenmechanik*). Por sus contribuciones, Born compartió con Walter Bothe el Premio Nobel de Física en 1954.



CUIDADO **Interpretación de $|\Psi|^2$** Observe que $|\Psi(x, t)|^2$ *no* es una probabilidad en sí misma. Más bien, $|\Psi(x, t)|^2\,dx$ es la probabilidad de encontrar la partícula entre la posición x y la posición $x + dx$ al tiempo t. Si la longitud dx es más pequeña, se hace menos probable que la partícula se encuentre dentro de esa longitud, es decir, disminuye la probabilidad. Un nombre adecuado de $|\Psi(x, t)|^2$ es **función de distribución de probabilidad**, ya que describe la forma en que está distribuida en el espacio la probabilidad de encontrar la partícula en distintos lugares. Otro nombre común para $|\Psi(x, t)|^2$ es *densidad de probabilidad*.

Podemos utilizar la interpretación de la probabilidad de $|\Psi|^2$ para obtener una mejor comprensión de la ecuación (40.18), la función de onda para una partícula libre. Esta función describe una partícula que tiene un momento lineal definido $p = \hbar k$ en la dirección x y *cero* incertidumbre en el momento lineal: $\Delta p_x = 0$. El principio de incertidumbre de Heisenberg para la posición y el momento lineal, ecuación (39.29), dice que $\Delta x\,\Delta p_x \geq \hbar/2$. Si Δp_x es cero, entonces Δx debe ser infinita, lo que implica que no tenemos idea de dónde se pueda encontrar la partícula a lo largo del eje x. (Vimos un resultado similar para los fotones en la sección 38.4). Podemos demostrar esto mediante el cálculo de la función de distribución de probabilidad $|\Psi(x, t)|^2$. Esta es el producto de Ψ y de su *complejo conjugado* Ψ^*. Para encontrar el complejo conjugado de un número complejo, simplemente se sustituye toda i con $-i$. Por ejemplo, el complejo conjugado de $c = a + ib$ donde a y b son reales, es $c^* = a - ib$, así que $|c|^2 = c^*c = (a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2$ (recuerde que $i^2 = -1$). El complejo conjugado de la ecuación (40.18) es

$$\Psi^*(x, t) = A^*e^{-i(kx-\omega t)} = A^*e^{-ikx}e^{i\omega t}$$

(Hay que considerar la posibilidad de que el coeficiente A sea en sí mismo un número complejo). Por lo tanto, la función de distribución de probabilidad es

$$|\Psi(x,t)|^2 = \Psi^*(x,t)\Psi(x,t) = (A^* e^{-ikx}e^{i\omega t})(Ae^{ikx}e^{-i\omega t})$$
$$= A^*Ae^0 = |A|^2$$

La función de distribución de probabilidad no depende de la posición; ¡tenemos la misma probabilidad para encontrar la partícula en *cualquier lugar* a lo largo del eje x! Matemáticamente, esto se debe a que la función de onda $\Psi(x, t) = Ae^{i(kx-\omega t)} = A[\cos(kx - \omega t) + i\,\text{sen}(kx - \omega t)]$ es una función sinusoidal que se extiende a todas partes desde $x = -\infty$ hasta $x = +\infty$ con la misma amplitud A. Esto significa también que la función de onda no se puede normalizar: la integral de $|\Psi(x, t)|^2$ sobre todo el espacio sería infinita para cualquier valor de A.

Observe también que la función de onda en la ecuación (40.18) describe una partícula con una energía definida $E = \hbar\omega$, por lo que la incertidumbre en energía es cero: $\Delta E = 0$. El principio de incertidumbre de Heisenberg para el intervalo de tiempo y de energía, $\Delta t\,\Delta E \geq \hbar$ [ecuación (39.30)], nos dice que la incertidumbre en el tiempo para esta partícula es infinita. En otras palabras, no podemos tener una idea de *cuándo* la partícula pasa por el punto dado en el eje x. Esto también concuerda con nuestro resultado $|\Psi(x, t)|^2 = |A|^2$; la función de distribución de probabilidad tiene el mismo valor en todo momento.

Ya que siempre tenemos alguna idea de dónde está una partícula, la función de onda dada en la ecuación (40.18) no es una descripción realista. En nuestro estudio de la luz de la sección 38.4, vimos que se puede hacer que una función de onda esté más *localizada* en el espacio mediante la superposición de dos o más funciones sinusoidales. (Este sería un buen momento para repasar esa sección). A modo de ejemplo, vamos a calcular $|\Psi(x, t)|^2$ para una función de onda de este tipo.



Ejemplo 40.1 Una función de onda de una partícula libre localizada

La función de onda $\Psi(x, t) = Ae^{i(k_1x-\omega_1t)} + Ae^{i(k_2x-\omega_2t)}$ es una superposición de *dos* funciones de onda de partícula libre de la forma dada por la ecuación (40.18). Tanto k_1 como k_2 son positivas. *a*) Demuestre que esta función de onda satisface la ecuación de Schrödinger para una partícula libre de masa m. *b*) Determine la función de distribución de probabilidad para $\Psi(x, t)$.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Las dos funciones de onda $Ae^{i(k_1x-\omega_1t)}$ y $Ae^{i(k_2x-\omega_2t)}$ representan las partículas que se mueven en la dirección x positiva, pero con diferentes momentos lineales y energías cinéticas: $p_1 = \hbar k_1$ y $E_1 = \hbar\omega_1 = \hbar^2 k_1{}^2/2m$ para la primera función, $p_2 = \hbar k_2$ y $E_2 = \hbar\omega_2 = \hbar^2k_2{}^2/2m$ para la segunda función. Para demostrar si la superposición de estas es una función de onda válida también para la partícula libre, veamos si nuestra función $\Psi(x, t)$ satisface la ecuación de Schrödinger de partícula libre, ecuación (40.15). Es muy útil recordar las derivadas de la función exponencial: $(d/du)e^{au} = ae^{au}$ y $(d^2/du^2)e^{au} = a^2e^{au}$. La función de distribución de probabilidad $|\Psi(x, t)|^2$ es el producto de $\Psi(x, t)$ por su complejo conjugado.

EJECUTAR: *a*) Si sustituimos $\Psi(x, t)$ en la ecuación (40.15), el lado izquierdo de la ecuación es

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\Psi(x,t)}{\partial x^2} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2(Ae^{i(k_1x-\omega_1t)} + Ae^{i(k_2x-\omega_2t)})}{\partial x^2}$$
$$= -\frac{\hbar^2}{2m}[(ik_1)^2Ae^{i(k_1x-\omega_1t)} + (ik_2)^2Ae^{i(k_2x-\omega_2t)}]$$
$$= \frac{\hbar^2k_1{}^2}{2m}Ae^{i(k_1x-\omega_1t)} + \frac{\hbar^2k_2{}^2}{2m}Ae^{i(k_2x-\omega_2t)}$$

El lado derecho es

$$i\hbar\frac{\partial\Psi(x,t)}{\partial t} = i\hbar\frac{\partial(Ae^{i(k_1x-\omega_1t)} + Ae^{i(k_2x-\omega_2t)})}{\partial t}$$
$$= i\hbar[(-i\omega_1)Ae^{i(k_1x-\omega_1t)} + (-i\omega_2)Ae^{i(k_2x-\omega_2t)}]$$
$$= \hbar\omega_1Ae^{i(k_1x-\omega_1t)} + \hbar\omega_2Ae^{i(k_2x-\omega_2t)}$$

Los dos lados *son* iguales, suponiendo que $\hbar\omega_1 = \hbar^2k_1{}^2/2m$ y $\hbar\omega_2 = \hbar^2k_2{}^2/2m$. Estas son solo las relaciones que ya hemos observado. Por lo tanto, se concluye que $\Psi(x, t) = Ae^{i(k_1x-\omega_1t)} + Ae^{i(k_2x-\omega_2t)}$ es una función de onda de partícula libre. En general, si tomamos cualesquiera dos de las funciones de onda que son soluciones de la ecuación de Schrödinger, y luego realizamos una superposición de estas para crear una tercera función de onda $\Psi(x, t)$, entonces $\Psi(x, t)$ es también una solución de la ecuación de Schrödinger.

b) El conjugado complejo de $\Psi(x, t)$ es

$$\Psi^*(x,t) = A^*e^{-i(k_1x-\omega_1t)} + A^*e^{-i(k_2x-\omega_2t)}$$

Por consiguiente,

$$|\Psi(x,t)|^2$$
$$= \Psi^*(x,t)\Psi(x,t)$$
$$= (A^*e^{-i(k_1x-\omega_1t)} + A^*e^{-i(k_2x-\omega_2t)})(Ae^{i(k_1x-\omega_1t)} + Ae^{i(k_2x-\omega_2t)})$$
$$= A^*A\begin{bmatrix} e^{-i(k_1x-\omega_1t)}e^{i(k_1x-\omega_1t)} + e^{-i(k_2x-\omega_2t)}e^{i(k_2x-\omega_2t)} \\ + e^{-i(k_1x-\omega_1t)}e^{i(k_2x-\omega_2t)} + e^{-i(k_2x-\omega_2t)}e^{i(k_1x-\omega_1t)} \end{bmatrix}$$
$$= |A|^2[e^0 + e^0 + e^{i[(k_2-k_1)x-(\omega_2-\omega_1)t]} + e^{-i[(k_2-k_1)x-(\omega_2-\omega_1)t]}]$$

Para simplificar esta expresión, recuerde que $e^0 = 1$. A partir de la fórmula de Euler, $e^{i\theta} = \cos\theta + i\,\text{sen}\theta$ y $e^{-i\theta} = \cos\theta - i\,\text{sen}\theta$, así $e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2\cos\theta$. Por lo tanto,

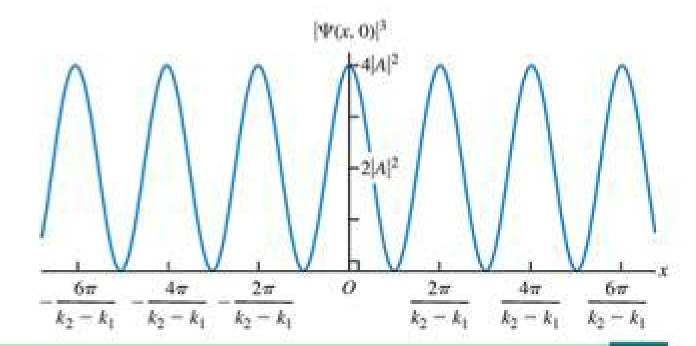
$$|\Psi(x,t)|^2 = |A|^2\{2 + 2\cos[(k_2 - k_1)x - (\omega_2 - \omega_1)t]\}$$
$$= 2|A|^2\{1 + \cos[(k_2 - k_1)x - (\omega_2 - \omega_1)t]\}$$

EVALUAR: La figura 40.5 es una gráfica de la función de distribución de probabilidad $|\Psi(x, t)|^2$ en $t = 0$. El valor de $|\Psi(x, t)|^2$ varía entre 0 y $4|A|^2$; ¡las probabilidades nunca pueden ser negativas! La partícula se ha convertido en *algo* localizado: es más probable que la partícula se encuentre cerca del punto donde $|\Psi(x, t)|^2$ es máxima (es decir, donde las funciones $Ae^{i(k_1x-\omega_1t)}$ y $Ae^{i(k_2x-\omega_2t)}$ interfieren constructivamente) y es muy improbable que se encuentre cerca del punto donde $|\Psi(x, t)|^2 = 0$ (ahí donde $Ae^{i(k_1x-\omega_1t)}$ y $Ae^{i(k_2x-\omega_2t)}$ interfieren destructivamente). Esto es muy similar al fenómeno de pulsos de las ondas de sonido (véase la sección 16.7).

Observe también que la función de distribución de probabilidad no es estacionaria, sino que se mueve en la dirección x positiva como la partícula que representa. Para ver esto, recuerde de la sección 15.3 (vol. 1) que una onda sinusoidal dada por $y(x, t) = A\cos(kx - \omega t)$ se mueve en la dirección x positiva con velocidad $v = \omega/k$; ya que $|\Psi(x, t)|^2$ incluye un término $\cos[(k_2 - k_1)x - (\omega_2 - \omega_1)t]$, la distribución de probabilidad se mueve a una velocidad $v_{prom} = (\omega_2 - \omega_1)/(k_2 - k_1)$. El subíndice "prom" nos recuerda que representa el valor *promedio* de la velocidad de la partícula.

El precio que pagamos por la localización de la partícula es que, a diferencia de la partícula representada por la ecuación (40.18), ya no tiene un momento lineal o una energía definidos. Esto es congruente con el principio de incertidumbre de Heisenberg: si disminuimos la incertidumbre acerca de dónde está la partícula y cuándo pasa por un punto dado, aumenta la incertidumbre en su momento lineal y en la energía.

El momento lineal promedio de la partícula es $p_{prom} = (Uk_2 + \hbar k_1)/2$, el promedio de los momentos lineales asociados con las funciones de onda de partícula libre que agregamos para crear $\Psi(x, t)$. Esto corresponde a una partícula con una velocidad promedio $v_{prom} = p_{prom}/m = (\hbar k_2 + \hbar k_1)/2m$. ¿Puede demostrar que esto es igual a la expresión $v_{prom} = (\omega_2 - \omega_1)/(k_2 - k_1)$ que encontramos antes?



40.5 La función de probabilidad de distribución en $t = 0$ para $\Psi(x, t) = Ae^{i(k_1x-\omega_1t)} + Ae^{i(k_2x-\omega_2t)}$.

Paquetes de ondas

La función de onda que examinamos en el ejemplo 40.1 no está muy bien localizada: la función de distribución de probabilidad aún se extiende de $x = -\infty$ a $x = +\infty$. Por lo tanto, esta función de onda tampoco se puede normalizar. Para hacer que una función de onda esté más localizada, considere que superpone dos ondas sinusoidales adicionales, con distintos números de onda y amplitudes, a modo de reforzar máximos alternos de $|\Psi(x, t)|^2$ en la figura 40.5 y anularse en las zonas intermedias. Por último, si sobreponemos ondas con una gran cantidad de números de onda distintos, podemos construir una onda con solo *un* máximo de $|\Psi(x, t)|^2$ (figura 40.6). Entonces, por último, tenemos algo que comienza a verse como una partícula y una onda, al mismo tiempo. Es una partícula en el sentido de estar localizada en el espacio; si la vemos desde cierta distancia, parecerá un punto. Pero también tiene una estructura periódica, que es característica de una onda.

A un pulso ondulatorio localizado como el que se muestra en la figura 40.6 se le llama **paquete de ondas**. Un paquete de ondas se representa por una ecuación como la siguiente:

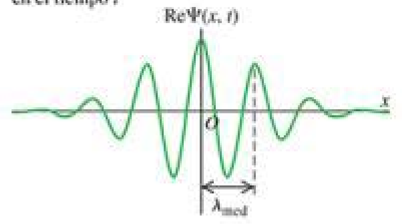
$$\Psi(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} A(k)e^{i(kx-\omega t)}\,dk \qquad (40.19)$$

Esta integral representa la superposición de una cantidad muy grande de ondas, cada una con un número de onda k distinto y frecuencia angular $\omega = \hbar k^2/2m$, y cada una con una amplitud $A(k)$ que depende de k.

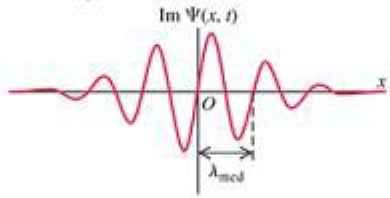
Hay una relación importante entre las dos funciones $\Psi(x, t)$ y $A(k)$, que se muestra en forma cualitativa en la figura 40.7. Si la función $A(k)$ tiene un máximo agudo, como en la figura 40.7*a*, solo estamos superponiendo un intervalo angosto de números de onda. El pulso ondulatorio que resulta es entonces relativamente ancho (figura 40.7*b*). Pero si usamos un intervalo más amplio de números de onda, para que la función de onda $A(k)$ sea más ancha (figura 40.7*c*), entonces el pulso ondulatorio tiene una localización

40.6 Superponer una gran cantidad de ondas sinusoidales con distintos números de onda y amplitudes adecuadas puede producir un pulso ondulatorio con longitud de onda $\lambda_{med} = 2\pi/k_{med}$ localizada en una región del espacio de longitud Δx. ¿Este pulso localizado es una partícula o una onda?

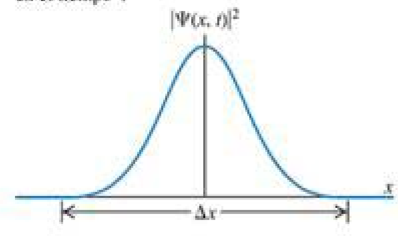
a) Parte real de la función de onda en el tiempo t



b) Parte imaginaria de la función de onda en el tiempo t



c) Función de distribución de probabilidad en el tiempo t



más angosta (figura 40.7*d*). Esto es simplemente el principio de incertidumbre en acción. Un intervalo angosto de k significa un intervalo angosto de $p_x = \hbar k$ y, por lo tanto, una Δp_x pequeña; el resultado es una Δx relativamente grande. Un intervalo amplio de k corresponde a una Δp_x grande, y la Δx resultante es menor. Así, vemos que el principio de incertidumbre $\Delta x \Delta p_x \geq \hbar/2$, es una consecuencia inevitable de las propiedades de las integrales, como la ecuación (40.19).

CUIDADO **Ondas materiales contra ondas de luz en el vacío** Podemos considerar un paquete de ondas que representa una partícula y un pulso corto de luz de láser como superposiciones de ondas de diferentes números de onda y frecuencias angulares. Una diferencia importante es que la rapidez de la luz en el vacío es la misma para todas las longitudes de onda λ y, por lo tanto, para todos los números de onda $k = 2\pi/\lambda$, pero la velocidad de una onda material es *distinta* para diferentes longitudes de onda. Esto se observa a partir de la fórmula de la velocidad de las crestas de las ondas en una onda periódica, $v = \lambda f = \omega/k$. Para una onda de materia, $\omega = \hbar k^2/2m$, así $v = \hbar k/2m = h/2m\lambda$. Por lo tanto, las ondas de materia con longitudes de onda mayores y números de onda menores viajan más lentamente que aquellas con longitudes de onda corta y grandes números de ondas. (Esto no debería sorprender. Las relaciones de De Broglie que aprendimos en la sección 39.1 nos dicen que a una longitud de onda más corta le corresponde un momento lineal mayor y una rapidez mayor). Puesto que cada onda sinusoidal que conforma un paquete de ondas viaja a diferentes rapideces, la forma del paquete cambia conforme se mueve. Por eso, hemos especificado el tiempo para el cual los paquetes de onda en las figuras 40.6 y 40.7 se dibujaron; en los últimos tiempos, los paquetes se vuelven más difusos. Por el contrario, un pulso de ondas de luz en el vacío conserva la misma forma en todo momento porque todas sus ondas sinusoidales constituyentes viajan en conjunto con la misma velocidad.

Ecuación de Schrödinger unidimensional con energía potencial

La ecuación de Schrödinger unidimensional que presentamos en la ecuación (40.15) es válida solo para partículas libres, para las que la función de energía potencial es cero: $U(x) = 0$. Pero para un electrón dentro de un átomo, el protón dentro de un núcleo atómico y muchas otras situaciones reales, la energía potencial desempeña un papel importante. Para estudiar el comportamiento de las ondas de materia en estas situaciones, necesitamos una versión de la ecuación de Schrödinger que describa una partícula que se mueve en presencia de una función de energía potencial $U(x)$ distinta de cero. Esta ecuación es

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\Psi(x,t)}{\partial x^2} + U(x)\Psi(x,t) = i\hbar\frac{\partial\Psi(x,t)}{\partial t} \qquad (40.20)$$

(ecuación de Schrödinger general unidimensional)

Observe que si $U(x) = 0$, la ecuación (40.20) se reduce a la ecuación de Schrödinger de partícula libre dada en la ecuación (40.15).

Esta es la motivación detrás de la ecuación (40.20). Si $\Psi(x, t)$ es una función de onda sinusoidal para una partícula libre $\Psi(x, t) = Ae^{i(kx-\omega t)} = Ae^{ikx}e^{-i\omega t}$, los términos derivados de la ecuación (40.20) serán

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\Psi(x,t)}{\partial x^2} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}(Ae^{ikx}e^{-i\omega t}) = -\frac{\hbar^2}{2m}(ik)^2(Ae^{ikx}e^{-i\omega t})$$

$$= \frac{\hbar^2k^2}{2m}\Psi(x,t)$$

$$i\hbar\frac{\partial\Psi(x,t)}{\partial t} = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}(Ae^{ikx}e^{-i\omega t}) = i\hbar(-i\omega)(Ae^{ikx}e^{-i\omega t}) = \hbar\omega\Psi(x,t)$$

En estas expresiones $(\hbar^2k^2/2m)\Psi(x, t)$ es la energía cinética $K = p^2/2m = \hbar^2k^2/2m$ multiplicada por la función de onda, y $\hbar\omega\Psi(x, t)$ es la energía total $E = \hbar\omega$ multiplicada por la función de onda. Así, para una función de onda de esta clase, la ecuación (40.20) dice que la energía cinética por $\Psi(x, t)$ más la energía potencial por $\Psi(x, t)$ es igual a la energía total por $\Psi(x, t)$. Esto es equivalente al enunciado en física clásica

que menciona que la suma de la energía cinética más la energía potencial es igual a la energía mecánica total: $K + U = E$.

Desde luego, las observaciones que hemos realizado no son una *prueba* de que la ecuación (40.20) es correcta. La verdadera razón por la que sabemos que esta ecuación *es* correcta es que funciona: las predicciones efectuadas con esta ecuación concuerdan con los resultados experimentales. En las secciones restantes de este capítulo vamos a aplicar la ecuación (40.20) para diferentes situaciones físicas, cada una con una forma diferente de la función $U(x)$.

Estados estacionarios

Ya vimos en nuestro análisis de los paquetes de onda que cualquier función de onda de partícula libre se puede construir como una superposición de funciones de onda sinusoidales de la forma $\Psi(x, t) = Ae^{ikx}e^{-i\omega t}$. Cada una de esas funciones de onda sinusoidal corresponde a un estado de energía definida $E = \hbar\omega = \hbar^2k^2/2m$ y frecuencia angular definida $\omega = E/\hbar$, por lo que estas funciones se pueden rescribir como $\Psi(x, t) = Ae^{ikx}e^{-iEt/\hbar}$. Si la función de energía potencial $U(x)$ no es cero, estas funciones de onda sinusoidal no satisfacen la ecuación de Schrödinger, ecuación (40.20), y así estas funciones no pueden ser los "constituyentes básicos" de funciones de onda más complicadas. Sin embargo, aún se puede escribir la función de onda para un estado de energía definida E en la forma

$$\Psi(x, t) = \psi(x)e^{-iEt/\hbar} \quad \text{(función de onda dependiente del tiempo para un estado de energía definida)} \tag{40.21}$$

Es decir, la función de onda $\Psi(x, t)$ para un estado de energía definida es el producto de la función de onda *independiente del tiempo* $\psi(x)$ y un factor $e^{-iEt/\hbar}$. (Para la función de onda sinusoidal de partícula libre, $\psi(x) = Ae^{ikx}$). Los estados de energía definida son de enorme importancia en la mecánica cuántica. Por ejemplo, para cada nivel de energía en el átomo de hidrógeno (sección 39.3), hay una función de onda específica. Es posible que un átomo se encuentre en un estado que no tiene una energía definida. La función de onda de dicho estado se expresa como una combinación de funciones de onda de energía definida, exactamente de la misma manera que el paquete de onda de partícula libre se expresa como una superposición de funciones de onda sinusoidal de energía definida como en la ecuación (40.19).

A un estado de energía definida comúnmente se le llama **estado estacionario**. Para ver de dónde proviene este nombre, vamos a multiplicar la ecuación (40.21) por su complejo conjugado con la finalidad de encontrar la función de distribución de probabilidad $|\Psi|^2$:

$$\begin{aligned} |\Psi(x, t)|^2 &= \Psi^*(x, t)\Psi(x, t) = [\psi^*(x)e^{+iEt/\hbar}][\psi(x)e^{-iEt/\hbar}] \\ &= \psi^*(x)\psi(x)e^{(+iEt/\hbar)+(-iEt/\hbar)} = |\psi(x)|^2e^0 \\ &= |\psi(x)|^2 \end{aligned} \tag{40.22}$$

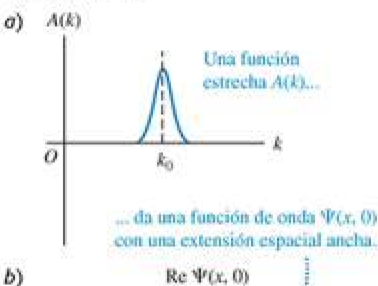
Ya que $|\psi(x)|^2$ no depende del tiempo, la ecuación (40.22) muestra que lo mismo debe ser válido para la función de distribución de probabilidad $|\Psi(x, t)^2|$. Esto justifica el término "estado estacionario" para un estado de energía definida.

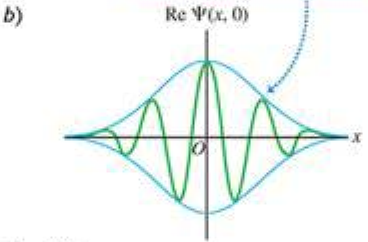
CUIDADO **Un estado estacionario no significa una partícula estacionaria** El nombre *estado estacionario* tal vez nos induzca a pensar que la partícula no está en movimiento si se describe por una función de onda. Este no es el caso. Es la *distribución de probabilidad* (es decir, la probabilidad relativa de encontrar la partícula en diferentes posiciones), y no la partícula en sí, la que es estacionaria.

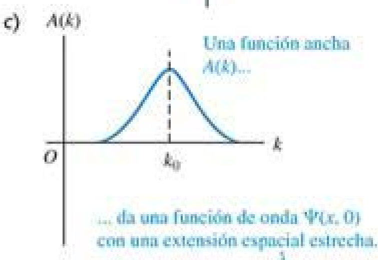
La ecuación de Schrödinger, ecuación (40.20), se simplifica un poco para estados estacionarios. Para ver esto, sustituimos la ecuación (40.21) en la ecuación (40.20):

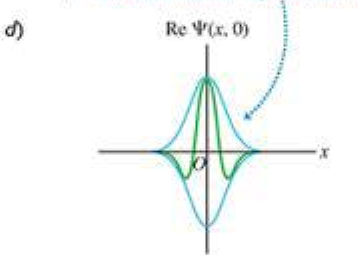
$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2[\psi(x)e^{-iEt/\hbar}]}{\partial x^2} + U(x)\psi(x)e^{-iEt/\hbar} = i\hbar\frac{\partial[\psi(x)e^{-iEt/\hbar}]}{\partial t}$$

40.7 Como la función $A(k)$ varía en la expresión del paquete de onda, ecuación (40.19), cambia el carácter de la función de onda $\Psi(x, t)$ (que se muestra aquí, en un tiempo específico $t = 0$).









MasteringPHYSICS

PhET: Quantum Tunneling and Wave Packets
ActivPhysics 17.7: Wave Packets

La derivada del primer término del lado izquierdo es con respecto a x, por lo que el factor $e^{-iEt/\hbar}$ es resultado de la derivada. Ahora tomamos la derivada con respecto a t en el lado derecho de la ecuación:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi(x)}{dx^2}e^{-iEt/\hbar} + U(x)\psi(x)e^{-iEt/\hbar} = i\hbar\left(\frac{-iE}{\hbar}\right)[\psi(x)e^{-iEt/\hbar}]$$
$$= E\psi(x)e^{-iEt/\hbar}$$

Si dividimos ambos lados de esta ecuación entre $e^{-iEt/\hbar}$, obtenemos

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + U(x)\psi(x) = E\psi(x) \quad \text{(ecuación de Schrödinger independiente del tiempo)} \quad (40.23)$$

Esta se conoce como la **ecuación de Schrödinger independiente del tiempo**. El factor dependiente del tiempo $e^{-iEt/\hbar}$ no aparece, y la ecuación (40.23) es una ecuación que solamente implica a la función de onda independiente del tiempo $\psi(x)$. Vamos a dedicar gran parte de este capítulo a resolver esta ecuación para encontrar la energía definida, las funciones de onda de estado estacionario $\psi(x)$ y los correspondientes valores de E, es decir, las energías de los niveles permitidos para diferentes situaciones físicas.

Ejemplo 40.2 Un estado estacionario



Considere la función de onda $\psi(x) = A_1e^{ikx} + A_2e^{-ikx}$, donde k es positiva. ¿Es una función de onda estacionaria válida para una partícula libre? ¿Cuál es la energía correspondiente a la función de onda?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Una función de onda de estado estacionario válida para una partícula libre debe satisfacer la ecuación de Schrödinger, ecuación (40.23), con $U(x) = 0$. Para probar la ecuación mencionada $\psi(x)$, solo se sustituye en el lado izquierdo de la ecuación. Si el resultado es una constante multiplicada por $\psi(x)$, entonces la función de onda es en sí misma una solución, y la constante es igual a la energía E.

EJECUTAR: Al sustituir $\psi(x) = A_1e^{ikx} + A_2e^{-ikx}$ y $U(x) = 0$ en la ecuación (40.23), obtenemos

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2(A_1e^{ikx} + A_2e^{-ikx})}{dx^2}$$
$$= -\frac{\hbar^2}{2m}[(ik)^2A_1e^{ikx} + (-ik)^2A_2e^{ikx}]$$
$$= \frac{\hbar^2k^2}{2m}(A_1e^{ikx} + A_2e^{-ikx}) = \frac{\hbar^2k^2}{2m}\psi(x)$$

El resultado es una constante por $\psi(x)$, por lo que esta $\psi(x)$ es una función de onda válida de estado estacionario para una partícula libre. Al comparar con la ecuación (40.23), se muestra que la constante en el lado derecho es la energía de la partícula: $E = \hbar^2k^2/2m$.

EVALUAR: Observe que $\psi(x)$ es una *superposición* de dos funciones de onda diferentes: una función (A_1e^{ikx}) que representa una partícula con cierta magnitud de momento lineal $p = \hbar k$ que se mueve en la dirección de x positiva, y una función (A_2e^{-ikx}) que representa una partícula con la misma magnitud de momento lineal, que se mueve en dirección de la x negativa. Así, mientras la función de onda combinada $\psi(x)$ representa un estado estacionario con una energía definida, este estado *no* tiene un momento lineal definido. En la sección 40.2 veremos que esa función de onda puede representar una *onda estacionaria*, e investigaremos los casos en los que puede haber ondas de materia estacionaria.

Evalúe su comprensión de la sección 40.1 ¿El paquete de ondas dado por la ecuación (40.19) representa un estado estacionario? ❙

MasteringPHYSICS
ActivPhysics 20.2: Particle in a Box

40.2 Partícula en una caja

Un problema importante en la mecánica cuántica es cómo usar la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo, ecuación (40.23), para determinar los posibles niveles de energía y las correspondientes funciones de onda para los diversos sistemas. Entonces, el problema fundamental es el siguiente: para determinada función $U(x)$ de energía potencial, ¿cuáles son las funciones de onda de estado estacionario posibles, $\psi(x)$, y cuáles son las energías E correspondientes?

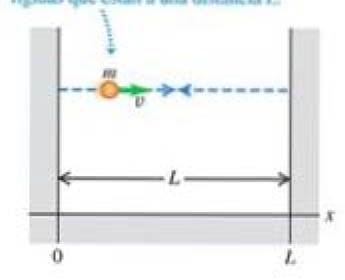
En la sección 40.1 resolvimos este problema para el caso $U(x) = 0$, que corresponde a una partícula *libre*. Las funciones de onda permitidas y sus energías correspondientes son

$$\psi(x) = Ae^{ikx}\ E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \qquad \text{(partícula libre)} \qquad (40.24)$$

El número de onda k es igual a $2\pi/\lambda$, donde λ es la longitud de onda. Vimos que k puede tener cualquier valor real, por lo que la energía E de una partícula libre puede tener cualquier valor, desde cero hasta infinito. Además, la partícula se puede encontrar con igual probabilidad en cualquier valor de x, desde $-\infty$ hasta $+\infty$.

Ahora veamos un modelo sencillo en el que una partícula está *ligada*, por lo que no puede escapar al infinito, sino que está confinada a una región restringida del espacio. Nuestro sistema consiste en una partícula confinada entre dos paredes rígidas separadas por una distancia L (figura 40.8). El movimiento solo es unidimensional, y la partícula se mueve únicamente a lo largo del eje x dentro de las paredes en $x = 0$ y $x = L$. La energía potencial que corresponde a las paredes rígidas es infinita, por lo que la partícula no puede escapar; entre las paredes, la energía potencial es cero (figura 40.9). Con frecuencia, a esta situación se le describe como **"partícula en una caja"**. Dicho modelo podría representar un electrón que tiene libre movimiento dentro de una molécula larga y recta, o a lo largo de un alambre muy delgado.

40.8 Punto de vista newtoniano de una partícula en una caja.

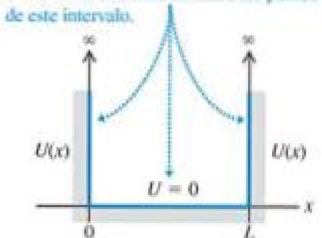


Función de onda para una partícula en una caja

Para resolver la ecuación de Schrödinger para este sistema, comenzaremos con algunas restricciones sobre la función de onda $\psi(x)$ de la partícula. Como la partícula está confinada a la región $0 \le x \le L$, se espera que la función de distribución de probabilidad $|\Psi(x, t)|^2 = |\psi(x)|^2$ y la función de onda $\psi(x)$ sea cero fuera de la región. Esto concuerda con la ecuación de Schrödinger: si el término $U(x)\psi(x)$ en la ecuación (40.23) va a ser finito, entonces $\psi(x)$ debe ser cero donde $U(x)$ sea infinita.

Además, $\psi(x)$ debe ser una función *continua*, para ser una solución matemática bien comportada de la ecuación de Schrödinger. Si lo es, $\psi(x)$ debe ser cero en la frontera de la región, $x = 0$ y $x = L$. Esas dos condiciones son *condiciones de frontera* para el problema. Deben resultar conocidas para el lector, porque son las mismas condiciones que usamos para determinar los modos normales de una cuerda en vibración, en la sección 15.8 (vol. 1) (figura 40.10); sería conveniente repasar esa descripción.

40.9 La función de energía potencial para una partícula en una caja.



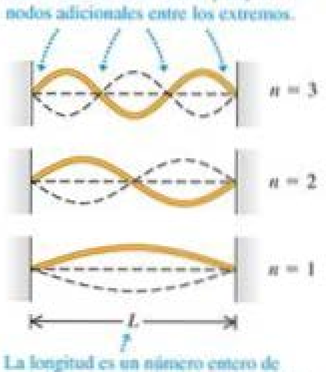
Una condición adicional establece que para calcular la segunda derivada, $d^2\psi(x)/dx^2$ en la ecuación (40.23), la *primera* derivada $d\psi(x)/dx$ también debe ser continua, excepto en los puntos donde la energía potencial se vuelve infinita (como lo hace en las paredes de la caja). Esto es similar al requisito de que una cuerda vibratoria, como la que se muestra en la figura 40.10, no puede tener un quiebre en ella (lo que correspondería a una discontinuidad en la primera derivada de la función de onda), excepto en los extremos de la cuerda.

Ahora despejaremos las funciones de onda en la región $0 \le x \le L$ sujetas a las condiciones anteriores. En esta región, $U(x) = 0$, por lo que la función de onda en esos lugares debe satisfacer

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} = E\psi(x) \qquad \text{(partícula en una caja)} \qquad (40.25)$$

La ecuación (40.25) es *igual* que la ecuación de Schrödinger para una partícula libre, por lo que es tentador llegar a la conclusión de que las funciones de onda y las energías están dadas por la ecuación (40.24). Es cierto que $\psi(x) = Ae^{ikx}$ satisface la ecuación de Schrödinger con $U(x) = 0$; es continua y tiene una primera derivada continua $d\psi(x)/dx = ikAe^{ikx}$. Sin embargo, esta función de onda *no* satisface las condiciones en la frontera de que $\psi(x)$ debe ser cero en $x = 0$ y $x = L$: en $x = 0$, la función de onda de la ecuación (40.24) es igual a $Ae^0 = A$, y en $x = L$ es igual a Ae^{ikL}. (Serían iguales a 0 si $A = 0$, pero entonces la función de onda sería cero ¡y no habría partícula alguna!).

40.10 Modos normales de vibración para una cuerda de longitud L sujeta en ambos extremos.



La forma de salir de este dilema es recordar el ejemplo 40.2 (sección 40.1), donde vimos que una solución más general de estado estacionario de la ecuación de Schrödinger, con $U(x) = 0$, es

$$\psi(x) = A_1e^{ikx} + A_2e^{-ikx} \qquad (40.26)$$

Esta función de onda es una superposición de dos ondas: una que viaja en dirección $+x$, de amplitud A_1 y la otra que viaja en la dirección $-x$ con el mismo número de onda, pero con amplitud A_2. Esto es análogo al caso de las ondas estacionarias sobre una cuerda (figura 40.10), que podemos considerar como superposición de dos ondas sinusoidales, las cuales se propagan en direcciones opuestas (véase la sección 15.7 vol. 1). La energía que corresponde a la ecuación (40.26) es $E = \hbar^2 k^2/2m$, igual que para una sola onda.

Para ver si la función de onda expresada por la ecuación (40.26) satisface las condiciones de frontera, primero la rescribiremos en términos de senos y cosenos, usando la fórmula de Euler, ecuación (40.17):

$$\begin{aligned}\psi(x) &= A_1(\cos kx + i\,\mathrm{sen}\,kx) + A_2[\cos(-kx) + i\,\mathrm{sen}(-kx)]\\ &= A_1(\cos kx + i\,\mathrm{sen}\,kx) + A_2(\cos kx - i\,\mathrm{sen}\,kx)\\ &= (A_1 + A_2)\cos kx + i(A_1 - A_2)\,\mathrm{sen}\,kx\end{aligned} \tag{40.27}$$

En $x = 0$, esto es igual a $\psi(0) = A_1 + A_2$, que debe ser igual a cero si se va a satisfacer la condición de frontera en ese punto. Por consiguiente, $A_2 = -A_1$, y la ecuación (40.27) se transforma en

$$\psi(x) = 2iA_1\,\mathrm{sen}\,kx = C\,\mathrm{sen}\,kx \tag{40.28}$$

Hemos simplificado la ecuación introduciendo la constante $C = 2iA_1$. (Regresaremos después a esta constante). También podemos satisfacer la segunda condición de frontera, referente a que $\psi = 0$ en $x = L$, eligiendo valores de k tales que $kL = n\pi$ ($n = 1, 2, 3, \ldots$). Por consiguiente, la ecuación (40.28) realmente define funciones de onda de estado estacionario para una partícula en una caja, en la región $0 \le x \le L$. (Fuera de esta región, $\psi(x) = 0$). Los valores posibles de k, y de la longitud de onda $\lambda = 2\pi/k$, son

$$k = \frac{n\pi}{L} \quad \text{y} \quad \lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2L}{n} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots) \tag{40.29}$$

Al igual que para la cuerda de la figura 40.10, la longitud L de la región es un número entero de medias longitudes de onda.

Niveles de energía para una partícula en una caja

Los niveles de energía posibles para una partícula en una caja se definen con $E = \hbar^2 k^2/2m = p^2/2m$, donde $p = \hbar k = (h/2\pi)(2\pi/\lambda) = h/\lambda$ es la magnitud del momento lineal de una partícula libre con número de onda k y longitud de onda λ. Eso tiene sentido, ya que dentro de la región $0 \le x \le L$, la energía potencial es cero y toda la energía es cinética. Para cada valor de n hay valores correspondientes p, λ y E, que llamaremos p_n, λ_n y E_n, respectivamente. Al armar todas las piezas resulta

$$p_n = \frac{h}{\lambda_n} = \frac{nh}{2L} \tag{40.30}$$

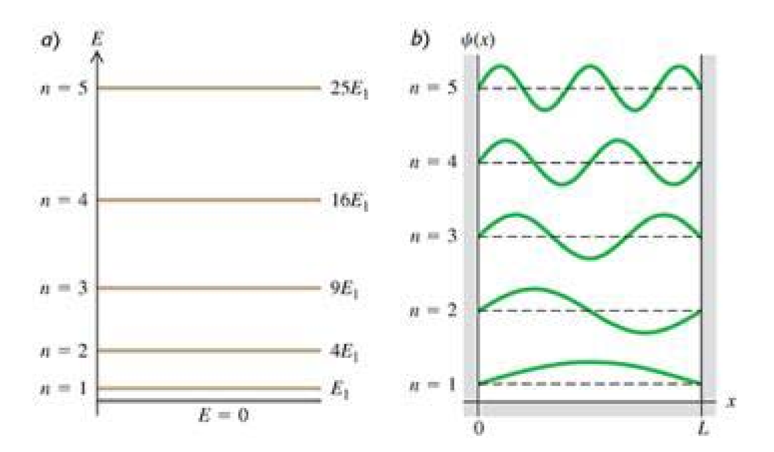
y así los niveles de energía para una partícula en una caja son

$$E_n = \frac{p_n{}^2}{2m} = \frac{n^2h^2}{8mL^2} = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2mL^2} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots) \quad \text{(niveles de energía para una partícula en una caja)} \tag{40.31}$$

Cada uno de los niveles de energía tiene su propio valor de número cuántico n y una función de onda correspondiente, que se indica por ψ_n. Cuando sustituimos k en la ecuación (40.28) por $n\pi/L$ de la ecuación (40.29), encontramos

$$\psi_n(x) = C\,\mathrm{sen}\frac{n\pi x}{L} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots) \tag{40.32}$$

El diagrama de niveles de energía de la figura 40.11*a* muestra los cinco niveles más bajos para una partícula en una caja. Los niveles de las energías son proporcionales a n^2, así que son sucesivamente mayores cuando están a distancias cada vez mayores entre sí. Hay una cantidad infinita de niveles, porque las paredes son perfectamente rígidas; aun una partícula con energía cinética infinitamente grande está confinada dentro de la caja. La figura 40.11*b* muestra gráficas de las funciones de onda



40.11 *a)* Diagrama de niveles de energía para una partícula en una caja. Cada energía es n^2E_1, donde E_1 es el nivel de energía fundamental. *b)* Funciones de onda para una partícula en una caja, con $n = 1, 2, 3, 4$ y 5. **CUIDADO**: Las cinco gráficas se desplazaron verticalmente para mayor claridad, como en la figura 40.10. Cada una de las rectas horizontales discontinuas representa $\psi = 0$ para la respectiva función de onda.

$\psi_n(x)$ para $n = 1, 2, 3, 4$ y 5. Observe que estas funciones son idénticas a las ondas estacionarias en una cuerda (véase la figura 40.10).

CUIDADO **Una partícula en una caja no puede tener energía cero** Observe que la energía de una partícula en una caja *no puede* ser cero. La ecuación (40.31) indica que para que $E = 0$, se necesitaría que $n = 0$, pero sustituyendo $n = 0$ en la ecuación (40.32) da una función de onda cero. Como una partícula se describe con una función de onda *distinta de cero*, eso quiere decir que no puede haber una partícula con $E = 0$. Esto es una consecuencia del principio de incertidumbre de Heisenberg: una partícula en el estado de energía cero tendría un valor definido del momento lineal (precisamente cero), por lo que su incertidumbre de posición sería infinita y la partícula podría encontrarse en cualquier lugar a lo largo del eje *x*. Pero esto es imposible, ya que la partícula en una caja solo se puede encontrar entre $x = 0$ y $x = L$. Por lo tanto, $E = 0$ no está permitido. Por el contrario, las funciones de onda de estado estacionario permitido con $n = 1, 2, 3, \ldots$ no representan estados de momento lineal definido (cada uno es una mezcla a partes iguales de un estado de momento lineal *x*, $+p_n = nh/2L$ y un estado de momento lineal *x*, $-p_n = -nh/2L$). Por consiguiente, cada estado estacionario tiene una incertidumbre de momento lineal distinta de cero, consistente con tener una incertidumbre de posición finita.



Ejemplo 40.3 Electrón en una caja del tamaño de un átomo

Calcule los primeros dos niveles de energía para un electrón confinado en una caja unidimensional de 5.0×10^{-10} m (aproximadamente el diámetro de un átomo).

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Este problema requiere lo que ya hemos aprendido en esta sección acerca de una partícula en una caja. Los primeros dos niveles de energía corresponden a $n = 1$ y a $n = 2$ en la ecuación (40.31).

EJECUTAR: De acuerdo con la ecuación (40.31),

$$E_1 = \frac{h^2}{8mL^2} = \frac{(6.626 \times 10^{-34}\ \text{J}\cdot\text{s})^2}{8(9.109 \times 10^{-31}\ \text{kg})(5.0 \times 10^{-10}\ \text{m})^2}$$
$$= 2.4 \times 10^{-19}\ \text{J} = 1.5\ \text{eV}$$
$$E_2 = \frac{2^2h^2}{8mL^2} = 4E_1 = 9.6 \times 10^{-19}\ \text{J} = 6.0\ \text{eV}$$

EVALUAR: La diferencia entre los dos primeros niveles de energía es $E_2 - E_1 = 4.5$ eV. Un electrón confinado en una caja es diferente de un electrón ligado a un átomo, pero es reconfortante saber que esta energía tiene el mismo orden de magnitud que los niveles atómicos de energía reales.

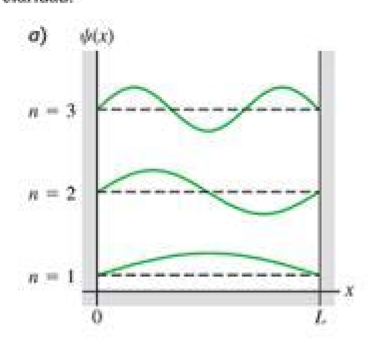
También es posible demostrar que al sustituir el electrón por un protón o un neutrón ($m = 1.67 \times 10^{-27}$ kg) confinado en una caja de 1.1×10^{-14} m de ancho (el ancho de un núcleo atómico de tamaño promedio), las energías de los dos primeros niveles son aproximadamente un millón de veces más grandes: $E_1 = 1.7 \times 10^6$ eV $= 1.7$ MeV, $E_2 = 4E_1 = 6.8$ MeV, $E_2 = 4E_1 = 6.8$ MeV, $E_2 - E_1 = 5.1$ MeV. Esto nos demuestra que las reacciones nucleares (que implican transiciones entre los niveles de energía en el núcleo) liberan mucho más energía que las reacciones químicas (las que implican transiciones entre niveles de energía de los electrones en los átomos).

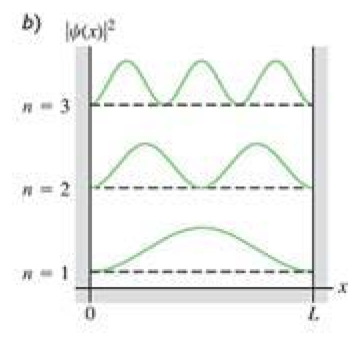
Por último, es posible demostrar (véase el ejercicio 40.11) que los niveles de energía de una bola de billar ($m = 0.2$ kg), confinada a una caja de 1.3 m, el ancho de la mesa de billar, están separados por aproximadamente 5×10^{-67} J. Los efectos cuánticos no perturban un juego de billar.

Probabilidad y normalización

Analicemos un poco más a fondo las funciones de onda para una partícula en una caja, considerando la interpretación *probabilística* de la función de onda ψ que describimos en la sección 40.1. En nuestro caso unidimensional, la cantidad $|\psi(x)|^2dx$

40.12 Gráficas de *a*) $\psi(x)$ y *b*) $|\psi(x)|^2$ para las primeras tres funciones de onda ($n = 1$, 2, 3) de una partícula en una caja. Las líneas punteadas horizontales representan $\psi(x) = 0$ y $|\psi(x)|^2 = 0$ para cada uno de los tres niveles. El valor de $|\psi(x)|^2$ en cada punto es la probabilidad de encontrar la partícula en un intervalo pequeño dx centrado en el punto. Como en la figura 40.11*b*, las tres gráficas en cada parte se desplazaron verticalmente por claridad.





es proporcional a la probabilidad de que la partícula se encuentre dentro de un intervalo pequeño dx en torno a x. Para una partícula en una caja,

$$|\psi(x)|^2 dx = C^2 \operatorname{sen}^2 \frac{n\pi x}{L}\, dx$$

Tanto $\psi(x)$ como $|\psi(x)|^2$ están graficadas en la figura 40.12, para $n = 1$, 2 y 3. Observamos que no son igualmente probables todas las posiciones. Esto contrasta con el caso de la mecánica clásica, donde todas las posiciones entre $x = 0$ y $x = L$ son igualmente probables. Vemos en la figura 40.12*b* que $|\psi(x)|^2 = 0$ en algunos puntos, por lo que la probabilidad de encontrar la partícula exactamente en esos puntos es cero. No deje que eso le preocupe: el principio de incertidumbre nos indica que no podemos medir con exactitud la posición. La partícula solo está localizada y debe estar en algún lugar entre $x = 0$ y $x = L$.

Sabemos que la partícula debe estar en *algún lugar* en el eje x, esto es, entre $x = -\infty$ y $x = +\infty$. Entonces, la *suma* de las probabilidades para todas los dx en todos los lugares (la probabilidad *total* de encontrar la partícula) debe ser igual a 1. Esta es la condición normalizada que se estudió en la sección 40.1:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2\, dx = 1 \qquad \text{(condición de normalización)} \qquad (40.33)$$

Se dice que una función de onda está *normalizada* si tiene una constante como C en la ecuación (40.32) que se calcula para que la probabilidad total sea igual a 1 en la ecuación (40.33). Para una función de onda normalizada, $|\psi(x)|^2 dx$ no es simplemente proporcional, sino que es *igual* a la probabilidad de encontrar la partícula entre x y $x + dx$. Esto explica por qué se llama a $|\psi(x)|^2$ la función de distribución de probabilidad. (En la sección 40.1 llamamos a $|\Psi(x, t)|^2$ la función de distribución de probabilidad. Sin embargo, para el caso de una función de onda de estado estacionario, $|\Psi(x, t)|^2$ es igual a $|\psi(x)|^2$).

Normalicemos las funciones la partícula en una caja $\psi_n(x)$ dadas por la ecuación (40.32). Ya que $\psi_n(x)$ es cero excepto entre $x = 0$ y $x = L$, la ecuación (40.33) será

$$\int_0^L C^2 \operatorname{sen}^2 \frac{n\pi x}{L}\, dx = 1 \qquad (40.34)$$

Se puede evaluar esta integral usando la identidad trigonométrica $\operatorname{sen}^2\theta = (1 - \cos 2\theta)$; el resultado es $C^2L/2$. Así, nuestra interpretación de la probabilidad de la función de onda exige que $C^2L/2 = 1$, o $C = (2/L)^{1/2}$; la constante C *no* es arbitraria. (Esto contrasta con el problema de una cuerda que vibra, donde C representa una amplitud que depende de las condiciones iniciales). Así, las funciones normalizadas de onda de estado estacionario para una partícula en una caja son

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad \text{(partícula en una caja)} \qquad (40.35)$$

Ejemplo 40.4 ¿Una función de onda no sinusoidal?



a) Demuestre que $\psi(x) = Ax + B$, donde A y B son constantes, es una solución de la ecuación de Schrödinger para un nivel de energía $E = 0$ de una partícula en una caja. *b*) ¿Qué restricciones imponen las condiciones en la frontera $x = 0$ y $x = L$ a las constantes A y B?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Este problema se vale de la idea de que cualquier función de onda físicamente razonable debe satisfacer tanto la ecuación de Schrödinger como las condiciones de frontera adecuadas. En el inciso *a*) sustituimos $\psi(x)$ en la ecuación de Schrödinger para una partícula en una caja, la ecuación (40.25), con la finalidad de determinar si es una solución. En el inciso *b*) veremos qué restricciones sobre $\psi(x)$ surgen al aplicar las condiciones de frontera de que $\psi(x) = 0$ en $x = 0$ y en $x = L$.

EJECUTAR: *a*) De acuerdo con la ecuación (40.25), la ecuación de Schrödinger para un nivel de energía $E = 0$ de una partícula en una caja es

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} = E\psi(x) = 0$$

en la región $0 \le x \le L$. Al derivar dos veces $\psi(x) = Ax + B$ con respecto a x se obtiene $d^2\psi(x)/dx^2 = 0$, por lo que el lado izquierdo de la ecuación también es cero y, por lo tanto, $\psi(x) = Ax + B$ es una solución de esta ecuación de Schrödinger para $E = 0$. (Observe que tanto $\psi(x)$ como su derivada $d\psi(x)/dx = A$ son funciones continuas, como debe ser).

b) Al aplicar la condición de frontera en $x = 0$ se obtiene $\psi(0) = B = 0$, y así, $\psi(x) = Ax$. Aplicando la condición de frontera en $x = L$ se obtiene $\psi(L) = AL = 0$. Por consiguiente, $\psi(x) = 0$ tanto dentro de la caja ($0 \le x \le L$) *como fuera*: hay probabilidad *cero* de encontrar la partícula en cualquier lugar, así que $\psi(x) = Ax + B$ *no* es una función de onda físicamente válida.

EVALUAR: La moraleja de esta historia es que hay muchas funciones que satisfacen la ecuación de Schrödinger para una situación física dada, pero la mayoría de ellas, incluyendo la función que se considera aquí, tienen que rechazarse porque no satisfacen las condiciones de frontera.

Dependencia con respecto al tiempo

Por último, notaremos que las funciones de onda $\psi_n(x)$ en la ecuación (40.35) solo dependen de la coordenada *espacial* x. La ecuación (40.21) indica que si $\psi(x)$ es la función de onda para un estado de energía definida E, la función completa de onda es $\Psi(x, t) = \psi(x)e^{-iEt/\hbar}$. Por lo tanto, las funciones de onda de estado estacionario *dependientes del tiempo* para una partícula en una caja son

$$\Psi_n(x, t) = \sqrt{\frac{2}{L}}\,\text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)e^{-iE_nt/\hbar} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots) \qquad (40.36)$$

En esta expresión, las energías E_n están dadas por la ecuación (40.31). Cuanto mayor sea el número cuántico n, mayor será la frecuencia angular $\omega_n = E_n/\hbar$ a la que oscila la función de onda. Observe que ya que $|e^{-iE_nt/\hbar}|^2 = e^{+iE_nt/\hbar}e^{-iE_nt/\hbar} = e^0 = 1$, la función de distribución de probabilidad $|\Psi_n(x, t)|^2 = (2/L)\,\text{sen}^2(n\pi x/L)$ es independiente del tiempo y *no* oscila. (Recuerde que por eso decimos que estos estados de energía definida son *estacionarios*).

Evalúe su comprensión de la sección 40.2 Si una partícula en una caja está en el enésimo nivel de energía, ¿cuál es el valor promedio de su componente x de momento lineal p_x? **i.** $nh/2L$; **ii.** $(\sqrt{2}/2)nh/L$; **iii.** $(1/\sqrt{2})nh/L$; **iv.** $[1/(2\sqrt{2})]nh/L$; **v.** cero.



40.3 Pozos de potencial

Un **pozo de potencial** se puede representar por una función de potencial $U(x)$ que tiene un mínimo. Esto lo presentamos en la sección 7.5 (vol. 1), y también lo usamos para describir el movimiento periódico en el capítulo 14 (vol. 1). En la mecánica newtoniana, una partícula confinada en un pozo de potencial puede vibrar de un lado a otro con movimiento periódico. Nuestra primera aplicación de la ecuación de Schrödinger a la partícula en una caja implicaba un pozo de potencial rudimentario, con una función $U(x)$ que es cero dentro de cierto intervalo e infinita en cualquier otro lugar. Como se mencionó en la sección 40.2, esta función corresponde a unos cuantos casos en la naturaleza, pero la correspondencia solo es aproximada.

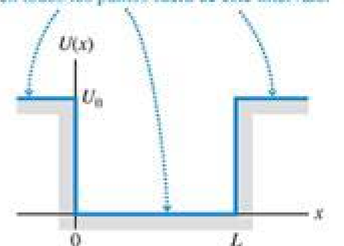
Un pozo de potencial que se aproxima mejor a varios casos físicos reales es un **pozo finito** con lados verticales, pero con altura *finita*. La figura 40.13 muestra una función de energía potencial que es cero en el intervalo $0 \le x \le L$ y tiene el valor U_0 fuera de dicho intervalo. Esta función a menudo se denomina **potencial de pozo cuadrado**. Podría servir como modelo sencillo para un electrón dentro de una lámina metálica de espesor L, que se mueve en dirección perpendicular a las superficies de la lámina. El electrón se puede mover con libertad dentro del metal, pero debe superar una barrera de energía potencial, de altura U_0, para escapar por alguna de las superficies del metal. La energía U_0 se relaciona con la *función trabajo* que describimos en la sección 38.1 en relación con el efecto fotoeléctrico. En una aplicación tridimensional es factible usar una versión esférica de un pozo de potencial, en forma aproximada, para describir los movimientos de protones y neutrones dentro de un núcleo.

MasteringPHYSICS

PhET: Double Wells and Covalent Bonds
PhET: Quantum Bound States
ActivPhysics 20.1: Potential Energy Diagrams
ActivPhysics 20.3: Potential Wells

40.13 Un pozo de potencial cuadrado.

La energía potencial U es cero en el intervalo $0 \le x \le L$) y tiene el valor constante U_0 en todos los puntos fuera de este intervalo.



Estados ligados de un potencial de pozo cuadrado

En la mecánica newtoniana, la partícula está atrapada (localizada) en un pozo si la energía total E es menor que U_0. En mecánica cuántica, a ese estado atrapado a menudo se le llama **estado ligado**. Todos los estados están ligados cuando el pozo

tiene profundidad infinita como el que se describió en la sección 40.2. Para un pozo finito como el que se muestra en la figura 40.13, si E es mayor que U_0, la partícula *no* está ligada.

Vamos a ver cómo resolver la ecuación de Schrödinger para los estados ligados de un potencial de pozo cuadrado. Nuestro objetivo es encontrar las energías y las funciones de onda para las cuales $E < U_0$. El método más fácil es considerar por separado las regiones donde $U = 0$ y donde $U = U_0$. Cuando $U = 0$, la ecuación de Schrödinger es

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} = E\psi(x) \quad \text{o} \quad \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} = -\frac{2mE}{\hbar^2}\psi(x) \qquad (40.37)$$

Esta es igual a la ecuación (40.25) de la sección 40.2, que describe una partícula en una caja. Como en la sección 40.2, podemos expresar las soluciones de esta ecuación como combinaciones de cos kx y sen kx, donde $E = \hbar^2k^2/2m$. Podemos rescribir la relación entre E y k como $k = \sqrt{2mE}/\hbar$. Por consiguiente, dentro del pozo cuadrado $(0 \leq x \leq L)$ se tiene que

$$\psi(x) = A\cos\left(\frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}x\right) + B\,\text{sen}\left(\frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}x\right) \quad \text{(dentro del pozo)} \qquad (40.38)$$

donde A y B son constantes. Hasta ahora, esto se parece mucho al análisis de la partícula en una caja, de la sección 40.2. La diferencia es que para el potencial de pozo cuadrado, la energía potencial fuera del pozo no es infinita, así que la función de onda $\psi(x)$ fuera del pozo *no* es cero.

En las regiones fuera del pozo ($x < 0$ y $x > L$), la función energía potencial en la ecuación de Schrödinger es $U = U_0$:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + U_0\psi(x) = E\psi(x) \quad \text{o} \quad \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} = \frac{2m(U_0 - E)}{\hbar^2}\psi(x) \qquad (40.39)$$

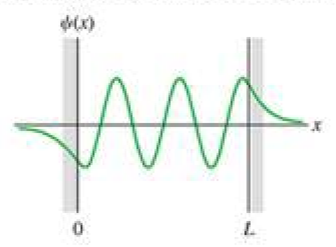
La cantidad $U_0 - E$ es positiva, por lo que las soluciones de esta ecuación son exponenciales. Si se usa κ (la letra griega kappa) para representar la cantidad $[2m(U_0 - E)]^{1/2}/\hbar$ y tomando κ positiva, podemos escribir la solución como

$$\psi(x) = Ce^{\kappa x} + De^{-\kappa x} \quad \text{(fuera del pozo)} \qquad (40.40)$$

donde C y D son constantes con distintos valores, en las regiones $x < 0$ y $x > L$. Vemos que no se puede permitir que ψ tienda a infinito cuando $x \to +\infty$ o $x \to -\infty$. [De otra forma, no podría satisfacer la condición de normalización, ecuación (40.33)]. Esto significa que en la ecuación (40.40), debemos tener $D = 0$ para $x < 0$ y $C = 0$ para $x > L$.

Nuestros cálculos hasta ahora muestran que las funciones de onda del estado ligado para un pozo finito son sinusoidales dentro del pozo [ecuación (40.38)] y exponenciales fuera de este [ecuación (40.40)]. Tenemos que hacer *coincidir* las funciones de onda internas y externas del pozo para que cumplan las condiciones de contorno que mencionamos en la sección 40.2; $\psi(x)$ y $d\psi(x)/dx$ deben ser continuas en los puntos de la frontera, $x = 0$ y $x = L$. Si la función de onda $\psi(x)$ o la pendiente $d\psi(x)/dx$ fueran discontinuas, la segunda derivada $d^2\psi(x)/dx^2$ sería *infinita* en ese punto. Eso violaría las condiciones de la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo, ecuación (40.23), la cual expresa que en todos los puntos $d^2\psi(x)/dx^2$ es proporcional a $U - E$. Para un pozo finito, $U - E$ es finita en todo lugar, así que $d^2\psi(x)/dx^2$ también debe ser finita en todas partes.

40.14 Una función de onda posible para una partícula en un pozo de potencial finito. La función es sinusoidal dentro del pozo $(0 \leq x \leq L)$ y exponencial fuera de él. Tiende de forma asintótica a cero, cuando $|x|$ es grande. Las funciones deben unirse uniformemente en $x = 0$ y en $x = L$; la función de onda y su primer derivada deben ser continuas.



La igualación de las funciones sinusoidales y exponenciales en la frontera, para que se unan uniformemente, solo es posible para ciertos valores específicos de la energía total E, por lo que este requisito determina los niveles de energía posibles del pozo cuadrado finito. No hay fórmula sencilla para los niveles de energía, como había para el pozo infinitamente profundo. La determinación de los niveles es un problema matemático bastante complejo, donde se requiere resolver una ecuación trascendente por aproximación numérica; no entraremos en los detalles. La figura 40.14 muestra la forma general de una función de onda posible. Las propiedades más notables de esta fun-

ción de onda son las "colas exponenciales" que se prolongan fuera del pozo, en regiones prohibidas por la mecánica newtoniana (porque, en esas regiones, la partícula tendría energía cinética negativa). Veremos que hay cierta probabilidad de encontrar la partícula *fuera* del pozo de potencial, a pesar de que según la mecánica clásica eso es imposible. En esta sección describiremos un resultado sorprendente de dicho efecto.

Ejemplo 40.5 **Fuera de un pozo finito**



a) Demuestre que la ecuación (40.40), $\psi(x) = Ce^{\kappa x} + De^{-\kappa x}$, es realmente una solución de la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo fuera de un pozo finito de altura U_0. *b*) ¿A dónde tiende $\psi(x)$ en el límite cuando $U_0 \rightarrow \infty$?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: En el inciso *a*), tratamos a la función dada $\psi(x)$ en la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo para $x < 0$ y para $x > L$, ecuación (40.39). En el inciso *b*), observamos que en el límite $U_0 \rightarrow \infty$, el pozo finito se convierte en un pozo *infinito*, como los considerados en la sección 40.2 para una partícula en una caja. Así, en este límite las funciones de onda fuera de un pozo finito deben reducir a las funciones de onda fuera de la caja.

EJECUTAR: *a*) Debemos demostrar que $\psi(x) = Ce^{\kappa x} + De^{-\kappa x}$ satisface $d^2\psi(x)/dx^2 = [2m(U_0 - E)/\hbar^2]\psi(x)$. Recuerde que $(d/du)e^{au} = ae^{au}$ y $(d^2/du^2)e^{au} = a^2e^{au}$; el lado izquierdo de la ecuación de Schrödinger es entonces

$$\begin{aligned}\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} &= \frac{d^2}{dx^2}(Ce^{\kappa x}) + \frac{d^2}{dx^2}(De^{-\kappa x})\\ &= C\kappa^2e^{\kappa x} + D(-\kappa)^2e^{-\kappa x}\\ &= \kappa^2(Ce^{\kappa x} + De^{-\kappa x})\\ &= \kappa^2\psi(x)\end{aligned}$$

De la ecuación (40.40) $\kappa^2 = 2m(U_0 - E)/\hbar^2$, que es igual al lado derecho de la ecuación. La ecuación se satisface y $\psi(x)$ es una solución.

b) Cuando U_0 tiende a infinito, κ también tiende a infinito. En la región $x < 0$, $\psi(x) = Ce^{\kappa x}$; cuando $\kappa \rightarrow \infty$, $\kappa x \rightarrow -\infty$ (ya que x es negativa) y $e^{\kappa x} \rightarrow 0$, por lo que la función de onda tiende a cero para toda $x < 0$. De la misma forma, podemos demostrar que la función de onda también tiende a cero para toda $x > L$. Esto es exactamente lo que encontramos en la sección 40.2; la función de onda para una partícula en una caja debe ser cero fuera de la caja.

EVALUAR: Nuestro resultado en el inciso *b*) indica que el pozo cuadrado infinito es un *caso límite* del pozo finito. Hemos visto muchos casos en la mecánica newtoniana donde es importante considerar los casos al límite (como en los ejemplos 5.11 y 5.13 de la sección 5.2). Los casos al límite no son menos importantes en la mecánica cuántica.

Comparación de pozos cuadrados finitos e infinitos

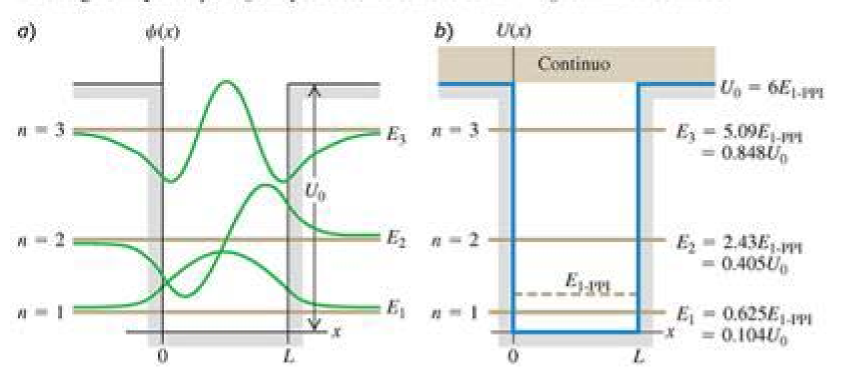
Continuemos nuestra comparación del pozo de potencial de profundidad finita con el de profundidad infinita, lo cual iniciamos en el ejemplo 40.5. Primero, como las funciones de onda para el pozo finito no son cero en $x = 0$ y $x = L$, la longitud de onda de la parte sinusoidal de cada función de onda es *mayor* de lo que sería con un pozo infinito. De acuerdo con $p = h/\lambda$, este aumento en λ corresponde a una magnitud reducida del momento lineal y, por consiguiente, a una energía reducida. Así, cada nivel de energía, incluyendo el nivel fundamental, es *más bajo* para un pozo finito que para uno de profundidad infinita con el mismo ancho.

En segundo lugar, un pozo con profundidad finita U_0 solo tiene una cantidad *finita* de estados ligados y sus niveles de energía correspondientes, en comparación con la cantidad *infinita* para un pozo infinitamente profundo. La cantidad de niveles existentes dependerá de la magnitud de U_0 en comparación con la energía del nivel fundamental para el pozo de profundidad infinita (PPI), a la que llamaremos $E_{1\text{-PPI}}$. De la ecuación (40.31),

$$E_{1\text{-PPI}} = \frac{\pi^2\hbar^2}{2mL^2} \quad \text{(nivel fundamental de energía, pozo de profundidad infinita)} \qquad (40.41)$$

Cuando el pozo es muy profundo, U_0 es mucho mayor que $E_{1\text{-PPI}}$, hay muchos estados ligados, y las energías de los más bajos son casi iguales a las de un pozo de profundidad infinita. Cuando U_0 solo es unas pocas veces mayor que $E_{1\text{-PPI}}$, solamente hay unos cuantos estados ligados. (Pero siempre hay al menos *un* estado ligado, independientemente de lo poco profundo que sea el pozo). Como en el caso del pozo infinitamente profundo, no hay estado con $E = 0$; ese estado violaría el principio de incertidumbre.

40.15 *a*) Funciones de onda de los tres estados ligados para una partícula en un potencial finito con una profundidad del pozo de U_0, para el caso $U_0 = 6E_{1\text{-PPI}}$. (Aquí, $E_{1\text{-PPI}}$ es la energía fundamental para un pozo infinito del mismo ancho). La línea café horizontal para cada función de onda corresponde a $\psi = 0$; la posición vertical de estas líneas indica la energía de cada estado confinado (compare con la figura 40.11). *b*) Diagrama de niveles de energía para este sistema. Las energías se expresan tanto en múltiplos de $E_{1\text{-PPI}}$ como en fracciones de U_0. Todas las energías mayores que U_0 son posibles; los estados con $E > U_0$ forman un continuo.



La figura 40.15 muestra el caso específico donde $U_0 = 6E_{1\text{-PPI}}$; en este caso, hay tres estados ligados. En la figura, se expresan tanto los niveles de energía como las fracciones de la profundidad del pozo U_0, y los múltiplos de $E_{1\text{-PPI}}$. Observe que si el pozo fuera infinitamente profundo, los tres niveles inferiores, de acuerdo con la ecuación (40.31), serían $E_{1\text{-PPI}}$, $4E_{1\text{-PPI}}$ y $9E_{1\text{-PPI}}$. En la figura 40.15 también se muestran las funciones de onda de los tres estados ligados.

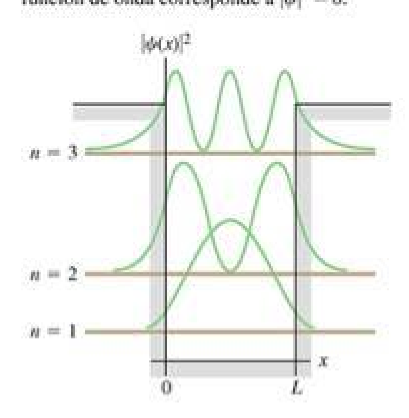
Sucede que cuando U_0 es menor que $E_{1\text{-PPI}}$, solo hay un estado ligado. En el límite, cuando U_0 es *mucho menor* que $E_{1\text{-PPI}}$ (un pozo muy superficial o muy angosto), la energía de este estado único es, aproximadamente, $E = 0.68U_0$.

La figura 40.16 muestra gráficas de las distribuciones de probabilidad, esto es, de los valores de $|\psi|^2$, para las funciones de onda de la figura 40.15*a*. Como en el pozo infinito, no todas las posiciones son igualmente probables. A diferencia del pozo infinito, existe cierta probabilidad de encontrar la partícula fuera del pozo en las regiones clásicamente prohibidas.

También hay estados para los cuales E es *mayor que* U_0. En esos *estados de partícula libre*, la partícula no está ligada, sino que es libre de moverse por todos los valores de x. Así, es posible *cualquier* energía E mayor que U_0, de manera que dichos estados de partícula libre forman entonces un *continuo*, y no un conjunto discreto de estados con niveles de energía definidos. Las funciones de onda para partículas libres son sinusoidales, tanto dentro como fuera del pozo. La longitud de onda es más corta dentro del pozo que fuera de él, y corresponde a mayor energía cinética en el interior que en el exterior.

La figura 40.17 es una demostración gráfica de partículas en un pozo de potencial finito *bi*dimensional. El ejemplo 40.6 describe otra aplicación del pozo cuadrado de potencial.

40.16 Funciones de distribución de probabilidad $|\psi(x)|^2$ para la función de onda del pozo cuadrado que se muestra en la figura 40.15. La línea horizontal café para cada función de onda corresponde a $|\psi|^2 = 0$.





Ejemplo 40.6 Electrón en un pozo finito

Un electrón está atrapado en un pozo cuadrado de 0.50 nm (comparable a unos cuantos diámetros atómicos). *a*) Determine la energía de nivel fundamental $E_{1\text{-PPI}}$, si el pozo es infinitamente profundo. *b*) Si la profundidad real del pozo U_0 es seis veces la energía de nivel fundamental determinada en el inciso *a*), calcule los niveles de energía. *c*) Si el electrón hace una transición del nivel $n = 2$ al nivel $n = 1$, emitiendo un fotón, determine la longitud de onda del fotón. ¿En qué región del espectro electromagnético está el fotón? *d*) Si el electrón está inicialmente en el nivel $n = 1$ (fundamental) y absorbe un fotón, ¿cuál es la energía mínima que debe tener el fotón, para sacar al electrón del pozo? ¿En qué región del espectro se encuentra el fotón?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Con la ecuación (40.41) se obtiene la energía $E_{1\text{-PPI}}$ del nivel fundamental, para un pozo infinitamente profundo. Las energías para un pozo cuadrado con $U_0 = 6E_{1\text{-PPI}}$ se muestran en la figura 40.15*b*. La energía del fotón emitido o absorbido en una transición es igual a la diferencia entre los dos niveles implicados

en la transición: la longitud de onda del fotón está dada por $E = hc/\lambda$ (véase el capítulo 38).

EJECUTAR: *a*) De la ecuación (40.41),

$$E_{1\text{-PPI}} = \frac{\pi^2\hbar^2}{2mL^2} = \frac{\pi^2(1.055 \times 10^{-34}\ \text{J}\cdot\text{s})^2}{2(9.11 \times 10^{-31}\ \text{kg})(0.50 \times 10^{-9}\ \text{m})^2}$$

$$= 2.4 \times 10^{-19}\ \text{J} = 1.5\ \text{eV}$$

b) Tenemos $U_0 = 6E_{1\text{-PPI}} = 6(1.5\ \text{eV}) = 9.0$ eV. Simplemente podemos medir los niveles de energía en la figura 40.15*b*:

$$E_1 = 0.625E_{1\text{-PPI}} = 0.625(1.5\ \text{eV}) = 0.94\ \text{eV}$$

$$E_2 = 2.43E_{1\text{-PPI}} = 2.43(1.5\ \text{eV}) = 3.6\ \text{eV}$$

$$E_3 = 5.09E_{1\text{-PPI}} = 5.09(1.5\ \text{eV}) = 7.6\ \text{eV}$$

c) La energía del fotón y la longitud de onda para la transición de $n = 2$ a $n = 1$ son

$$E_2 - E_1 = 3.6\ \text{eV} - 0.94\ \text{eV} = 2.7\ \text{eV}$$

$$\lambda = \frac{hc}{E} = \frac{(4.136 \times 10^{-15}\ \text{eV}\cdot\text{s})(3.00 \times 10^8\ \text{m/s})}{2.7\ \text{eV}}$$

$$= 460\ \text{nm}$$

en la región azul del espectro visible.

d) En la figura 40.15*b* vemos que la energía mínima necesaria para elevar el electrón y sacarlo del pozo, desde su nivel fundamental $n = 1$, es $U_0 - E_1 = 9.0\ \text{eV} - 0.94\ \text{eV} = 8.1$ eV, que es aproximadamente tres veces los 2.7 eV de la energía del fotón del inciso *c*). Por lo tanto, la longitud de onda del correspondiente fotón es un tercio de 460 nm, o (con dos cifras significativas) 150 nm, y se ubica en la región ultravioleta del espectro.

EVALUAR: Como comprobación, también conviene calcular las energías del estado ligado mediante el uso de las fórmulas $E_1 = 0.104U_0$, $E_2 = 0.405U_0$ y $E_3 = 0.848U_0$ dadas en la figura 40.15*b*. Como una comprobación adicional, considere que los primeros tres niveles de energía de un pozo infinitamente profundo del mismo ancho son $E_{1\text{-PPI}} =$ 1.5 eV, $E_{2\text{-PPI}} = 4E_{1\text{-PPI}} = 6.0$ eV y $E_{3\text{-PPI}} = 9E_{1\text{-PPI}} = 13.5$ eV. Las energías que se encuentran en el inciso *b*) son inferiores a estos valores: como ya se mencionó, el pozo de profundidad finita disminuye los niveles de energía en comparación con los niveles para un pozo profundo infinito.



Una aplicación de estas ideas se refiere a los *puntos cuánticos*, que consisten en partículas de tamaño nanométrico de un semiconductor como el seleniuro de cadmio (CdSe). Un electrón en un punto cuántico se comporta mucho como una partícula en un pozo de potencial finito con ancho L del mismo tamaño que el punto. Cuando los puntos cuánticos se iluminan con luz ultravioleta, los electrones absorben los fotones ultravioleta y se excitan a niveles de alta energía, como el nivel $n = 3$ descrito en este ejemplo. Si el electrón regresa al nivel fundamental ($n = 1$) en dos o más pasos (por ejemplo, de $n = 3$ a $n = 2$ y de $n = 2$ a $n = 1$), uno de estos pasos implicará emitir un fotón de luz visible como lo calculamos aquí. (Describimos este proceso de *fluorescencia* en la sección 39.3). Al aumentar el valor de L, disminuyen las energías de los niveles y, por consiguiente, el espacio entre estos, y también disminuye la energía y se incrementa la longitud de onda de los fotones emitidos. La fotografía de apertura de este capítulo muestra puntos cuánticos de distintos tamaños en una solución: cada uno de los cuales emite una longitud de onda característica dependiendo de su tamaño. Los puntos cuánticos pueden inyectarse en tejido vivo y su fluorescencia es útil como trazador en la investigación biológica y en medicina. También podrían ser la clave de una nueva generación de láseres y computadoras ultrarrápidas.

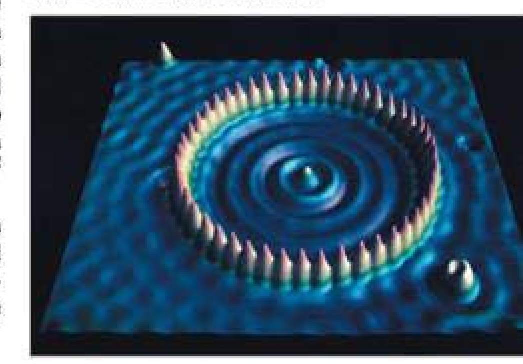
Evalúe su comprensión de la sección 40.3 Suponga que el ancho del pozo de potencial finito, en la figura 40.15, se reduce a la mitad. ¿Cómo debe cambiar el valor de U_0 para que siga habiendo solo tres niveles de energía confinados, cuyas energías sean las fracciones de U_0 que muestra la figura 40.15*b*? U_0 debe **i.** aumentar en un factor de cuatro; **ii.** aumentar en un factor de dos; **iii.** permanecer igual; **iv.** disminuir por un factor de un medio; **v.** disminuir en un factor de un cuarto. ❙

40.4 Barreras de potencial y tunelamiento

Una **barrera de potencial** es lo contrario a un pozo de potencial: es una función de energía potencial con un *máximo*. La figura 40.18 muestra un ejemplo. En mecánica clásica newtoniana, si una partícula (por ejemplo, en una montaña rusa) está situada a la izquierda de la barrera (que podría ser una colina), y si la energía mecánica total del sistema es E_1, la partícula no se puede mover más hacia la derecha que $x = a$. Si lo hiciera, la energía potencial U sería mayor que la energía total E y la energía cinética $K = E - U$ sería negativa. Esto es imposible en mecánica clásica, ya que $K = \frac{1}{2}mv^2$ nunca puede ser negativa.

Una partícula cuántica se comporta de manera diferente: si se encuentra con una barrera como la de la figura 40.18 y su energía es menor a E_2, *puede* aparecer en el otro lado. Este fenómeno se denomina *tunelamiento*. En el tunelamiento cuántico, a diferencia de la mecánica del tunelamiento macroscópico, la partícula no es realmente empujada a través de la barrera y no pierde energía en el proceso.

40.17 Para formar esta imagen se colocaron 48 átomos de hierro (representados como picos amarillos) en un círculo, sobre una superficie de cobre. La "altura" en cada punto del círculo indica la densidad electrónica. El patrón de la onda estacionaria es muy similar a la función de distribución de probabilidad para una partícula en un pozo de potencial finito unidimensional. (Esta imagen se tomó con un microscopio de tunelamiento, como veremos en la sección 40.4).



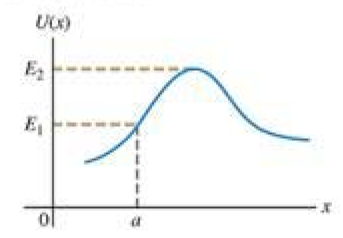
Tunelamiento a través de una barrera rectangular

Para comprender cómo se presenta el tunelamiento, examinemos la función de energía potencial $U(x)$, que se muestra en la figura 40.19. Es como la figura 40.13 puesta de cabeza; la energía potencial es cero en cualquier lugar, excepto en el intervalo $0 \le x \le L$, donde tiene el valor U_0. Esto podría representar un modelo sencillo para la energía potencial de un electrón y dos placas metálicas separadas por una brecha

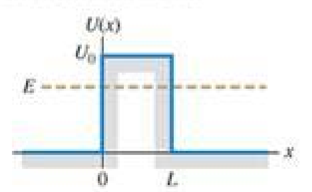


PhET: Quantum Tunneling and Wave Packets
ActivPhysics 20.4: Potential Barriers

40.18 Una barrera de energía potencial. De acuerdo con la mecánica newtoniana, si la energía total es E_1, una partícula que esté en el lado izquierdo de la barrera no puede ir más lejos que $x = a$. Si la energía total es mayor que E_2, la partícula puede pasar a través de la barrera.



40.19 Una barrera rectangular de energía potencial de ancho L y altura U_0. De acuerdo con la mecánica newtoniana, si la energía total E es menor que U_0, una partícula no puede pasar sobre esta barrera, y está confinada al lado donde esté inicialmente.



40.20 Una función de onda posible para una partícula que hace tunelamiento a través de la barrera de energía potencial de la figura 40.19.

de espesor L. La energía potencial es más baja dentro de cada placa que en la separación entre ellas.

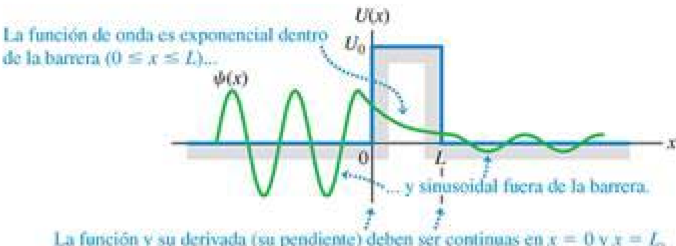
Consideremos la solución de la ecuación de Schrödinger para la función de energía potencial, cuando E es menor que U_0. Podemos usar nuestros resultados de la sección 40.3. En las regiones $x < 0$ y $x > L$, donde $U = 0$, la solución es sinusoidal y está dada por la ecuación (40.38). Dentro de la barrera ($0 \leq x \leq L$), $U = U_0$ y la solución es exponencial, como en la ecuación (40.40). Igual que el pozo de potencial finito, las funciones se deben unir suavemente en los puntos limítrofes $x = 0$ y $x = L$, lo que significa que tanto $\psi(x)$ como $d\psi(x)/dx$ deben ser continuas en esos puntos.

Estos requisitos conducen a una función de onda como la que se muestra en la figura 40.20. La función *no* es cero dentro de la barrera (la región prohibida por la mecánica newtoniana). Es todavía más notable que una partícula que inicialmente esté a la *izquierda* de la barrera tenga cierta probabilidad de encontrarse a la *derecha* de esa barrera. ¿Qué tan alta es la probabilidad? Eso depende del ancho L de la barrera y de la energía E de la partícula, en comparación con la altura U_0 de la barrera. La **probabilidad de tunelamiento** T de que la partícula atraviese la barrera es proporcional al cuadrado de la proporción de las amplitudes de las funciones de onda sinusoidales, a los dos lados de la barrera. Estas amplitudes se determinan igualando las funciones de onda y sus derivadas en los puntos limítrofes, lo cual es un problema matemático. Cuando T es mucho menor que la unidad, se determina en forma aproximada con

$$T = Ge^{-2\kappa L} \text{ donde } G = 16\frac{E}{U_0}\left(1 - \frac{E}{U_0}\right) \text{ y } \kappa = \frac{\sqrt{2m(U_0 - E)}}{\hbar} \qquad (40.42)$$

(probabilidad de tunelamiento)

La probabilidad disminuye rápidamente al aumentar el ancho L de la barrera. También depende en forma crítica de la diferencia de energía $U_0 - E$, que representa la energía cinética adicional que necesitaría la partícula para subir y pasar sobre la barrera, en un análisis newtoniano.



Ejemplo 40.7 Tunelamiento a través de una barrera



Un electrón de 2.0 eV encuentra una barrera de 5.0 eV de altura. ¿Cuál es la probabilidad de que haga tunelamiento a través de la barrera, si el ancho de esta es *a*) 1.00 nm, *b*) 0.50 nm?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Este problema utiliza las ideas de tunelamiento a través de una barrera rectangular, como la que muestran las figuras 40.19 y 40.20. Nuestra incógnita es la probabilidad de tunelamiento T en la ecuación (40.42), que evaluaremos con los datos $E = 2.0$ eV (energía del electrón), $U = 5.0$ eV (altura de la barrera), $m = 9.11 \times 10^{-31}$ kg (masa del electrón) y $L = 1.00$ nm o 0.50 nm (ancho de la barrera).

EJECUTAR: Primero evaluaremos G y κ en la ecuación (40.42), usando $E = 2.0$ eV:

$$G = 16\left(\frac{2.0\text{ eV}}{5.0\text{ eV}}\right)\left(1 - \frac{2.0\text{ eV}}{5.0\text{ eV}}\right) = 3.8$$

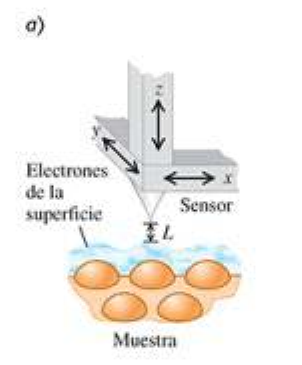
$$U_0 - E = 5.0\text{ eV} - 2.0\text{ eV} = 3.0\text{ eV} = 4.8 \times 10^{-19}\text{ J}$$

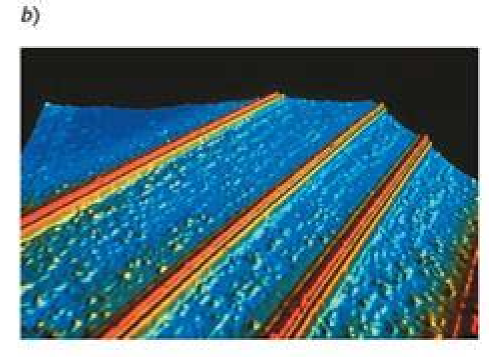
$$\kappa = \frac{\sqrt{2(9.11 \times 10^{-31}\text{ kg})(4.8 \times 10^{-19}\text{ J})}}{1.055 \times 10^{-34}\text{ J}\cdot\text{s}} = 8.9 \times 10^9\text{ m}^{-1}$$

a) Cuando $L = 1.00$ nm $= 1.00 \times 10^{-9}$ m, $2\kappa L = 2(8.9 \times 10^9\text{ m}^{-1})(1.00 \times 10^{-9}\text{ m}) = 17.8$ y $T = Ge^{-2\kappa L} = 3.8e^{-17.8} = 7.1 \times 10^{-8}$.

b) Cuando $L = 0.50$ nm, esto es, la mitad de 1.00 nm, $2\kappa L$ es la mitad de 17.8, es decir, 8.9, Por lo tanto, $T = 3.8e^{-8.9} = 5.2 \times 10^{-4}$.

EVALUAR: Al reducir a la mitad el ancho de esta barrera, la probabilidad del tunelamiento aumenta en un factor de $(5.2 \times 10^{-4})/(7.1 \times 10^{-8}) = 7.3 \times 10^3$, o casi 10 mil. La probabilidad de tunelamiento es una función *extremadamente* sensible al ancho de la barrera.





40.21 *a*) Esquema del sensor de un microscopio de tunelamiento (STM). Al barrer la superficie con el sensor conductor puntiagudo en las direcciones x y y, este también se mueve en la dirección z para mantener una corriente constante de tunelamiento. La posición variable del sensor se registra y se usa para formar una imagen de la superficie. *b*) Esta imagen STM a colores muestra "alambres cuánticos": tiras finas, de solo 10 átomos de espesor, de un conductor de siliciuro de tierras raras encima de la superficie de silicio. Estos alambres cuánticos podrían algún día ser la base de los circuitos ultraminiaturizados.

Aplicaciones del tunelamiento

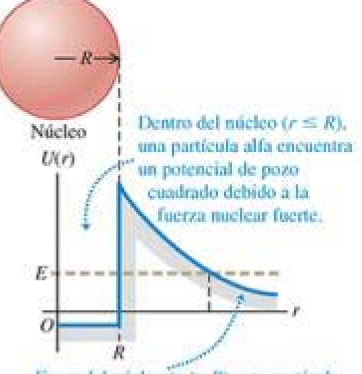
El tunelamiento tiene diversas aplicaciones prácticas, algunas de mucha importancia. Por ejemplo, cuando usted retuerce dos alambres de cobre para unirlos y conectarlos, o cierra los contactos de un interruptor, la corriente pasa de uno a otro conductor, a pesar de que haya una capa delgada de óxido de cobre, no conductora, entre ellos. Los electrones se filtran atravesando esta capa delgada aislante. El *diodo túnel* es un dispositivo semiconductor donde los electrones atraviesan una barrera de potencial. La corriente puede conectarse y desconectarse con mucha rapidez (en menos de algunos picosegundos) al variar la altura de la barrera. La *unión de Josephson* consiste en dos superconductores separados por una capa de óxido de unos cuantos átomos de espesor (de 1 a 2 nm). Los pares de electrones en el superconductor pueden hacer tunelamiento a través de la capa de barrera, comunicando al dispositivo algunas propiedades de circuito excepcionales. Las uniones Josephson son útiles para establecer normas precisas de voltaje y para medir campos magnéticos diminutos; también desempeñan un papel importante en el campo en desarrollo de la computación cuántica.

El *microscopio de tunelamiento* (STM, por las siglas de *scanning tunneling microscope*) usa el tunelamiento de electrones para formar imágenes de las superficies, hasta escalas atómicas. Una aguja conductora extremadamente aguda se acerca mucho a la superficie, a menos de 1 nm (figura 40.21*a*). Cuando la aguja tiene un potencial positivo con respecto a la superficie, los electrones pueden hacer tunelamiento a través de la barrera de energía potencial de la superficie y llegar a la aguja. Como muestra el ejemplo 40.7, la probabilidad de tunelamiento y, por consiguiente, la corriente de tunelamiento, dependen mucho del ancho L de la barrera (la distancia entre la superficie y la punta de la aguja). En una forma de operación, la aguja recorre la superficie y, al mismo tiempo, se mueve perpendicular a ella para mantener una corriente constante de tunelamiento. Se registra el movimiento de la aguja y, después de muchos recorridos paralelos, se puede reconstruir una imagen de la superficie. Es esencial tener un control extremadamente preciso del movimiento de la aguja, y también aislarla de la vibración. La figura 40.21*b* muestra una imagen del STM (al igual que la figura 40.17).

El tunelamiento tiene gran importancia en la física nuclear. Cuando dos núcleos hacen tunelamiento a través de la barrera generada por su repulsión eléctrica y se acercan lo suficiente para que la fuerza nuclear fuerte los una, puede efectuarse una reacción de fusión. Las reacciones de fusión se efectúan en los núcleos de las estrellas, incluyendo el núcleo del Sol; sin tunelamiento, el Sol no brillaría. La emisión de partículas alfa de núcleos inestables también implica tunelamiento. Una partícula alfa es un cúmulo de dos protones y dos neutrones (igual que el núcleo común de la forma más común del helio). Estos cúmulos se forman naturalmente dentro de grandes núcleos atómicos. Una partícula alfa tratando de escapar de un núcleo encuentra una barrera de potencial debida al efecto combinado de la fuerza nuclear de atracción y la repulsión eléctrica de la parte restante del núcleo (figura 40.22). La partícula alfa se puede escapar solo por tunelamiento a través de esta barrera. Dependiendo de la altura y del ancho de la barrera para una clase dada de núcleo emisor de partículas alfa, la probabilidad de tunelamiento puede ser baja o alta, y los materiales emisores de partículas alfa tendrán radiactividad baja o alta. Recuerde de la sección 39.2 que Ernest Rutherford utilizó

Aplicación Tunelamiento en enzimas Las moléculas de proteínas desempeñan un papel esencial como enzimas en los organismos vivos. Las enzimas, como la que se muestra aquí, son moléculas grandes; en muchos casos, su función depende de la capacidad de los electrones para hacer tunelamiento a través del espacio que separa una parte de la molécula de otra. Sin tunelamiento, ¡la vida tal como la conocemos sería imposible!

40.22 Función energía potencial aproximada de una partícula alfa que interactúa con un núcleo de radio R. Si una partícula alfa en el interior del núcleo tiene una energía E mayor que cero, puede hacer un tunelamiento a través de la barrera y escapar del núcleo.



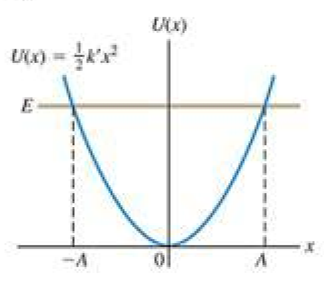
partículas alfa de una fuente radiactiva para descubrir la estructura del núcleo atómico. Aunque Rutherford no lo sabía, el tunelamiento de estas partículas alfa ¡hizo posibles sus experimentos! Vamos a aprender más acerca del decaimiento alfa en el capítulo 43.

Evalúe su comprensión de la sección 40.4 ¿Es posible que una partícula que pasa por tunelamiento se encuentre *dentro* de la barrera, y no en alguno de sus lados?

40.5 Oscilador armónico

Los sistemas que *oscilan* son de gran importancia en el mundo físico, desde las oscilaciones de sus tímpanos en respuesta a una onda de sonido hasta las vibraciones de la Tierra generadas por un terremoto. Las oscilaciones son igualmente importantes a escala microscópica, donde dominan los efectos cuánticos. Las moléculas del aire alrededor de usted vibran cuando chocan entre sí, los protones y los neutrones en un núcleo atómico excitado pueden oscilar en direcciones opuestas, y un horno de microondas transfiere energía a los alimentos haciendo vibrar las moléculas de agua que hay en ellos. En esta sección veremos las soluciones de la ecuación de Schrödinger para el tipo más sencillo de sistema de vibración, el oscilador armónico cuántico.

40.23 Función de energía potencial para el oscilador armónico. En la mecánica newtoniana, la amplitud A se relaciona con la energía total E mediante $E = \frac{1}{2}k'A^2$, y la partícula está restringida al intervalo de $x = -A$ a $x = A$. En mecánica cuántica, la partícula se puede encontrar en $x > A$ o $x < -A$.



Como aprendimos en el capítulo 14 (vol. 1), un **oscilador armónico** es una partícula de masa m que se mueve a lo largo del eje x bajo la influencia de una fuerza conservativa $F_x = -k'x$. La constante k' se llama la *constante de fuerza*. (En el capítulo 14 (vol. 1) utilizamos el símbolo k para la constante de fuerza. En esta sección utilizaremos el símbolo k' para minimizar la confusión con el número de onda $k = 2\pi/\lambda$). La fuerza es proporcional al desplazamiento x de la partícula con respecto a $x = 0$, su posición de equilibrio. La función correspondiente de energía potencial es $U = \frac{1}{2}k'x^2$ (figura 40.23). En la mecánica newtoniana, cuando la partícula se desplaza con respecto al equilibrio, experimenta un movimiento sinusoidal con frecuencia angular $f = (1/2\pi)(k'/m)^{1/2}$ y una frecuencia angular $\omega = 2\pi f = (k'/m)^{1/2}$. La amplitud (es decir, el desplazamiento máximo a partir del equilibrio) de estas oscilaciones newtonianas es A, que está relacionada con la energía E del oscilador por $E = \frac{1}{2}k'A^2$.

Vamos a hacer una conjetura inteligente acerca de los niveles de energía del oscilador armónico cuántico. En la física clásica, un electrón que oscila con frecuencia angular ω emite radiación electromagnética con esa misma frecuencia angular. Es razonable pensar que cuando un oscilador armónico cuántico con frecuencia angular $\omega = (k'/m)^{1/2}$ (al menos de acuerdo con la mecánica newtoniana) realiza una transición desde un nivel de energía a un nivel inferior, podría emitir un fotón con esta misma frecuencia angular ω. La energía de un fotón es $hf = (h/2\pi)(\omega/2\pi) = \hbar\omega$. Así, esperaríamos que la separación entre los niveles de energía adyacentes del oscilador armónico fuera

$$hf = \hbar\omega = \hbar\sqrt{\frac{k'}{m}} \tag{40.43}$$

Esta es la misma distancia entre los niveles de energía que Planck supuso en su deducción de su ley de radiación (véase la sección 39.5). Esta fue una buena suposición; como veremos, los niveles de energía de un oscilador armónico, en efecto, son múltiplos semienteros $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \ldots\right)$ de $\hbar\omega$.

Funciones de onda, condiciones de frontera y niveles de energía

Comenzamos nuestro análisis de mecánica cuántica del oscilador armónico escribiendo la ecuación unidimensional de Schrödinger, ecuación (40.23), con $\frac{1}{2}k'x^2$ en lugar de U:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + \frac{1}{2}k'x^2\psi(x) = E\psi(x) \quad \text{(ecuación de Schrödinger para el oscilador armónico)} \tag{40.44}$$

Las soluciones de esta ecuación son funciones de onda para los estados físicamente posibles del sistema.

En la descripción de los potenciales en el pozo cuadrado de la sección 40.2, encontramos que los niveles de energía se determinan con condiciones de frontera, en las paredes del pozo. Sin embargo, el potencial del oscilador armónico no tiene tales paredes; entonces, ¿cuáles son las condiciones adecuadas en la frontera? En forma clásica, $|x|$ no puede ser mayor que la amplitud A dada por $E = \frac{1}{2}k'A^2$. La mecánica cuántica sí permite que haya algo de penetración en las regiones prohibidas clásicamente, pero la probabilidad disminuye a medida que aumenta la penetración. Así, las funciones de onda deben tender a cero cuando $|x|$ se hace grande.

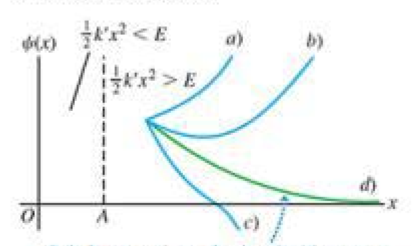
Satisfacer el requisito de que $\psi(x) \to 0$ cuando $|x| \to \infty$ no es tan trivial como parece. Para ver por qué, rescriba la ecuación (40.44) en la forma

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} = \frac{2m}{\hbar^2}\left(\tfrac{1}{2}k'x^2 - E\right)\psi(x) \qquad (40.45)$$

La ecuación (40.45) indica que cuando x es suficientemente grande (ya sea positiva o negativa) para hacer positiva la cantidad $\left(\frac{1}{2}k'x^2 - E\right)$ la función $\psi(x)$ y su segunda derivada $d^2\psi(x)/dx^2$ deben tener el mismo signo. La figura 40.24 muestra cuatro tipos de comportamiento de $\psi(x)$ comenzando en el punto donde x es mayor que la amplitud clásica A, así que $\frac{1}{2}k'x^2 - \frac{1}{2}k'A^2 = \frac{1}{2}k'x^2 - E > 0$. Vamos a ver estos cuatro casos más de cerca. Observe que si $\psi(x)$ es positiva como se muestra en la figura 40.24, la ecuación (40.45) nos dice que $d^2\psi(x)/dx^2$ es positiva y también la función es *cóncava hacia arriba*. También observe que $d^2\psi(x)/dx^2$ es la razón de cambio de la *pendiente* de $\psi(x)$; esto nos ayudará a entender cómo se comportan nuestras cuatro posibles funciones de onda.

- *Curva a:* La pendiente de $\psi(x)$ es positiva en el punto x. Ya que $d^2\psi(x)/dx^2 > 0$, la función se curva hacia arriba cada vez con mayor pendiente y llega a infinito. Esto viola la condición de frontera de que $\psi(x) \to 0$ cuando $|x| \to \infty$, por lo que esta no es una función de onda viable.
- *Curva b:* La pendiente de $\psi(x)$ es negativa en el punto x, y $d^2\psi(x)/dx^2$ tiene el valor positivo más grande. Por lo tanto, la pendiente cambia demasiado rápido de negativa a positiva y se mantiene creciendo; así, de nuevo, la función de onda tiende a infinito. Esta función de onda tampoco es viable.
- *Curva c:* Como en la curva b, la pendiente es negativa en el punto x. Sin embargo, $d^2\psi(x)/dx^2$ tiene ahora un valor positivo *pequeño*, por lo que la pendiente aumenta solo gradualmente conforme $\psi(x)$ disminuye a cero y cruza hacia los valores negativos. La ecuación (40.45) nos dice que una vez que $\psi(x)$ se hace negativa, $d^2\psi(x)/dx^2$ también se vuelve negativa. Por lo tanto, la curva se hace cóncava *hacia abajo* y se dirige hacia el infinito *negativo*. Esta función de onda tampoco cumple los requisitos de que $\psi(x) \to 0$ conforme $|x| \to \infty$ y, por lo tanto, no es viable.
- *Curva d:* Si la pendiente de $\psi(x)$ en el punto x es negativa, y el valor positivo de $d^2\psi(x)/dx^2$ en este punto no es demasiado grande ni demasiado pequeño, la curva se dobla lo suficiente para deslizarse asintóticamente hacia al eje x. En este caso, $\psi(x)$, $d\psi(x)/dx$ y $d^2\psi(x)/dx^2$ tienden a cero para valores de x grandes. Este caso ofrece la única esperanza para satisfacer la condición de frontera de que $\psi(x) \to 0$ cuando $|x| \to \infty$, y solo se produce para ciertos valores muy especiales de la energía E.

40.24 Posibles comportamientos de las funciones de onda para el oscilador armónico, en la región $\frac{1}{2}k'x^2 > E$. En esta región, $\psi(x)$ y $d^2\psi(x)/dx^2$ tienen el mismo signo. La curva es cóncava hacia arriba cuando $d^2\psi(x)/dx^2$ es positiva y cóncava hacia abajo cuando $d^2\psi(x)/dx^2$ es negativa.

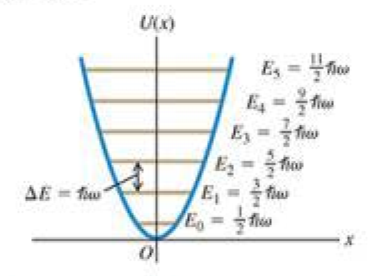


Esta descripción cualitativa permite comprender cómo las condiciones de frontera, cuando $|x| \to \infty$, determinan los niveles posibles de energía para el oscilador armónico cuántico. Esto da como resultado que tales condiciones de frontera solo se satisfagan si la energía E es igual a uno de los valores E_n, dados por la fórmula simple

$$E_n = \left(n + \tfrac{1}{2}\right)\hbar\sqrt{\frac{k'}{m}} = \left(n + \tfrac{1}{2}\right)\hbar\omega \quad (n = 0, 1, 2, \ldots) \qquad (40.46)$$

(niveles de energía, oscilador armónico)

donde n es el número cuántico que identifica cada estado y nivel de energía. Observe que el nivel fundamental de energía $E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega$ se expresa por $n = 0$, y *no* por $n = 1$.



40.25 Niveles de energía del oscilador armónico. La distancia entre dos niveles adyacentes cualesquiera es $\Delta E = \hbar\omega$. La energía del nivel fundamental es $E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega$.

La ecuación (40.46) confirma nuestra hipótesis (ecuación 40.43) de que los niveles de energía adyacentes están separados por un intervalo constante de $\hbar\omega = hf$, como Planck supuso en 1900. Hay una cantidad infinita de niveles, lo cual no debería sorprendernos, ya que estamos tratando con un pozo de potencial de profundidad infinita. Conforme $|x|$ aumenta, $U = \frac{1}{2}k'x^2$ se incrementa sin límite.

La figura 40.25 muestra los seis niveles de energía mínimos y la función de energía potencial $U(x)$. Para cada nivel n, el valor de $|x|$ en el cual la línea horizontal que representa la energía total E_n cruza $U(x)$ define la amplitud A_n del oscilador newtoniano correspondiente.

Ejemplo 40.8 Vibración en un cristal



Un átomo de sodio de masa 3.82×10^{-26} kg vibra en un cristal. La energía potencial aumenta 0.0075 eV cuando el átomo se desplaza 0.014 nm de su posición de equilibrio. Trate el átomo como un oscilador armónico. *a*) Determine la frecuencia angular de las oscilaciones de acuerdo con la mecánica newtoniana. *b*) Calcule las distancias entre los niveles de energía adyacentes (en electrón volts) de acuerdo con la mecánica cuántica. *c*) Si un átomo emite un fotón durante una transición de un nivel de vibración al siguiente nivel menor, ¿cuál es la longitud de onda de ese fotón? ¿En cuál región del espectro electromagnético está?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Determinaremos la constante de la fuerza k' de la expresión $U = \frac{1}{2}k'x^2$ para la energía potencial. Después calcularemos la frecuencia angular $\omega = (k'/m)^{1/2}$, la cual utilizaremos en la ecuación (40.46) para determinar la distancia entre niveles adyacentes. Calcularemos la longitud de onda del fotón emitido, usando las mismas ideas que en el ejemplo 40.6.

EJECUTAR: Nos dan $U = 0.0075\ \text{eV} = 1.2 \times 10^{-21}$ J cuando $x = 0.014 \times 10^{-9}$ m, así que podemos despejar $U = \frac{1}{2}k'x^2$ de k':

$$k' = \frac{2U}{x^2} = \frac{2(1.2 \times 10^{-21}\ \text{J})}{(0.014 \times 10^{-9}\ \text{m})^2} = 12.2\ \text{N/m}$$

a) La frecuencia angular es

$$\omega = \sqrt{\frac{k'}{m}} = \sqrt{\frac{12.2\ \text{N/m}}{3.82 \times 10^{-26}\ \text{kg}}} = 1.79 \times 10^{13}\ \text{rad/s}$$

b) De acuerdo con la ecuación (40.46) y con la figura 40.25, la distancia entre los niveles adyacentes de energía es

$$\hbar\omega = (1.054 \times 10^{-34}\ \text{J}\cdot\text{s})(1.79 \times 10^{13}\ \text{s}^{-1})$$
$$= 1.88 \times 10^{-21}\ \text{J}\left(\frac{1\ \text{eV}}{1.602 \times 10^{-19}\ \text{J}}\right) = 0.0118\ \text{eV}$$

c) La energía E del fotón emitido es igual a la energía perdida por el oscilador en la transición, 0.0118 eV. Entonces,

$$\lambda = \frac{hc}{E} = \frac{(4.136 \times 10^{-15}\ \text{eV}\cdot\text{s})(3.00 \times 10^{8}\ \text{m/s})}{0.0118\ \text{eV}}$$
$$= 1.05 \times 10^{-4}\ \text{m} = 105\ \mu\text{m}$$

Esta longitud de onda del fotón está en la región infrarroja del espectro.

EVALUAR: Este ejemplo nos indica que las constantes de fuerza para las fuerzas interatómicas son del orden de unos cuantos newtons por metro, aproximadamente los mismos valores que para los resortes comunes, o los resortes de juguetes, como un Slinky®. Esto también sugiere que podemos aprender acerca de las vibraciones de las moléculas midiendo la radiación que emiten al pasar de un estado vibratorio a uno más bajo. En el capítulo 42 estudiaremos más este tema.

MasteringPHYSICS

ActivPhysics 20.1.6: Potential Energy Diagrams, Question 6

Comparación entre osciladores cuánticos y newtonianos

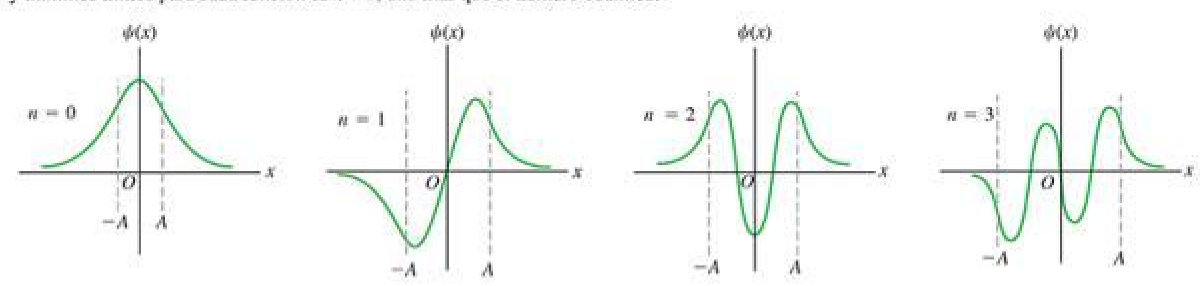
Las funciones de onda para los niveles $n = 0, 1, 2, \ldots$ del oscilador armónico se denominan *funciones de Hermite*; aunque estas no se estudian en los cursos elementales de cálculo, son bien conocidas por los matemáticos. Cada función de Hermite es una función exponencial multiplicada por un polinomio en x. La función de onda del oscilador armónico y correspondiente para $n = 0$ y $E = E_0$ (nivel fundamental) es

$$\psi(x) = Ce^{-\sqrt{mk'}\,x^2/2\hbar} \qquad (40.47)$$

La constante C se elige para normalizar la función, es decir, para hacer $\int_{-\infty}^{\infty}|\psi|^2\,dx = 1$. (Estamos usando C en lugar de A para la constante de normalización en esta sección, ya que ya hemos asignado el símbolo A para denotar la amplitud newtoniana del oscilador armónico). Es posible determinar C utilizando los siguientes resultados de las tablas integrales:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{a}$$

40.26 Las primeras cuatro funciones de onda para el oscilador armónico. La amplitud A de un oscilador newtoniano con la misma energía total se indica en cada una. Cada función de onda penetra un poco en las regiones clásicamente prohibidas $|x| > A$. La cantidad total de máximos y mínimos finitos para cada función es $n + 1$, uno más que el número cuántico.



Para confirmar que $\psi(x)$ dada por la ecuación (40.47) realmente *es* una solución de la ecuación de Schrödinger para el oscilador armónico, le invitamos a calcular la segunda derivada de esta función de onda; sustitúyala en la ecuación (40.44) y compruebe que la ecuación se satisface si la energía E es igual a $E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega$ (véase el ejercicio 40.38). Es un tanto complicado, pero el resultado es satisfactorio y vale la pena el esfuerzo.

La figura 40.26 muestra las cuatro primeras funciones de onda para el oscilador armónico. Además, cada gráfica muestra la amplitud A de un oscilador armónico newtoniano con la misma energía, esto es, el valor de A determinado con

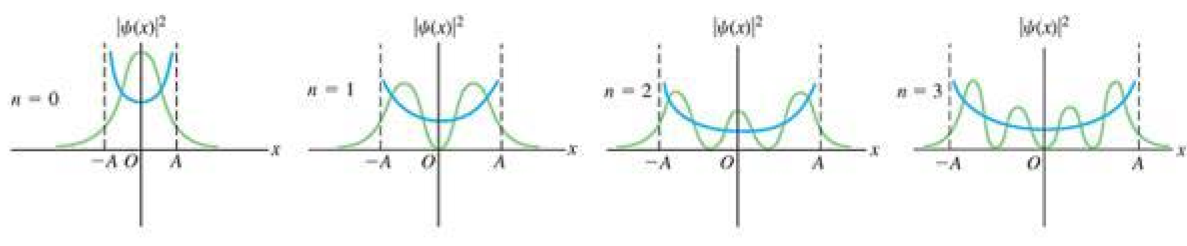
$$\frac{1}{2}k'A^2 = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega \qquad (40.48)$$

En cada caso, hay algo de penetración de la función de onda en las regiones $|x| > A$, prohibidas por la mecánica newtoniana. Esto se parece al efecto que observamos en la sección 40.3 con la partícula en un pozo cuadrado finito.

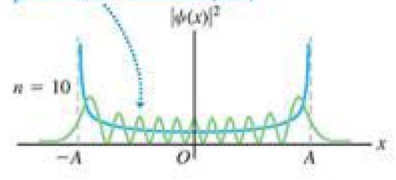
La figura 40.27 muestra las distribuciones de probabilidad $|\psi(x)|^2$ para estos mismos estados. Cada gráfica también muestra las distribuciones de probabilidad determinadas con física newtoniana, donde la probabilidad de encontrar la partícula cerca de un punto elegido al azar es inversamente proporcional a su rapidez en ese punto. Si promediamos las funciones de las curvas de probabilidad mecánico-cuánticas, los resultados para $n > 0$ se parecen a las predicciones newtonianas. Esta concordancia mejora al aumentar n; la figura 40.28 muestra las funciones clásicas y mecánico-cuánticas de probabilidad para $n = 10$. Observe que la distancia entre las raíces de $|\psi(x)|^2$ en la figura 40.28 aumenta al incrementarse la distancia a $x = 0$. Esto tiene lógica, desde la perspectiva newtoniana: a medida que una partícula se aleja de $x = 0$, disminuyen tanto energía cinética K como la magnitud p de su momento lineal. Razonando en forma mecánico-cuántica, eso quiere decir que aumenta la longitud de onda $\lambda = h/p$, por lo que la distancia entre las raíces de $\psi(x)$ (y en consecuencia de $|\psi(x)|^2$) también se incrementa.

En el análisis newtoniano del oscilador armónico, la energía mínima es cero y la partícula está en reposo en su posición de equilibrio. Eso no es posible en la mecánica cuántica; ninguna solución de la ecuación de Schrödinger tiene $E = 0$ y satisface las condiciones de frontera. Además, si hubiera un estado así, violaría el principio de

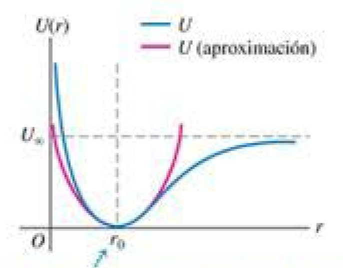
40.27 Funciones de distribución de probabilidad $|\psi(x)|^2$ para las funciones de onda del oscilador armónico que se muestran en la figura 40.26. Para cada una se muestra la amplitud A del movimiento newtoniano con la misma energía. Las líneas azules indican las distribuciones de probabilidad correspondientes para el movimiento newtoniano. Conforme n aumenta, las funciones mecánico-cuánticas promediadas se parecen cada vez más a las curvas newtonianas.



40.28 Funciones de distribución de probabilidad newtoniana y de mecánica cuántica, para un oscilador armónico en el estado $n = 10$. También se muestra la amplitud newtoniana A.



40.29 Una función de energía potencial que describe la interacción de dos átomos en una molécula diatómica. La distancia r es la separación entre los centros de los átomos, y la separación de equilibrio es $r = r_0$. La energía potencial necesaria para disociar la molécula es U_∞.



incertidumbre, porque no habría incertidumbre en la posición o en el momento lineal. La energía debe ser cuando menos de $\frac{1}{2}\hbar\omega$ para el sistema, con la finalidad de concordar con el principio de incertidumbre. Para ver en forma cualitativa por qué es así, considere un oscilador newtoniano con energía total $\frac{1}{2}\hbar\omega$. Podemos determinar una amplitud A y la velocidad máxima, igual que como lo hicimos en la sección 14.3 (vol. 1). Cuando la partícula está en su desplazamiento máximo ($x = \pm A$) e instantáneamente en reposo, $K = 0$ y $E = U = \frac{1}{2}k'A^2$. Cuando la partícula está en equilibrio ($x = 0$) y se está moviendo con su rapidez máxima, $U = 0$ y $E = K = \frac{1}{2}mv_{\text{máx}}{}^2$. Al establecer que $E = \frac{1}{2}\hbar\omega$, encontramos

$$E = \tfrac{1}{2}k'A^2 = \tfrac{1}{2}\hbar\omega = \tfrac{1}{2}\hbar\left(\frac{k'}{m}\right)^{1/2} \qquad \text{así} \qquad A = \frac{\hbar^{1/2}}{k'^{1/4}m^{1/4}}$$

$$E = \tfrac{1}{2}mv_{\text{máx}}{}^2 = \tfrac{1}{2}k'A^2 \qquad \text{así} \qquad v_{\text{máx}} = A\left(\frac{k'}{m}\right)^{1/2} = \frac{\hbar^{1/2}k'^{1/4}}{m^{3/4}}$$

El *momento lineal* máximo de la partícula es

$$p_{\text{máx}} = mv_{\text{máx}} = \hbar^{1/2}k'^{1/4}m^{1/4}$$

Aquí es donde el principio de incertidumbre de Heisenberg entra en juego. Resulta que las incertidumbres en la posición de la partícula y en el momento lineal (calculadas como desviaciones estándar) son, respectivamente, $\Delta x = A/\sqrt{2} = A/2^{1/2}$ y $\Delta p_x = p_{\text{máx}}/\sqrt{2} = p_{\text{máx}}/2^{1/2}$. Entonces, el producto de las dos incertidumbres es

$$\Delta x\,\Delta p_x = \left(\frac{\hbar^{1/2}}{2^{1/2}\,k'^{1/4}\,m^{1/4}}\right)\left(\frac{\hbar^{1/2}\,k'^{1/4}\,m^{1/4}}{2^{1/2}}\right) = \frac{\hbar}{2}$$

Este producto es igual al valor mínimo permitido por la ecuación (39.29), $\Delta x\,\Delta p_x \geq \hbar/2$, y así satisface el principio de incertidumbre. Si la energía hubiera sido menor que $\frac{1}{2}\hbar\omega$, el producto $\Delta x\,\Delta p_x$ hubiera sido menor que $\hbar/2$, y se habría violado el principio de incertidumbre.

Aun cuando una función de energía potencial no tenga exactamente forma parabólica, podemos aproximarla con el potencial de oscilador armónico para desplazamientos suficientemente pequeños con respecto al equilibrio. La figura 40.29 muestra una función típica de energía potencial para una fuerza interatómica en una molécula. A separaciones grandes, la curva $U(r)$ contra r se nivela, lo que corresponde a la ausencia de fuerza a grandes distancias. Pero es aproximadamente parabólica cerca del punto mínimo de $U(r)$ (la separación de equilibrio de los átomos). Cerca del equilibrio, la vibración molecular es aproximadamente armónica simple, con niveles de energía dados por la ecuación (40.46), como supusimos en el ejemplo 40.8.

Evalúe su comprensión de la sección 40.5 Un sistema mecánico-cuántico que está inicialmente en su nivel fundamental absorbe un fotón y termina en el primer estado excitado. Después, el sistema absorbe un segundo fotón y termina en el segundo estado excitado. ¿Para cuál de los siguientes sistemas, el segundo fotón tiene una longitud de onda mayor que el primero? **i.** Un oscilador armónico; **ii.** un átomo de hidrógeno; **iii.** una partícula en una caja.



CAPÍTULO 40 RESUMEN



Funciones de onda: La función de onda para una partícula contiene toda su información. Si la partícula se mueve en una dimensión en la presencia de una función de energía potencial $U(x)$, la función de onda $\Psi(x, t)$ obedece la ecuación de Schrödinger unidimensional. [Para una partícula *libre* sobre la que no actúan fuerzas, $U(x) = 0$]. La cantidad $|\Psi(x, t)|^2$, conocida como la función de distribución de probabilidad, determina la probabilidad relativa de encontrar a la partícula cerca de una posición dada en un tiempo determinado. Si la partícula está en un estado de energía definido, llamado estado estacionario, $\Psi(x, t)$ es un producto de la función $\psi(x)$ que solo depende de las coordenadas espaciales y de la función $e^{-iEt/\hbar}$ que depende únicamente del tiempo. Para un estado estacionario, la función de distribución de probabilidad es independiente del tiempo.

Para un estado estacionario, la función de onda $\psi(x)$ para una partícula que se mueve en una dimensión en presencia de un potencial $U(x)$ satisface la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo. Es posible construir funciones de ondas más complejas mediante la superposición de funciones de onda de estado estacionario. Estas partículas representan partículas que se localizan en una región determinada y, por lo tanto, representan ambos aspectos de partícula y de onda. (Vea los ejemplos 40.1 y 40.2).



$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\Psi(x,t)}{\partial x^2} + U(x)\Psi(x,t) = i\hbar\frac{\partial\Psi(x,t)}{\partial t} \quad (40.20)$$

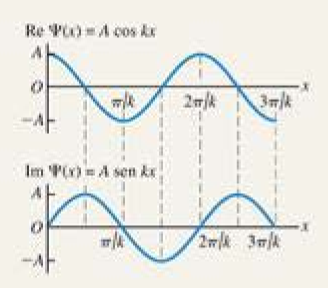
(ecuación de Schrödinger general 1-D)

$$\Psi(x,t) = \psi(x)e^{-iEt/\hbar} \quad (40.21)$$

(función de onda dependiente del tiempo para un estado de energía definida)

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + U(x)\psi(x) = E\psi(x)$$

(ecuación de Schrödinger independiente del tiempo) (40.23)



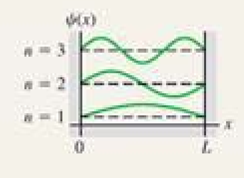
Partícula en una caja: Los niveles de energía para una partícula de masa m en una caja (un pozo cuadrado de potencial, infinitamente profundo) de ancho L se determinan con la ecuación (40.31). Las funciones de onda normalizadas correspondientes para la partícula se determinan con la ecuación (40.35). (Véase los ejemplos 40.3 y 40.4).

$$E_n = \frac{p_n^2}{2m} = \frac{n^2h^2}{8mL^2} = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2mL^2}$$

$(n = 1, 2, 3, \ldots)$ (40.31)

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}}\,\mathrm{sen}\,\frac{n\pi x}{L}$$

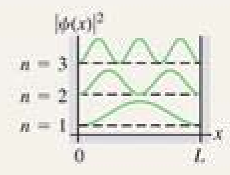
$(n = 1, 2, 3, \ldots)$ (40.35)



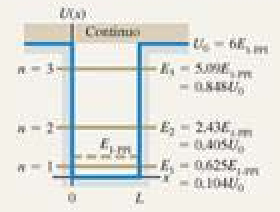
Funciones de onda y normalización: Para ser una solución de la ecuación de Schrödinger, la función de onda $\psi(x)$ y su derivada $d\psi(x)/dx$ deben ser continuas en todos los puntos, excepto donde la función de energía potencial $U(x)$ tenga una discontinuidad infinita. Las funciones de onda se suelen normalizar de tal modo que la probabilidad total de que la partícula se encuentre en algún lugar sea igual a la unidad.

$$\int_{-\infty}^{\infty}|\psi(x)|^2\,dx = 1 \quad (40.33)$$

(condición de normalización)



Pozo de potencial finito: En un pozo de potencial con profundidad finita U_0, los niveles de energía son menores que para un pozo infinitamente profundo del mismo ancho, y el número de niveles de energía que corresponden a estados ligados es finito. Los niveles se obtienen haciendo coincidir las funciones de onda en las paredes del pozo, para satisfacer la continuidad de $\psi(x)$ y de $d\psi(x)/dx$. (Véase los ejemplos 40.5 y 40.6).

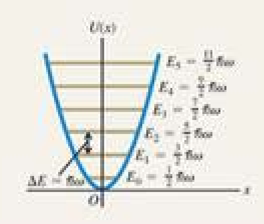


Barreras de potencial y tunelamiento: Hay cierta probabilidad de que una partícula penetre una barrera de energía potencial, aunque su energía cinética inicial sea menor que la altura de la barrera. A este proceso se le conoce como tunelamiento. (Véase el ejemplo 40.7).



Oscilador armónico cuántico: Los niveles de energía del oscilador armónico (para el cual $U(x) = \frac{1}{2}k'x^2$) se determinan con la ecuación (40.46). La distancia entre dos niveles adyacentes cualesquiera es $\hbar\omega$, donde $\omega = \sqrt{k'/m}$ es la frecuencia angular de oscilación del oscilador armónico newtoniano correspondiente. (Véase el ejemplo 40.8).

$$E_n = \left(n + \tfrac{1}{2}\right)\hbar\sqrt{\frac{k'}{m}} = \left(n + \tfrac{1}{2}\right)\hbar\omega$$
$$(n = 0, 1, 2, 3, \ldots) \qquad (40.46)$$





PROBLEMA PRÁCTICO — Un paquete en una caja

Una partícula de masa m en un pozo infinitamente profundo tiene la siguiente función de onda en la región de $x = 0$ a $x = L$:

$$\Psi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\psi_1(x)e^{-iE_1t/\hbar} + \frac{1}{\sqrt{2}}\psi_2(x)e^{-iE_2t/\hbar}$$

Aquí, $\psi_1(x)$ y $\psi_2(x)$ son las funciones de onda normalizadas de estado estacionario para los dos primeros niveles ($n = 1$ y $n = 2$), dados por la ecuación (40.35). E_1 y E_2, dadas por la ecuación (40.31), son las energías de estos niveles. La función de onda es cero para $x < 0$ y para $x > L$. *a*) Determine la función de distribución de probabilidad para esta función de onda. *b*) ¿$\Psi(x, t)$ representa un estado estacionario de energía definida? ¿Cómo lo puede saber? *c*) Demuestre que la función de onda $\Psi(x, t)$ está normalizada. *d*) Determine la frecuencia angular de oscilación de la función de distribución de probabilidad. ¿Cuál es la interpretación de esta oscilación? *e*) Suponga que $\Psi(x, t)$, en lugar de ser una combinación de las funciones de onda de los dos niveles más bajos de un pozo finito de longitud L y altura U_0, es igual a seis veces la energía del estado ligado de nivel más bajo de energía de un pozo infinito de longitud L. ¿Cuál sería la frecuencia angular de la función de distribución de probabilidad en este caso?

GUÍA DE SOLUCIÓN

Vea el área de estudio MasteringPhysics® para consultar una solución con Video Tutor.



IDENTIFICAR y PLANTEAR

1. En la sección 40.1 vimos cómo interpretar la combinación de dos funciones de onda de partícula libre de diferentes energías. En este problema es necesario aplicar estas mismas ideas a una combinación de funciones de onda para el pozo infinito (sección 40.2) y el pozo finito (sección 40.3).

EJECUTAR

2. Escriba la función de onda completa dependiente del tiempo $\Psi(x, t)$ y su compleja conjugada $\Psi^*(x, t)$ usando las funciones $\psi_1(x)$ y $\psi_2(x)$ de la ecuación (40.35). Utilícelas para calcular la función de distribución de probabilidad, y decidir si la función depende del tiempo o no.
3. Para comprobar la normalización, necesita verificar que cuando integre la función de distribución de probabilidad del paso 2 sobre todos los valores de x, la integral sea igual a 1. [*Sugerencia:* Le serán útiles las identidades trigonométricas $\operatorname{sen}^2\theta = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\theta)$ y $\operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi = \cos(\theta - \phi) - \cos(\theta + \phi)$].
4. Para encontrar la respuesta del inciso *d*), necesita identificar la frecuencia de oscilación angular ω_{osc} en su expresión del paso 2 para la función de distribución de probabilidad. Para interpretar las oscilaciones, dibuje las gráficas de las funciones de distribución de probabilidad en los tiempos $t = 0$, $t = T/4$, $t = T/2$ y $t = 3T/4$, donde $T = 2\pi/\omega_{osc}$ es el periodo de oscilación de la función de distribución de probabilidad.
5. Para el pozo finito no se cuenta con expresiones sencillas para las dos primeras funciones de onda de estado estacionario $\psi_1(x)$ y $\psi_2(x)$. Sin embargo, es posible determinar la frecuencia de oscilación angular ω_{osc} que está relacionada con las energías E_1 y E_2, de la misma manera que para el caso del pozo infinito. (¿Sabe por qué?).

EVALUAR

6. ¿Por qué los factores de $1/\sqrt{2}$ son importantes en la función de onda $\Psi(x, t)$?
7. ¿Por qué supone que la frecuencia de oscilación angular para un pozo finito es menor que para un pozo infinito del mismo ancho?

Problemas

Para tareas asignadas por el profesor, visite www.masteringphysics.com



•, ••, •••: Problemas de dificultad creciente. **PA**: Problemas acumulativos que incorporan material de capítulos anteriores. **CALC**: Problemas que requieren cálculo. **BIO**: Problemas de ciencias biológicas.

PREGUNTAS PARA ANÁLISIS

P40.1 Si la mecánica cuántica sustituye el lenguaje de la mecánica newtoniana, ¿por qué no hay que usar funciones de onda para describir el movimiento de cuerpos macroscópicos, como pelotas de béisbol y automóviles?

P40.2 Un estudiante hace notar que la relación entre la óptica geométrica y el esquema ondulatorio más general es análoga a la relación entre la mecánica newtoniana, con trayectorias de partícula bien definidas, y la mecánica cuántica. Comente esta apreciación.

P40.3 Como indica la ecuación (40.21), la función de onda dependiente del tiempo para un estado estacionario es un número complejo que tiene una parte real y otra parte imaginaria. ¿Cómo es posible que esta función tenga un significado físico, si tiene una parte *imaginaria*?

P40.4 ¿Por qué debe normalizarse la función de onda de una partícula?

P40.5 Si una partícula se encuentra en un estado estacionario, ¿quiere decir eso que no se mueve? Si una partícula se mueve en el espacio vacío, con un momento lineal constante $\vec{p}$ y, en consecuencia, con energía constante $E = p^2/2m$, ¿se encuentra en un estado estacionario? Explique sus respuestas.

P40.6 Para una partícula en una caja se elige $k = n\pi/L$ con $n = 1, 2, 3, \ldots$ con la finalidad de ajustarse a la condición de frontera de que $\psi = 0$ cuando $x = L$. Sin embargo, $n = 0, -1, -2, -3, \ldots$ también satisfacen esa condición de frontera. ¿Por qué no elegimos también esos valores de n?

P40.7 Si ψ se normaliza, ¿cuál es el significado físico del área bajo la curva de $|\psi|^2$ contra x, entre x_1 y x_2? ¿Cuál es el área total bajo la curva de $|\psi|^2$ cuando se incluyen todas las x? Explique por qué.

P40.8 Para una partícula en una caja, ¿cómo se vería la función de distribución de probabilidad $|\psi|^2$ si la partícula se comportara como una partícula clásica (newtoniana)? ¿Las distribuciones de probabilidad reales tienden a esta forma clásica cuando n es muy grande? Explique por qué.

P40.9 En el capítulo 15 (vol. 1) representamos una onda estacionaria como una superposición de dos ondas que viajaban en direcciones opuestas. ¿Se podría pensar también que las funciones de onda de una partícula en una caja son una combinación de dos ondas viajeras? ¿Por qué? ¿Qué interpretación física tiene esta representación? Explique su respuesta.

P40.10 Una partícula en una caja está en el nivel fundamental. ¿Cuál es la probabilidad de que la partícula se encuentre en la mitad derecha de la caja? (Véase la figura 40.12, pero no evalúe una integral). ¿La respuesta es la misma si la partícula está en un nivel excitado? Explique por qué.

P40.11 Las funciones de onda para una partícula en una caja (véase la figura 40.12*a*) son cero en esos puntos. ¿Eso quiere decir que la partícula no puede moverse y pasar por uno de esos puntos? Explique.

P40.12 Para una partícula confinada en un pozo cuadrado infinito, ¿es correcto decir que cada estado de energía definida también es un estado de longitud de onda definida? ¿También es un estado de momento lineal definido? Explique. (*Sugerencia:* Recuerde que el momento lineal es un vector).

P40.13 Para una partícula en un pozo de potencial finito, ¿es correcto decir que cada estado confinado de energía definida también es un estado de longitud de onda definida? ¿Es un estado de momento lineal definido? Explique por qué.

P40.14 En la figura 40.12*b*, la función de probabilidad es cero en los puntos $x = 0$ y $x = L$, las "paredes" de la caja. ¿Quiere decir eso que la partícula nunca choca contra las paredes? Explique por qué.

P40.15 Una partícula queda confinada a un pozo de potencial finito en la región $0 < x < L$. ¿Cómo se compara el área bajo la curva de $|\psi|^2$ en la región $0 < x < L$ con el área total bajo la curva de $|\psi|^2$ cuando se incluyen todas las x posibles?

P40.16 Compare las funciones de onda para los tres primeros niveles de energía de una partícula en una caja de ancho L (véase la figura 40.12*a*) con las funciones de onda correspondientes a un pozo de potencial finito del mismo ancho (véase la figura 40.15*a*). ¿Cómo se compara la longitud de onda en el intervalo $0 \leq x \leq L$ para el nivel $n = 1$ de la partícula en una caja, con la longitud de onda correspondiente del nivel $n = 1$ en el pozo de potencial finito? Use el resultado para explicar por qué E_1 es menor que $E_{1\text{-IDP}}$ en el caso que muestra la figura 40.15*b*.

P40.17 En la sección 40.3 se indicó que un pozo de potencial finito siempre tiene cuando menos un nivel confinado, sin importar lo superficial que sea. ¿Quiere decir eso que cuando $U_0 \to 0$, $E_1 \to 0$? ¿Viola eso el principio de incertidumbre de Heisenberg? Explique por qué.

P40.18 La figura 40.15*a* indica que cuanto mayor sea la energía de un estado confinado en un pozo de potencial finito, la función de onda se extenderá más hacia fuera del pozo (en los intervalos $x < 0$ y $x > L$). Explique por qué sucede esto.

P40.19 En la mecánica clásica (newtoniana), la energía total E de una partícula nunca es menor que la energía potencial U, ya que la energía cinética K no puede ser negativa. Sin embargo, en el tunelamiento a través de una barrera (véase la sección 40.4), una partícula atraviesa por regiones donde E es menor que U. ¿Es eso una contradicción? Explique por qué.

P40.20 La figura 40.17 presenta la imagen de 48 átomos de hierro tomada por un microscopio de tunelamiento, los cuales se colocan en una superficie de cobre; se trata del patrón que indica la densidad electrónica en la superficie de cobre. ¿Qué infiere usted acerca de la función de energía potencial dentro del círculo de los átomos de hierro?

P40.21 En forma cualitativa, ¿cómo espera que la probabilidad de que una partícula que hace tunelamiento a través de una barrera de potencial dependa de la altura de la barrera? Explique.

P40.22 La función de onda de la figura 40.20 es distinta de cero tanto para $x < 0$ como para $x > L$. ¿Eso quiere decir que la partícula se divide en dos partes al chocar contra la barrera, y que una parte hace tunelamiento por la barrera y la otra rebota en ella? Explique por qué.

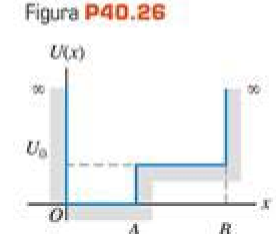
P40.23 Las distribuciones de probabilidad para las funciones de onda del oscilador armónico (véase las figuras 40.27 y 40.28) comienzan a parecerse a la distribución de probabilidad clásica (newtoniana), cuando el número cuántico n se hace grande. ¿Las distribuciones serían iguales que las del caso clásico, en el límite cuando n es muy grande? Explique por qué.

P40.24 En la figura 40.28, ¿cómo se compara la probabilidad de encontrar una partícula en la parte central de la región $-A < x < A$ con la probabilidad de encontrar la partícula en la mitad externa de la región? ¿Es congruente con la interpretación física de la situación?

P40.25 Compare los niveles de energía permitidos para el átomo de hidrógeno, la partícula en una caja y el oscilador armónico. ¿Cuáles son los valores del número cuántico n para el nivel fundamental y el segundo nivel excitado de cada sistema?

P40.26 Dibuje la función de onda para el pozo de potencial que se muestra en la figura P40.26, cuando E_1 es menor que U_0 y cuando E_3 es mayor que U_0.

Figura **P40.26**



EJERCICIOS

Sección 40.1 Funciones de onda y la ecuación de Schrödinger unidimensional

40.1 • Un electrón se mueve como una partícula libre en la dirección $-x$ con un momento lineal de magnitud 4.50×10^{-24} kg·m/s. ¿Cuál es la función de onda unidimensional dependiente del tiempo del electrón?

40.2 • Una partícula libre que se mueve en una dimensión tiene la función de onda

$$\Psi(x, t) = A[e^{i(kx-\omega t)} - e^{i(2kx-4\omega t)}]$$

donde k y ψ son constantes reales positivas. *a*) En $t = 0$, ¿cuáles son los dos valores positivos más pequeños de x para los cuales la función de probabilidad $|\Psi(x, t)|^2$ es máxima? *b*) Repita el inciso *a*) para el tiempo $t = 2\pi/\omega$. *c*) Calcule v_{prom} como la distancia que se han movido los máximos dividida entre el tiempo transcurrido. Compare su resultado con la expresión $v_{prom} = (\psi_2 - \psi_1)/(k_2 - k_1)$ del ejemplo de 40.1.

40.3 • Considere la función de onda-partícula libre del ejemplo 40.1. Sea $k_2 = 3k_1 = 3k$. En $t = 0$ la función de distribución de probabilidad $|\Psi(x, t)|^2$ tiene un máximo en $x = 0$. *a*) ¿Cuál es el valor positivo más pequeño de x para el cual la función de distribución de probabilidad tiene un máximo en el tiempo $t = 2\pi/\omega$, donde $\omega = \hbar k^2/2m$. *b*) A partir de su resultado del inciso *a*), ¿cuál es la rapidez promedio con la cual la distribución de probabilidad se mueve en la dirección $+x$? Compare su resultado con la expresión de $v_{prom} = (\omega_2 - \omega_1)/(k_2 - k_1)$ del ejemplo de 40.1.

40.4 • Considere la partícula libre del ejemplo 40.1. Demuestre que $v_{prom} = (\omega_2 - \omega_1)/(k_2 - k_1)$ se puede escribir como $v_{prom} = p_{prom}/m$, donde $p_{prom} = (\hbar k_2 + \hbar k_1)/2$.

40.5 • Considere una función de onda dada por $\psi(x) = A$ sen kx, donde $k = 2\pi/\lambda$ y A es una constante real. *a)* ¿Para qué valores de x es máxima la probabilidad de encontrar la partícula descrita por esta función de onda? Explique por qué. *b)* ¿Para qué valores de x esa probabilidad es *cero*? Explique por qué.

40.6 •• Calcule $|\Psi|^2$ para $\Psi = \psi$ sen ωt, donde ψ es independiente del tiempo, y ω es una constante real. ¿Es una función de onda para un estado estacionario? ¿Por qué?

40.7 • **CALC** Sean ψ_1 y ψ_2 dos soluciones de la ecuación (40.23) con energías E_1 y E_2, respectivamente, donde $E_1 \neq E_2$. ¿Es $\psi = A\psi_1 + B\psi_2$, donde A y B son constantes distintas de cero, una solución a la ecuación (40.23)? Explique su respuesta.

40.8 • Una partícula se describe con una función de onda $\psi(x) = Ae^{-\alpha x^2}$, donde A y α son constantes reales positivas. Si aumenta el valor de α, ¿qué efecto tiene sobre *a)* la incertidumbre en la posición de la partícula y *b)* la incertidumbre en el momento lineal de la partícula? Explique sus respuestas.

40.9 • **CALC** **Combinaciones lineales de funciones de onda.** Sean ψ_1 y ψ_2 dos soluciones de la ecuación (40.23), con la misma energía E. Demuestre que $\psi = B\psi_1 + C\psi_2$ es también una solución con energía E, para cualquier valor de las constantes B y C.

Sección 40.2 Partícula en una caja

40.10 •• **CALC** Una partícula que se mueve en una dimensión (el eje x) está descrita por la función de onda

$$\psi(x) = \begin{cases} Ae^{-bx}, & \text{para } x \geq 0 \\ Ae^{bx}, & \text{para } x < 0 \end{cases}$$

donde $b = 2.00\ \text{m}^{-1}$, $A > 0$, y el eje $+x$ apunta hacia la derecha. *a)* Determine A de manera que la función de onda este normalizada. *b)* Dibuje la gráfica de la función de onda. *c)* Cálcule la probabilidad de encontrar esta partícula en cada una de las siguientes regiones: **i.** dentro de 50.0 cm del origen; **ii.** en el lado izquierdo del origen (¿es posible inferir la primera respuesta al ver la gráfica de la función de onda?); **iii.** entre $x = 0.500$ m y $x = 1.00$ m.

40.11 • **Bolas de billar en nivel fundamental.** *a)* Calcule el nivel mínimo de energía para una partícula en una caja, si la partícula es una bola de billar ($m = 0.20$ kg) y la caja tiene un ancho de 1.3 m, el tamaño de una mesa de billar. (Suponga que la bola de billar se desliza sin fricción, y no rueda. Esto es, no considere la energía cinética *de rotación*). *b)* Como toda la energía del inciso *a)* es cinética, ¿a qué rapidez corresponde? ¿Cuánto tiempo tardaría la bola, con esta rapidez, para ir de un lado de la mesa al otro? *c)* ¿Cuál es la diferencia en la energía entre los niveles $n = 2$ y $n = 1$? *d)* ¿Son importantes los efectos mecánico-cuánticos en el juego de billar?

40.12 • Un protón está en una caja de ancho L. ¿Cuál debe ser el ancho de la caja para que el nivel fundamental de energía sea 5.0 MeV, un valor característico de la energía con la que están ligadas las partículas en un núcleo? Compare su resultado con el tamaño de un núcleo, que es del orden de 10^{-14} m.

40.13 •• Calcule el ancho L de una caja unidimensional que correspondería al valor absoluto del estado base de un átomo de hidrógeno.

40.14 •• Cuando un átomo de hidrógeno experimenta una transición desde el nivel $n = 2$ al $n = 1$, se emite un fotón con $\lambda = 122$ nm. *a)* Si el átomo se modela como un electrón en una caja unidimensional, ¿cuál es el ancho de la caja, para que la transición de $n = 2$ a $n = 1$ corresponda a la emisión de un fotón con esta energía? *b)* Para una caja con el ancho calculado en el inciso *a)*, ¿cuál es la energía del estado base? ¿Cómo corresponde a la energía del estado base del átomo de hidrógeno? *c)* ¿Cree usted que una caja unidimensional es un buen modelo de un átomo de hidrógeno? Explique por qué. (*Sugerencia:* Compare la distancia entre los niveles de energía adyacentes, en función de n).

40.15 •• Cierto átomo requiere 3.0 eV de energía para excitar un electrón desde el nivel fundamental al primer nivel excitado. Modele el átomo como un electrón en una caja y calcule el ancho L de la caja.

40.16 • Un electrón en una caja unidimensional tiene estado base de 1.00 eV de energía. ¿Cuál es la longitud de onda del fotón absorbido cuando el electrón realiza una transición al segundo estado excitado?

40.17 • **CALC** Demuestre que la función de onda dependiente del tiempo dada por la ecuación (40.35) es una solución de la ecuación de Schrödinger unidimensional, ecuación (40.23).

40.18 • Recuerde que $|\psi|^2 dx$ es la probabilidad de que una partícula, con función de onda normalizada $\psi(x)$, esté en el intervalo x a $x + dx$. Considere una partícula en una caja con paredes rígidas en $x = 0$ y $x = L$. Considere que la partícula está en su nivel fundamental, y use ψ_n de la ecuación (40.35). *a)* ¿Para qué valores de x, si los hay, en el intervalo de 0 a L, la probabilidad de encontrar la partícula es cero? *b)* ¿Para qué valores de x es máxima la probabilidad? *c)* En los incisos *a)* y *b)*, ¿son congruentes sus respuestas con la figura 40.12? Explique.

40.19 • Repita el ejercicio 40.18 para la partícula en su primer nivel excitado.

40.20 • **CALC** *a)* Demuestre que $\psi = A$ sen kx es una solución de la ecuación (40.25) si $k = \sqrt{2mE}/\hbar$. *b)* Explique por qué es una función de onda aceptable para una partícula en una caja con paredes rígidas en $x = 0$ y $x = L$ solo si k es un múltiplo entero de π/L.

40.21 • **CALC** *a)* Repita el ejercicio 40.20 para $\psi = A$ cos kx. *b)* Explique por qué esa no puede ser una función de onda aceptable para una partícula en una caja con paredes rígidas en $x = 0$ y $x = L$, independientemente de cuál sea el valor de k.

40.22 • *a)* Determine la energía de excitación, del nivel fundamental al tercer nivel excitado, para un electrón confinado en una caja de ancho 0.125 nm. *b)* El electrón hace una transición del nivel $n = 1$ al $n = 4$, absorbiendo un fotón. Calcule la longitud de onda de este fotón.

40.23 • Un electrón está en una caja de 3.0×10^{-10} m de ancho. ¿Cuáles son la longitud de onda de De Broglie y la magnitud del momento lineal de ese electrón, si está en *a)* el nivel $n = 1$, *b)* el nivel $n = 2$, *c)* el nivel $n = 3$? En cada caso, ¿cómo se compara la longitud de onda con el ancho de la caja?

40.24 •• **CALC** **Normalización de la función de onda.** Considere una partícula que se mueve en una dimensión, que llamamos el eje x. *a)* ¿Qué significa que la función de onda de la partícula este *normalizada*? *b)* ¿Está normalizada la función de onda $\psi(x) = e^{ax}$, donde a es un número real positivo? ¿Podría ser esta una función de onda válida? *c)* Si la partícula descrita por la función de onda $\psi(x) = Ae^{bx}$, donde A y b son números reales positivos, está confinada al intervalo $x \geq 0$, determine A (incluyendo sus unidades) de modo que la función de onda este normalizada.

Sección 40.3 Pozos de potencial

40.25 • **CALC** *a)* Demuestre que $\psi = A$ sen kx, donde k es una constante real (no compleja), *no* es una solución de la ecuación (40.23) para $U = U_0$ y $E < U_0$. *b)* ¿Es esta ψ una solución para $E > U_0$?

40.26 •• Un electrón se mueve por el pozo cuadrado de la figura 40.13. Tiene energía $E = 3U_0$. ¿Cuál es la proporción de la longitud de onda de De Broglie del electrón en la región $x > L$, con la longitud de onda para $0 < x < L$?

40.27 • Un electrón está confinado en un pozo cuadrado de profundidad $U_0 = 6E_{1\text{-IDW}}$. ¿Cuál es el ancho del pozo, si su energía de estado base es 2.00 eV?

40.28 •• Un electrón está confinado en un pozo cuadrado de 1.50 nm de ancho y profundidad $U_0 = 6E_{1\text{-IDW}}$. Si el electrón está inicialmente

en el nivel fundamental y absorbe un fotón, ¿qué longitud de onda máxima puede tener el fotón para liberar al electrón del pozo?

40.29 • **CALC** Calcule $d^2\psi/dx^2$ para la función de onda de la ecuación (40.38) y demuestre que la función es una solución de la ecuación (40.37).

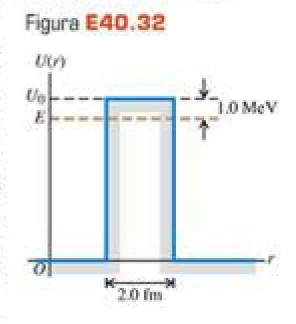
40.30 •• Un electrón está confinado en un pozo cuadrado, cuya profundidad es igual a seis veces la energía $E_{1\text{-IDPW}}$ de nivel fundamental de un pozo infinito con el mismo ancho. El fotón con mayor longitud de onda es absorbido por el electrón que tiene una longitud de onda de 400.0 nm. Determine el ancho del pozo.

40.31 •• Un protón está confinado en un pozo cuadrado de 4.0 fm = 4.0×10^{-15} m de ancho. La profundidad del pozo es seis veces la energía de nivel fundamental $E_{1\text{-IDPW}}$ del pozo infinito correspondiente. Si el protón hace una transición del nivel cuya energía es E_1 hasta el nivel de energía E_3, absorbiendo un fotón, determine la longitud de onda del fotón.

Sección 40.4 Barreras de potencial y tunelamiento

40.32 •• **Decaimiento alfa.** En un modelo sencillo de un núcleo radiactivo, una partícula alfa ($m = 6.64 \times 10^{-27}$ kg) queda atrapada por una barrera cuadrada de 2.0 fm de ancho y 30.0 MeV de altura. *a*) ¿Cuál es la probabilidad de tunelamiento cuando la partícula alfa encuentre la barrera, si su energía cinética es 1.0 MeV menor que la parte superior de la barrera (figura E40.32)? *b*) ¿Cuál es la probabilidad de tunelamiento, si la energía de la partícula alfa es 10.0 MeV menor que la parte superior de la barrera?

Figura **E40.32**



40.33 • Un electrón con una energía cinética inicial 6.0 eV encuentra una barrera de 11.0 eV de altura. ¿Cuál es la probabilidad de que realice tunelamiento, si el ancho de la barrera es *a*) 0.80 nm y*b*) 0.40 nm?

40.34 • Un electrón de 5.0 eV de energía cinética inicial encuentra una barrera de altura U_0 y ancho de 0.60 nm. ¿Cuál es el coeficiente de transmisión si *a*) $U_0 = 7.0$ eV; *b*) $U_0 = 9.0$ eV; *c*) $U_0 = 13.0$ eV?

40.35 •• Un electrón se mueve por la barrera cuadrada que se muestra en la figura 40.19, pero su energía es *mayor* que la altura de la barrera. Si $E = 2U_0$, ¿cuál es la proporción de la longitud de onda de De Broglie del electrón en la región $x > L$ entre la longitud de onda para $0 < x < L$?

40.36 • Un protón con 50.0 eV de energía cinética inicial se encuentra con una barrera de 70.0 eV de altura. ¿Cuál es el ancho de la barrera, si la probabilidad de tunelamiento es de 3.0×10^{-3}? ¿Cómo se compara esto con el ancho de la barrera para un electrón con la misma energía que pasa por una barrera de la misma altura con la misma probabilidad?

40.37 •• *a*) Un electrón con energía cinética inicial de 32 eV se encuentra con una barrera cuadrada de 41 eV de altura y 0.25 nm de ancho. ¿Cuál es la probabilidad de que el electrón efectúe tunelamiento a través de la barrera? *b*) Un protón con la misma energía cinética se encuentra con la misma barrera. ¿Cuál es la probabilidad de que el protón realice tunelamiento a través de la barrera?

Sección 40.5 Oscilador armónico

40.38 • **CALC** Demuestre que $\psi(x)$, definida por la ecuación (40.47), es una solución de la ecuación (40.44) con energía $E_0 = \hbar\omega/2$.

40.39 • Un bloque de madera de 0.250 kg de masa oscila en el extremo de un resorte cuya constante de fuerza es 110 N/m. Calcule la energía del nivel fundamental y la separación de energías entre niveles adyacentes. Exprese sus resultados en joules y en electrón volts. ¿Son importantes los efectos cuánticos?

40.40 • Un oscilador armónico absorbe un fotón de longitud de onda 8.65×10^{-6} m cuando experimenta una transición del estado base al primer estado excitado. ¿Cuál es la energía del estado base del oscilador, en electrón volts?

40.41 • Los químicos usan el espectro de absorción infrarrojo para identificar las sustancias en una muestra. En una de ellas, un químico encontró que se absorbía luz con longitud de onda de 5.8 μm cuando una molécula hace una transición de su nivel fundamental de oscilador armónico a su primer estado excitado. *a*) Calcule la energía de esta transición. *b*) Si la molécula tiene una masa de 5.6×10^{-26} kg, encuentre la constante de fuerza.

40.42 •• La energía de estado base de un oscilador armónico es 5.60 eV. Si el oscilador experimenta una transición de su nivel $n = 3$ al $n = 2$ emitiendo un fotón, ¿cuál es la longitud de onda del fotón?

40.43 • En la sección 40.5 se demostró que para el nivel fundamental de un oscilador armónico, $\Delta x \Delta p_x = \hbar/2$. Realice un análisis similar para un nivel excitado cuyo número cuántico sea n. ¿Cómo depende de n el producto de incertidumbres $\Delta x \Delta p_x$?

40.44 •• Para la función de onda $\psi(x)$ del nivel fundamental del oscilador armónico definida por la ecuación (40.47), $|\psi|^2$ tiene un máximo en $x = 0$. *a*) Calcule la proporción de $|\psi|^2$ en $x = +A$ con $|\psi|^2$ en $x = 0$, donde A está dada por la ecuación (40.48) con $n = 0$ para el nivel fundamental. *b*) Calcule la proporción de $|\psi|^2$ en $x = +2A$ con $|\psi|^2$ en $x = 0$. En cada caso, ¿coincide su resultado con el de la figura 40.27?

40.45 •• Para el átomo de sodio del ejemplo 40.8, calcule *a*) la energía del estado base; *b*) la longitud de onda de un fotón emitido cuando ocurre la transición de $n = 4$ a $n = 3$; *c*) la diferencia de energía para cualquier transición $\Delta n = 1$.

PROBLEMAS

40.46 • El análisis de la sección 40.1 demuestra que la función de onda $\Psi = \psi e^{-i\omega t}$ es un estado estacionario, donde ψ es independiente del tiempo y ω es una constante real (no compleja). Considere la función de onda $\Psi = \psi_1 e^{-i\omega_1 t} + \psi_2 e^{-i\omega_2 t}$, donde ψ_1 y ψ_2 son funciones diferentes independientes del tiempo, y ω_1 y ω_2 son constantes reales diferentes. Suponga que ψ_1 y ψ_2 son funciones con valores reales, así que $\psi_1^* = \psi_1$ y $\psi_2^* = \psi_2$. ¿Es Ψ una función de onda para un estado estacionario? ¿Por qué?

40.47 •• Una partícula de masa m en una caja unidimensional tiene la siguiente función de onda en la región $x = 0$ para $x = L$:

$$\Psi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\psi_1(x)e^{-iE_1t/\hbar} + \frac{1}{\sqrt{2}}\psi_3(x)e^{-iE_3t/\hbar}$$

Aquí, $\psi_1(x)$ y $\psi_3(x)$ son las funciones de onda normalizadas de estado estacionario para los niveles $n = 1$ y $n = 3$, y E_1 y E_3 son las energías de estos niveles. La función de onda es cero para $x < 0$ y para $x > L$. *a*) Determine el valor de la función de distribución de probabilidad en $x = L/2$ como una función del tiempo. *b*) Determine la frecuencia angular de oscilación de la función de distribución de probabilidad.

40.48 •• **CALC** Considere el paquete de ondas definido por

$$\psi(x) = \int_0^{\infty} B(k)\cos kx\, dk$$

Sea $B(k) = e^{-\alpha^2 k^2}$. *a*) La función tiene su valor máximo en $k = 0$. Sea k_h el valor de k para el cual ha disminuido a la mitad de su valor máximo, y se define el ancho de como $w_k = k_h$. En términos de α, ¿a qué es igual w_k? *b*) Utilice tablas integrales para evaluar la integral que da $\psi(x)$. ¿Para qué valor de x es máxima $\psi(x)$? *c*) Defina el ancho de $\psi(x)$ como $w_x = x_h$, donde x_h es el valor positivo de x en el que $\psi(x)$ ha disminuido

a la mitad de su valor máximo. Calcule w_x en términos de α. *d*) El momento p es igual a $hk/2\pi$, por lo que el ancho de B en el momento lineal es $w_p = hw_k/2\pi$. Calcule el producto $w_p w_x$ y compare con el principio de incertidumbre de Heisenberg.

40.49 •• **CALC** *a*) Usando la integral en el problema 40.48, determine la función de onda $\psi(x)$ para una función $B(k)$ dada por

$$B(k) = \begin{cases} 0 & k < 0 \\ 1/k_0, & 0 \le k \le k_0 \\ 0, & k > k_0 \end{cases}$$

Esto representa una combinación igual de todos los números de onda entre 0 y k_0. Por lo tanto, $\psi(x)$ representa una partícula con número de onda promedio $k_0/2$, con una dispersión total o incertidumbre en el número de onda k_0. Vamos a llamar a esta dispersión el *ancho* w_k de $B(k)$, de manera que $w_k = k_0$. *b*) Grafique $B(k)$ contra k y $\psi(x)$ contra x para el caso $k_0 = 2\pi/L$, donde L es la longitud. Localice el punto en que $\psi(x)$ tiene su valor máximo y rotule este punto en su gráfica. Localice los dos puntos más cercanos a este máximo (uno a cada lado de este) donde $\psi(x) = 0$, y defina la distancia a lo largo del eje x entre estos dos puntos como w_x, el ancho de $\psi(x)$. Indique la distancia w_x en su gráfica. ¿Cuál es el valor de w_x si $k_0 = 2\pi/L$? *c*) Repita el inciso *b*) para el caso en que $k_0 = \pi/L$. *d*) El momento lineal p es igual a $hk/2p$, por lo que el ancho de B en el momento lineal es $\omega_p = h\omega_k/2\pi$. Calcule el producto $w_p w_x$ para cada uno de los casos $k_0 = 2\pi/L$ y $k_0 = \pi/L$. Analice sus resultados de acuerdo con el principio de incertidumbre de Heisenberg.

40.50 • **CALC** Demuestre que la función de onda $\psi(x) = Ae^{ikx}$ es una solución de la ecuación (40.23) para una partícula de masa m, en una región donde la energía potencial es una constante $U_0 < E$. Encuentre la expresión para k, y relaciónela con el momento lineal de la partícula y con su longitud de onda de De Broglie.

40.51 •• **CALC** Funciones de onda como las del problema 40.50 pueden representar partículas libres que se mueven con velocidad $v = p/m$ en la dirección de x. Considere un haz de estas partículas que inciden sobre un paso de energía potencial $U(x) = 0$, para $x < 0$ y $U(x) = U_0 < E$, para $x > 0$. La función de onda para $x < 0$ es $\psi(x) = Ae^{ik_1x} + Be^{-ik_1x}$, que representa partículas incidentes y reflejadas, y para $x > 0$ es $\psi(x) = Ce^{ik_2x}$, que representa partículas transmitidas. Use la condición de que tanto ψ como su primera derivada deben ser continuas en $x = 0$ para calcular las constantes B y C en función de k_1, k_2 y A.

40.52 • Sea ΔE_n la diferencia de energías entre los niveles adyacentes de energía E_n y E_{n+1}, para una partícula en una caja. La proporción $R_n = \Delta E_n/E_n$ compara la energía de un nivel con la separación de energía del nivel siguiente superior. *a*) ¿Para qué valor de n es máxima R_n, y cuál es esta R_n máxima? *b*) ¿A qué tiende R_n cuando n se hace muy grande? ¿Cómo se compara este resultado con el valor clásico de esta cantidad?

40.53 • **Fotón en un láser de colorante.** Un electrón en una molécula orgánica larga, que se usa en un láser de colorante, se comporta en forma aproximada como una partícula en una caja de 4.18 nm de ancho. ¿Cuál es la longitud de onda del fotón emitido, cuando el electrón sufre una transición *a*) del primer nivel excitado al nivel fundamental, y *b*) del segundo nivel excitado al primer nivel excitado?

40.54 • **CALC** Una partícula está en el nivel fundamental de una caja que se extiende de $x = 0$ a $x = L$. *a*) ¿Cuál es la probabilidad de que la partícula se encuentre en la región entre 0 y $L/4$? Realice el cálculo integrando $|\psi(x)|^2dx$, donde ψ está normalizada de $x = 0$ a $x = L/4$. *b*) ¿Cuál es la probabilidad de que la partícula se encuentre en la región entre $x = L/4$ y $x = L/2$? ¿Cómo se comparan los resultados de los incisos *a*) y *b*)? Explique. *d*) Sume las probabilidades calculadas en los incisos *a*) y *b*). *e*) ¿Sus resultados de los incisos *a*), *b*) y *c*) son consistentes con la figura 40.12*b*? Explique.

40.55 •• **CALC** ¿Cuál es la probabilidad de que una partícula se encuentre en una caja de longitud L en la región entre $x = L/4$ y $x = 3L/4$, cuando la partícula está en *a*) el nivel fundamental y *b*) el primer nivel excitado? (*Sugerencia:* Integre $|\psi(x)|^2\,dx$, donde ψ está normalizada, entre $L/4$ y $3L/4$). *c*) ¿Sus resultados de los incisos *a*) y *b*) son consistentes con la figura 40.12*b*? Explique.

40.56 •• Considere una partícula que está en una caja con paredes rígidas en $x = 0$ y $x = L$. La partícula está en su nivel fundamental. Calcule la probabilidad $|\psi|^2\,dx$ de que la partícula se encuentre en el intervalo de x a $x + dx$ para *a*) $x = L/4$; *b*) $x = L/2$; *c*) $x = 3L/4$.

40.57 •• Repita el problema 40.56 para una partícula en el primer nivel excitado.

40.58 •• **PA** Una partícula está confinada en una caja de paredes perfectamente rígidas en $x = 0$ y $x = L$. Aunque la magnitud de la fuerza instantánea que las paredes ejercen sobre la partícula es infinita, y el tiempo durante el que actúa es cero, el impulso (el producto de fuerza por tiempo) es finito y también está cuantizado. Demuestre que el impulso ejercido por la pared en $x = 0$ es $(nh/L)\hat{\imath}$ y que el impulso ejercido por la pared en $x = L$ es $-(nh/L)\hat{\imath}$. (*Sugerencia:* Es posible que necesite repasar la sección 8.1 del volumen 1).

40.59 •• **CALC** Un compañero sugiere que una función de onda posible para una partícula libre con masa m [una para la cual la función de energía potencial $U(x)$ es cero] es

$$\psi(x) = \begin{cases} e^{+\kappa x}, & x < 0 \\ e^{-\kappa x}, & x \ge 0 \end{cases}$$

donde κ es una constante positiva. *a*) Grafique esta función de onda propuesta. *b*) Demuestre que satisface la ecuación de Schrödinger para $x < 0$ si la energía es $E = -\hbar^2\kappa^2/2m$, esto es, si la energía de la partícula es *negativa*. *c*) Demuestre que la función de onda propuesta también satisface la ecuación de Schrödinger para $x \ge 0$ con la misma energía que en el inciso *b*). *d*) Explique por qué la función de onda propuesta *no* es una solución aceptable de la ecuación de Schrödinger para una partícula libre. (*Sugerencia:* ¿Cuál es el comportamiento de la función en $x = 0$?). De hecho, es imposible que una partícula libre [una para la cual $U(x) = 0$] tenga energía menor que cero.

40.60 •• La *distancia de penetración* η en un pozo de potencial finito es la distancia a la cual la función de onda ha disminuido a $1/e$ de la función de onda en punto de retorno clásico:

$$\psi(x = L + \eta) = \frac{1}{e}\psi(L)$$

Es posible demostrar que la distancia de penetración es

$$\eta = \frac{\hbar}{\sqrt{2m(U_0 - E)}}$$

La probabilidad de encontrar la partícula más allá de la distancia de penetración es casi cero. *a*) Calcule η para un electrón que tiene una energía cinética de 13 eV en un pozo de potencial con $U_0 = 20$ eV. *b*) Determine η para un protón de 20.0 MeV atrapado en un pozo de potencial con 30.0 MeV de profundidad.

40.61 • **CALC** *a*) Para el pozo de potencial finito de la figura 40.13, ¿qué relaciones se obtienen entre las constantes A y B de la ecuación (40.38), y C y D de la ecuación (40.40), al aplicar la condición de frontera de que ψ sea continua en $x = 0$ y $x = L$? *b*) ¿Qué relaciones se obtienen entre A, B, C y D al aplicar la condición de frontera donde $d\psi/dx$ es continua en $x = 0$ y $x = L$?

40.62 • Un electrón con 5.5 eV de energía cinética inicial se encuentra con una barrera de potencial cuadrada, de altura 10.0 eV. ¿Cuál es

el ancho de la barrera, si el electrón tiene una probabilidad del 0.10% de efectuar tunelamiento a través de la barrera?

40.63 •• Una partícula de masa m y energía total E hace tunelamiento a través de una barrera cuadrada de altura U_0 y ancho L. Cuando el coeficiente de transmisión *no* es mucho menor que la unidad, este es

$$T = \left[1 + \frac{(U_0 \operatorname{senh} \kappa L)^2}{4E(U_0 - E)}\right]^{-1}$$

donde $\operatorname{senh} \kappa L = (e^{\kappa L} - e^{-\kappa L})/2$ es el seno hiperbólico de κL. *a*) Demuestre que si $\kappa L \gg 1$, esta expresión de T tiende a la ecuación (40.42). *b*) Explique por qué la restricción $\kappa L \gg 1$ en el inciso *a*) implica que la barrera sea relativamente ancha, o bien, que la energía E sea relativamente pequeña en comparación con U_0. *c*) Demuestre que cuando la energía cinética de la partícula de incidencia E tiende a U_0, la altura de la barrera, T tiende a $[1 + (kL/2)^2]^{-1}$, donde $k = \sqrt{2mE}/\hbar$ es el número de onda de la partícula incidente. (*Sugerencia:* Si $|z| \ll 1$, entonces, $\operatorname{senh} z \approx z$).

40.64 • **PA** Un oscilador armónico consiste en una masa de 0.020 kg con un resorte. Su frecuencia es de 1.50 Hz y la masa tiene una rapidez de 0.360 m/s al pasar por la posición de equilibrio. *a*) ¿Cuál es el valor del número cuántico n para este nivel de energía? *b*) ¿Cuál es la diferencia de energías entre los niveles E_n y E_{n+1}? ¿Es detectable esa diferencia?

40.65 • Para amplitudes pequeñas de oscilación, el movimiento de un péndulo simple es armónico. Para un péndulo con un periodo de 0.500 s, determine la energía de nivel fundamental y la diferencia de energía entre niveles adyacentes. Exprese sus resultados en joules y en electrón volts. ¿Son detectables esos valores?

40.66 •• Algunos fotones de 164.9 nm se emiten en una transición de $\Delta n = 1$ dentro de una red de estado sólido. La red está modelada como electrones en una caja con longitud de 0.500 nm. ¿Qué transición corresponde a la luz emitida?

40.67 •• **CALC** Demuestre que para $\psi(x)$ dada por la ecuación (40.47), la función de distribución de probabilidad tiene un máximo en $x = 0$.

40.68 •• **CALC** *a*) Demuestre por sustitución directa en la ecuación de Schrödinger para el oscilador armónico unidimensional que la función de onda $\psi_1(x) = A_1 x e^{-\alpha^2 x^2/2}$, donde $\alpha^2 = m\omega/\hbar$, es una solución con energía que corresponde a $n = 1$ en la ecuación (40.46). *b*) Determine la constante de normalización A_1. *c*) Demuestre que la densidad de probabilidad tiene un mínimo en $x = 0$ y un máximo en $x = \pm 1/\alpha$, que corresponden a los puntos de retorno clásicos para el estado base $n = 0$.

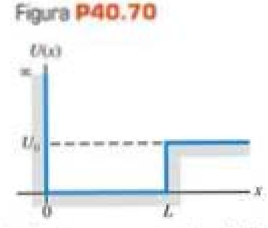
40.69 •• **PA** *a*) La naturaleza ondulatoria de las partículas da como resultado el caso de mecánica cuántica en el que una partícula confinada en una caja puede asumir solo longitudes de onda que resultan en ondas estacionarias en la caja, con nodos en las paredes. Use esto para demostrar que un electrón confinado en una caja unidimensional de longitud L tendrá niveles de energía dados por

$$E_n = \frac{n^2 h^2}{8mL^2}$$

(*Sugerencia:* Recuerde que la relación entre la longitud de onda de De Broglie y la rapidez de una partícula no relativista es $mv = h/\lambda$. La energía de la partícula es $\frac{1}{2}mv^2$). *b*) Si un átomo de hidrógeno se modela como una caja unidimensional de longitud igual al radio de Bohr, ¿cuál es la energía (en electrón volts) del nivel inferior de energía del electrón?

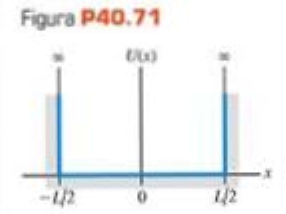
40.70 ••• Considere un pozo de potencial definido como $U(x) = \infty$ para $x < 0$, $U(x) = 0$ para $0 < x < L$ y $U(x) = U_0 > 0$ para $x > L$ (figura P40.70). Considere una partícula con masa m y energía cinética $E < U_0$ que está atrapada en el pozo. *a*) La condición de frontera en la pared infinita ($x = 0$) es $\psi(0) = 0$. ¿Cuál debe ser la forma de la función $\psi(x)$ para $0 < x < L$, para que satisfaga tanto la ecuación de Schrödinger como esta condición de frontera? *b*) La función de onda debe permanecer finita cuando $x \to \infty$. ¿Cuál debe ser la forma de la función $\psi(x)$ para $x > L$, para que se satisfagan la ecuación de Schrödinger y esta condición de frontera para el infinito? *c*) Imponga las condiciones en la frontera para que ψ y $d\psi/dx$ sean continuas en $x = L$. Demuestre que las energías de los niveles permitidos se obtienen a partir de la solución de la ecuación $k \cot kL = -\kappa$, donde $k = \sqrt{2mE}/\hbar$ y $\kappa = \sqrt{2m(U_0 - E)}/\hbar$.

Figura **P40.70**



40.71 ••• En la sección 40.2 se examinó una caja con paredes en $x = 0$ y $x = L$. Ahora considere una caja de ancho L, pero centrada en $x = 0$, por lo que extiende de $x = -L/2$ a $x = +L/2$ (figura P40.71). Observe que esta caja es simétrica con respecto a $x = 0$. *a*) Considere posibles las funciones de onda de la forma $\psi(x) = A \operatorname{sen} kx$. Aplique las condiciones de frontera en los límites de la pared para obtener los niveles de energía permitidos. *b*) Otro conjunto posible de funciones de onda corresponde a funciones de la forma $\psi(x) = A \cos kx$. Aplique las condiciones de frontera en la pared para obtener los valores permitidos de la energía. *c*) Compare las energías obtenidas en los incisos *a*) y *b*) con el conjunto de energías dadas en la ecuación (40.31). *d*) Una función f impar satisface la condición $f(x) = -f(-x)$, y una función par g satisface $g(x) = g(-x)$. De las funciones de onda de los incisos *a*) y *b*), ¿cuáles son pares y cuales son impares?

Figura **P40.71**



PROBLEMAS DE DESAFÍO

40.72 ••• **CALC** **La aproximación WKB.** Quizá sea desafiante resolver la ecuación de Schrödinger para los niveles de energía de estados ligados en un pozo arbitrario de potencial. Para los niveles de energía, un método alternativo que suele dar buenos resultados es la *aproximación WKB* (siglas que corresponden a las iniciales de los apellidos de los físicos Gregor Wentzel, Hendrik Kramers y Léon Brillouin, quienes fueron precursores en la aplicación de la mecánica cuántica). La aproximación WKB comienza con tres afirmaciones físicas: **i.** De acuerdo con De Broglie, la magnitud del momento lineal p de una partícula mecánico-cuántica es $p = h/\lambda$. **ii.** La magnitud del momento lineal se relaciona con la energía cinética K mediante la ecuación $K = p^2/2m$. **iii.** Si no hay fuerzas no conservativas, en la mecánica newtoniana la energía E de una partícula es constante e igual en cada punto a la suma de las energías cinética y potencial en ese punto: $E = K + U(x)$, donde x es la coordenada. *a*) Combine estas tres ecuaciones para demostrar que la longitud de onda en una coordenada x se puede escribir en la forma

$$\lambda(x) = \frac{h}{\sqrt{2m[E - U(x)]}}$$

Así, visualizamos una partícula mecánico-cuántica en un pozo de potencial $U(x)$ como semejante a una partícula libre, pero con una longitud de onda $\lambda(x)$ que es una función de la posición. *b*) Cuando la partícula entra a una región de energía potencial creciente, ¿qué sucede con su longitud de onda? *c*) En un punto donde $E = U(x)$, la mecánica newtoniana indica que la partícula tiene energía cinética cero, y debe estar momentáneamente en reposo. A ese punto se le llama *punto de*

retorno clásico, porque es donde una partícula newtoniana debe detener su movimiento e invertir su dirección. Por ejemplo, un objeto que oscila en movimiento armónico simple con amplitud A va y oscila entre los puntos $x = -A$ y $x = +A$; cada uno de ellos es un punto de retorno clásico, porque en ellos la energía potencial $\frac{1}{2}k'x^2$ es igual a la energía total $\frac{1}{2}k'A^2$. En la ecuación WKB con la expresión de $\lambda(x)$, ¿cuál es la longitud de onda en un punto de retorno clásico? *d*) Para una partícula en una caja de longitud L, las paredes de esa caja son puntos de retorno clásicos (véase la figura 40.8). Además, la cantidad de longitudes de onda que caben dentro de la caja debe ser un semientero (véase la figura 40.10), por lo que $L = (n/2)\lambda$ y; en consecuencia, $L/\lambda = n/2$, donde $n = 1, 2, 3, \ldots$ [Observe que es una reafirmación de la ecuación (40.29)]. El esquema WKB para determinar los niveles de energía de los estados ligados para un pozo de potencial *arbitrario* es una extensión de estas observaciones. Es necesario que para una energía E permitida, haya un número semientero de longitudes de onda entre los puntos de retorno clásicos para esa energía. Como la longitud de onda en la aproximación WKB no es una constante, sino que depende de x, la cantidad de longitudes de onda entre puntos de retorno clásicos a y b, para un valor determinado de la energía, es la integral de $1/\lambda(x)$ entre esos puntos:

$$\int_a^b \frac{dx}{\lambda(x)} = \frac{n}{2} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

Use la ecuación de $\lambda(x)$ que obtuvo en el inciso *a*) para demostrar que la *condición WKB para una energía permitida de estado confinado* se puede escribir como

$$\int_a^b \sqrt{2m[E - U(x)]}\, dx = \frac{nh}{2} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

e) Como comprobación de la ecuación en el inciso *d*), aplíquela a una partícula en una caja con paredes en $x = 0$ y $x = L$. Evalúe la integral y demuestre que los niveles de energía permitidos de acuerdo con la aproximación WKB son iguales a los definidos con la ecuación (40.31). (*Sugerencia:* Ya que las paredes de la caja son infinitamente altas, los puntos $x = 0$ y $x = L$ son puntos de retorno clásicos para *cualquier* energía E. Dentro de la caja, la energía potencial es cero). *f*) Para el pozo cuadrado finito de la figura 40.13, demuestre que la ecuación WKB del inciso *d*) predice las *mismas* energías de estado ligado que para un pozo cuadrado infinito del mismo ancho. (*Sugerencia:* Suponga que $E < U_0$. Entonces, los puntos de retorno clásicos están en $x = 0$ y $x = L$). Esto demuestra que la aproximación WKB es deficiente cuando la función de energía potencial cambia en forma discontinua, como en un pozo de potencial finito. En los dos siguientes problemas examinaremos casos en los que la función de energía potencial cambia en forma gradual, y la aproximación WKB es mucho más útil.

40.73 ••• CALC La aproximación WKB (véase el problema de desafío 40.72) sirve para calcular los niveles de energía de un oscilador armónico. En esa aproximación, los niveles de energía son las soluciones de la ecuación

$$\int_a^b \sqrt{2m[E - U(x)]}\, dx = \frac{nh}{2} \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

donde E es la energía, $U(x)$ es la función de energía potencial, y $x = a$ y $x = b$ son los puntos de retorno clásicos (los puntos en los que E es igual a la energía potencial, por lo que la energía cinética newtoniana sería cero). *a*) Determine los puntos de retorno clásicos para un oscilador armónico con energía E y constante de fuerza k'? *b*) Resuelva la integral en la aproximación WKB y demuestre que los niveles de energía en esta aproximación son $E_n = \hbar\omega$, donde $\omega = \sqrt{k'/m}$ y $n = 1, 2, 3, \ldots$ (*Sugerencia:* Recuerde que $\hbar = h/2\pi$. Una útil integral conocida es

$$\int \sqrt{A^2 - x^2}\, dx = \tfrac{1}{2}\left[x\sqrt{A^2 - x^2} + A^2 \operatorname{arcsen}\left(\frac{x}{|A|}\right)\right]$$

donde arcsen representa la función inversa de seno. Observe que el integrando es par, por lo que la integral de $-x$ a x es igual a dos veces la integral de 0 a x. *c*) ¿Cómo se comparan los niveles aproximados de energía determinados en el inciso *b*) con los verdaderos, calculados con la ecuación (40.46)? ¿La aproximación WKB sobrestima o subestima los niveles de energía?

40.74 ••• CALC Los protones, neutrones y muchas otras partículas están formados por partículas más fundamentales llamadas *quarks* y *antiquarks* (la antimateria equivalente de los quarks). Un quark y un antiquark pueden formar un estado ligado con diversos niveles de energía, cada uno de los cuales corresponde a una partícula distinta observada en el laboratorio. Por ejemplo, la partícula ψ es un estado ligado de baja energía de un quark llamado encanto (*charm*) y su antiquark, con una energía en reposo de 3097 MeV; la partícula $\psi(2S)$ es un estado excitado de esta misma combinación de quark y antiquark, con una energía en reposo de 3686 MeV. Una representación simplificada de la interacción de energía potencial entre un quark y un antiquark es $U(x) = A|x|$, donde A es una constante positiva y x representa la distancia entre el quark y el antiquark. Puede usar la aproximación WKB (véase el problema de desafío 40.72) con la finalidad de determinar los niveles de energía de estado ligado para esta función de energía potencial. En la aproximación WKB, los niveles de energía son las soluciones de la ecuación

$$\int_a^b \sqrt{2m[E - U(x)]}\, dx = \frac{nh}{2} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

En este caso, E es la energía, $U(x)$ es la función de energía potencial, y $x = a$ y $x = b$ son los puntos de retorno clásicos (los puntos en los que E es igual a la energía potencial, por lo que la energía cinética newtoniana sería cero). *a*) Determine los puntos de retorno clásicos para el potencial $U(x) = A|x|$ y para una energía E. *b*) Resuelva la integral anterior y demuestre que los niveles de energía permitidos en la aproximación WKB están dados por

$$E_n = \frac{1}{2m}\left(\frac{3mAh}{4}\right)^{2/3} n^{2/3} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

(*Sugerencia:* El integrando es par, por lo que la integral de $-x$ a x es igual a dos veces la integral de 0 a x). *c*) ¿La diferencia de energías entre niveles sucesivos aumenta, disminuye o permanece igual cuando n se incrementa? ¿Cómo se compara con el comportamiento de los niveles de energía para el oscilador armónico? ¿Y con la partícula en una caja? ¿Puede sugerir una regla sencilla que relacione la diferencia de energías entre niveles sucesivos y la forma de la función de energía potencial?

Respuestas

Pregunta inicial del capítulo 

Cuando un electrón de una de estas partículas, llamadas *puntos cuánticos*, realiza una transición de un nivel excitado a uno inferior, emite un fotón cuya energía es igual a la diferencia en energía entre niveles. Cuanto menor sea el punto cuántico, mayor será la distancia de energía entre niveles y, por lo tanto, la longitud de onda de los fotones emitidos será más corta (más azul). Véase el ejemplo 40.6 (sección 40.3) para mayores detalles.

Preguntas de las secciones Evalúe su comprensión

40.1 Respuesta: no La ecuación (40.19) representa una superposición de las funciones de onda con diferentes valores de número de onda k y, por consiguiente, diferentes valores de energía $E = \hbar^2k^2/2m$. El estado que esta función de onda combinada representa no es un estado de energía definida; en consecuencia, no es un estado estacionario. Por otra parte, hay un factor $e^{-iEt/\hbar}$ dentro de la integral en la ecuación (40.19), con un valor diferente de E para cada valor de k. Esta función de onda tiene una dependencia del tiempo muy complicada, y la función de distribución de probabilidad $|\Psi(x, t)|^2$ es dependiente del tiempo.

40.2 Respuesta: v. Nuestra deducción de las funciones de onda estacionaria para una partícula en una caja demuestra que son superposiciones de ondas que se propagan en direcciones opuestas, al igual que una onda estacionaria en una cuerda. Una onda tiene un momento lineal en la dirección de x positiva, mientras que la otra tiene un momento lineal de igual magnitud, pero en la dirección de x negativa. La componente *total* x del momento lineal en la dirección de x es cero.

40.3 Respuesta: i. Los niveles de energía se ordenan como se muestra en la figura 40.15*b* si $U_0 = 6E_{1\text{-PPI}}$; entonces, $E_{1\text{-PPI}} = \pi^2\hbar^2/2mL^2$ es la energía de nivel fundamental de un pozo infinito. Si el ancho del pozo L se reduce a un medio de su valor inicial, $E_{1\text{-PPI}}$ aumenta en un factor de cuatro, por lo que U_0 debe aumentar también en un factor de cuatro. Las energías E_1, E_2 y E_3 que se ven en la figura 40.15*b* son todas fracciones específicas de U_0, por lo que también aumentarán en un factor de cuatro.

40.4 Respuesta: sí. La figura 40.20 muestra una función de onda posible $\psi(x)$ para el tunelamiento. Ya que $\psi(x)$ no es cero dentro de la barrera ($0 \leq x \leq L$), hay cierta probabilidad de que la partícula se encuentre ahí.

40.5 Respuesta: ii. Si el segundo fotón tiene una mayor longitud de onda y, por ende, menor energía que el primer fotón, la diferencia en energía entre los niveles excitados primero y segundo debe ser menor que la diferencia entre el nivel fundamental y el primer nivel excitado. Este es el caso para el átomo de hidrógeno, para el cual la diferencia de energía entre niveles disminuye conforme aumenta la energía (véase la figura 39.24). En cambio, la diferencia de energía entre niveles sucesivos aumenta para una partícula en una caja (figura 40.11*b*) y es constante para un oscilador armónico (figura 40.25).

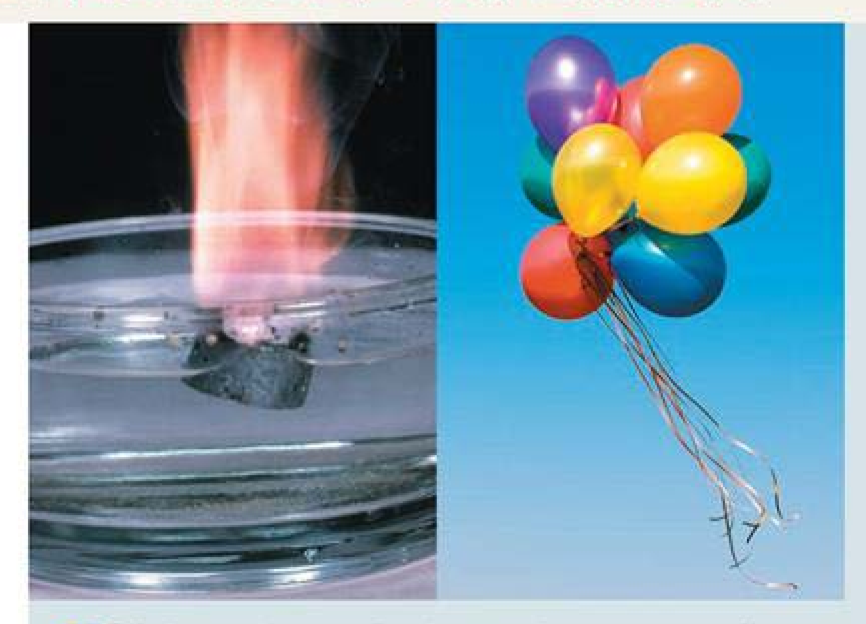
Problema práctico

Respuestas: ***a***)

$$|\Psi(x, t)|^2 = \frac{1}{L}\left[\operatorname{sen}^2\frac{\pi x}{L} + \operatorname{sen}^2\frac{2\pi x}{L} + 2\operatorname{sen}\frac{\pi x}{L}\operatorname{sen}\frac{2\pi x}{L}\cos\left(\frac{(E_2 - E_1)t}{\hbar}\right)\right]$$

b) no ***c***) sí ***d***) $\dfrac{3\pi^2\hbar}{2mL^2}$ ***e***) $\dfrac{0.905\pi^2\hbar}{mL^2}$

41 ESTRUCTURA ATÓMICA



? El litio (con tres electrones por átomo) es un metal que se quema espontáneamente en el agua, mientras que el helio (con 2 electrones por átomo) es un gas que casi no experimenta reacciones químicas. ¿Cómo un solo electrón adicional es capaz de lograr que estos dos elementos sean tan diferentes?

OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

Al estudiar este capítulo, usted aprenderá:

- Cómo extender los cálculos de la mecánica cuántica para resolver problemas tridimensionales.
- A resolver la ecuación de Schrödinger para una partícula atrapada en una caja cúbica.
- A describir los estados de un átomo de hidrógeno en términos de números cuánticos.
- Cómo afectan los campos magnéticos el movimiento orbital de los electrones en un átomo.
- Cómo saber que los electrones tienen su propio momento angular intrínseco.
- A analizar la estructura de átomos con muchos electrones.
- De qué forma los rayos x emitidos por átomos revelan su estructura interna.

Algunos físicos aseguran que toda la química está contenida en la ecuación de Schrödinger. Aunque tal afirmación es un tanto exagerada, dicha ecuación nos enseña mucho acerca del comportamiento químico de los elementos y de la naturaleza de los enlaces químicos, porque permite entender la tabla periódica de los elementos y las bases microscópicas del magnetismo.

Para aprender acerca de la estructura de los átomos desde la perspectiva de la mecánica cuántica, primero desarrollaremos la versión tridimensional de la ecuación de Schrödinger. Trataremos esta ecuación examinando la versión tridimensional de una partícula en una caja: una partícula confinada en un volumen cúbico.

Podemos aprender mucho sobre la estructura y las propiedades de *todos* los átomos, a partir de las soluciones de la ecuación de Schrödinger para el átomo de hidrógeno. Estas soluciones tienen valores cuantizados del momento angular; no necesitamos enunciar por separado la cuantización, como lo hicimos en el modelo de Bohr. Identificaremos los estados con un conjunto de números cuánticos, los cuales usaremos después en los átomos con muchos electrones. Veremos que el electrón tiene también un momento angular intrínseco de *espín*, además del momento angular orbital asociado con su movimiento.

También estudiaremos el principio de exclusión, una especie de reglamento de zonificación microscópica que es la clave para comprender los átomos con muchos electrones. Este principio indica que no puede haber dos electrones en un átomo que tengan el mismo estado mecánico-cuántico. Por último, usaremos los principios de este capítulo para explicar los espectros característicos de rayos x de los átomos.

41.1 La ecuación de Schrödinger en tres dimensiones

Hemos explicado la ecuación de Schrödinger y sus aplicaciones, solo para problemas *unidimensionales*, el análogo de una partícula newtoniana que se mueve a lo largo de una recta. El modelo de línea recta es adecuado para algunas aplicaciones; sin embargo, para comprender la estructura atómica, necesitamos una generalización tridimensional.

No es difícil imaginar cómo se debería ver la ecuación tridimensional de Schrödinger. En primer lugar, la función de onda Ψ es una función del tiempo y de las tres coordenadas espaciales (x, y, z). En general, la función de energía potencial depende también de las tres coordenadas, y se puede escribir como $U(x, y, z)$. A continuación, recuerde de la sección 40.1, que el término $-(\hbar^2/2m)\partial^2\Psi/\partial x^2$ en la ecuación unidimensional de Schrödinger, ecuación (40.20), se relaciona con la energía cinética de la partícula en el estado descrito por la función de onda Ψ. Por ejemplo, si en este término se inserta la función de onda $\Psi(x, t) = Ae^{ikx}e^{-i\omega t}$ de una partícula libre, cuyo momento lineal tiene la magnitud $p = \hbar k$ y su energía cinética es $K = p^2/2m$, obtendremos $-(\hbar^2/2m)(ik)^2Ae^{ikx}e^{-i\omega t} = (\hbar^2k^2/2m)Ae^{ikx}e^{-i\omega t} = (p^2/2m)\Psi(x, t) = K\Psi(x, t)$. Si la partícula se puede mover en tres dimensiones, entonces el momento lineal de la partícula tiene tres componentes (p_x, p_y y p_z), y su energía cinética es

$$K = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{p_y^2}{2m} + \frac{p_z^2}{2m} \qquad (41.1)$$

Tomadas en conjunto, estas observaciones sugieren que la generalización correcta de la ecuación de Schrödinger para tres dimensiones es

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2\Psi(x, y, z, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Psi(x, y, z, t)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Psi(x, y, z, t)}{\partial z^2}\right) + U(x, y, z)\Psi(x, y, z, t) = i\hbar\frac{\partial\Psi(x, y, z, t)}{\partial t} \qquad (41.2)$$

(ecuación general tridimensional de Schrödinger)

La función de onda tridimensional $\Psi(x, y, z, t)$ tiene una interpretación similar a la de una dimensión. La función de onda misma es una cantidad compleja con una parte real y una parte imaginaria, pero $|\Psi(x, y, z, t)|^2$ —el cuadrado de su valor absoluto, que es igual al producto de $\Psi(x, y, z, t)$ y su conjugado complejo $\Psi^*(x, y, z, t)$— es real y positivo o cero en todos los puntos del espacio. Interpretamos $|\Psi(x, y, z, t)|^2dV$ como la *probabilidad* de encontrar la partícula dentro de un pequeño volumen dV con centro en el punto (x, y, z) en el tiempo t, de modo que $|\Psi(x, y, z, t)|^2$ es la *función de la distribución de probabilidad* en tres dimensiones. La *condición de normalización* en la función de onda es que la probabilidad de que la partícula esté *en algún lado* del espacio sea exactamente 1. Por lo tanto, la integral de $|\Psi(x, y, z, t)|^2$, sobre todo el espacio, debe ser igual a 1:

$$\int |\Psi(x, y, z, t)|^2\, dV = 1 \qquad \text{(condición de normalización en tres dimensiones)} \qquad (41.3)$$

Si la función de onda $\Psi(x, y, z, t)$ representa un estado de energía definida E, es decir, un estado estacionario, podemos expresarla como el producto de una función de onda espacial $\Psi(x, y, z)$ y una función de tiempo $e^{-iEt/\hbar}$:

$$\Psi(x, y, z, t) = \psi(x, y, z)e^{-iEt/\hbar} \qquad \text{(función de onda dependiente del tiempo para un estado de energía definida)} \qquad (41.4)$$

[Compare esto con la ecuación (40.21) para un estado unidimensional de energía definida]. Si sustituimos la ecuación (41.4) en la (41.2), el lado derecho de la ecuación se convierte en $i\hbar\psi(x, y, z)(-iE/\hbar)e{-}iEt/\hbar = E\psi(x, y, z)e^{-iEt/\hbar}$. Después dividimos

ambos lados entre el factor $e^{-iEt/\hbar}$, haciendo la ecuación de Schrödinger *independiente del tiempo* para tres dimensiones en estado estacionario:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2\psi(x,y,z)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi(x,y,z)}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\psi(x,y,z)}{\partial z^2}\right)+U(x,y,z)\psi(x,y,z)$$

$$= E\psi(x,y,z) \quad \text{(ecuación de Schrödinger para tres dimensiones independiente del tiempo)} \qquad (41.5)$$

La función de distribución de probabilidad para un estado estacionario es exactamente el cuadrado del valor absoluto de la función espacial de onda: $|\psi(x, y, z)e^{-iEt/\hbar}|^2 = \psi^*(x, y, z)e^{+iEt/\hbar}\psi(x, y, z)e^{-iEt/\hbar} = |\psi(x, y, z)|^2$. Observe que esta no depende del tiempo. (Como vimos en la sección 40.1, esta es la razón por la que llamamos *estacionarios* a tales estados). Así, para un estado estacionario, la condición de normalización de la función de onda, ecuación (41.3), se convierte en

$$\int |\psi(x,y,z)|^2\, dV = 1 \quad \text{(condición de normalización para un estado estacionario en tres dimensiones)} \qquad (41.6)$$

No pretenderemos haber *deducido* las ecuaciones (41.2) y (41.5). Como en sus versiones unidimensionales, estas ecuaciones tenían que probarse comparando sus predicciones con los resultados experimentales. Por fortuna, las ecuaciones (41.2) y (41.5) cumplen con creces esta prueba, de modo que tenemos confianza en que *son* las ecuaciones correctas.

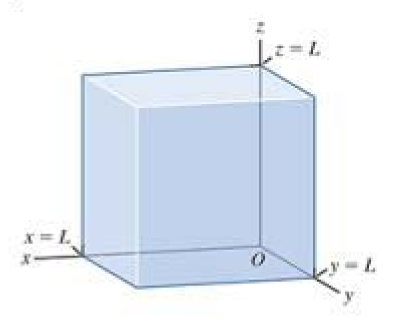
Un tema importante que analizaremos en este capítulo es el de las soluciones de la ecuación (41.5) para estados estacionarios del átomo de hidrógeno. La función de energía potencial de un electrón en un átomo de hidrógeno es *esféricamente simétrica*; depende solo de la distancia $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$, al origen de coordenadas. Para aprovechar esta simetría, es mejor usar *coordenadas esféricas* en lugar de las coordenadas cartesianas (x, y, z) con la finalidad de resolver la ecuación de Schrödinger para el átomo de hidrógeno. Antes de presentar estas nuevas coordenadas e investigar el átomo de hidrógeno, es conveniente examinar la versión tridimensional de la partícula en la caja, que consideramos en la sección 40.2. La solución de este problema más sencillo nos dará el conocimiento para entender los estados estacionarios más complicados de la física atómica.

Evalúe su comprensión de la sección 41.1 En cierta región del espacio, la función de energía potencial de una partícula mecánica-cuántica es cero. En esa región la función de onda $\psi(x, y, z)$ de cierto estado estacionario satisface $\partial^2\psi/\partial x^2 > 0$, $\partial^2\psi/\partial y^2 > 0$ y $\partial^2\psi/\partial z^2 > 0$. La partícula tiene una energía definida E que es positiva. ¿Qué concluye acerca de $\psi(x, y, z)$ en esta región? **i.** Debe ser positiva; **ii.** debe ser negativa; **iii.** debe ser cero; **iv.** no hay suficiente información para concluir al respecto. ❙

41.2 Partícula en una caja de tres dimensiones

Considere una partícula encerrada dentro de un cubo de lado L. Esto podría representar un electrón con libertad para moverse a cualquier parte dentro del interior de un cubo metálico sólido pero que no puede escapar. Seleccionamos el origen en un vértice del cubo, con los ejes x, y y z a lo largo de las aristas del cubo, por lo que la partícula está confinada en la región $0 \le x \le L$, $0 \le y \le L$, $0 \le z \le L$ (figura 41.1). ¿Cuáles son los estados estacionarios de este sistema?

41.1 Partícula confinada en un cubo con sus caras en $x = 0$, $x = L$, $y = 0$, $y = L$, $z = 0$ y $z = L$.



Al igual que la partícula en una caja unidimensional considerada en la sección 40.2, la energía potencial es cero dentro de la caja, pero infinita en el exterior. Por lo tanto, la función espacial de onda $\psi(x, y, z)$ debe ser cero afuera de la caja para que el término $U(x, y, z)\psi(x, y, z)$ de la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo, ecuación (41.5), no sea infinito. Por consiguiente, la función de distribución de probabilidad $|\psi(x, y, z)|^2$ es cero afuera de la caja, y existe cero probabilidad de que la partícula se encuentre allí. Dentro de la caja, la función espacial de onda para un estado estacio-

nario obedece la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo, la ecuación (41.5), con $U(x, y, z) = 0$:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2\psi(x, y, z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi(x, y, z)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi(x, y, z)}{\partial z^2}\right) = E\psi(x, y, z)$$

(partícula en una caja tridimensional) (41.7)

Para que la función de onda sea continua del interior al exterior de la caja, $\psi(x, y, z)$ debe ser igual a cero en las paredes. Así, las condiciones límite son que $\psi(x, y, z) = 0$, en $x = 0$, $x = L$, $y = 0$, $y = L$, $z = 0$ y $z = L$.

Obtener una solución para una ecuación diferencial parcial complicada como la ecuación (41.7) parece todo un reto. Para avanzar, recuerde que escribimos la función de onda *dependiente* del tiempo, para un estado estacionario, como el producto de una función que solo depende de las coordenadas espaciales x, y y z y una segunda función que solo depende del tiempo t: $\Psi(x, y, z, t) = \psi(x, y, z)e^{-iEt/\hbar}$. Asimismo, probaremos una técnica llamada *separación de variables*: escribiremos la función espacial de onda $\psi(x, y, z)$ como el producto de una función X que solo depende de x, una segunda función Y que solo depende de y, y una tercera función Z que solo depende de z:

$$\psi(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z) \tag{41.8}$$

Si sustituimos la ecuación (41.8) en la (41.7), obtenemos

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left(Y(y)Z(z)\frac{d^2X(x)}{dx^2} + X(x)Z(z)\frac{d^2Y(y)}{dy^2} + X(x)Y(y)\frac{d^2Z(z)}{dz^2}\right)$$
$$= EX(x)Y(y)Z(z) \tag{41.9}$$

Las derivadas parciales de la ecuación (41.7) se han convertido en derivadas ordinarias porque actúan en función de una sola variable. Ahora dividimos ambos lados de la ecuación (41.9) entre el producto $X(x)Y(y)Z(z)$:

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{X(x)}\frac{d^2X(x)}{dx^2}\right) + \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{Y(y)}\frac{d^2Y(y)}{dy^2}\right) + \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{Z(z)}\frac{d^2Z(z)}{dz^2}\right) = E \tag{41.10}$$

El lado derecho de la ecuación (41.10) es la energía del estado estacionario, el cual no depende de los valores de x, y o z. Para que esto sea así, el lado izquierdo de la ecuación también debe ser independiente de los valores de x, y y z. Por lo tanto, el primer término entre paréntesis del lado izquierdo de la ecuación (41.10) debe ser igual a una constante que no dependa de x, el segundo término entre paréntesis debe ser igual a otra constante que no dependa de y, y el tercer término entre paréntesis debe ser igual a una tercera constante que no dependa de z. Llamemos a estas constantes E_X, E_Y y E_Z, respectivamente. Entonces tenemos una ecuación separada para cada una de las tres funciones $X(x)$, $Y(y)$ y $Z(z)$:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2X(x)}{dx^2} = E_XX(x) \tag{41.11a}$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2Y(y)}{dy^2} = E_YY(y) \tag{41.11b}$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2Z(z)}{dz^2} = E_ZZ(z) \tag{41.11c}$$

Para satisfacer las condiciones de frontera de que $\psi(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z)$ sea igual a cero en las paredes de la caja, se requiere que $X(x) = 0$ en $x = 0$ y $x = L$, $Y(y) = 0$ en $y = 0$ y $y = L$, y $Z(z) = 0$ en $z = 0$ y $z = L$.

¿Cómo se interpretan las tres constantes E_X, E_Y y E_Z en las ecuaciones (41.11)? Según la ecuación (41.10), están relacionadas con la energía E por

$$E_X + E_Y + E_Z = E \tag{41.12}$$

La ecuación (41.12) debe recordarle la ecuación (41.1) de la sección 41.1, la cual establece que la energía cinética de una partícula es la suma de las contribuciones provenientes de sus componentes de momento lineal x, y y z. Por lo tanto, las constantes E_X, E_Y y E_Z nos dicen cuánta energía de la partícula se debe al movimiento a lo largo de cada uno de los tres ejes de coordenadas. (En el interior de la caja la energía potencial es cero, de modo que la energía de la partícula es solo energía cinética).

Las ecuaciones (41.11) representan una simplificación considerable; redujimos el problema de resolver una ecuación diferencial *parcial* bastante compleja con tres variables independientes al problema bastante sencillo de resolver por separado tres ecuaciones diferenciales *ordinarias*, cada una con una variable independiente. Aún más, cada una de estas ecuaciones diferenciales ordinarias es exactamente la misma que la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo para una partícula en una caja de *una dimensión*, ecuación (40.25), y con exactamente las mismas condiciones de frontera en 0 y L. (La única diferencia es que algunas cantidades se identifican con símbolos distintos). En comparación con nuestro trabajo en la sección 40.2, se observa que las soluciones a las ecuaciones (41.11) son

$$X_{n_X}(x) = C_X \operatorname{sen}\frac{n_X \pi x}{L} \quad (n_X = 1, 2, 3, \dots) \tag{41.13a}$$

$$Y_{n_Y}(y) = C_Y \operatorname{sen}\frac{n_Y \pi y}{L} \quad (n_Y = 1, 2, 3, \dots) \tag{41.13b}$$

$$Z_{n_Z}(z) = C_Z \operatorname{sen}\frac{n_Z \pi z}{L} \quad (n_Z = 1, 2, 3, \dots) \tag{41.13c}$$

donde C_X, C_Y y C_Z son constantes. Los valores correspondientes de E_X, E_Y y E_Z son

$$E_X = \frac{n_X{}^2 \pi^2 \hbar^2}{2mL^2} \quad (n_X = 1, 2, 3, \dots) \tag{41.14a}$$

$$E_Y = \frac{n_Y{}^2 \pi^2 \hbar^2}{2mL^2} \quad (n_Y = 1, 2, 3, \dots) \tag{41.14b}$$

$$E_Z = \frac{n_Z{}^2 \pi^2 \hbar^2}{2mL^2} \quad (n_Z = 1, 2, 3, \dots) \tag{41.14c}$$

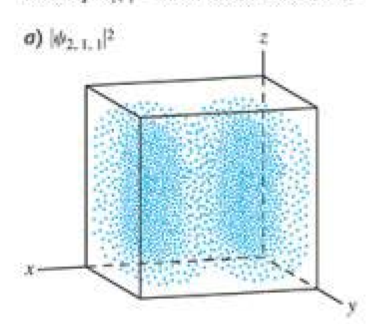
Solo hay un número cuántico n para la partícula en una caja unidimensional, pero *tres* números cuánticos n_X, n_Y y n_Z, para la caja tridimensional. Si sustituimos las ecuaciones (41.13) de regreso a la ecuación (41.8), para la función de onda total espacial, $\psi(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z)$, obtenemos las siguientes funciones de onda de estado estacionario para una partícula en una caja cúbica de tres dimensiones:

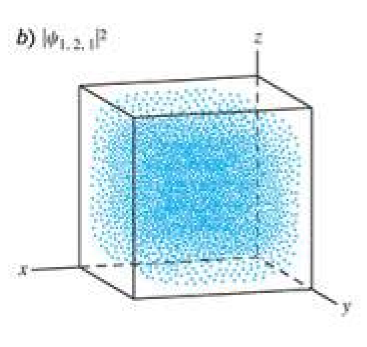
$$\psi_{n_X,n_Y,n_Z}(x, y, z) = C \operatorname{sen}\frac{n_X \pi x}{L} \operatorname{sen}\frac{n_Y \pi y}{L} \operatorname{sen}\frac{n_Z \pi z}{L}$$
$$(n_X = 1, 2, 3, \dots;\ n_Y = 1, 2, 3, \dots;\ n_Z = 1, 2, 3, \dots) \tag{41.15}$$

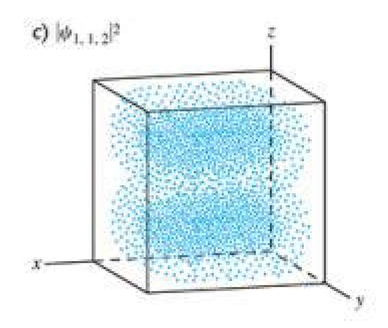
donde $C = C_X C_Y C_Z$. El valor de la constante C está determinado por la condición de normalización, ecuación (41.6).

En la sección 40.2 vimos que las funciones de onda de estado estacionario para una partícula en una caja unidimensional eran análogas a las de ondas estacionarias en una cuerda. De manera similar, las funciones de onda *tri*dimensionales dadas por la ecuación (41.15) son parecidas a las de ondas estacionarias electromagnéticas en una cavidad cúbica como el interior de un horno de microondas (véase la sección 32.5). En un horno de microondas existen "puntos muertos" donde la intensidad de la onda es igual a cero y corresponden a los nodos de la onda estacionaria. La plataforma giratoria en un horno de microondas permite el cocimiento al garantizar que ninguna parte del alimento permanezca en algún "punto muerto"). De forma similar, la función de distribución de probabilidad correspondiente a la ecuación (41.15) puede tener "puntos

41.2 Función de distribución de probabilidad $|\psi_{n_X,n_Y,n_Z}(x, y, z)|^2$ para (n_X, n_Y y n_Z) igual a *a*) (2, 1, 1), *b*) (1, 2, 1), *c*) (1, 1, 2). El valor de $|\psi|^2$ es proporcional a la densidad de puntos. La función de onda es cero en las paredes de la caja y en el plano medio de la misma, de modo que $|\psi|^2 = 0$ en estas ubicaciones.







muertos" donde hay cero probabilidad de encontrar a la partícula. Por ejemplo, considere el caso $(n_X, n_Y, n_Z) = (2, 1, 1)$. Según la ecuación (41.15), la función de distribución de probabilidad en este caso es

$$|\psi_{2,1,1}(x, y, z)|^2 = |C|^2 \operatorname{sen}^2 \frac{2\pi x}{L} \operatorname{sen}^2 \frac{\pi y}{L} \operatorname{sen}^2 \frac{\pi z}{L}$$

Como muestra la figura 41.2*a*, la función de distribución de probabilidad es cero en el plano $x = L/2$, donde $\operatorname{sen}^2(2\pi x/L) = \operatorname{sen}^2 \pi = 0$. Lo más probable es que la partícula se encuentre cerca de donde las tres funciones del seno al cuadrado son más grandes, en $(x, y, z) = (L/4, L/2, L/2)$, o bien, $(x, y, z) = (3L/4, L/2, L/2)$. Las figuras 41.2*b* y 41.2*c* muestran los casos similares $(n_X, n_Y, n_Z) = (1, 2, 1)$ y $(n_X, n_Y, n_Z) = (1, 1, 2)$. Para números cuánticos n_X, n_Y y n_Z, con valores más altos, existen planos adicionales en los cuales la función de distribución de probabilidad es igual a cero, exactamente como la función de distribución de probabilidad $|\psi(x)|^2$, en el caso de una caja unidimensional, tiene más ceros para valores más altos de n (véase la figura 40.12).

Ejemplo 41.1 Probabilidad en una caja de tres dimensiones



a) Calcule el valor de la constante C que normaliza la función de onda de la ecuación (41.15). *b*) Calcule la probabilidad de que la partícula se encuentre en algún lugar de la región $0 \leq x \leq L/4$ (figura 41.3) para los casos **i.** $(n_X, n_Y, n_Z) = (1, 2, 1)$, **ii.** $(n_X, n_Y, n_Z) = (2, 1, 1)$ y **iii.** $(n_X, n_Y, n_Z) = (3, 1, 1)$.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: La ecuación (41.6) nos dice que para normalizar la función de onda, tenemos que seleccionar el valor de C de modo que la integral de la función de distribución de probabilidad $|\psi_{n_X,n_Y,n_Z}(x, y, z)|^2$ sobre el volumen de la caja sea igual a 1. (En realidad, la integral es sobre *todo* el espacio, pero las funciones de onda de una partícula dentro de una caja son iguales a cero en el exterior de la caja).

La probabilidad de encontrar la partícula dentro de cierto volumen en el interior de la caja es igual a la integral de la función de distribución de probabilidad sobre ese volumen. Por lo tanto, en el inciso *b*) integraremos $|\psi_{n_X,n_Y,n_Z}(x, y, z)|^2$ para los valores dados de (n_X, n_Y, n_Z) sobre el volumen $0 \leq x \leq L/4$, $0 \leq y \leq L$, $0 \leq z \leq L$.

EJECUTAR: *a*) Según la ecuación (41.15),

$$|\psi_{n_X,n_Y,n_Z}(x, y, z)|^2 = |C|^2 \operatorname{sen}^2 \frac{n_X\pi x}{L} \operatorname{sen}^2 \frac{n_Y\pi y}{L} \operatorname{sen}^2 \frac{n_Z\pi z}{L}$$

Por consiguiente, la condición de normalización es

$$\int |\psi_{n_X,n_Y,n_Z}(x, y, z)|^2\, dV$$

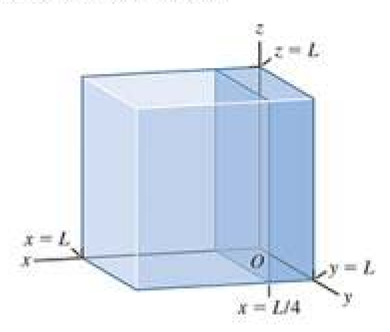
$$= |C|^2 \int_{x=0}^{x=L} \int_{y=0}^{y=L} \int_{z=0}^{z=L} \operatorname{sen}^2 \frac{n_X\pi x}{L} \operatorname{sen}^2 \frac{n_Y\pi y}{L} \operatorname{sen}^2 \frac{n_Z\pi z}{L}\, dx\, dy\, dz$$

$$= |C|^2 \left(\int_{x=0}^{x=L} \operatorname{sen}^2 \frac{n_X\pi x}{L}\, dx \right) \left(\int_{y=0}^{y=L} \operatorname{sen}^2 \frac{n_Y\pi y}{L}\, dy \right)$$

$$\times \left(\int_{z=0}^{z=L} \operatorname{sen}^2 \frac{n_Z\pi z}{L}\, dz \right) = 1$$

Continúa

41.3 ¿Cuál es la probabilidad de que la partícula se encuentre en la cuarta parte sombreada de la caja?



Podemos usar la identidad $\text{sen}^2\theta = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\theta)$ y sustituir la variable $\theta = n_X\pi x/L$ para demostrar que

$$\int \text{sen}^2 \frac{n_X\pi x}{L}\,dx = \frac{L}{2n_X\pi}\left[\frac{n_X\pi x}{L} - \frac{1}{2}\,\text{sen}\left(\frac{2n_X\pi x}{L}\right)\right]$$
$$= \frac{x}{2} - \frac{L}{4n_X\pi}\,\text{sen}\left(\frac{2n_X\pi x}{L}\right)$$

Si evaluamos esta integral entre $x = 0$ y $x = L$, el resultado es $L/2$ (recuerde que sen $0 = 0$ y sen $2n_X\pi = 0$ para cualquier entero n_X). Las integrales de y y z producen los mismos resultados, por lo que la condición de normalización es

$$|C|^2\left(\frac{L}{2}\right)\left(\frac{L}{2}\right)\left(\frac{L}{2}\right) = |C|^2\left(\frac{L}{2}\right)^3 = 1$$

o bien, $|C|^2 = (2/L)^3$. Si elegimos que C sea real y positiva, entonces, $C = (2/L)^{3/2}$.

b) Tenemos las mismas integrales de y y de z que en el inciso *a*), pero ahora los límites de integración de la integral x son $x = 0$ y $x = L/4$:

$$P = \int_{0\le x\le L/4} |\psi_{n_X,n_Y,n_Z}|^2\,dV = |C|^2\left(\int_{x=0}^{x=L/4} \text{sen}^2 \frac{n_X\pi x}{L}\,dx\right)$$
$$\times\left(\int_{y=0}^{y=L} \text{sen}^2 \frac{n_Y\pi y}{L}\,dy\right)\left(\int_{z=0}^{z=L} \text{sen}^2 \frac{n_Z\pi z}{L}\,dz\right)$$

La integral en x es

$$\int_{x=0}^{x=L/4} \text{sen}^2 \frac{n_X\pi x}{L}\,dx = \left(\frac{x}{2} - \frac{L}{4n_X\pi}\,\text{sen}\left(\frac{2n_X\pi x}{L}\right)\right)\Bigg|_{x=0}^{x=L/4}$$
$$= \frac{L}{8} - \frac{L}{4n_X\pi}\,\text{sen}\left(\frac{n_X\pi}{2}\right)$$

Por lo tanto, la probabilidad de encontrar la partícula en algún lugar de la región $0 \le x \le L/4$ es

$$P = \left(\frac{2}{L}\right)^3\left(\frac{L}{8} - \frac{L}{4n_X\pi}\,\text{sen}\left(\frac{n_X\pi}{2}\right)\right)\left(\frac{L}{2}\right)\left(\frac{L}{2}\right)$$
$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{2n_X\pi}\,\text{sen}\left(\frac{n_X\pi}{2}\right)$$

Esto depende solamente del valor de n_X, no de n_Y o n_Z. Así, para los tres casos tenemos

i. $n_X = 1$: $P = \frac{1}{4} - \frac{1}{2(1)\pi}\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2\pi}(1)$

$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{2\pi} = 0.091$$

ii. $n_X = 2$: $P = \frac{1}{4} - \frac{1}{2(2)\pi}\,\text{sen}\left(\frac{2\pi}{2}\right) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4\pi}\,\text{sen}\,\pi$

$$= \frac{1}{4} - 0 = 0.250$$

iii. $n_X = 3$: $P = \frac{1}{4} - \frac{1}{2(3)\pi}\,\text{sen}\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \frac{1}{4} - \frac{1}{6\pi}(-1)$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{6\pi} = 0.303$$

EVALUAR: Se puede ver por qué las probabilidades en el inciso *b*) son diferentes examinando la parte *b*) de la figura 40.12, la cual muestra el $\text{sen}^2\, n_X\pi x/L$ para $n_X = 1$, 2 y 3. Para $n_X = 2$, el área bajo la curva entre $x = 0$ y $x = L/4$ (igual a la integral entre estos dos puntos) es exactamente $\frac{1}{4}$ del área total entre $x = 0$ y $x = L$. Para $n_X = 1$, el área entre $x = 0$ y $x = L/4$ es menor que $\frac{1}{4}$ del área total, y para $n_X = 3$, es mayor que $\frac{1}{4}$ del área total.

Niveles de energía, degeneración y simetría

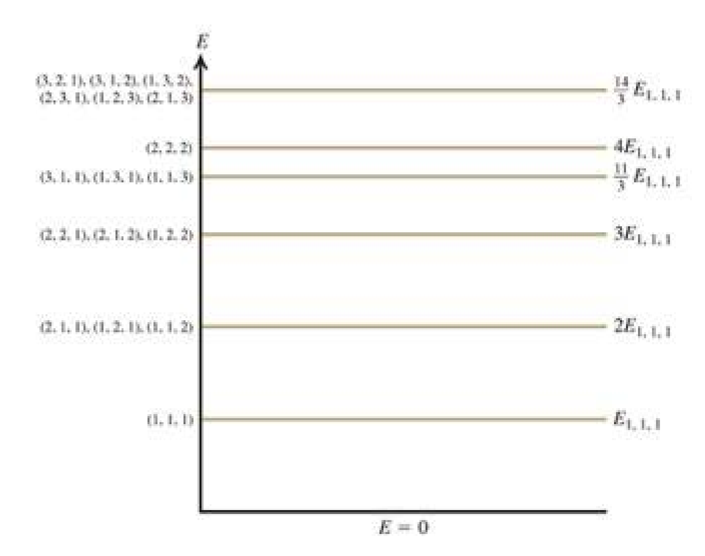
Según las ecuaciones (41.12) y (41.14), las energías permitidas para una partícula de masa m en una caja cúbica de lado L son

$$E_{n_X,n_Y,n_Z} = \frac{(n_X{}^2 + n_Y{}^2 + n_Z{}^2)\pi^2\hbar^2}{2mL^2} \quad (n_X = 1, 2, 3, \ldots;\ n_Y = 1, 2, 3, \ldots;\ n_Z = 1, 2, 3, \ldots) \tag{41.16}$$

(niveles de energía, partícula en una caja cúbica tridimensional)

La figura 41.4 muestra los seis niveles de energía más bajos dados por la ecuación (41.16). Observe que la mayoría de los niveles de energía corresponden a más de un conjunto de números cuánticos (n_X, n_Y, n_Z) y, por ende, a más de un estado cuántico. Dos o más estados cuánticos distintos con la misma energía se conocen como **degeneración**, y a los estados con la misma energía se les conoce como **degenerados**. Por ejemplo, la figura 41.4 indica que los estados (n_X, n_Y, n_Z) = (2, 1, 1), (1, 2, 1) y (1, 1, 2) son degenerados. En comparación, para una partícula en una caja unidimensional, solo existe un estado para cada nivel de energía (véase la figura 40.11*a*) y sin degeneración.

La razón por la que en la caja cúbica se presenta degeneración es que es *simétrica*: todos los lados de la caja tienen las mismas dimensiones. Como ilustración, la figura 41.2 muestra las funciones de distribuciones de probabilidad para los tres estados (n_X, n_Y, n_Z) = (2, 1, 1), (1, 2, 1) y (1, 1, 2). Se puede transformar cualquiera de estos tres estados en uno diferente simplemente girando 90° la caja cúbica. Esta rotación no cambia la energía, por lo que los tres estados son degenerados.



41.4 Diagrama de niveles de energía para una partícula en una caja cúbica tridimensional. Identificamos cada nivel con el número cuántico de los estados (n_X, n_Y, n_Z) con esa energía. Algunos de los niveles son degenerados (más de un estado tiene la misma energía). El nivel mínimo (fundamental), $(n_X, n_Y, n_Z) = (1, 1, 1)$, tiene una energía $E_{1,1,1} = (1^2 + 1^2 + 1^2)\pi^2\hbar^2/2mL^2 = 3\pi^2\hbar^2/2mL^2$; los otros niveles de energía se muestran como múltiplos de $E_{1,1,1}$.

Como la degeneración es una consecuencia de la simetría, podemos eliminar la degeneración haciendo asimétrica la caja. Esto se logra dando diferentes longitudes L_X, L_Y y L_Z, a los tres lados de la caja. Si se repiten los pasos seguidos para resolver la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo, se determina que los niveles de energía están dados por

$$E_{n_X,n_Y,n_Z} = \left(\frac{n_X{}^2}{L_X{}^2} + \frac{n_Y{}^2}{L_Y{}^2} + \frac{n_Z{}^2}{L_Z{}^2}\right)\frac{\pi^2\hbar^2}{2m} \quad (n_X = 1, 2, 3, \ldots;\ n_Y = 1, 2, 3, \ldots;\ n_Z = 1, 2, 3, \ldots) \tag{41.17}$$

(niveles de energía, partícula en una caja tridimensional con lados de longitud L_X, L_Y y L_Z)

Si L_X, L_Y y L_Z son todas diferentes, los estados $(n_X, n_Y, n_Z) = (2, 1, 1)$, $(1, 2, 1)$ y $(1, 1, 2)$ tienen energías diferentes y, por lo tanto, ya no son degenerados. Observe que la ecuación (41.17) se reduce a la ecuación (41.16) cuando todas las longitudes son iguales ($L_X = L_Y = L_Z = L$).

Resumamos las diferencias clave entre una partícula en una caja tridimensional y el caso unidimensional que vimos en la sección 40.2:

- La función de onda de un estado estacionario tridimensional se puede escribir como el producto de tres funciones, una para cada coordenada espacial. Únicamente se necesita la función de la coordenada x para el caso de una dimensión.
- En el caso tridimensional, se necesitan tres números cuánticos para describir cada estado estacionario. En el caso unidimensional, solo se necesita un número cuántico.
- La mayoría de los niveles de energía en el caso tridimensional son degenerados: más de un estado estacionario tiene esta energía. No hay degeneración en el caso unidimensional.
- Para un estado estacionario, en el caso tridimensional, hay superficies en las que la función de distribución de probabilidad $|\psi|^2$ es cero. En el caso unidimensional, hay posiciones en el eje x donde $|\psi|^2$ es cero.

Veremos estas mismas características en la siguiente sección, conforme examinemos una situación tridimensional que es más realista que una partícula en una caja: el átomo de hidrógeno en el que un electrón con carga negativa gira alrededor de un núcleo con carga positiva.

Evalúe su comprensión de la sección 41.2 Clasifique de la energía más alta a la más baja los siguientes estados de una partícula en una caja cúbica de lado L: **i.** $(n_X, n_Y, n_Z) = (2, 3, 2)$; **ii.** $(n_X, n_Y, n_Z) = (4, 1, 1)$; **iii.** $(n_X, n_Y, n_Z) = (2, 2, 3)$; **iv.** $(n_X, n_Y, n_Z) = (1, 3, 3)$. ❙

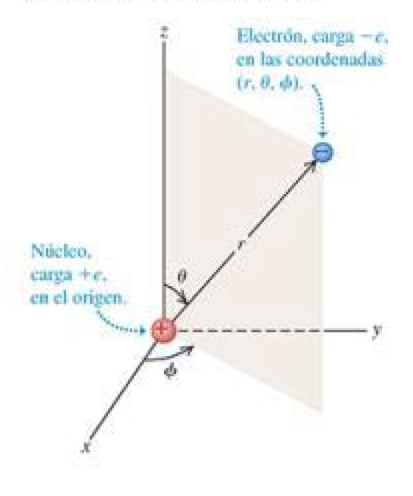
41.3 Átomo de hidrógeno

Continuemos nuestra descripción del átomo de hidrógeno, iniciada en el capítulo 39. En el modelo de Bohr, los electrones se mueven en órbitas circulares, como partículas newtonianas, pero con valores cuantizados de momento angular. Si bien este modelo proporcionaba los niveles de energía correctos en el átomo de hidrógeno, deducidos de los espectros, implicaba muchas dificultades conceptuales. Se mezclaba la física clásica con conceptos nuevos y aparentemente contradictorios. No permitía entender el proceso por el que se emiten y absorben los fotones. No se podía generalizar a los átomos con más de un electrón. Predecía propiedades magnéticas incorrectas para el átomo de hidrógeno. Y quizá lo más importante era que su imagen del electrón, como partícula puntual localizada, era incongruente con el punto de vista más general que desarrollamos en los capítulos 39 y 40. Para ir más allá del modelo de Bohr, aplicaremos la ecuación de Schrödinger con la finalidad de determinar las funciones de onda de estados estacionarios (estados de energía definida) del átomo de hidrógeno. Como en la sección 39.3, incluiremos el movimiento del núcleo con tan solo reemplazar la masa m del electrón por la masa reducida m_r.

Ecuación de Schrödinger para el átomo de hidrógeno

Ya describimos la versión tridimensional de la ecuación de Schrödinger en la sección 41.1. La función de energía potencial es *esféricamente simétrica*: depende solo de la distancia $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$, al origen de coordenadas:

$$U(r) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^2}{r} \qquad (41.18)$$



41.5 La ecuación de Schrödinger para el átomo de hidrógeno se resuelve más fácilmente usando coordenadas esféricas.

El problema del átomo de hidrógeno se formula mejor en coordenadas esféricas (r, θ, ϕ) como las que se muestran en la figura 41.5; la función de energía potencial esféricamente simétrica solo depende de r, no de θ, ni de ϕ. La ecuación de Schrödinger con esta función de energía potencial se puede resolver en forma exacta; las soluciones son combinaciones de funciones conocidas. Sin entrar en muchos detalles, podemos describir las características más importantes del procedimiento y los resultados.

En primer lugar, obtendremos la solución usando el mismo método de separación de variables que utilizamos para una partícula en una caja cúbica en la sección 41.2. Expresamos la función de onda $\psi(r, \theta, \phi)$ como producto de tres funciones, cada una en términos de solo una de las tres coordenadas:

$$\psi(r, \theta, \phi) = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\phi) \qquad (41.19)$$

Esto es, la función $R(r)$ depende solo de r, la función $\Theta(\theta)$ depende solo de θ y la función $\Phi(\phi)$ depende solo de ϕ. Exactamente como sucede en el caso de una partícula en una caja tridimensional, cuando se sustituye la ecuación (41.19) en la ecuación de Schrödinger, se obtienen tres ecuaciones diferenciales ordinarias separadas. Una ecuación solo implica a r y $R(r)$, una segunda ecuación solo involucra a θ y $\Theta(\theta)$ y una tercera solo implica a ϕ y $\Phi(\phi)$:

$$-\frac{\hbar^2}{2m_r r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR(r)}{dr}\right) + \left(\frac{\hbar^2 l(l+1)}{2m_r r^2} + U(r)\right)R(r) = ER(r) \qquad (41.20a)$$

$$\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\operatorname{sen}\theta\frac{d\Theta(\theta)}{d\theta}\right) + \left(l(l+1) - \frac{m_l^2}{\operatorname{sen}^2\theta}\right)\Theta(\theta) = 0 \qquad (41.20b)$$

$$\frac{d^2\Phi(\phi)}{d\phi^2} + m_l^2\Phi(\phi) = 0 \qquad (41.20c)$$

En las ecuaciones (41.20), E es la energía del estado estacionario, y l y m_l son constantes que analizaremos más adelante. (¡Cuidado! No confunda la constante m_l con la masa reducida m_r).

No intentaremos resolver este conjunto de tres ecuaciones, pero podemos describir cómo se hace. Al igual que para la partícula en una caja cúbica, las soluciones físicamente aceptables de esas tres ecuaciones se determinan con las condiciones de frontera. La función radial $R(r)$ de la ecuación (41.20a) debe tender a cero cuando r es

grande, ya que estamos describiendo *estados ligados* del electrón, localizados cerca del núcleo. Esto es análogo al requisito de que las funciones de onda del oscilador armónico (sección 40.5) deben tender a cero cuando x es grande. Las funciones angulares $\Theta(\theta)$ y $\Theta(\phi)$ en las ecuaciones (41.20b) y (41.20c) deben ser *finitas* para todos los valores relevantes de los ángulos. Por ejemplo, hay soluciones de la ecuación de Θ que se vuelven infinitas en $\theta = 0$ y $\theta = \pi$; estas son inaceptables, porque $\psi(r, \theta, \phi)$ debe ser normalizable. Además, la función angular $\Theta(\phi)$ en la ecuación (41.20c) debe ser *periódica*. Por ejemplo, (r, θ, ϕ) y $(r, \theta, \phi + 2\pi)$ describen el mismo punto, por lo que $\Phi(\phi + 2\pi)$ debe ser igual a $\Phi(\phi)$.

Las funciones radiales $R(r)$ permitidas son una función exponencial $e^{-\alpha r}$ (donde α es positiva) multiplicada por un polinomio en r. Las funciones $\Theta(\theta)$ son polinomios formados por diversas potencias de sen θ y cos θ, y las funciones $\Phi(\phi)$ simplemente son proporcionales a $e^{im_l\phi}$, donde $i = \sqrt{-1}$ y m_l es un entero que puede ser positivo, cero o negativo.

En el proceso para determinar las soluciones que satisfagan las condiciones de frontera, también se determinan los niveles de energía correspondientes. Denotamos las energías de estos niveles [E en la ecuación (41.20a)] con E_n ($n = 1, 2, 3, \ldots$). Estas son *idénticas* a las del modelo de Bohr, dadas por la ecuación (39.15), sustituyendo la masa en reposo m del electrón por la masa reducida m_r. Al rescribir esa ecuación usando $\hbar = h/2\pi$, tenemos

$$E_n = -\frac{1}{(4\pi\epsilon_0)^2}\frac{m_r e^4}{2n^2\hbar^2} = -\frac{13.60\text{ eV}}{n^2} \qquad \text{(niveles de energía del hidrógeno)} \qquad (41.21)$$

Al igual que en la sección 39.3, llamaremos a n **número cuántico principal** para el nivel de energía E_n.

La ecuación (41.21) es una importante validación de nuestro análisis de la ecuación de Schrödinger del átomo de hidrógeno. El análisis de Schrödinger es muy distinto del modelo de Bohr, tanto en el sentido matemático como en el conceptual y, sin embargo, ambos dan como resultado el mismo esquema de niveles de energía, el cual coincide con las energías determinadas con los espectros. Como veremos, el análisis de Schrödinger puede explicar muchos más aspectos del átomo de hidrógeno de los que puede explicar el modelo de Bohr.

Cuantización del momento angular orbital

Las soluciones de las ecuaciones (41.20) que satisfacen las condiciones de frontera, que mencionamos anteriormente, también tienen valores cuantizados del *momento angular orbital*. Esto es, solo se permiten ciertos valores discretos de la magnitud y de las componentes del momento angular orbital. En el análisis del modelo de Bohr en la sección 39.3, mencionamos que la cuantización del momento angular era un resultado con escasa justificación fundamental. Con la ecuación de Schrödinger, esta justificación surge automáticamente.

Los valores posibles de la magnitud L del momento angular orbital $\vec{L}$ se determinan con el requerimiento de que la función $\Theta(\theta)$ en la ecuación (41.20b) sea finita en $\theta = 0$ y $\theta = \pi$. En un nivel de energía E_n y número cuántico principal n, los valores posibles de L son

$$L = \sqrt{l(l+1)}\hbar \qquad (l = 0, 1, 2, \ldots, n-1) \qquad \text{(magnitud del momento angular orbital)} \qquad (41.22)$$

El *número cuántico l del momento angular orbital*, que es la misma l que aparece en las ecuaciones (41.20a) y (41.20b), se llama **número cuántico orbital**, en forma abreviada. En el modelo de Bohr, cada nivel de energía correspondía a un solo valor de momento angular. La ecuación (41.22) muestra que, de hecho, hay n valores distintos posibles de L para el n-ésimo nivel de energía.

Una característica interesante de la ecuación (41.22) es que el momento angular orbital es *cero* para los estados $l = 0$. Este resultado no concuerda con el modelo de Bohr, donde el electrón siempre se movía en un círculo de radio definido, y L nunca

era cero. Las funciones de onda ψ con $l = 0$ solo dependen de r; para dichos estados, las funciones $\Theta(\theta)$ y $\Phi(\phi)$ son constantes. Entonces, las funciones de onda para los estados $l = 0$ tienen simetría esférica; no hay nada en su distribución de probabilidad $|\psi|^2$ que favorezca una u otra dirección, y no hay momento angular orbital.

Los valores permitidos de la *componente* de $\vec{L}$ en determinada dirección, por ejemplo, la componente L_z en la dirección z se determina con el requerimiento de que la función $\Phi(\phi)$ debe ser igual $\Phi(\phi + 2\pi)$. Los valores posibles de L_z son

$$L_z = m_l\hbar \qquad (m_l = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm l) \qquad \text{(componentes del momento angular orbital)} \qquad (41.23)$$

El número cuántico m_l es el mismo que el de las ecuaciones (41.20*b*) y (41.20*c*). Se ve que m_l puede ser cero o un entero positivo o negativo hasta una magnitud l, pero no mayor que esta. Es decir, $|m_l| \leq l$. Por ejemplo, si $l = 1$, m_l puede ser igual a 1, 0 o -1. Por razones que veremos más adelante, *a* m_l se le llama *número cuántico orbital magnético*, o en forma abreviada, **número cuántico magnético**.

La componente L_z nunca puede ser igual a L (a menos que ambos sean cero). Por ejemplo, cuando $l = 2$, el valor máximo posible de m_l también es 2; entonces, las ecuaciones (41.22) y (41.23) dan como resultado

$$L = \sqrt{2(2+1)}\hbar = \sqrt{6}\hbar = 2.45\hbar$$

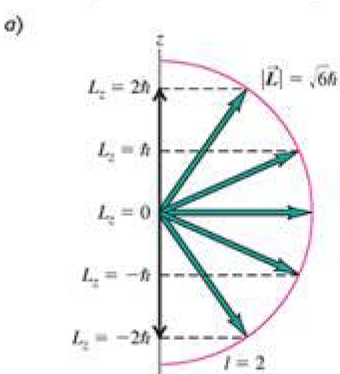
$$L_z = 2\hbar$$

La figura 41.6 representa esta situación. El valor mínimo del ángulo θ_L entre el vector $\vec{L}$ y el eje z está dado por

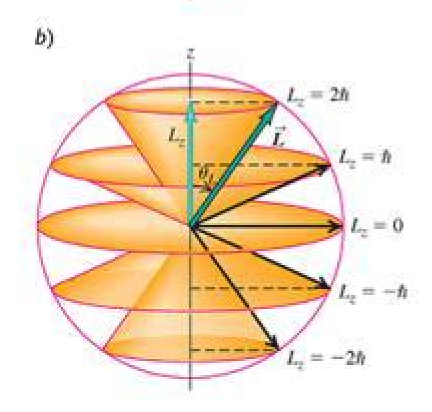
$$\theta_L = \arccos\frac{L_z}{L} = \arccos\frac{2}{2.45} = 35.3°$$

41.6 *a*) Cuando $l = 2$, la magnitud del vector $\vec{L}$ del momento angular es $\sqrt{6}\hbar = 2.45\hbar$ pero $\vec{L}$ no tiene una dirección definida. En esta imagen vectorial semiclásica, $\vec{L}$ forma un ángulo de 35.3° con el eje z cuando la componente z tiene su valor máximo de $2\hbar$. *b*) Estos conos muestran las direcciones posibles de $\vec{L}$ para diferentes valores de L_z.

a)



b)



El principio de incertidumbre también requiere que $|L_z|$ siempre sea menor que L. Suponga que pudiéramos conocer la *dirección* precisa del vector de momento angular orbital. Entonces, definiríamos ahí la dirección del eje z, y L_z sería igual a L. Eso corresponde a una partícula que solo se mueva en el plano xy; en tal caso, la componente z del momento lineal $\vec{p}$ sería cero, sin incertidumbre Δp_z. Entonces, el principio de incertidumbre $\Delta z \Delta p_z \geq \hbar$ requiere que la incertidumbre Δz en la coordenada z sea infinita. Eso es imposible para un estado localizado; llegamos a la conclusión de que no podemos conocer con precisión la dirección de $\vec{L}$. Así, como ya habíamos dicho, la componente de $\vec{L}$ en determinada dirección no puede ser tan grande como su magnitud L. Además, si no podemos conocer con precisión la dirección de $\vec{L}$ no podemos determinar con precisión las componentes L_x y L_y. Por lo tanto, en la figura 41.6*b* se muestran *conos* de direcciones posibles de $\vec{L}$.

Quizás usted se pregunte por qué dedicamos especial atención al eje z. No hay una razón importante para ello; desde luego, al átomo no le importa cuál sistema de coordenadas usemos. Lo que importa es que no podemos determinar con certidumbre las tres componentes del momento angular orbital, por lo que en forma arbitraria seleccionamos una como la que deseamos medir. Cuando estudiemos las interacciones del átomo con un campo magnético, elegiremos en forma consistente al eje z como la dirección de $\vec{B}$.

Notación de números cuánticos

Las funciones de onda para el átomo de hidrógeno se determinan con los valores de tres números cuánticos n, l y m_l. (Compare esto con la partícula en una caja tridimensional que consideramos en la sección 41.2. Allí también se necesitaron tres números cuánticos para describir cada estado estacionario). La energía E_n se determina por el número cuántico principal n, de acuerdo con la ecuación (41.21). La magnitud del momento angular orbital se determina con el número cuántico orbital l, según la ecuación (41.22). La componente del momento angular orbital en dirección de un eje determinado (por costumbre, el eje z) se determina con el número cuántico magnético m_l, como en la ecuación (41.23). La energía no depende de los valores de l ni de m_l (figura 41.7), por lo que para cada nivel de energía E_n definido por la ecuación (41.21) hay más de un estado distinto con la misma energía, pero distintos números cuánticos. Es decir, estos estados son *degenerados*, igual que la mayoría de los estados de una partícula en una caja tridimen-

sional. Al igual que en una caja de tres dimensiones, la degeneración se presenta porque el átomo de hidrógeno es simétrico: si usted gira el átomo a través de un ángulo, la función de energía potencial a una distancia r del núcleo tiene el mismo valor.

A los estados con diversos valores del número cuántico orbital l se les representa con frecuencia con letras, de acuerdo con el siguiente esquema:

$l = 0$: estados s
$l = 1$: estados p
$l = 2$: estados d
$l = 3$: estados f
$l = 4$: estados g
$l = 5$: estados h

y continúa la notación alfabética. Esta elección aparentemente irracional de las letras s, p, d y f se originó en los albores de la espectroscopia y no tiene un significado importante. En una forma importante de la *notación espectroscópica* que usaremos con frecuencia, un estado con $n = 2$ y $l = 1$ se llama estado $2p$; un estado con $n = 4$ y $l = 0$ es un estado $4s$, y así sucesivamente. Solo los estados s ($l = 0$) tienen simetría esférica.

Veamos algo más sobre notación. La extensión radial de las funciones de onda aumenta al incrementarse el número cuántico principal n, y se puede hablar de una región del espacio asociada con determinado valor de n como una **capa**. En especial, en las descripciones de átomos con muchos electrones, a esas capas se les asignan letras mayúsculas:

$n = 1$: capa K
$n = 2$: capa L
$n = 3$: capa M
$n = 4$: capa N

etcétera, continuando con la notación alfabética. Para cada n, los distintos valores de l corresponden a *subcapas* distintas. Por ejemplo, la capa L ($n = 2$) contiene las subcapas $2s$ y $2p$.

La tabla 41.1 muestra algunas de las combinaciones posibles de los números cuánticos n, l y m_l para funciones de onda del átomo de hidrógeno. También se muestra la notación espectroscópica y la notación de capas.

41.7 La energía de un satélite en órbita, como el Telescopio Espacial Hubble, depende de la distancia media entre el satélite y el centro de la Tierra. *No* depende de si la órbita es circular (con un momento angular orbital L grande) o elíptica (en este caso, L es menor). Del mismo modo, la energía de un átomo de hidrógeno no depende del momento angular orbital.



Tabla 41.1 Estados cuánticos del átomo de hidrógeno

n	l	m_l	Notación espectroscópica	Capa
1	0	0	$1s$	K
2	0	0	$2s$	L
2	1	$-1, 0, 1$	$2p$	
3	0	0	$3s$	M
3	1	$-1, 0, 1$	$3p$	
3	2	$-2, -1, 0, 1, 2$	$3d$	
4	0	0	$4s$	N

y así sucesivamente

Estrategia para resolver problemas 41.1 Estructura atómica



IDENTIFICAR *los conceptos relevantes:* Muchos problemas de la estructura atómica se pueden resolver solo refiriéndose a los números cuánticos n, l y m_l, que describen la energía total E, la magnitud del momento angular orbital $\vec{L}$, la componente z de $\vec{L}$, y otras propiedades del átomo.

PLANTEAR *el problema:* Identifique las incógnitas y elija las ecuaciones adecuadas, que pueden incluir las ecuaciones (41.21), (41.22) y (41.23).

EJECUTAR *la solución* como sigue:

1. Asegúrese de conocer los valores posibles de los números cuánticos n, l y m_l del átomo de hidrógeno. Todos son enteros; n siempre es mayor que cero, l puede ser cero o positivo hasta $n - 1$, y m_l puede ir desde $-l$ hasta l. Usted debe contar la cantidad de estados (n, l, m_l) en cada capa (K, L, M, etcétera) y cada subcapa ($3s$, $3p$, $3d$, etcétera). Más que solo memorizar, debería saber cómo *construir* la tabla 41.1.
2. Despeje las incógnitas.

EVALUAR *la respuesta:* En física atómica, ayuda estar familiarizado con algunas magnitudes características. Por ejemplo, la energía potencial eléctrica de un protón y un electrón que están a 0.10 nm de distancia (característica de las dimensiones atómicas) es de -15 eV, aproximadamente. La luz visible tiene longitudes de onda de unos 500 nm, y frecuencias cercanas a 5×10^{14} Hz. En la estrategia para resolver problemas 39.1 (sección 39.1) se dan otras magnitudes típicas.



Ejemplo 41.2 Conteo de los estados del hidrógeno

¿Cuántos estados distintos (n, l, m_l) hay en el átomo de hidrógeno con $n = 3$? Calcule las energías de esos estados.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Este problema utiliza las relaciones entre el número cuántico principal n, el número cuántico orbital l, el número cuántico magnético m_l y la energía de un estado para el átomo de hidrógeno. Usaremos la regla de que l puede tener n valores enteros, de 0 a $n - 1$, y que m_l puede tener valores de $2l + 1$, de $-l$ a l. La energía de cualquier estado en particular se determina con la ecuación (41.21).

EJECUTAR: Cuando $n = 3$, l puede ser 0, 1 o 2. Cuando $l = 0$, m_l solo puede ser 0 (1 estado). Cuando $l = 1$, m_l puede ser -1, 0 o 1 (3 estados). Cuando $l = 2$, m_l puede ser -2, -1, 0, 1 o 2 (5 estados). La cantidad total de estados (n, l, m_l) con $n = 3$ es, por consiguiente, $1 + 3 + 5 = 9$. (En la sección 41.5 veremos que la cantidad total de estados $n = 3$ es en realidad el doble, es decir, 18, debido al espín del electrón).

La energía de un estado del átomo de hidrógeno depende solo de n, de modo que 9 de estos estados tienen la misma energía. De acuerdo con la ecuación (41.21),

$$E_3 = \frac{-13.60 \text{ eV}}{3^2} = -1.51 \text{ eV}$$

EVALUAR: Para un valor dado de n, el número total (n, l, m_l) de estados resulta ser n^2. En este caso, $n = 3$ y hay $3^2 = 9$ estados. Recuerde que el nivel fundamental (o base) del hidrógeno tiene $n = 1$ y $E_1 = -13.6$ eV; los estados excitados con $n = 3$ tienen mayor energía (menos negativa).



Ejemplo 41.3 Momento angular en un nivel excitado del hidrógeno

Considere los estados del hidrógeno con $n = 4$. *a)* ¿Cuál es la magnitud máxima L del momento angular orbital? *b)* ¿Cuál es el valor máximo de L_z? *c)* ¿Cuál es el ángulo mínimo entre $\vec{L}$ y el eje z? Exprese las respuestas de los incisos *a)* y *b)* en función de $\hbar$.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: De nuevo necesitamos relacionar el número cuántico principal n y el número cuántico orbital l para un átomo de hidrógeno. También necesitamos relacionar el valor de l con la magnitud y las direcciones posibles del vector momento angular orbital. Se usará la ecuación (41.22) en el inciso *a)* para determinar el valor máximo de L, y luego se usará la ecuación (41.23) en el inciso *b)* para determinar el valor máximo de L_z. El ángulo entre $\vec{L}$ y el eje z es mínimo cuando L_z es máximo (de manera que $\vec{L}$ casi está alineado con el eje positivo z).

EJECUTAR: *a)* Cuando $n = 4$, el valor máximo del número cuántico del momento angular orbital l es $(n - 1) = (4 - 1) = 3$; de acuerdo con la ecuación (41.22),

$$L_{\text{máx}} = \sqrt{3(3+1)}\hbar = \sqrt{12}\hbar = 3.464\hbar$$

b) Para $l = 3$, el valor máximo de m_l es 3. Según la ecuación (41.23),

$$(L_z)_{\text{máx}} = 3\hbar$$

c) El ángulo *mínimo* permitido entre $\vec{L}$ y el eje z corresponde a los valores *máximos* permitidos de L_z y m_l (la figura 41.6*b* muestra un ejemplo con $l = 2$). Para el estado con $l = 3$ y $m_l = 3$,

$$\theta_{\text{mín}} = \arccos\frac{(L_z)_{\text{máx}}}{L} = \arccos\frac{3\hbar}{3.464\hbar} = 30.0°$$

EVALUAR: Como comprobación, verifique que θ sea mayor que 30.0° para todos los estados con valores menores de l.

Distribuciones de probabilidad para electrones

Más que representar un electrón como una partícula puntual que se mueve describiendo un círculo preciso, la ecuación de Schrödinger define una *distribución de probabilidad* para el electrón que rodea al núcleo. Como las distribuciones de probabilidad para el átomo de hidrógeno son tridimensionales, son más difíciles de visualizar que las órbitas circulares bidimensionales del modelo de Bohr. Le ayudará observar la *función de distribución de probabilidad radial* $P(r)$, esto es, la probabilidad por longitud radial de que el electrón se encuentre a diversas distancias del protón. Según la sección 41.1, la probabilidad de que el electrón se encuentre en un pequeño elemento de volumen dV es $|\psi|^2 dV$. (Se supone que ψ está normalizada de acuerdo con la ecuación (41.6), esto es, que la integral de $|\psi|^2 dV$ sobre todo el espacio es igual a la unidad, por lo que hay 100% de probabilidad de encontrar el electrón en algún lugar del universo). Tomemos como elemento de volumen un cascarón esférico delgado, de radio interior r y radio exterior $r + dr$. El volumen dV de este cascarón es, aproximadamente, su área $4\pi r^2$ multiplicada por su espesor dr:

$$dV = 4\pi r^2\, dr \tag{41.24}$$

Se representará con $P(r)dr$ la probabilidad de que la partícula se encuentre dentro del intervalo radial dr y, entonces, usando la ecuación (41.24),

$$P(r)\,dr = |\psi|^2\,dV = |\psi|^2 4\pi r^2\,dr \quad \text{(probabilidad de que el electrón esté entre } r \text{ y } r + dr\text{)} \tag{41.25}$$

Para funciones de onda que dependen de θ y ϕ, así como de r, usaremos el valor de $|\psi|^2$ promediado sobre todos los ángulos en la ecuación (41.25).

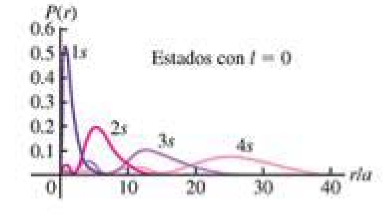
En la figura 41.8 se presentan gráficas de $P(r)$ para varias funciones de onda del átomo de hidrógeno. Las escalas de r están indicadas en múltiplos de a, la distancia mínima entre el electrón y el núcleo en el modelo de Bohr,

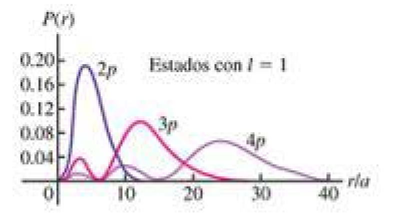
$$a = \frac{\epsilon_0 h^2}{\pi m_r e^2} = \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{m_r e^2} = 5.29 \times 10^{-11}\ \text{m} \quad (r \text{ mínima, modelo de Bohr}) \tag{41.26}$$

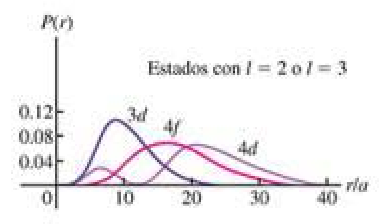
Igual que para una partícula en una caja cúbica (véase la sección 41.2), hay algunas posiciones donde la probabilidad es cero. Estas superficies son planos para una partícula en una caja; para un átomo de hidrógeno, estas son superficies esféricas (es decir, superficies con r constante). Aunque, nuevamente, el principio de incertidumbre nos indica que no hay por qué preocuparse: de cualquier modo, un electrón no se puede localizar con exactitud. Observe que en el caso de los estados que tienen la l máxima posible para cada n (como los estados 1*s*, 2*p*, 3*d* y 4*f*), $P(r)$ tiene un solo máximo en n^2a. Para esos estados, es más probable que el electrón se encuentre a la distancia del núcleo que el modelo de Bohr predice, $r = n^2a$.

La figura 41.8 muestra las funciones de distribución de probabilidad *radial* $P(r) = 4\pi r^2|\psi|^2$, que indican la probabilidad relativa de encontrar el electrón dentro de un cascarón esférico delgado de radio r. En contraste, las figuras 41.9 y 41.10 muestran las funciones de distribución *tridimensional* de probabilidad $|\psi|^2$, que indican la probabilidad relativa de encontrar el electrón dentro de una caja pequeña en determinada posición. Cuanto más oscura sea la "nube" azul, mayor será el valor de $|\psi|^2$. (Estas son similares a las "nubes" mostradas en la figura 41.2). La figura 41.9 muestra cortes transversales de las nubes de probabilidad con simetría esférica, para las tres subcapas inferiores *s*, para las cuales $|\psi|^2$ solo depende de la coordenada radial r. La figura 41.10 muestra cortes transversales de las nubes de otros estados electrónicos, para los que $|\psi|^2$ depende de r y de θ. En dichos estados, la función de distribución de probabilidad es cero para ciertos valores de θ, así como para ciertos valores de r. En *cualquier* estado estacionario del átomo de hidrógeno, $|\psi|^2$ es independiente de ϕ.

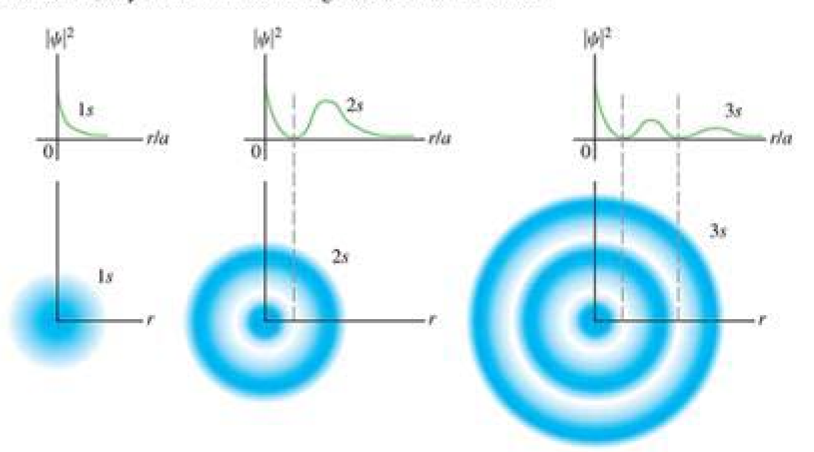
41.8 Funciones $P(r)$ de distribución de probabilidad radial, para varias funciones de onda del átomo de hidrógeno, graficadas como funciones de la razón r/a [véase la ecuación (41.26)]. Para cada función, la cantidad de máximos es $(n - l)$. Las curvas para las que $l = n - 1$ (1*s*, 2*p*, 3*d*, …), tienen únicamente un máximo, localizado en $r = n^2a$.



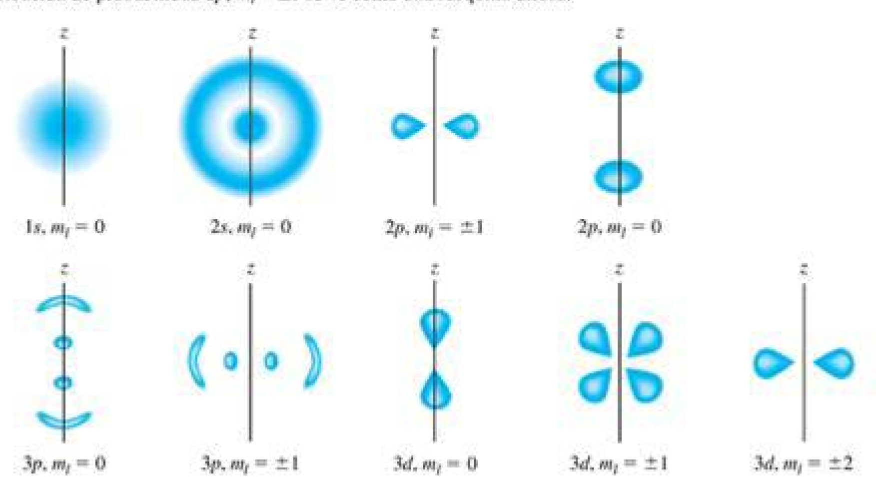




41.9 Funciones ψ^2 tridimensionales de distribución de probabilidad, para las funciones de onda 1*s*, 2*s* y 3*s* del átomo de hidrógeno, con simetría esférica.



41.10 Cortes transversales de distribuciones tridimensionales de probabilidad, para algunos estados cuánticos del átomo de hidrógeno. No están en la misma escala. Gire mentalmente cada dibujo alrededor del eje z para obtener la representación tridimensional de $|\psi|^2$. Por ejemplo, la distribución de probabilidad $2p$, $m_l = \pm 1$ se ve como una rosquilla difusa.



Ejemplo 41.4 Una función de onda del hidrógeno



La función de onda del estado base para el hidrógeno (un estado 1s) es

$$\psi_{1s}(r) = \frac{1}{\sqrt{\pi a^3}} e^{-r/a}$$

a) Verifique que esta función esté normalizada. *b*) ¿Cuál es la probabilidad de que el electrón se encuentre a una distancia menor que a del núcleo?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: El ejemplo es similar al ejemplo 41.1 de la sección 41.2. Es necesario demostrar que esta función de onda satisface la condición de que la probabilidad de encontrar el electrón en *algún lugar* es 1. Entonces, se requiere calcular la probabilidad de que estará en la región $r < a$. En el inciso *a*) resolveremos la integral $\int |\psi|^2 dV$ sobre todo el espacio; si es igual a 1, la función de onda está normalizada. En el inciso *b*) resolveremos la misma integral sobre un volumen esférico que vaya desde el origen (el núcleo) hasta una distancia a del núcleo.

EJECUTAR: *a*) Como la función de onda solo depende de la coordenada radial r, podemos elegir nuestros elementos de volumen como cascarones esféricos de radio r, espesor dr y volumen dV dados por la ecuación (41.24). Entonces,

$$\int_{\text{todo el espacio}} |\psi_{1s}|^2 \, dV = \int_0^\infty \frac{1}{\pi a^3} e^{-2r/a} (4\pi r^2 \, dr) = \frac{4}{a^3} \int_0^\infty r^2 e^{-2r/a} \, dr$$

La siguiente integral indefinida se puede encontrar en una tabla de integrales, o integrarse por partes:

$$\int r^2 e^{-2r/a} \, dr = \left(-\frac{ar^2}{2} - \frac{a^2 r}{2} - \frac{a^3}{4} \right) e^{-2r/a}$$

Es sencillo realizar esta evaluación entre los límites $r = 0$ y $r = \infty$; es cero en $r = \infty$ por el factor exponencial, y en $r = 0$ solo sobrevive el último término del paréntesis. Entonces, el valor de la integral definida es $a^3/4$. Con todo ello, se ve que

$$\int_0^\infty |\psi_{1s}|^2 \, dV = \frac{4}{a^3} \int_0^\infty r^2 e^{-2r/a} \, dr = \frac{4}{a^3} \frac{a^3}{4} = 1$$

La función de onda *está* normalizada.

b) Para determinar la probabilidad P de que el electrón esté ubicado en $r < a$, hacemos la misma integración, pero con los límites 0 y a. Dejaremos los detalles para el lector (véase el ejercicio 41.15). Para el límite superior se obtiene $-5e^{-2}a^3/4$; el resultado final es

$$P = \int_0^a |\psi_{1s}|^2 \, 4\pi r^2 \, dr = \frac{4}{a^3} \left(-\frac{5a^3 e^{-2}}{4} + \frac{a^3}{4} \right) = (-5e^{-2} + 1) = 1 - 5e^{-2} = 0.323$$

EVALUAR: Los resultados indican que en un estado base esperaríamos que el electrón se encuentre a una distancia del núcleo menor que a aproximadamente $\frac{1}{3}$ del tiempo, y a mayor distancia, unos $\frac{2}{3}$ del tiempo. Aunque es difícil afirmar con exactitud, en la figura 41.8, más o menos $\frac{2}{3}$ del área bajo la curva 1s está a distancias mayores que a (esto es, $r/a > 1$).

Átomos hidrogenoides

En el análisis de Schrödinger son igualmente válidas dos generalizaciones que describimos con el modelo de Bohr en la sección 39.3. La primera es que si el "átomo" no está formado por un solo protón y un solo electrón, el uso de la masa reducida m_r del sistema en las ecuaciones (41.21) y (41.26) causará cambios que son apreciables en al-

gunos sistemas poco comunes. Un ejemplo es el *positronio*, formado por un positrón y un electrón que se orbitan el uno al otro; un ejemplo más es un *átomo muónico*, en el cual el electrón es sustituido por una partícula inestable llamada muón, que tiene la misma carga que un electrón pero es 207 veces más masivo. La segunda generalización es que nuestro análisis es aplicable a iones con un solo electrón, como He^+, Li^{+2}, etcétera. Para esos iones se sustituye e^2 por Ze^2 en las ecuaciones (41.21) y (41.26), donde Z es el número de protones (el **número atómico**).

Evalúe su comprensión de la sección 41.3 Ordene de mayor a menor los siguientes estados del átomo de hidrógeno según la probabilidad de encontrar al electrón en la vecindad de $r = 5a$: **i.** $n = 1$, $l = 0$, $m_l = 0$; **ii.** $n = 2$, $l = 1$, $m_l = +1$; **iii.** $n = 2$, $l = 1$, $m_l = 0$.



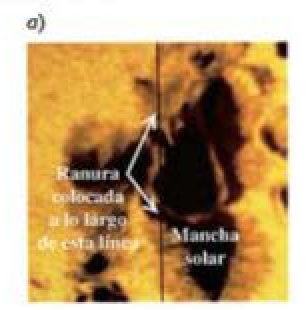
41.4 Efecto Zeeman

El **efecto Zeeman** es el desdoblamiento de los niveles atómicos de energía y de las líneas espectrales asociadas, cuando los átomos se colocan en un campo magnético (figura 41.11). Este efecto confirma, en forma experimental, la cuantización del momento angular. El análisis en esta sección, donde se supone que el único momento angular es el momento angular *orbital* de un simple electrón, también revela por qué a m_l se le llama número cuántico magnético.

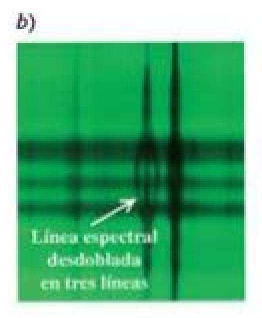
Los átomos contienen cargas en movimiento, por lo que no debe sorprender que las fuerzas magnéticas causen cambios en ese movimiento y en los niveles de energía. A mediados del siglo XIX, los físicos especulaban si las fuentes de luz visible podrían ser cargas eléctricas vibratorias, a escala atómica. En 1896, el físico holandés Pieter Zeeman fue el primero en demostrar que, en la presencia de un campo magnético, algunas líneas espectrales se desdoblaban en grupos de líneas muy cercanas (figura 41.12). Este efecto lleva hoy su nombre.

41.11 Efectos magnéticos sobre el espectro de la luz solar. *a)* La ranura de un espectrógrafo se coloca a lo largo de la línea negra que cruza una parte de la mancha solar. *b)* El campo magnético de 0.4 T en la mancha solar (miles de veces mayor que el campo terrestre) desdobla la línea espectral de en medio en tres líneas.

a)



b)



Momento magnético de un electrón en órbita

Comencemos el análisis del efecto Zeeman repasando el concepto de *momento dipolar magnético* o *momento magnético*, presentado en la sección 27.7. Una espira plana de corriente con área vectorial $\vec{A}$ que conduce la corriente I tiene un momento magnético $\vec{\mu}$ definido por

$$\vec{\mu} = I\vec{A} \qquad (41.27)$$

Cuando un dipolo magnético de momento $\vec{\mu}$ se coloca en un campo magnético $\vec{B}$, el campo ejerce una torca $\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B}$ en el dipolo. La energía potencial U asociada con esta interacción está dada por la ecuación (27.27):

$$U = -\vec{\mu} \cdot \vec{B} \qquad (41.28)$$

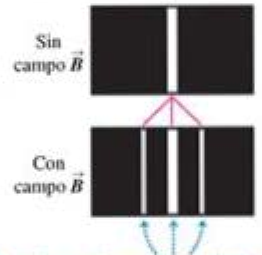
Ahora usaremos las ecuaciones (41.27) y (41.28), así como el modelo de Bohr, para examinar la interacción de un átomo de hidrógeno con un campo magnético. El electrón en órbita con rapidez v equivale a una espira de corriente de radio r y área πr^2. La corriente media I es la carga promedio, por unidad de tiempo, que pasa por un punto de la órbita. Esta es igual a la magnitud e de la carga dividida entre el tiempo T de una revolución, dada por $T = 2\pi r/v$. Así, $I = ev/2\pi r$, y de acuerdo con la ecuación (41.27), la magnitud μ del momento magnético es

$$\mu = IA = \frac{ev}{2\pi r}\pi r^2 = \frac{evr}{2} \qquad (41.29)$$

También podemos expresar esto en términos de la magnitud L del momento angular orbital. Según la ecuación (10.28), el momento angular de una partícula en órbita circular es $L = mvr$, y la ecuación (41.29) se transforma en

$$\mu = \frac{e}{2m}L \qquad (41.30)$$

41.12 Efecto Zeeman normal. Compárelo con el desdoblamiento magnético del espectro solar mostrado en la figura 41.11*b*.



La razón entre la magnitud de $\vec{\boldsymbol{\mu}}$ y la magnitud de $\vec{\boldsymbol{L}}$ es $\mu/L = e/2m$ y se llama la *razón giromagnética*.

En el modelo de Bohr, $L = nh/2\pi = n\hbar$, donde $n = 1, 2, \ldots$ Para un estado con $n = 1$ (un estado base), la ecuación (41.30) se convierte en $\mu = (e/2m)\hbar$. Esta cantidad es una unidad natural del momento magnético; se le llama **magnetón de Bohr** y se representa con μ_B:

$$\mu_B = \frac{e\hbar}{2m} \qquad \text{(definición del magnetón de Bohr)} \qquad (41.31)$$

Al evaluar la ecuación (41.31) tenemos:

$$\mu_B = 5.788 \times 10^{-5}\ \text{eV/T} = 9.274 \times 10^{-24}\ \text{J/T o A} \cdot \text{m}^2$$

Observe que las unidades J/T y $\text{A} \cdot \text{m}^2$ son equivalentes. Ya definimos antes estas cantidades en la sección 28.8.

Si bien el modelo de Bohr sugiere que el movimiento orbital de un electrón atómico provoca un momento magnético, ese modelo *no* da predicciones correctas acerca de las interacciones magnéticas. Por ejemplo, el modelo de Bohr predice que un electrón en un átomo de hidrógeno en estado base tiene un momento magnético orbital de magnitud μ_B. No obstante, la representación de Schrödinger indica que ese electrón en estado base se encuentra en un estado *s* con momento angular cero, por lo que ¡el momento magnético orbital debe ser *cero*! Para obtener los resultados correctos, debemos describir los estados usando funciones de onda de Schrödinger.

En la formulación de Schrödinger, los electrones tienen la misma relación de μ a L (razón giromagnética) que en el modelo de Bohr, que es $e/2m$. Suponga que el campo magnético $\vec{\boldsymbol{B}}$ se dirige a lo largo del eje $+z$. De acuerdo con la ecuación (41.28), la energía de interacción U del momento magnético del átomo con el campo es

$$U = -\mu_z B \qquad (41.32)$$

donde μ_z es la componente z del vector $\vec{\boldsymbol{\mu}}$.

Ahora usaremos la ecuación (41.30) para determinar μ_z, recordando que e es la *magnitud* de la carga del electrón, y que la carga real es $-e$. Como la carga del electrón es negativa, los vectores del momento angular orbital y del momento magnético son opuestos. Se observa que

$$\mu_z = -\frac{e}{2m}L_z \qquad (41.33)$$

Para las funciones de onda de Schrödinger, $L_z = m_l\hbar$, con $m_l = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm l$, así que la ecuación (41.33) se convierte en

$$\mu_z = -\frac{e}{2m}L_z = -m_l\frac{e\hbar}{2m} \qquad (41.34)$$

CUIDADO **Los dos usos del símbolo m** Tenga precaución para no confundir la masa del electrón m con el número cuántico magnético m_l.

Por último, podemos expresar la energía de interacción, ecuación (41.32), como:

$$U = -\mu_z B = m_l\frac{e\hbar}{2m}B \qquad (m_l = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm l)$$

(energía de interacción magnética orbital) (41.35)

En términos del magnetón de Bohr, $\mu_B = e\hbar/2m$, podemos escribir la ecuación (41.35) como

$$U = m_l\mu_B B \qquad \text{(energía de interacción magnética orbital)} \qquad (41.36)$$

El campo magnético desplaza la energía de cada estado orbital en una cantidad U. La energía de interacción U depende del valor de m_l, porque m_l determina la orientación

del momento magnético orbital en relación con el campo magnético. Esta dependencia es la causa por la que m_l se denomina número cuántico magnético.

Como los valores de m_l van de $-l$ a $+l$ en escalones de uno, un nivel de energía con un valor determinado de número cuántico orbital l contiene $(2l + 1)$ estados orbitales diferentes. Sin un campo magnético, todos esos estados tienen la misma energía, es decir, están degenerados. El campo magnético elimina esta degeneración. En presencia de un campo magnético se desdoblan en $2l + 1$ niveles distintos de energía; los niveles adyacentes difieren en energía en $(e\hbar/2m)B = \mu_B B$. Podemos entender esto en términos de la conexión entre degeneración y simetría. Con un campo magnético aplicado a lo largo del eje z, el átomo ya no es totalmente simétrico en rotación: existe una dirección preferente en el espacio. Eliminando la simetría, eliminamos la degeneración de los estados.

Este efecto sobre los niveles de energía del hidrógeno se muestra en la figura 41.13. Las líneas espectrales que corresponden a transiciones de un conjunto de niveles a otro están desdobladas en consecuencia, y aparecen como una serie de tres líneas espectrales cercanas que sustituyen a una línea única. Como muestra el siguiente ejemplo, el desdoblamiento de las líneas espectrales es bastante pequeño, porque el valor de $\mu_B B$ es pequeño, aun cuando los campos magnéticos sean considerables.

41.13 Diagrama de niveles de energía para el hidrógeno, que muestra el desdoblamiento de los niveles de energía causados por la interacción del momento magnético orbital del electrón con un campo magnético externo. Se muestran los valores de m_l al lado de los diversos niveles. Por claridad, se exageraron las magnitudes relativas de los desdoblamientos. No se muestran los desdoblamientos para $n = 4$. ¿Los podría trazar usted?

m_l m_l m_l — $E = 0$
$n = 4$ — 0 — 2 — -0.85 eV
$n = 3$ — 0 — 1, 0, -1 — 1, 0, -1, -2 — -1.51 eV
$l = 2$
$n = 2$ — 0 — 1, 0, -1 — -3.40 eV
$l = 1$
$n = 1$ — 0 — -13.60 eV
$l = 0$

Ejemplo 41.5 Un átomo en un campo magnético



Un átomo en un estado con $l = 1$ emite un fotón de 600.000 nm de longitud de onda al decaer a un estado con $l = 0$. Si el átomo se coloca en un campo magnético con magnitud $B = 2.00$ T, determine los corrimientos en los niveles de energía y en la longitud de onda, que resultan de la interacción entre el campo magnético y el momento magnético orbital del átomo.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Este problema tiene que ver con el desdoblamiento en niveles atómicos de energía provocado por un campo magnético (el efecto Zeeman). Usaremos la ecuación (41.35) o la (41.36) para determinar los corrimientos en los niveles de energía. Así, la relación $E = hc/\lambda$ entre la energía y la longitud de onda de un fotón nos permite calcular las longitudes de onda emitidas durante las transiciones de los estados con $l = 1$ al estado $l = 0$.

EJECUTAR: La energía de un fotón de 600 nm es

$$E = \frac{hc}{\lambda} = \frac{(4.14 \times 10^{-15}\ \text{eV}\cdot\text{s})(3.00 \times 10^{8}\ \text{m/s})}{600 \times 10^{-9}\ \text{m}} = 2.07\ \text{eV}$$

Si no hay campo magnético externo, esta es la diferencia de energía entre los niveles $l = 0$ y $l = 1$.

Cuando hay un campo de 2.00 T, la ecuación (41.36) indica que no hay corrimiento del estado $l = 0$ (que tiene $m_l = 0$). Para los estados con $l = 1$, el desdoblamiento de niveles de energía está dado por

$$U = m_l\mu_B B = m_l(5.788 \times 10^{-5}\ \text{eV/T})(2.00\ \text{T}) = m_l(1.16 \times 10^{-4}\ \text{eV}) = m_l(1.85 \times 10^{-23}\ \text{J})$$

Cuando $l = 1$, los valores posibles de m_l son -1, 0 y $+1$, y los tres niveles correspondientes están separados por intervalos iguales de

Continúa

1.16×10^{-4} eV. Esto es una fracción pequeña de los 2.07 eV de la energía del fotón:

$$\frac{\Delta E}{E} = \frac{1.16 \times 10^{-4}\ \text{eV}}{2.07\ \text{eV}} = 5.60 \times 10^{-5}$$

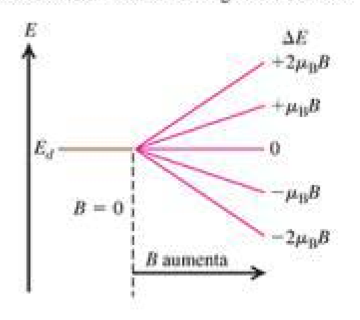
Los valores posibles de m_l para $l = 1$ son -1, 0 y $+1$, y los tres niveles correspondientes están separados por intervalos iguales de 1.16×10^{-4} eV. Esta es una pequeña fracción de los 2.07 eV de la energía del fotón:

$$\frac{1.16 \times 10^{-4}\ \text{eV}}{2.07\ \text{eV}} = 5.60 \times 10^{-5}$$

Los corrimientos de *longitudes de onda* correspondientes son, aproximadamente $(5.60 \times 10^{-5})(600\ \text{nm}) = 0.034$ nm. La línea original de 600.000 nm se desdobla en un triplete con longitudes de onda de 599.966, 600.000 y 600.034 nm.

EVALUAR: Aun cuando 2.00 T es un campo fuerte en la mayoría de los laboratorios, los desdoblamientos de longitud de onda son extremadamente pequeños. Sin embargo, los espectrógrafos modernos cuentan con suficiente poder de resolución cromático para medir esos desdoblamientos (véase la sección 36.5).

Reglas de selección

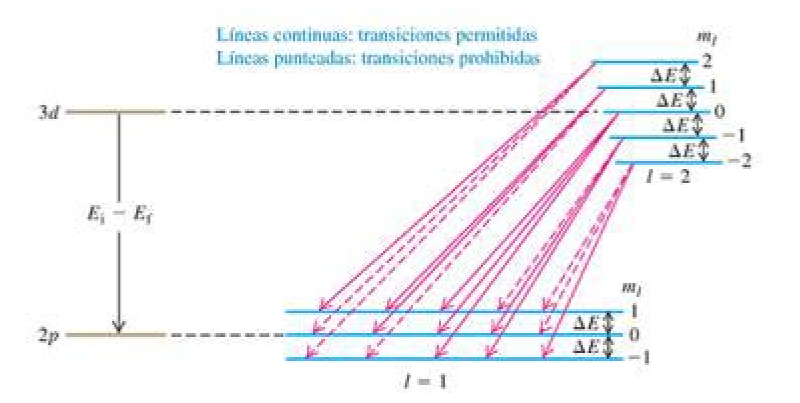


41.14 Esta figura muestra cómo el desdoblamiento de los niveles de energía de un estado d ($l = 2$) depende de la magnitud B de un campo magnético externo, suponiendo únicamente un momento magnético orbital.

La figura 41.14 muestra lo que sucede a un conjunto de estados d ($l = 2$), conforme aumenta el campo magnético. Con un campo igual a cero, los cinco estados, $m_l = -2, -1, 0, 1$ y 2, son degenerados (tienen la misma energía), pero el campo aplicado dispersa los estados y se elimina su degeneración. La figura 41.15 muestra los desdoblamientos de los estados 3d y 2p. Diferencias iguales de energía $(e\hbar/2m)B = \mu_B B$ separan los niveles adyacentes. En ausencia de un campo magnético, la transición de un estado 3d a uno 2p produciría una sola línea espectral con energía de fotón $E_i - E_f$. Si los niveles están desdoblados como se muestra, parecería que hay cinco energías posibles de fotón.

De hecho, solo hay tres posibilidades. No son posibles todas las combinaciones de niveles inicial y final, debido a la restricción relacionada con la conservación del momento angular. El fotón, por lo regular, transporta una unidad ($\hbar$) de momento angular, que conduce al requerimiento de que para una transición, l debe cambiar por 1, y m_l debe cambiar por 0 o ± 1. Estas restricciones se llaman **reglas de selección**. Las transiciones que obedecen esas reglas se llaman *transiciones permitidas*; y a las que no, *transiciones prohibidas*. Las transiciones permitidas se muestran con flechas continuas en la figura 41.15. El lector debe contar las energías de transición posibles, para convencerse de que las nueve flechas continuas dan únicamente tres energías posibles: el valor con campo cero $E_i - E_f$ y ese valor más o menos $\Delta E = (e\hbar/2m)B = \mu_B B$. En la figura 41.12 se muestran las líneas espectrales correspondientes.

Lo que hemos descrito se llama efecto Zeeman *normal*. Se basa por completo en el momento angular orbital del electrón. Sin embargo, excluye una consideración muy importante: el momento angular *espín* del electrón, que será el tema de la siguiente sección.



41.15 La causa del efecto Zeeman normal. El campo magnético desdobla los niveles, pero las reglas de selección permiten transiciones solo con tres cambios distintos de energía, produciendo fotones con tres frecuencias y longitudes de onda diferentes.

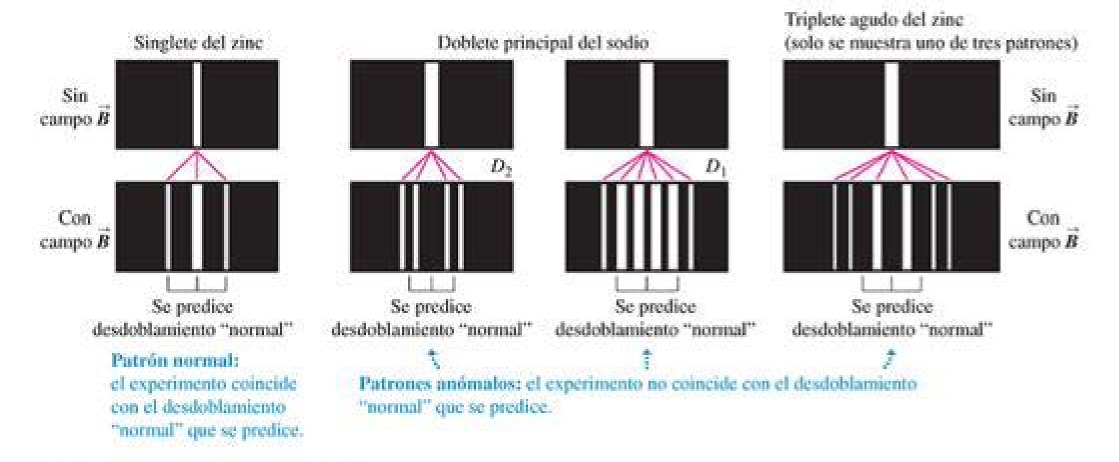
Evalúe su comprensión de la sección 41.4 En esta sección supusimos que el campo magnético apunta en la dirección de z positiva. ¿Cómo se verían afectados los resultados si el campo magnético apuntara en la dirección de x positiva?

41.5 Espín del electrón

A pesar del éxito de la ecuación de Schrödinger para predecir los niveles de energía del átomo de hidrógeno, observaciones experimentales indican que no dice todo acerca del comportamiento de los electrones en los átomos. En primer lugar, los espectroscopistas han encontrado en algunos campos magnéticos desdoblamientos distintos de las tres líneas que explicamos, y cuyas distancias de separación son desiguales. Antes de que este efecto fuera comprendido, se llamó efecto Zeeman *anómalo* para diferenciarlo del efecto "normal" descrito en la sección anterior. La figura 41.16 muestra ambas clases de desdoblamientos.

En segundo lugar, algunos niveles de energía muestran desdoblamientos parecidos a los del efecto Zeeman, aunque *no* haya campo magnético externo. Por ejemplo, cuando las líneas del espectro del hidrógeno se examinan con un espectrógrafo de alta resolución, se observa que algunas consisten en conjuntos de líneas muy cercanas llamadas *multipletes*. Asimismo, la línea anaranjada-amarilla del sodio, que corresponde a la transición $4p \longrightarrow 3s$ del electrón externo, se encuentra que es un doblete ($\lambda = 589.0$, 589.6 nm), lo cual parece indicar que el nivel $4p$ podría corresponder en realidad a dos niveles muy cercanos. En su forma original, la ecuación de Schrödinger no predecía nada de esto.

41.16 Ilustraciones de los efectos Zeeman normal y anómalo para dos elementos: zinc y sodio. Los corchetes debajo de cada ilustración muestran el desdoblamiento "normal" que se predice sin tener en cuenta el efecto del espín del electrón.



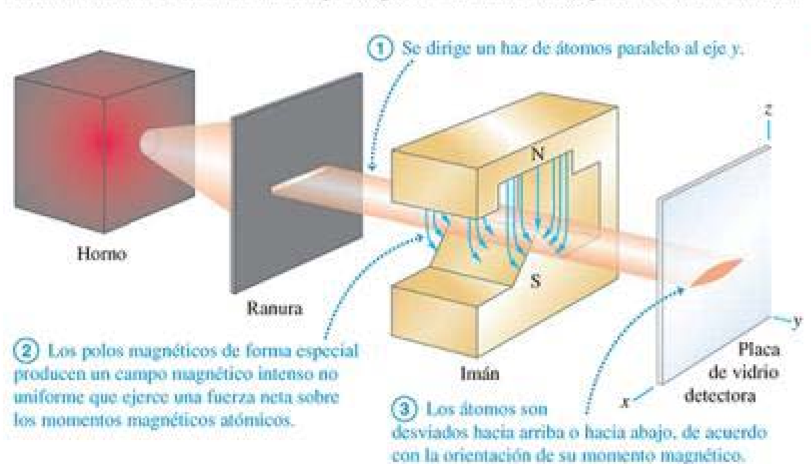
Experimento de Stern y Gerlach

En 1922 surgieron anomalías similares en experimentos con haces atómicos, efectuados en Alemania por Otto Stern y Walter Gerlach. Cuando hicieron pasar un haz de átomos neutros a través de un campo magnético no uniforme (figura 41.17), los átomos



PhET: Stern–Gerlach Experiment

41.17 Experimento de Stern-Gerlach.



se desviaron de acuerdo con la orientación de sus momentos magnéticos con respecto al campo. Estos experimentos demostraron de forma muy directa la cuantización del momento angular. Si solo había momento angular orbital, las desviaciones desdoblaban el haz formando una cantidad impar $(2l + 1)$ de componentes distintas. Sin embargo, algunos haces de átomos se desdoblaban en una cantidad *par* de componentes. Si usamos un símbolo diferente j para un número cuántico de momento angular, al igualar $2j + 1$ con un número par se obtiene $j = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \ldots$, lo que sugiere que hay un momento angular semientero. Esto no se puede entender con base en el modelo de Bohr ni con representaciones similares de la estructura atómica.

En 1925 dos estudiantes graduados en los Países Bajos, Samuel Goudsmidt y George Uhlenbeck, propusieron que el electrón podría tener un movimiento adicional. Usando un modelo semiclásico, sugirieron que el electrón se podría comportar como una esfera giratoria cargada, y no como una partícula. En ese caso, tendría un momento angular de *espín* adicional, y el momento magnético correspondiente. Si estos se cuantizaran en forma muy similar a la del momento angular *orbital* y su momento magnético, ayudarían a explicar las anomalías observadas en los niveles de energía.

Una analogía para el espín del electrón

Para presentar el concepto del **espín del electrón**, comencemos con una analogía. La Tierra describe una órbita casi circular en torno al Sol y, al mismo tiempo, *gira* sobre su eje. Cada movimiento tiene su momento angular asociado, que llamaremos momento angular *orbital* y de *espín*, respectivamente. El momento angular total de la Tierra es la suma vectorial de ambos. Si hubiera que modelar a la Tierra como un punto, no tendría momento de inercia con respecto a su eje de giro ni momento angular de espín. Pero si se incluye el tamaño finito de la Tierra en el modelo, se hace posible el momento angular de espín.

En el modelo de Bohr, suponga que el electrón no es exactamente una carga puntual, sino una pequeña esfera giratoria que describe una órbita. Entonces, el electrón no solo tiene momento angular orbital, sino también momento angular de espín asociado con la rotación de su masa alrededor de su eje. La esfera tiene una carga eléctrica, por lo que el movimiento giratorio produce espiras de corriente y un momento magnético, como vimos en la sección 27.7. En un campo magnético, el momento magnético del *espín* tiene una energía de interacción además de la del momento magnético *orbital* (la interacción del efecto Zeeman normal que describimos en la sección 41.4). Deberíamos ver corrimientos Zeeman adicionales debidos al momento magnético del espín.

Como ya mencionamos, esos corrimientos *sí* se observan en un análisis espectroscópico preciso. Esta y otras pruebas experimentales han demostrado en forma concluyente que el electrón *sí* tiene un momento angular de espín y un momento magnético de espín, que no dependen de su movimiento orbital sino que son intrínsecos del electrón mismo. El origen de este momento angular de espín corresponde fundamentalmente a la mecánica cuántica, de modo que no es correcto modelar el electrón como una esfera cargada girando. Pero al igual que el modelo de Bohr es una representación conceptual útil del movimiento de un electrón en un átomo, la analogía de la esfera con espín ayuda a visualizar el momento angular de espín intrínseco de un electrón.

Números cuánticos de espín

Al igual que el momento angular orbital, el momento angular de espín de un electrón (representado por $\vec{S}$) está cuantizado. Suponga que contamos con algún aparato que mide determinada componente de $\vec{S}$, por ejemplo, la componente S_z. Se ve que los únicos valores posibles son

$$S_z = \pm \tfrac{1}{2}\hbar \qquad \text{(componentes del momento angular de espín)} \qquad (41.37)$$

Esta relación recuerda la expresión $L_z = m_l\hbar$ para la componente z del momento angular orbital, excepto que $|S_z|$ es la *mitad* de $\hbar$ y no un múltiplo *entero*. La ecuación

(41.37) también sugiere que la magnitud S del momento angular de espín está dada por una ecuación análoga a la (41.22), sustituyendo el número cuántico orbital l por el **número cuántico de espín** $s = \frac{1}{2}$:

$$S = \sqrt{\tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{2}+1\right)}\hbar = \sqrt{\tfrac{3}{4}}\hbar \quad \text{(magnitud del momento angular de espín)} \tag{41.38}$$

Al electrón se le llama con frecuencia "partícula con espín $-\frac{1}{2}$".

Para visualizar el espín cuantizado de un electrón en un átomo de hidrógeno, piense en la función de distribución de probabilidad $|\psi|^2$ del electrón como una nube que rodea al núcleo como aquellas mostradas en las figuras 41.9 y 41.10. Luego imagine muchas flechas diminutas de espín distribuidas en la nube, y todas con componentes en la dirección $+z$, o todas con componentes en dirección $-z$. Pero no tome muy en serio esta imagen.

Para identificar por completo el estado del electrón en un átomo de hidrógeno, necesitamos ahora un cuarto número cuántico m_s para especificar la orientación del espín del electrón. De modo similar al número cuántico magnético orbital m_l, llamamos m_s al **número cuántico magnético de espín**. Para un electrón, se asignan a m_s los valores $+\frac{1}{2}$ o $-\frac{1}{2}$ para concordar con la ecuación (41.37):

$$S_z = m_s\hbar \quad \left(m_s = \pm\tfrac{1}{2}\right) \quad \text{(valores permitidos de } m_s \text{ y } S_z \text{ para un electrón)} \tag{41.39}$$

El vector $\vec{S}$ de momento angular de espín solo puede tener dos orientaciones en el espacio en relación con el eje z: *espín arriba* con una componente z de $+\frac{1}{2}\hbar$ y *espín abajo*, con componente z de $-\frac{1}{2}\hbar$.

La componente z del momento magnético de espín asociado (μ_z) se relaciona con S_z por

$$\mu_z = -(2.00232)\frac{e}{2m}S_z \tag{41.40}$$

donde $-e$ y m son (como es costumbre) la carga y la masa del electrón. Cuando el átomo se coloca en un campo magnético, la energía de interacción $-\vec{\mu}\cdot\vec{B}$ del momento dipolar magnético de espín con el campo causa desdoblamientos adicionales de los niveles de energía y de las correspondientes líneas espectrales.

La ecuación (41.40) indica que la razón giromagnética del espín del electrón es aproximadamente el *doble* del valor $e/2m$ del momento angular *orbital* y el momento dipolar magnético. Este resultado no tiene análogo clásico. No obstante, en 1928 Paul Dirac desarrolló una generalización relativista de la ecuación de Schrödinger para los electrones. Su ecuación da como resultado una relación giromagnética para el espín exactamente igual a $2(e/2m)$. Se necesitaron otras dos décadas para desarrollar el área de la física llamada *electrodinámica cuántica* (QED, por las siglas de *quantum electrodynamics*), que predice el valor que "solo" hemos obtenido con seis cifras significativas: 2.00232. En la actualidad la QED predice un valor que concuerda con una medición reciente (2006), de 2.00231930436170(152), haciendo de la QED la teoría más precisa de toda la ciencia.



Ejemplo 41.6 Energía del espín del electrón en un campo magnético

Calcule la energía de interacción de un electrón en un estado $l = 0$ en un campo magnético de 2.00 T de magnitud.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Para $l = 0$, el momento angular orbital y el momento magnético orbital de un electrón son iguales a cero. Por lo tanto, la única interacción magnética es entre el campo $\vec{B}$ y el momento magnético de espín $\vec{\mu}$. La energía de interacción es $U = -\vec{\mu}\cdot\vec{B}$ según la ecuación (41.28). Igual que en la sección 41.4, supondremos que $\vec{B}$ está en la dirección de z positiva, de modo que $U = -\mu_z B$ [ecuación (41.32)]. La ecuación (41.40) proporciona μ_z en términos de S_z y la ecuación (41.37) da S_z.

EJECUTAR: Al combinar las ecuaciones (41.37) y (41.40), tenemos

$$\begin{aligned}\mu_z &= -(2.00232)\left(\frac{e}{2m}\right)\left(\pm\tfrac{1}{2}\hbar\right)\\ &= \mp\tfrac{1}{2}(2.00232)\left(\frac{e\hbar}{2m}\right) = \mp(1.00116)\mu_B\\ &= \mp(1.00116)(9.274\times10^{-24}\ \text{J/T})\\ &= \mp 9.285\times10^{-24}\ \text{J/T}\\ &= \mp 5.795\times10^{-5}\ \text{eV/T}\end{aligned}$$

Continúa

Entonces, según la ecuación (41.32),

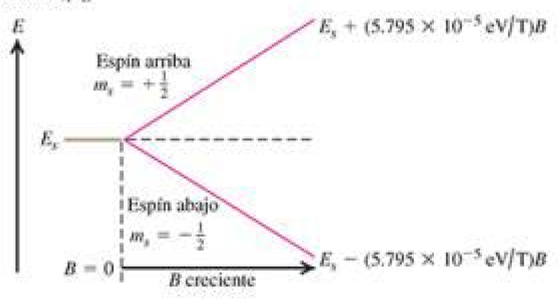
$$U = -\mu_z B = \pm(9.285 \times 10^{-24}\ \text{J/T})(2.00\ \text{T})$$
$$= \pm 1.86 \times 10^{-23}\ \text{J} = \pm 1.16 \times 10^{-4}\ \text{eV}$$

El valor positivo de U y el valor negativo de μ_z corresponden a $S_z = +\frac{1}{2}\hbar$ (espín arriba); el valor negativo de U y el valor positivo de μ_z corresponden a $S_z = -\frac{1}{2}\hbar$ (espín abajo).

EVALUAR: Comprobemos el *signo* de nuestros resultados. Si el electrón es espín abajo, $\vec{S}$ generalmente apunta en dirección opuesta a $\vec{B}$, y, en consecuencia, el momento magnético $\vec{\mu}$ (que es opuesto a $\vec{S}$ porque la carga del electrón es negativa) apunta en general paralelo a $\vec{B}$, y μ_z es positiva. Según la ecuación (41.28), $U = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}$, la energía de interacción es negativa si $\vec{\mu}$ y $\vec{B}$ son paralelos. Los resultados muestran que U realmente es negativa en este caso. De manera similar, podemos decir que U debe ser positiva y μ_z negativa para un electrón de espín arriba.

Las líneas rojas de la figura 41.18 muestran cómo varían las energías de interacción de los dos estados del espín, con la magnitud B del campo magnético. Las gráficas son líneas rectas porque, como indica la ecuación (41.32), U es proporcional a B.

41.18 Un nivel $l = 0$ de un solo electrón se desdobla por interacción del momento magnético del espín con un campo magnético externo. Cuanto mayor sea la magnitud B del campo magnético, mayor será el desdoblamiento. La cantidad 5.795×10^{-5} eV/T es exactamente $(1.00116)\mu_B$.



Acoplamiento espín-órbita

Como ya se mencionó, el momento dipolar magnético de espín también produce desdoblamiento de niveles de energía, aun cuando *no* haya campo externo. Una causa es el movimiento orbital del electrón. En el modelo de Bohr, un observador que se mueve con el electrón vería el núcleo con carga positiva girando en torno a él (igual que a un observador terrestre le parece que el Sol describe una órbita en torno a la Tierra). Este movimiento aparente de carga genera un campo magnético en la ubicación del electrón, medido en el marco de referencia del electrón en movimiento. La interacción con el momento magnético de espín causa un desdoblamiento doble de este nivel, que corresponde a las dos orientaciones posibles del espín del electrón.

No se pueden tomar muy en serio los análisis basados en el modelo de Bohr, pero un resultado similar se obtiene con la ecuación de Schrödinger. La energía de interacción U se puede expresar en función del producto escalar de los vectores de momento angular $\vec{L}$ y $\vec{S}$. A este efecto se le llama **acoplamiento espín-órbita** y es el que causa la pequeña diferencia de energía entre los dos niveles excitados más bajos del sodio, que se ven en la figura 39.19*a* y del doblete correspondiente (589.0, 589.6 nm) en el espectro del sodio.



Ejemplo 41.7 Un campo magnético efectivo

Con seis cifras significativas, las longitudes de onda de las dos líneas del espectro del sodio que forman el doblete son $\lambda_1 = 588.995$ nm y $\lambda_2 = 589.592$ nm. Calcule el campo magnético efectivo que experimenta el electrón en los niveles $3p$ del átomo de sodio.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Las dos líneas del doblete del sodio se deben a transiciones de los dos niveles $3p$, que están desdoblados por acoplamiento espín-órbita, hasta el nivel $3s$, el cual *no* está desdoblado porque tiene $L = 0$. Concebimos el acoplamiento espín-órbita como una interacción entre el momento magnético de espín del electrón y un campo magnético efectivo debido al núcleo. Por consiguiente, este ejemplo es como el 41.6 invertido, pues en dicho ejemplo nos daban B y teníamos que calcular la diferencia entre las energías de los dos estados de espín; aquí usaremos la diferencia de energía para determinar B. La diferencia de energía entre los dos niveles $3p$ es igual a la diferencia de energía entre los dos fotones del doblete del sodio. Usaremos esta relación y los resultados del ejemplo 41.6 para determinar B.

EJECUTAR: Las energías de los dos fotones son: $E_1 = hc/\lambda_1$ y $E_2 = hc/\lambda_2$. Aquí, $E_1 > E_2$ porque $\lambda_1 < \lambda_2$, de modo que la diferencia en sus energías es

$$\Delta E = \frac{hc}{\lambda_1} - \frac{hc}{\lambda_2} = hc\left(\frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_2\lambda_1}\right)$$
$$= (4.136 \times 10^{-15}\ \text{eV}\cdot\text{s})(2.998 \times 10^{8}\ \text{m/s})$$
$$\times \frac{(589.592 \times 10^{-9}\ \text{m}) - (588.995 \times 10^{-9}\ \text{m})}{(589.592 \times 10^{-9}\ \text{m})(588.995 \times 10^{-9}\ \text{m})}$$
$$= 0.00213\ \text{eV} = 3.41 \times 10^{-22}\ \text{J}$$

Esto es igual a la diferencia de energías entre los dos niveles $3p$. La interacción espín-órbita eleva un nivel en 1.70×10^{-22} J (la mitad de

3.41×10^{-22} J) y disminuye el otro en 1.70×10^{-22} J. Según el ejemplo 41.6, la cantidad que sube o baja cada estado es $|U| = (1.00116)\mu_B B$, por lo que

$$B = \left|\frac{U}{(1.00116)\mu_B}\right| = \frac{1.70 \times 10^{-22}\ \text{J}}{9.28 \times 10^{-24}\ \text{J/T}} = 18.0\ \text{T}$$

EVALUAR: El electrón experimenta un campo magnético efectivo *muy* fuerte. Para generar un campo macroscópico constante de esta magnitud en el laboratorio, se requieren electroimanes de tecnología de punta.

Combinación de momentos angulares orbital y de espín

Los momentos angulares orbital y de espín ($\vec{L}$ y $\vec{S}$, respectivamente) se pueden combinar de varias formas. La suma vectorial de $\vec{L}$ y $\vec{S}$ es el momento angular *total* $\vec{J}$:

$$\vec{J} = \vec{L} + \vec{S} \qquad (41.41)$$

Los valores posibles de la magnitud J están dados en términos de un número cuántico j por

$$J = \sqrt{j(j+1)}\hbar \qquad (41.42)$$

Entonces, puede haber estados donde $j = |l \pm \frac{1}{2}|$. Los estados $l + \frac{1}{2}$ corresponden al caso en que los vectores $\vec{L}$ y $\vec{S}$ tienen componentes z paralelas, mientras que para los estados $l - \frac{1}{2}$, $\vec{L}$ y $\vec{S}$ tienen componentes z antiparalelas. Por ejemplo, cuando $l = 1$, j puede ser $\frac{1}{2}$ o $\frac{3}{2}$. En otra notación espectroscópica, esos estados p se identifican con $^2P_{1/2}$ y $^2P_{3/2}$, respectivamente. El superíndice es la cantidad de orientaciones posibles del espín, la letra P (ahora en mayúscula) indica estados con $l = 1$, y el subíndice es el valor de j. Este esquema se usó para identificar los niveles de energía del átomo de sodio en la figura 39.19*a*.

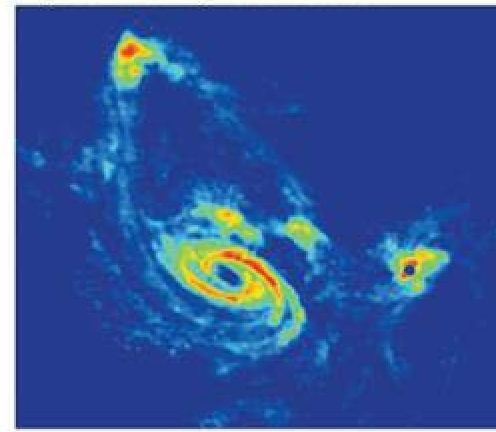
Los diversos desdoblamientos de líneas causados por interacciones magnéticas reciben el nombre colectivo de *estructura fina*. Hay también desdoblamientos adicionales, mucho menores, relacionados con el hecho de que el *núcleo* del átomo tiene un momento magnético dipolar que interactúa con los momentos magnéticos dipolares de espín y/u orbitales de los electrones. A tales efectos se les llama *estructura hiperfina*. Por ejemplo, el nivel fundamental del hidrógeno se desdobla en dos estados, separados solo por 5.9×10^{-6} eV. El fotón que se emite en las transiciones entre esos estados tiene una longitud de onda de 21 cm. Los radioastrónomos usan esa longitud de onda para cartografiar nubes interestelares de hidrógeno gaseoso, que están demasiado frías como para emitir luz visible (figura 41.19).

41.19 En una imagen con luz visible (arriba), estas tres galaxias lejanas parecen no tener relación. Pero de hecho, estas galaxias están conectadas mediante enormes corrientes de hidrógeno gaseoso, como se indica en la imagen de colores falsos (abajo) hecha con un radiotelescopio sintonizado a la longitud de onda de 21 cm emitida por los átomos de hidrógeno.

Galaxia en luz visible (imagen negativa; las galaxias aparecen oscuras)



Imagen de radio con longitud de onda de 21 cm



Evalúe su comprensión de la sección 41.5 ¿En cuál de las siguientes situaciones, el momento magnético de un electrón está perfectamente alineado con un campo magnético que apunta en la dirección z positiva? **i.** $m_s = +\frac{1}{2}$; **ii.** $m_s = -\frac{1}{2}$; **iii.** tanto **i** como **ii**; **iv.** ni **i** ni **ii**.



41.6 Átomos con muchos electrones y el principio de exclusión

Hasta ahora, nuestro análisis de la estructura atómica se ha concentrado en el átomo de hidrógeno. Es natural: el hidrógeno neutro, con solo un electrón, es el átomo más sencillo. Si no podemos entender el hidrógeno, será imposible comprender cualquier cuestión más complicada. Pero ahora pasaremos a los átomos con muchos electrones.

En general, un átomo que se encuentra en su estado normal (eléctricamente neutro) tiene Z electrones y Z protones. Recordemos que, en la sección 41.3, a Z lo llamamos *número atómico*. La carga eléctrica total de ese átomo es exactamente cero, porque el neutrón no tiene carga, mientras que las cargas del protón y electrón tienen la misma magnitud, pero signos opuestos.

Podemos aplicar la ecuación de Schrödinger a este átomo general. Sin embargo, la complejidad del análisis aumenta muy rápidamente al incrementarse Z. Cada uno de los Z electrones no solo interactúa con el núcleo, sino también con cada uno de los

demás electrones. Las funciones de onda y la energía potencial son funciones de 3Z coordenadas, y la ecuación contiene segundas derivadas con respecto a todas ellas. El problema matemático de determinar soluciones de esas ecuaciones es tan complejo que no se ha resuelto en forma exacta, aun para el átomo de helio neutro, que solo tiene dos electrones.

Por fortuna, se dispone de varios esquemas de aproximación. La aproximación más sencilla consiste en ignorar todas las interacciones entre los electrones y considerar que cada electrón se mueve solo bajo la acción del núcleo (que se considera una carga puntual). En esta aproximación, la función de onda de cada electrón es como la del átomo de hidrogeno, que se especifica con cuatro números cuánticos (n, l, m_l y m_s); la carga nuclear es Ze y no e, por lo que se requiere reemplazar cada factor e^2 en las funciones de onda y los niveles de energía por Ze^2. En particular, los niveles de energía se determinan con la ecuación (41.21), sustituyendo e^4 por Z^2e^4:

$$E_n = -\frac{1}{(4\pi\epsilon_0)^2}\frac{m_r Z^2 e^4}{2n^2\hbar^2} = -\frac{Z^2}{n^2}(13.6\text{ eV}) \qquad (41.43)$$

Esta aproximación es muy radical; porque cuando hay muchos electrones, sus interacciones mutuas son tan importantes como la interacción entre cada uno y el núcleo. Por consiguiente, este modelo no es de mucha utilidad para realizar predicciones cuantitativas.

Aproximación del campo central

Una aproximación menos drástica y más útil consiste en imaginar que todos los electrones juntos forman una nube de carga, que tiene, en promedio, *simetría esférica*. Podemos imaginar entonces que cada electrón individual se mueve en el campo eléctrico total debido al núcleo y a esta nube promediada de todos los demás electrones. Hay una función de energía potencial con simetría esférica $U(r)$, que corresponde a este modelo. Tal representación se llama **aproximación de campo central**, y ofrece un punto de partida útil para comprender la estructura atómica.

En la aproximación de campo central se pueden usar de nuevo funciones de onda para un electrón. La ecuación de Schrödinger solo difiere de la ecuación para el hidrógeno en que la función de energía potencial $1/r$ se sustituye por una función diferente, $U(r)$. Pero sucede que $U(r)$ no entra en las ecuaciones diferenciales de $\Theta(\theta)$ ni $\Phi(\phi)$, por lo que esas funciones angulares son exactamente las mismas que para el hidrógeno, y los *estados* de momento angular orbital también son iguales que antes. Los números cuánticos l, m_l y m_s tienen el mismo significado que antes, y la magnitud y la componente z del momento angular orbital de nuevo se definen con las ecuaciones (41.22) y (41.23).

Las funciones de onda y las probabilidades radiales son distintas de las del hidrógeno, por el cambio de $U(r)$, así que los niveles de energía ya no se determinan con la ecuación (41.21). Todavía se puede identificar un estado con los cuatro números cuánticos (n, l, m_l, m_s). En general, la energía de un estado depende ahora de n y l, y no solo de n como en el hidrógeno. Las restricciones de los valores de los números cuánticos son iguales que antes:

$$n \geq 1 \quad 0 \leq l \leq n-1 \quad |m_l| \leq l \quad m_s = \pm\tfrac{1}{2} \qquad \begin{array}{l}\text{(valores permitidos de}\\ \text{los números cuánticos)}\end{array} \qquad (41.44)$$

Principio de exclusión

Para comprender la estructura de los átomos con muchos electrones, necesitamos un principio adicional, el *principio de exclusión*. Para saber por qué se necesita este principio, examinemos el estado de energía más bajo, o *estado base*, de un átomo con muchos electrones. En los estados con un electrón del modelo de campo central, hay un estado de energía más bajo (correspondiente a un estado $n = 1$ del hidrógeno). Esperaríamos que para el estado base de un átomo complejo, *todos* los electrones deberían encontrarse en dicho estado base. En tal caso, deberíamos ver solamente cambios graduales en las propiedades físicas y químicas, al examinar el comportamiento de átomos con cantidades crecientes de electrones (Z).

Esos cambios graduales *no* son lo que se observa. En vez de ello, las propiedades de los elementos varían mucho de uno al siguiente, y cada elemento tiene su personalidad distintiva. Por ejemplo, los elementos flúor, neón y sodio tienen 9, 10 y 11 electrones por átomo, respectivamente. El flúor ($Z = 9$) es un *halógeno*; tiende a formar compuestos en los que cada átomo de flúor adquiere un electrón adicional. El sodio ($Z = 11$) es un *metal alcalino*; forma compuestos en los que cada átomo de sodio *pierde* un electrón. El neón ($Z = 10$) es un *gas noble*, que no forma compuestos. Tales observaciones demuestran que en el estado base de un átomo complejo, los electrones *no pueden* estar todos en los estados de energía más baja. Pero, ¿por qué no?

La clave de este rompecabezas, descubierta en 1925 por el físico austriaco Wolfgang Pauli (figura 41.20), se llama **principio de exclusión**, el cual establece que **dos electrones no pueden ocupar el mismo estado mecánico-cuántico** en un sistema dado. Es decir, **dos electrones en un átomo no pueden tener los mismos valores de los cuatro números cuánticos (n, l, m_l y m_s)**. Cada estado cuántico corresponde a cierta distribución de la "nube" de electrones en el espacio. En consecuencia, el principio también indica que, de hecho, no más de dos electrones con valores opuestos del número cuántico m_s pueden ocupar la misma región del espacio. No debemos tomar muy en serio esta última afirmación, ya que las funciones de probabilidad para los electrones no tienen límites claros y definidos. Sin embargo, el principio de exclusión limita la cantidad por la cual las funciones de onda de electrones se pueden traslapar. Imaginémoslo como el análogo mecánico-cuántico de una disposición del reglamento universitario que solo permite un alumno por escritorio.

41.20 La clave para entender la tabla periódica de los elementos fue el descubrimiento del principio de exclusión, por Wolfgang Pauli (1900-1958). Pauli recibió el Premio Nobel de Física en 1945 por este logro. La foto muestra a Pauli (a la izquierda) con Niels Bohr mirando el comportamiento físico de un trompo de juguete que gira en el piso, un análogo macroscópico de un electrón microscópico con espín.



CUIDADO **Significado del principio de exclusión** No confunda el principio de exclusión con la repulsión eléctrica entre electrones. Si bien ambos efectos tienden a mantener separados los electrones dentro de un átomo, son de un carácter muy distinto. Dos electrones siempre se pueden acercar agregándoles energía para contrarrestar la repulsión eléctrica; en cambio, *nada* puede contrarrestar el principio de exclusión y forzar a dos electrones al mismo estado mecánico-cuántico.

La tabla 41.2 es una lista de algunos conjuntos de números cuánticos para estados electrónicos en un átomo. Es similar a la tabla 41.1 (sección 41.3), pero hemos agregado la cantidad de estados en cada subcapa y capa. Debido al principio de exclusión, la "cantidad de estados" es igual a la cantidad *máxima* de electrones que se pueden encontrar en esos estados. Para cada estado, m_s podría ser $+\frac{1}{2}$ o $-\frac{1}{2}$.

Como en las funciones de onda del hidrógeno, los distintos estados corresponden a diferentes distribuciones en el espacio. Los electrones con mayores valores de n se concentran a mayores distancias del núcleo. La figura 41.8 (sección 41.3) muestra dicho efecto. Cuando un átomo tiene más de dos electrones, no todos ellos pueden bajar a los estados de menor energía $n = 1$ más cercanos al núcleo, porque solo hay dos estados de esos; el principio de exclusión prohíbe ocupaciones múltiples de un estado. Algunos electrones son forzados a estados más alejados, con mayores energías. Cada valor de n corresponde, aproximadamente, a una región del espacio en torno al núcleo, con la forma de un *cascarón* esférico. Por consiguiente, se habla de la capa K como la región que está ocupada por los electrones en los estados $n = 1$, la capa L como la región de los estados $n = 2$, y así sucesivamente. Los estados con igual n pero distinta l forman *subcapas*, por ejemplo la subcapa $3p$.

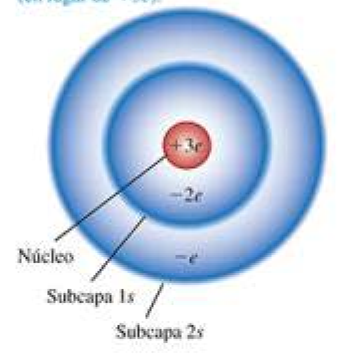
Tabla 41.2 Estados cuánticos de electrones en las primeras cuatro capas

n	l	m_l	Notación espectroscópica	Número de estados		Capa
1	0	0	$1s$	2		K
2	0	0	$2s$	2	8	L
2	1	−1, 0, 1	$2p$	6		
3	0	0	$3s$	2	18	M
3	1	−1, 0, 1	$3p$	6		
3	2	−2, −1, 0, 1, 2	$3d$	10		
4	0	0	$4s$	2	32	N
4	1	−1, 0, 1	$4p$	6		
4	2	−2, −1, 0, 1, 2	$4d$	10		
4	3	−3, −2, −1, 0, 1, 2, 3	$4f$	14		

Tabla periódica

El principio de exclusión se puede usar para deducir las propiedades más importantes de la estructura y el comportamiento químico de los átomos con muchos electrones, incluyendo la tabla periódica de los elementos. Imaginemos la construcción de un átomo neutro, comenzando con un núcleo desnudo con Z protones, y agregándole luego Z electrones, uno por uno. Para obtener el estado base del átomo como un todo, primero se llenan los estados electrónicos de energía más baja (los más cercanos al núcleo, con los valores más pequeños de n y l), y luego se usan estados sucesivamente más altos, hasta que todos los electrones se hayan acomodado. Las propiedades químicas de un átomo se determinan principalmente por interacciones donde intervienen los electrones más externos, o *de valencia*, por lo que en especial debemos aprender cómo están estos electrones acomodados.

41.21 Representación esquemática de la distribución de carga en un átomo de litio. El núcleo tiene carga de $+3e$.



Veamos las configuraciones de los electrones en el estado base de los primeros átomos (en orden de Z creciente). Para el hidrógeno, el estado base es $1s$; el único electrón se encuentra en un estado $n = 1$, $l = 0$, $m_l = 0$ y $m_s = \pm\frac{1}{2}$. En el átomo de helio (Z = 2), *ambos* electrones se encuentran en estados $1s$, con espines opuestos; uno tiene $m_s = -\frac{1}{2}$ y el otro tiene $m_s = +\frac{1}{2}$. Al estado base del helio lo representaremos por $1s^2$. (El superíndice 2 no es un exponente; la notación $1s^2$ indica que hay dos electrones en la subcapa $1s$. También se sobrentiende el superíndice 1, como en $2s$). Para el helio, la capa K está totalmente llena, y todas las demás están vacías. El helio es un gas noble; no tiene tendencia a ganar ni a perder un electrón, y no forma compuestos.

El litio (Z = 3) tiene tres electrones. En su estado base, dos de ellos se encuentran en estado $1s$ y uno en estado $2s$, por lo que el estado base del litio se representa por $1s^22s$. En promedio, el electrón $2s$ está bastante más alejado del núcleo que los electrones $1s$ (figura 41.21). De acuerdo con la ley de Gauss, la carga *neta* Q_{encer} que atrae al electrón $2s$ se acerca más a $+e$ que al valor $+3e$ que tendría sin los dos electrones $1s$. El resultado es que el electrón $2s$ está débilmente ligado; solo se requieren 5.4 eV para removerlo, en comparación con los 30.6 eV obtenidos con la ecuación (41.43) con Z = 3 y $n = 2$. Por su comportamiento químico, el litio es un *metal alcalino*. Forma compuestos iónicos donde cada átomo de litio pierde un electrón y tiene valencia +1.

Sigue el berilio (Z = 4); su configuración de estado base es $1s^22s^2$, y sus dos electrones de valencia llenan la subcapa s de la capa L. El berilio es el primero de los elementos *alcalinotérreos*, que forman compuestos iónicos en los que la valencia de los átomos es +2.

41.22 La sal (cloruro de sodio, NaCl) se disuelve con facilidad en el agua, haciendo salada el agua de mar. Esto se debe a las configuraciones de los electrones del sodio y del cloro: el sodio puede perder con facilidad un electrón para formar un ion Na^+, y el cloro puede ganar fácilmente un electrón para formar un ion Cl^-. Estos iones se mantienen en solución porque son atraídos hacia los extremos polares de las moléculas de agua (véase la figura 21.30*a*).



La tabla 41.3 muestra las configuraciones de electrones de estado base de los primeros 30 elementos. La capa L puede alojar ocho electrones. Cuando Z = 10, las capas K y L están llenas, y no hay electrones en la capa M. Cabe esperar que esa sea una configuración bastante estable, con poca tendencia a ganar o perder electrones. Este elemento es el neón, un gas noble, sin compuestos conocidos. Después del neón, el siguiente elemento es el sodio (Z = 11), con capas K y L llenas, y un electrón en la capa M. Su estructura de "gas noble más un electrón" se parece a la del litio; ambos son metales alcalinos. El elemento *anterior* al neón es el flúor, con Z = 9. Tiene un lugar libre en la capa L, y muestra afinidad para ganar un electrón y llenar la capa. El flúor forma compuestos iónicos en los que tiene una valencia de −1. Este comportamiento es característico de los *halógenos* (flúor, cloro, bromo, yodo y ástato), todos los cuales tienen configuraciones de "gas noble menos uno" (figura 41.22).

Al seguir por la lista se pueden entender las regularidades del comportamiento químico que muestra la **tabla periódica de los elementos** (apéndice D) con base en las configuraciones electrónicas. La semejanza de los elementos en cada *grupo* (columna vertical) de la tabla periódica es resultado de la semejanza en la configuración de los electrones más externos. Todos los gases nobles (helio, neón, argón, kriptón, xenón y radón) tienen configuraciones de capa llena o capa llena más subcapa p llena. Todos los metales alcalinos (litio, sodio, potasio, rubidio, cesio y francio) tienen configuraciones de "gas noble más uno". Todos los metales alcalinotérreos (berilio, magnesio, calcio, estroncio, bario y radio) tienen configuraciones de "gas noble más dos" y, como hemos mencionado, todos los halógenos (flúor, cloro, bromo, yodo y ástato) tienen estructuras de "gas noble menos uno".

Tabla 41.3 Configuraciones de electrones para el estado base

Elemento	Símbolo	Número atómico (Z)	Configuración electrónica
Hidrógeno	H	1	$1s$
Helio	He	2	$1s^2$
Litio	Li	3	$1s^22s$
Berilio	Be	4	$1s^22s^2$
Boro	B	5	$1s^22s^22p$
Carbonp	C	6	$1s^22s^22p^2$
Nitrógeno	N	7	$1s^22s^22p^3$
Oxígeno	O	8	$1s^22s^22p^4$
Flúor	F	9	$1s^22s^22p^5$
Neón	Ne	10	$1s^22s^22p^6$
Sodio	Na	11	$1s^22s^22p^63s$
Magnesio	Mg	12	$1s^22s^22p^63s^2$
Aluminio	Al	13	$1s^22s^22p^63s^23p$
Silicio	Si	14	$1s^22s^22p^63s^23p^2$
Fósforo	P	15	$1s^22s^22p^63s^23p^3$
Azufre	S	16	$1s^22s^22p^63s^23p^4$
Cloro	Cl	17	$1s^22s^22p^63s^23p^5$
Argón	Ar	18	$1s^22s^22p^63s^23p^6$
Potasio	K	19	$1s^22s^22p^63s^23p^64s$
Calcio	Ca	20	$1s^22s^22p^63s^23p^64s^2$
Escandio	Sc	21	$1s^22s^22p^63s^23p^64s^23d$
Titanio	Ti	22	$1s^22s^22p^63s^23p^64s^23d^2$
Vanadio	V	23	$1s^22s^22p^63s^23p^64s^23d^3$
Cromo	Cr	24	$1s^22s^22p^63s^23p^64s3d^5$
Manganeso	Mn	25	$1s^22s^22p^63s^23p^64s^23d^5$
Hierro	Fe	26	$1s^22s^22p^63s^23p^64s^23d^6$
Cobalto	Co	27	$1s^22s^22p^63s^23p^64s^23d^7$
Níquel	Ni	28	$1s^22s^22p^63s^23p^64s^23d^8$
Cobre	Cu	29	$1s^22s^22p^63s^23p^64s3d^{10}$
Zinc	Zn	30	$1s^22s^22p^63s^23p^64s^23d^{10}$

Se presenta una ligera complicación con las capas M y N, porque los niveles de subcapa $3d$ y $4s$ ($n = 3$, $l = 2$ y $n = 4$, $l = 0$, respectivamente) tienen energías similares. (En el siguiente apartado describiremos por qué sucede así). El argón ($Z = 18$) tiene llenas todas las subcapas $1s$, $2s$, $2p$, $3s$ y $3p$, pero en el potasio ($Z = 19$), el electrón adicional pasa a un estado de energía $4s$, y no a uno $3d$ (porque el estado $4s$ tiene una energía ligeramente menor).

Algunos de los siguientes elementos tienen uno o dos electrones en la subcapa $4s$, y cantidades cada vez mayores en la subcapa $3d$. Todos estos elementos son metales con propiedades químicas y físicas bastante parecidas; ellos forman la primera *serie de transición*, que comienza con el escandio ($Z = 21$) y termina con el zinc ($Z = 30$), para los cuales todas las subcapas $3d$ y $4s$ están llenas.

Algo semejante sucede desde $Z = 57$ hasta $Z = 71$, que tienen uno o dos electrones en la subcapa $6s$, pero con las subcapas $4f$ y $5d$ parcialmente llenas. Son los elementos de *tierras raras*; todos ellos tienen propiedades físicas y químicas muy similares. Y todavía hay otra serie, llamada de *actínidos*, que comienza con $Z = 91$.

Apantallamiento

Hemos mencionado que en el esquema de campo central, los niveles de energía dependen de l y también de n. Tomemos por ejemplo al sodio ($Z = 11$). Si 10 de sus electrones llenan sus capas K y L, las energías de algunos de los estados para el electrón restante se han determinado experimentalmente y resultan ser

estados $3s$: -5.138 eV
estados $3p$: -3.035 eV
estados $3d$: -1.521 eV
estados $4s$: -1.947 eV

Aplicación Configuraciones electrónicas y radioterapia para el cáncer de huesos

Las manchas anaranjadas en esta imagen a colores de rayos x son tumores cancerosos en los huesos. Un tratamiento para el cáncer de huesos consiste en inyectar un isótopo radiactivo de estroncio (^{89}Sr) en la vena de un paciente. El estroncio es químicamente parecido al calcio porque en ambos átomos los dos electrones exteriores se encuentran en un estado s (las estructuras son: $1s^22s^22p^63s^23p^64s^23d^{10}4p^65s^2$ para el estroncio y $1s^22s^22p^63s^23p^64s^2$ para el calcio). De esta forma, el estroncio es aceptado fácilmente por los tumores, donde la pérdida del calcio es más rápida que en los huesos sanos. La radiación del estroncio ayuda a destruir los tumores.



Los estados $3s$ son los más bajos (más negativos); uno es el estado base del undécimo electrón del sodio. La energía de los estados $3d$ es bastante cercana a la del estado $n = 3$ del hidrógeno. Lo sorprendente es que la energía del estado $4s$ es 0.426 eV *menor* que la del estado $3d$, aun cuando el estado $4s$ tiene mayor n.

Podemos comprender esos resultados con la ley de Gauss y la distribución de probabilidad radial. Para toda distribución de carga con simetría esférica, la magnitud del campo eléctrico a una distancia r del centro es $Q_{encer}/4\pi\epsilon_0 r^2$, donde Q_{encer} es la carga total encerrada dentro de una esfera con radio r. Eliminamos mentalmente el electrón externo (de valencia) de un átomo de sodio. Lo que queda es un conjunto de 10 electrones con simetría esférica (que llenan las capas K y L) y 11 protones, por lo que $Q_{encer} = -10e + 11e = +e$. Si el undécimo electrón está totalmente fuera del conjunto anterior de cargas, es atraído por una carga efectiva de $+e$, y no de $+11e$. Este es el ejemplo más extremo del efecto descrito en la figura 41.21.

A este efecto se le llama **apantallamiento**; los 10 electrones *apantallan* 10 de los 11 protones, dejando una carga neta efectiva de $+e$. En general, un electrón que pasa todo su tiempo totalmente fuera de una carga positiva $Z_{efe}e$ tiene niveles de energía dados por la ecuación del hidrógeno, donde e^2 se sustituye por $Z_{efe}e^2$. De acuerdo con la ecuación (41.43), esto es

$$E_n = -\frac{Z_{efe}^2}{n^2}(13.6\text{ eV}) \qquad \text{(niveles de energía con apantallamiento)} \qquad (41.45)$$

Si el undécimo electrón en el átomo de sodio está totalmente fuera de la distribución de carga que queda, entonces $Z_{efe} = 1$.

CUIDADO **Diferentes ecuaciones para distintos átomos** Todas las ecuaciones (41.21), (41.43) y (41.45) dan valores de E_n en términos de $(13.6\text{ eV})/n^2$, pero en general no se aplican a los mismos átomos. La ecuación (41.21) es *solo* para el hidrógeno, la (41.43) solo es para el caso en que no hay interacción con algún otro electrón (por lo que solo es exacta cuando el átomo tiene solo un electrón). La ecuación (41.45) es adecuada cuando un electrón está apantallado del núcleo por otros electrones.

Ahora usemos las funciones de probabilidad radial de la figura 41.8, para explicar por qué la energía de un estado $3d$ del sodio es aproximadamente igual que para el valor $n = 3$ del hidrógeno: -1.51 eV. La distribución para el estado $3d$ (para el cual l tiene el valor máximo $n - 1$) tiene un máximo, y su radio más probable está *afuera* de las posiciones de los electrones con $n = 1$ o 2. (Esos electrones también son atraídos más cerca del núcleo que en el hidrógeno, porque están menos apantallados de la carga positiva $11e$ del núcleo). Así, en el sodio, un electrón $3d$ pasa la mayor parte del tiempo bastante afuera de los estados $n = 1$ y $n = 2$ (las capas K y L). Los 10 electrones en esas capas apantallan una carga de aproximadamente 10 de los 11 protones, y dejan una carga neta aproximada de $Z_{efe}e = (1)e$. Entonces, según la ecuación (41.45), la energía correspondiente aproximada es $-(1)^2(13.6\text{ eV})/3^2 = -1.51$ eV. Esta aproximación es muy cercana al valor experimental de -1.521 eV.

Si examinamos de nuevo la figura 41.8, veremos que la densidad de probabilidad radial para el estado $3p$ (para el cual $l = n - 2$) tiene dos picos, y que para el estado $3s$ ($l = n - 3$) tiene tres. En el caso del sodio, el primer pico pequeño en la distribución $3p$ define un electrón $3p$ con mayor probabilidad (en comparación con el estado $3d$) de estar *dentro* de las distribuciones de carga de los electrones en los estados $n = 2$. Esto es, un electrón $3p$ está apantallado en menor grado del núcleo que un electrón $3d$, porque pasa algo de tiempo dentro de las capas K y L, ya llenas. Así, para los electrones $3p$, Z_{efe} es mayor que la unidad. De acuerdo con la ecuación (41.45), la energía $3p$ es menor (más negativa) que la $3d$, de -1.521 eV. El valor real es -3.035 eV. Un electrón $3s$ pasa todavía más tiempo dentro de las capas electrónicas interiores que un electrón $3p$, por lo que Z_{efe} es mayor y la energía es todavía más negativa.



Ejemplo 41.8 Determinación experimental de Z_{efe}

La energía medida de un estado 3*s* para el sodio es −5.138 eV. Calcule el valor de Z_{efe}.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: El sodio tiene un solo electrón en la capa *M* exterior a las capas *K* y *L* que están llenas. Los 10 electrones *K* y *L* apantallan parcialmente al único electrón *M* de la carga $+11e$ del núcleo; nuestro objetivo es determinar la magnitud de este apantallamiento. Nos dan $n = 3$ y $E_n = -5.138$ eV, por lo que se emplea la ecuación (41.45) para determinar Z_{efe}:

EJECUTAR: De la ecuación (41.45) se despeja Z_{efe},

$$Z_{efe}^2 = -\frac{n^2 E_n}{13.6\text{ eV}} = -\frac{3^2(-5.138\text{ eV})}{13.6\text{ eV}} = 3.40$$

$$Z_{efe} = 1.84$$

EVALUAR: La carga efectiva que atrae a un electrón 3*s* es $1.84e$. Los 11 protones del sodio se apantallan por un promedio de $11 - 1.84 = 9.16$ electrones, en lugar de los 10, debido a que el electrón 3*s* pasa algún tiempo dentro de las capas interiores (*K* y *L*).

Todos los metales alcalinos (litio, sodio, potasio, rubidio y cesio) tienen un electrón más que el gas noble correspondiente (helio, neón, argón, kriptón y xenón). Este electrón adicional está principalmente afuera de los demás electrones en las capas y subcapas llenas. Por consiguiente, todos los metales alcalinos se comportan en forma similar al sodio.



Ejemplo 41.9 Energías de un electrón de valencia

El electrón de valencia del potasio tiene un estado base 4*s*. Calcule la energía aproximada del estado $n = 4$ que tiene la Z_{efe} mínima, y describa las energías relativas de los estados 4*s*, 4*p*, 4*d* y 4*f*.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: El estado con la Z_{efe} mínima es aquel en el que el electrón de valencia pasa más tiempo fuera de las capas y subcapas interiores llenas, por lo que está más efectivamente apantallado de la carga del núcleo. Una vez que determinamos qué estado tiene la Z_{efe} mínima, aplicamos la ecuación (41.45) para determinar la energía de este estado.

EJECUTAR: Un estado 4*f* tiene $n = 4$ y $l = 3 = 4 - 1$. Por lo tanto, es el estado con mayor momento angular para $n = 4$ y, por consiguiente, el estado donde el electrón pasa más tiempo fuera de las nubes de carga electrónica de las capas y subcapas interiores llenas. Esto hace que Z_{efe} para un estado 4*f* sea cercano a la unidad. Entonces, la ecuación (41.45) da

$$E_4 = -\frac{Z_{efe}^2}{n^2}(13.6\text{ eV}) = -\frac{1}{4^2}(13.6\text{ eV}) = -0.85\text{ eV}$$

Esta aproximación concuerda con la energía medida del estado 4*f* del sodio, dentro de la precisión dada.

Un electrón en un estado 4*d* pasa algo más de tiempo dentro de las capas internas, y su energía es, en consecuencia, un poco más negativa (−0.94 eV, de acuerdo con las mediciones). Por la misma razón, un estado 4*p* tiene una energía aún menor (−2.73 eV) y un estado 4*s* tiene la mínima energía (−4.339 eV).

EVALUAR: Es posible ampliar el análisis anterior a los *elementos alcalinotérreos ionizados simplemente*: Be^+, Mg^+, Ca^+, Sr^+ y Ba^+. Para cualquier valor permitido de *n*, el estado *l* más elevado ($l = n - 1$) del electrón externo que queda ve una carga efectiva casi de $+2e$, por lo que para dichos estados, $Z_{efe} = 2$. Por ejemplo, un estado 3*d* para el Mg^+ tiene una energía aproximada de $-2^2(13.6\text{ eV})/3^2 = -6.0$ eV.

Evalúe su comprensión de la sección 41.6 Si los electrones *no* obedecieran el principio de exclusión, ¿sería más fácil o más difícil quitar el primer electrón del sodio? ❙

41.7 Espectros de rayos x

Los espectros de rayos x son otro ejemplo más de la riqueza y el poder de la ecuación de Schrödinger, y del modelo de estructura atómica que dedujimos a partir de ella en la sección anterior. En la sección 38.2 estudiamos la producción de rayos x con base en el concepto de fotón. Con el desarrollo de las técnicas de difracción de rayos x (sección 36.6) que realizaron Von Laue, Bragg y otros, al principio de 1912 fue posible medir con bastante precisión las longitudes de onda de los rayos x (con 0.1% o menos de error).

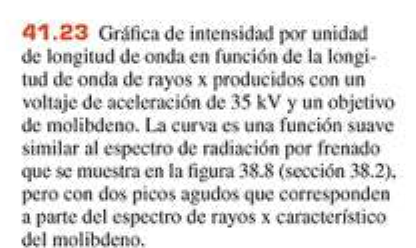
Los estudios detallados de los espectros de rayos x mostraron un espectro continuo de longitudes de onda (véase la figura 38.8 de la sección 38.2) con longitud de onda mínima (que corresponde a una frecuencia y energía máximas del fotón), determinada por el voltaje de aceleración V_{AC} en el tubo de rayos x, que obedece la ecua-

ción deducida en la sección 38.2 para los procesos de *bremsstrahlung* (radiación por frenado):

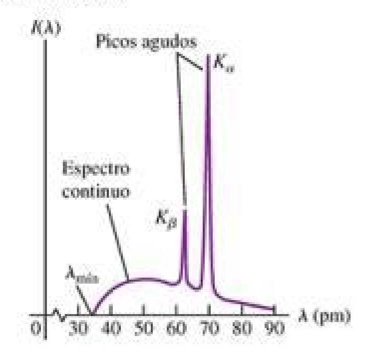
$$\lambda_{\text{mín}} = \frac{hc}{eV_{AC}} \qquad (41.46)$$

Esta radiación de espectro continuo es casi independiente del material objetivo en el tubo de rayos x.

Ley de Moseley y niveles atómicos de energía



41.23 Gráfica de intensidad por unidad de longitud de onda en función de la longitud de onda de rayos x producidos con un voltaje de aceleración de 35 kV y un objetivo de molibdeno. La curva es una función suave similar al espectro de radiación por frenado que se muestra en la figura 38.8 (sección 38.2), pero con dos picos agudos que corresponden a parte del espectro de rayos x característico del molibdeno.



Dependiendo del voltaje de aceleración y del elemento objetivo, se pueden presentar picos agudos superpuestos en este espectro continuo, como en la figura 41.23. Esos picos están en diferentes longitudes de onda para distintos elementos: forman lo que se llama un *espectro característico de rayos x* para cada elemento objetivo. En 1913 el científico inglés Henry G. J. Moseley estudió esos espectros con detalle, aplicando técnicas de difracción de rayos x. Encontró que la línea más intensa de longitud de onda corta en el espectro característico de rayos x para determinado elemento objetivo, llamada línea K_α, variaba uniformemente con el número atómico Z del elemento (figura 41.24). Esto contradice totalmente los espectros ópticos, donde los elementos con valores Z adyacentes tienen espectros que con frecuencia no tienen similitud entre sí.

Moseley encontró que la relación se podía expresar en términos de las frecuencias f de los rayos x mediante una fórmula sencilla, llamada *ley de Moseley*:

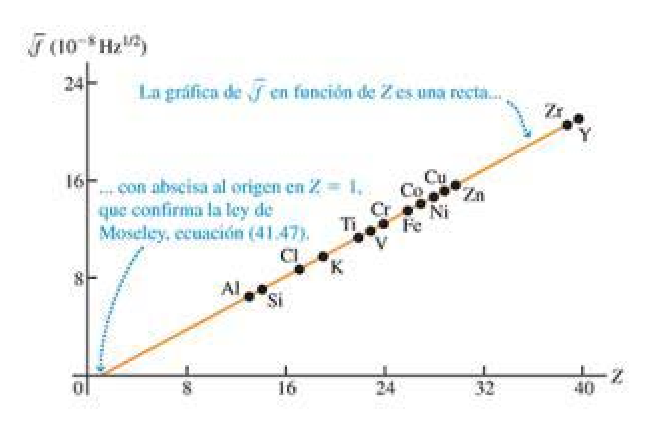
$$f = (2.48 \times 10^{15}\ \text{Hz})(Z - 1)^2 \qquad \text{(ley de Moseley)} \qquad (41.47)$$

Moseley fue más allá respecto de esta relación empírica; demostró cómo se pueden comprender los espectros característicos de rayos x con base en los niveles de energía de los átomos en el objetivo. Su análisis se basó en el modelo de Bohr, publicado el mismo año. Lo modificaremos un poco, aplicando las ideas de la estructura atómica descritas en la sección 41.6. Primero, recordemos que los electrones *externos* de un átomo son los responsables de los espectros ópticos. Sus estados excitados suelen estar solo algunos electrón volts arriba de su estado base. En transiciones de estados excitados al estado base, suelen emitir fotones dentro o cerca de la región visible.

En contraste, los rayos x característicos son emitidos en transiciones que implican las capas *internas* de un átomo complejo. En un tubo de rayos x, los electrones pueden chocar contra el objetivo con la energía suficiente para sacar electrones de las capas internas de los átomos objetivo. Estos electrones internos están mucho más cerca del núcleo que los electrones de las capas externas; están ligados con mucho mayor firmeza y se pueden necesitar cientos o miles de electrón volts para quitarlos.

Suponga que un electrón es expulsado de la capa *K*. Este proceso deja una vacante, que llamaremos *hueco*. (Queda un electrón en la capa *K*). Entonces, el hueco puede llenarse con un electrón que caiga desde una de las capas externas, como *L*, *M*, *N*, … Esta transición se acompaña de una disminución de energía del átomo (porque se

41.24 La raíz cuadrada de las frecuencias de la línea K_α, medidas por Moseley para 14 elementos.



necesitaría *menos* energía para sacar un electrón de una capa L, M, N, ...) y se emite un fotón de rayos x, con su energía igual a esa disminución. Cada estado tiene energía definida, por lo que los rayos x emitidos tienen longitudes de onda definidas; el espectro emitido es un espectro *de líneas*.

Es posible calcular la energía y la frecuencia de los fotones de rayos x, K_α, usando el concepto de apantallamiento de la sección 41.6. Un fotón de rayos x, K_α, se emite cuando cae un electrón de la capa L ($n = 2$) y llena un hueco en la capa K ($n = 1$). Al caer el electrón, es atraído por los Z protones en el núcleo, apantallados por el electrón restante en la capa K. En consecuencia, aproximamos la energía con la ecuación (41.45), con $Z_{\text{efe}} = Z - 1$, $n_i = 2$ y $n_f = 1$. La energía antes de la transición es

$$E_i \approx -\frac{(Z-1)^2}{2^2}(13.6\text{ eV}) = -(Z-1)^2(3.4\text{ eV})$$

y después de la transición es

$$E_f \approx -\frac{(Z-1)^2}{1^2}(13.6\text{ eV}) = -(Z-1)^2(13.6\text{ eV})$$

La energía del fotón de rayos x, K_α, es $E_{K\alpha} = E_i - E_f \approx (Z-1)^2(-3.4\text{ eV} + 13.6\text{ eV})$; es decir,

$$E_{K\alpha} \approx (Z-1)^2(10.2\text{ eV}) \tag{41.48}$$

La frecuencia del fotón es su energía dividida entre la constante de Planck:

$$f = \frac{E}{h} \approx \frac{(Z-1)^2(10.2\text{ eV})}{4.136 \times 10^{-15}\text{ eV}\cdot\text{s}} = (2.47 \times 10^{15}\text{ Hz})(Z-1)^2$$

Esta relación es casi idéntica a la ley experimental de Moseley, ecuación (41.47). En realidad, considerando las aproximaciones que hemos hecho, la concordancia es mejor de lo que podríamos esperar. Pero nuestro cálculo demuestra cómo se puede comprender la ley de Moseley con base en apantallamientos y transiciones entre niveles de energía.

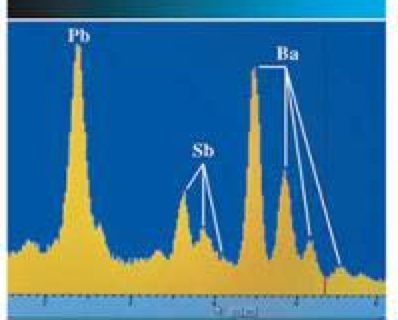
El hueco en la capa K también puede llenarse con un electrón que caiga de la capa M o N, suponiendo que estuvieran ocupadas. Si es así, el espectro de rayos x de un grupo grande de átomos de un solo elemento muestra una serie, llamada la serie K, de tres líneas, denominadas líneas K_α, K_β y K_γ. Estas tres líneas se deben a transiciones en las que el hueco de la capa K se llena con un electrón L, M o N, respectivamente. La figura 41.25 muestra la serie K del tungsteno ($Z = 74$), el molibdeno ($Z = 42$) y el cobre ($Z = 29$).

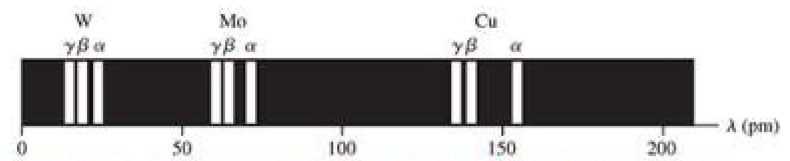
Hay otras series de líneas de rayos x, llamadas series L, M y N, que se producen después de la expulsión de electrones de las capas L, M y N, en vez de la capa K. En estas capas externas, los electrones están más alejados del núcleo, y no están ligados con tanta firmeza como los de la capa K, de modo que para quitarlos se requiere menos energía. Por lo tanto, los fotones de rayos x que se emiten al llenarse estos huecos tienen menor energía que los de la serie K.

Aplicación Los rayos x en la ciencia forense

Cuando se dispara un arma corta, se expulsa del barril una nube de residuos. El espectro de emisión de rayos x de los residuos emitidos incluye picos característicos del plomo (Pb), antimonio (Sb) y bario (Ba). Si se toma una muestra de la piel o de la ropa de un sospechoso que tiene un espectro de emisión de rayos x con estas características, indica que esa persona disparó recientemente un arma.







41.25 Longitudes de onda de las líneas K_α, K_β y K_γ del tungsteno (W), molibdeno (Mo) y cobre (Cu).



Ejemplo 41.10 Análisis químico por emisión de rayos x

Se mide la longitud de onda K_α de un elemento desconocido, y se obtiene el valor 0.0709 nm. ¿Cuál es el elemento?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Para determinar de qué elemento se trata, es necesario saber su número atómico Z. Podemos obtenerlo usando la ley de Moseley, que relaciona la frecuencia de la línea de emisión de rayos x, K_α, de un elemento con el número atómico Z. Se usará la ecuación $f = c/\lambda$ para calcular la frecuencia de la línea K_α y, a continuación, se usará la ecuación (41.47) para determinar el valor correspondiente del número atómico Z. Entonces consultaremos la tabla periódica (apéndice D) para determinar cuál elemento tiene ese número atómico.

EJECUTAR: La frecuencia es

$$f = \frac{c}{\lambda} = \frac{3.00 \times 10^8 \text{ m/s}}{0.0709 \times 10^{-9} \text{ m}} = 4.23 \times 10^{18} \text{ Hz}$$

De la ley de Moseley despejamos Z,

$$Z = 1 + \sqrt{\frac{f}{2.48 \times 10^{15} \text{ Hz}}} = 1 + \sqrt{\frac{4.23 \times 10^{18} \text{ Hz}}{2.48 \times 10^{15} \text{ Hz}}} = 42.3$$

Sabemos que Z debe ser un entero y, entonces, se concluye que Z = 42, que corresponde al elemento molibdeno.

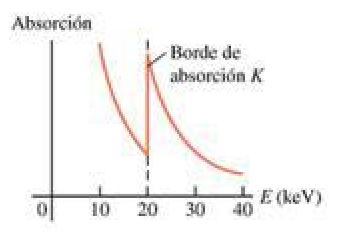
EVALUAR: Si le preocupa que nuestro cálculo no resultara un entero para Z, recuerde que la ley de Moseley es una relación empírica. Hay pequeñas variaciones de un átomo a otro, debidas a diferencias en la estructura de las capas de electrones. Sin embargo, este ejemplo da una idea del poder de la ley de Moseley.

Niels Bohr comentaba que fueron las observaciones de Moseley, y no los experimentos de dispersión de Rutherford, Geiger y Marsden (sección 39.2), las que verdaderamente convencieron a los físicos de que el átomo consiste en un núcleo positivo rodeado por electrones en movimiento. A diferencia de Bohr o de Rutherford, Moseley no recibió Premio Nobel por su importante labor; esos premios se otorgan a científicos en vida, y Moseley murió en combate durante la Primera Guerra Mundial.

Espectro de absorción de rayos x

También podemos observar espectros de *absorción* de rayos x. A diferencia de los espectros ópticos, las longitudes de onda de absorción no suelen ser iguales que las de emisión, en especial en átomos con muchos electrones, y no producen espectros sencillos de líneas. Por ejemplo, la línea de emisión K_α se debe a una transición de la capa *L* a un hueco en la capa *K*. La transición inversa no se presenta en átomos con $Z \geq 10$, porque en el estado base del átomo no hay hueco en la capa *L*. Para ser absorbido, un fotón debe tener la energía suficiente para mover un electrón a un estado vacío. Como los estados vacíos solo tienen unos cuantos electrón volts de energía menos que el continuo de electrones libres, las energías mínimas de absorción en átomos con muchos electrones son más o menos iguales que las energías mínimas necesarias para remover un electrón de su capa. En forma experimental, si se aumenta gradualmente el voltaje de aceleración y, en consecuencia, la energía máxima de los fotones, se observan aumentos repentinos de absorción cuando se alcanzan esas energías mínimas. Estos saltos repentinos de absorción se llaman *bordes de absorción* (figura 41.26).

41.26 Cuando un haz de rayos x atraviesa una placa de molibdeno, el grado de absorción en la placa depende de la energía *E* de los fotones de rayos x. En el borde de absorción *K*, a 20 keV se produce un aumento repentino de absorción. El incremento ocurre porque los fotones con energías por encima de este valor pueden excitar un electrón de la capa *K*, de un átomo de molibdeno, haciéndolo pasar a un estado vacío.



Los espectros característicos de rayos x son una herramienta analítica muy útil. Se usan espectrómetros de rayos x montados en satélites para estudiar las líneas de emisión de rayos x de átomos muy excitados en fuentes astronómicas lejanas. Estos espectros se usan también en el monitoreo de la contaminación del aire y en estudios para determinar la cantidad de diversos elementos en las rocas.

Evalúe su comprensión de la sección 41.7 Un haz de fotones pasa por una muestra de hidrógeno atómico a alta temperatura. ¿Con qué energía de fotones esperaría usted que hubiera un margen de absorción como el de la figura 41.26? **i.** 13.60 eV; **ii.** 3.40 eV; **iii.** 1.51 eV; **iv.** todos estos; **v.** ninguno de estos.





Problemas en tres dimensiones: La ecuación de Schrödinger independiente del tiempo para problemas en tres dimensiones está dada por la ecuación (41.15).

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2\psi(x,y,z)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi(x,y,z)}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\psi(x,y,z)}{\partial z^2}\right)+U(x,y,z)\psi(x,y,z)=E\psi(x,y,z)$$

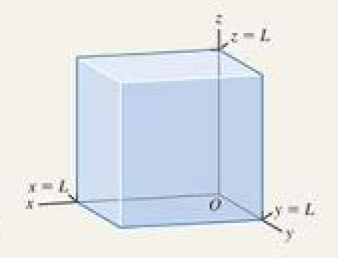
(ecuación de Schrödinger independiente del tiempo para tres dimensiones) (41.5)

Partícula en una caja de tres dimensiones: La función de onda de una partícula en una caja cúbica es el producto de una función única de x, una función única de y y una función única de z. Cada estado estacionario está descrito por tres números cuánticos (n_X, n_Y y n_Z). La mayoría de los niveles de energía dados por la ecuación (41.16) presentan degeneración: más de un estado cuántico tiene la misma energía. (Véase el ejemplo 41.1).

$$E_{n_X,n_Y,n_Z}=\frac{(n_X{}^2+n_Y{}^2+n_Z{}^2)\pi^2\hbar^2}{2mL^2}$$

$(n_X = 1, 2, 3, \ldots;$
$n_Y = 1, 2, 3, \ldots; n_Z = 1, 2, 3, \ldots)$

(niveles de energía, partícula en una caja cúbica tridimensional) (41.16)



Átomo de hidrógeno: La ecuación de Schrödinger para el átomo de hidrógeno proporciona los mismos niveles de energía que el modelo de Bohr. Si el núcleo tiene la carga Ze, hay un factor adicional Z^2 en el numerador de la ecuación (41.21). La ecuación de (41.22) proporciona las magnitudes posibles del momento angular orbital L, y los valores posibles de la componente z del momento angular orbital se determinan con la ecuación (41.23). (Véase los ejemplos 41.2 y 41.3).

La probabilidad de que un electrón atómico esté a una distancia entre r y $r + dr$ del núcleo es $P(r)\,dr$, dada por la ecuación (41.25). Las distancias atómicas se miden con frecuencia en unidades de a, la distancia mínima entre el electrón y el núcleo en el modelo de Bohr. (Véase el ejemplo 41.4).

$$E_n=-\frac{1}{(4\pi\epsilon_0)^2}\frac{m_r e^4}{2n^2\hbar^2}=-\frac{13.60\text{ eV}}{n^2}$$

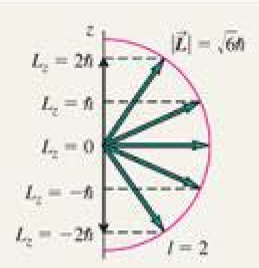
(niveles de energía del hidrógeno) (41.21)

$$L=\sqrt{l(l+1)}\hbar \qquad (41.22)$$
$(l = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$

$$L_z=m_l\hbar \qquad (41.23)$$
$(m_l = 0, \pm1, \pm2, \ldots, \pm l)$

$$P(r)\,dr=|\psi|^2\,dV=|\psi|^2\,4\pi r^2\,dr \qquad (41.25)$$

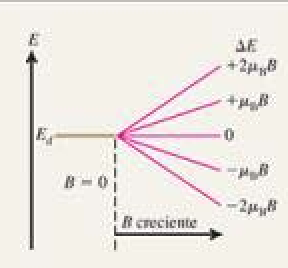
$$a=\frac{\epsilon_0 h^2}{\pi m_r e^2}=\frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{m_r e^2}=5.29\times10^{-11}\text{ m} \qquad (41.26)$$



El efecto Zeeman: La energía de interacción de un electrón (masa m) con número cuántico magnético m_l en un campo magnético $\vec{B}$ a lo largo de la dirección $+z$ está dada por la ecuación (41.35) o (41.36), donde $\mu_B = e\hbar/2m$ se llama el magnetón de Bohr. (Véase el ejemplo 41.5).

$$U=-\mu_z B=m_l\frac{e\hbar}{2m}B=m_l\mu_B B$$

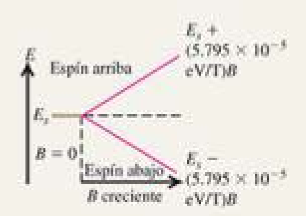
$(m_l = 0, \pm1, \pm2, \ldots, \pm l)$ (41.35), (41.36)



Espín del electrón: Un electrón tiene un momento angular de espín intrínseco de magnitud S, dado por la ecuación (41.38). Los valores posibles de la componente z del momento angular de espín son $S_z = m_s\hbar$, donde $m_s = \pm\frac{1}{2}$. (Véase los ejemplos 41.6 y 41.7).

$$S = \sqrt{\tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{2}+1\right)}\hbar = \sqrt{\tfrac{3}{4}}\hbar \qquad (41.38)$$

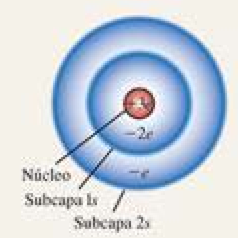
$$S_z = \pm\tfrac{1}{2}\hbar \qquad (41.37)$$



Átomos con muchos electrones: En el átomo del hidrógeno, los números cuánticos n, l, m_l y m_s del electrón tienen ciertos valores permitidos por la ecuación (41.44). En un átomo con muchos electrones, los números cuánticos permitidos para cada electrón son los mismos que en el hidrógeno, pero los niveles de energía dependen tanto de n como de l por el apantallamiento, que es la anulación parcial del campo del núcleo por los electrones internos. Si la carga efectiva (apantallada) que atrae a un electrón es $Z_{\text{efe}}e$, las energías de los niveles están dadas, aproximadamente, por la ecuación (41.45). (Véase los ejemplos 41.8 y 41.9).

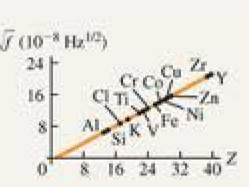
$$n \geq 1 \quad 0 \leq l \leq n-1$$
$$|m_l| \leq l \quad m_s = \pm\tfrac{1}{2} \qquad (41.44)$$

$$E_n = -\frac{Z_{\text{efe}}^2}{n^2}(13.6\text{ eV}) \qquad (41.45)$$



Espectros de rayos x: La ley de Moseley establece que la frecuencia de un rayo x, K_α, producido en un objetivo con número atómico Z está dada por la ecuación (41.47). Los espectros característicos de rayos x se deben a transiciones hacia un hueco de un nivel de energía interior de un átomo. (Véase el ejemplo 41.10).

$$f = (2.48 \times 10^{15}\text{ Hz})(Z-1)^2 \qquad (41.47)$$





PROBLEMA PRÁCTICO Un átomo con muchos electrones en una caja

Un átomo de titanio (Ti) tiene 22 electrones y radio de 1.47×10^{-10} m. Como modelo sencillo de este átomo, imagine que coloca 22 electrones en una caja cúbica que tiene el mismo volumen del átomo de titanio. *a*) ¿Cuál es la longitud de cada lado de la caja? *b*) ¿Cuál será la configuración de los 22 electrones? *c*) Calcule las energías de cada uno de los niveles ocupados por los electrones. (Ignore las fuerzas eléctricas que los electrones ejercen entre sí). *d*) Se elimina uno de los electrones del nivel más bajo, lo que provoca que uno de los electrones del nivel ocupado más alto caiga en el nivel más bajo para llenar el hueco, emitiendo un fotón en el proceso. ¿Cuál es la energía de este fotón? Compare esta energía con la energía K_α del fotón de titanio pronosticada por la ley de Moseley.

GUÍA DE SOLUCIÓN

Véase el área de estudio MasteringPhysics® para consultar una solución con Video Tutor.



IDENTIFICAR y PLANTEAR

1. En este problema se aplicarán las ideas de la sección 41.2 acerca de una partícula en una caja cúbica. También se usará el principio de exclusión de la sección 41.6 para determinar la configuración electrónica de este "átomo" cúbico. Los conceptos acerca del espectro de rayos x de la sección 41.7 también son importantes.
2. Las incógnitas son: *a*) las dimensiones de la caja, *b*) las configuraciones electrónicas (como las que se presentan en la tabla 41.3 para átomos reales), *c*) los niveles de energía ocupados en la caja cúbica y *d*) la energía del fotón emitido.

EJECUTAR

3. Use sus conocimientos de geometría para obtener la longitud de cada lado de la caja.
4. Cada estado electrónico se define con cuatro números cuánticos: n_X, n_Y y n_Z, como se describe en la sección 41.2, y el número cuántico magnético m_s del espín descrito en la sección 41.5. Use el principio de exclusión para determinar los números cuánticos de cada uno de los 22 electrones en el "átomo". (*Sugerencia:* La figura 41.4 de la sección 41.2 muestra algunos de los primeros niveles de energía de una caja cúbica en relación con el nivel base $E_{1,1,1}$).
5. Use los resultados de los pasos 3 y 4 para obtener las energías de cada uno de los niveles ocupados.
6. Use el resultado del paso 5 para obtener la energía del fotón emitido cuando un electrón efectúa una transición desde el nivel más alto ocupado hasta el nivel base. Compare esto con la energía calculada para el titanio usando la ley de Moseley.

EVALUAR

7. ¿Este "átomo" cúbico es un modelo útil para el titanio? ¿Por qué?
8. En este problema se ignoraron las interacciones eléctricas entre los electrones. Para estimar qué magnitud tienen, calcule la energía potencial electrostática de dos electrones separados por la mitad de la longitud de la caja. Compare esta energía con los niveles de energía calculados en el paso 5. ¿Es una buena aproximación ignorar estas interacciones?

Problemas

Para tareas asignadas por el profesor, visite www.masteringphysics.com 

•, ••, •••: Problemas de dificultad creciente. **PA**: Problemas acumulativos que incorporan material de capítulos anteriores. **CALC**: Problemas que requieren cálculo. **BIO**: Problemas de ciencias biológicas.

PREGUNTAS PARA ANÁLISIS

P41.1 Una partícula *A* está descrita por la función de onda $\psi(x, y, z)$. La partícula *B* está descrita por la función de onda $\psi(x, y, z)e^{i\phi}$, donde ϕ es una constante real. ¿Cómo se compara la probabilidad de encontrar la partícula *A* dentro de un volumen dV en un punto del espacio con la probabilidad de encontrar la partícula *B* dentro de ese mismo volumen?

P41.2 ¿Cuáles son las diferencias más importantes entre el modelo de Bohr para el átomo de hidrógeno y el análisis de Schrödinger? ¿Cuáles son las semejanzas?

P41.3 Para un cuerpo que gira alrededor del Sol, como un planeta, cometa o asteroide, ¿hay alguna restricción sobre la componente *z* de su momento angular orbital, tal como habría con la componente *z* del momento angular orbital del electrón en el hidrógeno? Explique por qué.

P41.4 ¿Por qué el análisis del átomo de helio es mucho más complicado que el del átomo de hidrógeno, tanto en un modelo del tipo de Bohr como cuando se usa la ecuación de Schrödinger?

P41.5 El experimento de Stern-Gerlach siempre se realiza con haces de átomos *neutros*. ¿No sería más fácil utilizar haces con átomos *ionizados*? ¿Por qué no funcionaría esto?

P41.6 *a*) Si dos electrones en átomos de hidrógeno tienen el mismo número cuántico principal, ¿pueden tener diferentes cantidades de momento angular orbital? ¿Cómo? *b*) Si dos electrones en átomos de hidrógeno tienen el mismo número cuántico de momento angular orbital, ¿pueden tener diferentes números cuánticos principales? ¿Cómo?

P41.7 En el experimento de Stern-Gerlach, ¿por qué es esencial que el campo magnético sea *no homogéneo*, es decir, no uniforme?

P41.8 En el estado base del átomo de helio, un electrón debe tener el "espín abajo" y el otro el "espín arriba". ¿Por qué?

P41.9 El electrón de un átomo de hidrógeno está en un nivel *s*, y el átomo está en un campo magnético $\vec{B} = B\hat{k}$. Explique por qué el estado "espín arriba" $\left(m_s = +\frac{1}{2}\right)$ tiene mayor energía que el estado "espín abajo" $\left(m_s = -\frac{1}{2}\right)$.

P41.10 La aproximación de campo central es más exacta para metales alcalinos, que para metales de transición como el hierro, el níquel o el cobre. ¿Por qué?

P41.11 La tabla 41.3 muestra que para el estado base del átomo de potasio, el electrón más externo se encuentra en un estado 4*s*. ¿Qué indica esto acerca de las energías relativas de los niveles 3*d* y 4*s* de este átomo? ¿Por qué?

P41.12 ¿Las fuerzas gravitacionales desempeñan un papel importante en la estructura atómica? ¿Por qué?

P41.13 ¿Por qué todos los elementos de transición ($Z = 21$ a 30) tienen propiedades químicas similares?

P41.14 Use la tabla 41.3 para tratar de determinar la configuración electrónica de estado base del átomo neutro de galio (Ga), así como de los iones Ga^+ y Ga^-. El número atómico del galio es 31.

P41.15 Con base en el principio de exclusión de Pauli, la estructura de la tabla periódica de los elementos indica que debe haber un cuarto número cuántico, además de *n*, *l* y m_l. Explique por qué.

P41.16 Una pequeña cantidad de desdoblamiento de campo magnético de las líneas espectrales ocurre aun cuando los átomos no estén en un campo magnético. ¿Qué provoca esto?

P41.17 Las energías de ionización de los metales alcalinos (esto es, la energía mínima necesaria para sacar un electrón externo cuando el átomo está en su estado base) son de unos 4 o 5 eV, mientras que las de los gases nobles están entre 11 y 25 eV. ¿A qué se debe esa diferencia?

P41.18 La energía necesaria para quitar el electrón 3*s* a un átomo de sodio en su estado base es aproximadamente de 5 eV. ¿Esperaría usted que la energía necesaria para eliminar un electrón adicional sea más o menos la misma, mayor o menor? ¿Por qué?

P41.19 ¿Qué es la "aproximación de campo central" y por qué es solo una aproximación?

P41.20 El núcleo de un átomo de oro contiene 79 protones. ¿Cómo se compara la energía necesaria para sacar por completo un electrón 1*s* de un átomo de oro con la energía necesaria para sacar un electrón del nivel base en un átomo de hidrógeno? ¿En qué región del espectro electromagnético estaría un fotón con esta energía para cada uno de estos dos átomos?

P41.21 *a*) ¿Puede usted demostrar que el momento angular orbital de un electrón en una dirección dada (por ejemplo, a lo largo del eje *z*) *siempre* es menor que o igual a su momento angular orbital total? ¿En qué casos serían iguales? *b*) ¿El resultado del inciso *a*) se cumple para un objeto clásico, como un trompo o un planeta?

P41.22 Un átomo en su nivel base absorbe un fotón de energía igual al borde de absorción *K*. ¿Al absorber este fotón, el átomo se ioniza? Explique.

P41.23 ¿Un átomo de hidrógeno puede emitir rayos x? En caso afirmativo, ¿cómo? De lo contrario, ¿por qué no?

EJERCICIOS

Sección 41.2 Partícula en una caja de tres dimensiones

41.1 • Para una partícula en una caja de tres dimensiones, determine la degeneración (número de estados cuánticos diferentes con la misma energía) de los niveles de energía siguientes: *a*) $3\pi^2\hbar^2/2mL^2$ y *b*) $9\pi^2\hbar^2/2mL^2$.

41.2 • **PA** Modele un átomo de hidrógeno como un electrón en una caja cúbica de lado *L*. Determine el valor de *L* de modo que el volumen de la caja sea igual al volumen de una esfera de radio $a = 5.29 \times 10^{-11}$ m, el radio de Bohr. Calcule la energía de separación entre el nivel base y el primer nivel excitado, y compare el resultado con la energía de separación obtenida con el modelo de Bohr.

41.3 • **PA** Se emite un fotón cuando un electrón en una caja tridimensional, de 8.00×10^{-11} m por lado, efectúa una transición del estado $n_X = 2$, $n_Y = 2$, $n_Z = 1$, al estado $n_X = 1$, $n_Y = 1$, $n_Z = 1$. ¿Cuál es la longitud de onda de este fotón?

41.4 • Para cada uno de los siguientes estados de una partícula en una caja tridimensional, ¿en qué puntos la función de distribución de probabilidad es máxima: *a*) $n_X = 1$, $n_Y = 1$, $n_Z = 1$ y *b*) $n_X = 2$, $n_Y = 2$, $n_Z = 1$?

41.5 •• Una partícula se encuentra en la caja tridimensional de la sección 41.1. Para el estado $n_X = 2$, $n_Y = 2$, $n_Z = 1$, ¿en qué planos (además de las paredes de la caja) la función de distribución de probabilidad es cero? Compare este número de planos con el número de planos correspondientes donde $|\psi|^2$ es cero para el estado de energía más bajo $n_X = 2$, $n_Y = 1$, $n_Z = 1$ y para el estado base $n_X = 1$, $n_Y = 1$, $n_Z = 1$.

41.6 • ¿Cuál es la diferencia de energía entre los dos niveles mínimos de energía de un protón en una caja cúbica de 1.00×10^{-14} m por lado, el diámetro aproximado de un núcleo?

Sección 41.3 Átomo de hidrógeno

41.7 •• Considere un electrón en la capa *N*. *a*) ¿Cuál es el momento angular orbital mínimo que puede tener? *b*) ¿Cuál es el momento angular orbital máximo que puede tener? Exprese sus respuestas en términos de $\hbar$ y en unidades del SI. *c*) ¿Cuál es el momento angular orbital máximo que este electrón tendría en cualquier dirección que se elija? Exprese sus respuestas en términos de $\hbar$ y en unidades del SI. *d*) ¿Cuál es el momento angular de espín máximo que este electrón tendría en cualquier dirección que se elija? Exprese sus respuestas en términos de $\hbar$ y en unidades del SI. *e*) Para el electrón del inciso *c*), ¿cuál es el cociente de su momento angular de espín en la dirección *z* y su momento angular orbital en la dirección *z*?

41.8 • Un electrón está en el átomo de hidrógeno con $n = 5$. *a*) Calcule los posibles valores de L y L_z para este electrón, en unidades de $\hbar$. *b*) Para cada valor de L, calcule todos los ángulos posibles entre $\vec{L}$ y el eje *z*. *c*) ¿Cuáles son los valores máximo y mínimo de la magnitud del ángulo entre $\vec{L}$ y el eje *z*?

41.9 • El momento angular orbital de un electrón tiene $4.716 \times 10^{-34}\ \text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$ de magnitud. ¿Cuál es el número cuántico de momento angular l para este electrón?

41.10 • Considere los estados con número cuántico de momento angular $l = 2$. *a*) En unidades de $\hbar$, ¿cuál es el valor máximo posible de L_z? *b*) En unidades de $\hbar$, ¿cuál es el valor de L? ¿Cuál es mayor: L o L_z? *c*) Para cada valor permitido de L_z, ¿qué ángulo forma el vector $\vec{L}$ con el eje $+z$? ¿Cómo se compara el ángulo mínimo para $l = 2$ con el ángulo mínimo para $l = 3$, calculado en el ejemplo 41.3?

41.11 • Calcule, en unidades de $\hbar$, la magnitud del momento angular orbital máximo de un electrón de un átomo de hidrógeno, para estados con número cuántico principal 2, 20 y 200. Compare cada uno con el valor de $n\hbar$ postulado en el modelo de Bohr. ¿Qué tendencia observa usted?

41.12 • *a*) Elabore una gráfica que contenga todos los conjuntos posibles de números cuánticos l y m_l, para los estados del electrón en el átomo de hidrógeno, cuando $n = 5$. ¿Cuántas combinaciones hay? *b*) ¿Cuáles son las energías de esos estados?

41.13 •• *a*) ¿Cuántos estados diferentes 5*g* tiene el hidrógeno? *b*) ¿Cuál de los estados del inciso *a*) tiene el ángulo máximo entre $\vec{L}$ y el eje *z*, y cuál es ese ángulo? *c*) ¿Cuál de los estados del inciso *a*) tiene el ángulo mínimo entre $\vec{L}$ y el eje *z*, y cuál es ese ángulo?

41.14 •• **CALC** *a*) ¿Cuál es la probabilidad de que un electrón en el estado 1*s* de un átomo de hidrógeno se encuentre a una distancia menor que $a/2$ del núcleo? *b*) Use los resultados del inciso *a*) y del ejemplo 41.4 para calcular la probabilidad de que el electrón se encuentre a distancias entre $a/2$ y a del núcleo.

41.15 • **CALC** En el ejemplo 41.4 complete los detalles faltantes que indican que $P = 1 - 5e^{-2}$.

41.16 • Demuestre que $\Phi(\phi) = e^{im_l\phi} = \Phi(\phi + 2\pi)$ [esto es, demuestre que $\Phi(\phi)$ es periódica, con periodo de 2π] si, y solo si, m_l se restringe a los valores 0, ±1, ±2, … (*Sugerencia:* La fórmula de Euler indica que $e^{i\phi} = \cos\phi + i \operatorname{sen}\phi$).

Sección 41.4 Efecto Zeeman

41.17 • Un átomo de hidrógeno en un estado 3*p* se coloca en un campo magnético externo uniforme $\vec{B}$. En la interacción del campo magnético con el momento dipolar magnético orbital del átomo, *a*) ¿qué magnitud B del campo se requiere para desdoblar el estado 3*p* en varios niveles con una diferencia de energía de 2.71×10^{-5} eV entre los niveles adyacentes? *b*) ¿Cuántos niveles habrá?

41.18 • Un átomo de hidrógeno se encuentra en un estado *d*. En ausencia de un campo magnético externo, los estados con distintos valores de m_l tienen (aproximadamente) la misma energía. Para el caso de la interacción del campo magnético con el momento dipolar orbital magnético del átomo, *a*) calcule el desdoblamiento de los niveles m_l (en electrón volts), cuando el átomo se coloca en un campo magnético de 0.400 T, que está en la dirección $+z$. *b*) ¿Qué nivel m_l tiene la energía mínima? *c*) Dibuje un diagrama de niveles de energía que muestre los niveles *d* con y sin campo magnético externo.

41.19 • Un átomo de hidrógeno en el estado 5*g* se coloca en un campo magnético de 0.600 T, que tiene la dirección de *z*. *a*) ¿En cuántos niveles se desdobla este estado por la interacción del momento dipolar magnético orbital del átomo con el campo magnético? *b*) ¿Cuál es la energía de separación entre niveles adyacentes? *c*) ¿Cuál es la energía de separación entre el nivel de mínima energía y el nivel de máxima energía?

41.20 •• **PA** Un átomo de hidrógeno experimenta una transición de un estado 2*p* al estado base 1*s*. En ausencia de un campo magnético, la longitud de onda del fotón emitido es 122 nm. El átomo se coloca entonces en un campo magnético intenso, en dirección *z*. No tome en cuenta los efectos del espín, y solo considere la interacción del campo magnético con el momento magnético orbital del átomo. *a*) ¿Cuántas longitudes de onda distintas del fotón se observan para la transición $2p \longrightarrow 1s$? ¿Cuáles son los valores de m_l para los estados inicial y final de la transición que causa cada longitud de onda del fotón? *b*) Una longitud de onda observada es exactamente igual con campo magnético que sin él. ¿Cuáles son los valores inicial y final de m_l para la transición que produce un fotón con esta longitud de onda? *c*) Una longitud de onda observada en presencia de campo es mayor que sin campo. ¿Cuáles son los valores inicial y final de m_l para la transición que produce un fotón con esta longitud de onda? *d*) Repita el inciso *c*) para la longitud de onda que sea más corta que la que hay en ausencia del campo.

Sección 41.5 Espín del electrón

41.21 •• **PA** **Espín clásico del electrón.** *a*) Si se considera que un electrón es un objeto esférico clásico de 1.0×10^{-17} m de radio, ¿qué rapidez angular se necesita para producir un momento angular de espín de $\sqrt{\tfrac{3}{4}}\hbar$ de magnitud? *b*) Use $v = r\omega$ y el resultado del inciso *a*) para calcular la rapidez v de un punto en el ecuador del electrón. ¿Qué parece indicar el resultado acerca de la validez de este modelo?

41.22 •• Un átomo de hidrógeno en el estado $n = 1$, $m_s = -\tfrac{1}{2}$ se coloca en un campo magnético de 0.480 T de magnitud, en la dirección $+z$. *a*) Calcule la energía de interacción magnética (en electrón volts) del electrón con el campo. *b*) ¿Hay alguna interacción de momento dipolar magnético orbital para este estado? Explique su respuesta. ¿Puede haber una interacción de momento dipolar magnético orbital para $n \neq 1$?

41.23 • Calcule la diferencia de energías entre los niveles $m_s = \tfrac{1}{2}$ ("espín arriba") y $m_s = -\tfrac{1}{2}$ ("espín abajo") para un átomo de hidrógeno en el estado *s*, cuando se coloca en un campo magnético de 1.45 T en dirección de *z negativa*. ¿Cuál nivel, $m_s = \tfrac{1}{2}$ o $m_s = -\tfrac{1}{2}$, tiene la menor energía?

41.24 • **PA** La interacción hiperfina en un átomo de hidrógeno entre el momento dipolar magnético del protón y el momento dipolar magnético de espín del electrón desdobla el nivel base en dos niveles, separados por 5.9×10^{-6} eV. *a*) Calcule la longitud de onda y la frecuencia del fotón emitido cuando el átomo efectúa una transición entre esos estados, y compare su respuesta con el valor mencionado al final de la sección 41.5. ¿En qué parte del espectro electromagnético se encuentra? Dichos

fotones son emitidos por nubes de hidrógeno frías en el espacio interestelar; al detectar esos fotones, los astrónomos pueden conocer la cantidad y la densidad de esas nubes. *b*) Calcule el campo magnético efectivo experimentado por el electrón en esos estados (véase la figura 41.18). Compare su resultado con el campo magnético efectivo debido al acoplamiento espín-órbita, calculado en el ejemplo 41.7.

41.25 • Un átomo de hidrógeno en determinado estado de momento angular orbital tiene números cuánticos j de $\frac{7}{2}$ y $\frac{9}{2}$. ¿Cuál es la letra que representa el valor de l para ese estado?

Sección 41.6 Átomos con muchos electrones y el principio de exclusión

41.26 • Para el germanio (Ge, $Z = 32$) elabore una lista de la cantidad de electrones en cada subcapa ($1s$, $2s$, $2p$, ...). Use los valores permitidos de los números cuánticos, junto con el principio de exclusión. *No* consulte la tabla 41.3.

41.27 • Elabore una lista de los cuatro números cuánticos n, l, m_l y m_s, para cada uno de los 10 electrones en el estado base del átomo de neón. *No* consulte la tabla 41.2 ni la 41.3.

41.28 •• *a*) Escriba la configuración electrónica del estado base ($1s^2$, $2s^2$, ...) para el átomo de carbono. *b*) ¿Qué elemento del siguiente Z más grande tiene propiedades químicas similares a las del carbono? Proporcione la configuración electrónica del estado base de este elemento.

41.29 •• *a*) Escriba la configuración electrónica del estado base ($1s^2$, $2s^2$, ...) para el átomo de berilio. *b*) ¿Qué elemento del siguiente Z más grande tiene propiedades químicas similares a las del berilio? Proporcione la configuración electrónica del estado base de este elemento. *c*) Use el procedimiento del inciso *b*) para predecir qué elemento del siguiente Z más grande que el de *b*) tendrá propiedades químicas similares a las del elemento que determinó en el inciso *b*), y proporcione la configuración electrónica de su estado base.

41.30 • Para el magnesio, la primera energía potencial de ionización es 7.6 eV. La segunda energía potencial de ionización (energía adicional necesaria para sacar un segundo electrón) es casi el doble, 15 eV; y la de la tercera energía potencial de ionización es mucho mayor, aproximadamente 80 eV. ¿Cómo se interpretan esos números?

41.31 • El electrón $5s$ en el rubidio (Rb) experimenta una carga efectiva de $2.771e$. Calcule la energía de ionización de este electrón.

41.32 • Las energías de los niveles $4s$, $4p$ y $4d$ del potasio se mencionan en el ejemplo 41.9. Calcule Z_{efe} para cada estado. ¿Qué tendencia indican sus resultados? ¿Cómo explicaría esa tendencia?

41.33 • *a*) El ion N^{+2} doblemente cargado se forma quitando dos electrones a un átomo de nitrógeno. ¿Cuál es la configuración electrónica de estado base para el ion N^{+2}? *b*) Estime la energía del nivel menos fuertemente ligado en la capa L del N^{+2}. *c*) El ion P^{+2} doblemente cargado se forma quitando dos electrones a un átomo de fósforo. ¿Cuál es la configuración electrónica de estado base para el ion P^{+2}? *d*) Estime la energía del nivel menos fuertemente ligado en la capa M del P^{+2}.

41.34 • *a*) La energía del estado $2s$ del litio es -5.391 eV. Calcule el valor de Z_{efe} para este estado. *b*) La energía del estado $4s$ del potasio es -4.339 eV. Calcule el valor de Z_{efe} para este estado. *c*) Compare Z_{efe} para el estado $2s$ del litio, el estado $3s$ del sodio (véase el ejemplo 41.8) y el estado $4s$ del potasio. ¿Qué tendencia observa? ¿Cómo explicaría esta tendencia?

41.35 • Estime la energía del estado l más alto para *a*) la capa L del Be^+ y *b*) la capa N del Ca^+.

Sección 41.7 Espectros de rayos x

41.36 • Un rayo x, K_α, se emite de una muestra, y tiene 7.46 keV de energía. ¿De qué elemento es la muestra?

41.37 • Calcule la frecuencia, energía (en keV) y longitud de onda del rayo x, K_α, para los elementos *a*) calcio (Ca, $Z = 20$); *b*) cobalto (Co, $Z = 27$); *c*) cadmio (Cd, $Z = 48$).

41.38 •• Las energías de un electrón en las capas K, L y M del átomo de tungsteno son $-69{,}500$ eV, $-12{,}000$ eV y -2200 eV, respectivamente. Calcule las longitudes de onda de los rayos x, K_α y K_β, del tungsteno.

PROBLEMAS

41.39 • En términos de la energía $E_{1,1,1}$ del estado base, ¿cuál es la energía del nivel más alto ocupado por un electrón cuando se colocan 10 electrones en una caja cúbica?

41.40 •• CALC La partícula de la caja tridimensional de la sección 41.2 se encuentra en estado base, donde $n_X = n_Y = n_Z = 1$. *a*) Calcule la probabilidad de que la partícula se encuentre en algún lugar entre $x = 0$ y $x = L/2$. *b*) Calcule la probabilidad de que la partícula se encuentre en algún lugar entre $x = L/4$ y $x = L/2$. Compare estos resultados con los del ejemplo 41.1 acerca de la probabilidad de encontrar la partícula en la región entre $x = 0$ y $x = L/4$.

41.41 •• CALC Una partícula se encuentra en la caja tridimensional de la sección 41.2. *a*) Considere el volumen cúbico definido por $0 \leq x \leq L/4$, $0 \leq y \leq L/4$ y $0 \leq z \leq L/4$. ¿Qué fracción del volumen total de la caja es este volumen cúbico? *b*) Si la partícula está en estado base ($n_X = 1$, $n_Y = 1$ y $n_Z = 1$), calcule la probabilidad de que la partícula se encuentre en el volumen cúbico definido en el inciso *a*). *c*) Repita el cálculo del inciso *b*) cuando la partícula está en el estado $n_X = 2$, $n_Y = 1$, $n_Z = 1$.

41.42 •• CALC Una partícula está descrita por la función de onda normalizada $\psi(x, y, z) = Axe^{-\alpha x^2}e^{-\beta y^2}e^{-\gamma z^2}$, donde A, α, β y γ son constantes reales positivas. La probabilidad de que la partícula se encuentre en el volumen infinitesimal $dx\,dy\,dz$ con centro en el punto (x_0, y_0, z_0) es $|\psi(x_0, y_0, z_0)|^2 dx\,dy\,dz$. *a*) ¿En qué valores de x_0 es más probable encontrar a la partícula? ¿Hay valores de x_0 para los cuales la probabilidad de que la partícula se encuentre sean cero? Si es así, ¿en qué valores?

41.43 •• CALC Una partícula está descrita por la función de onda normalizada $\psi(x, y, z) = Ae^{-\alpha(x^2+y^2+z^2)}$, donde A y α son constantes reales positivas. *a*) Determine la probabilidad de encontrar la partícula a una distancia entre r y $r + dr$ del origen. (*Sugerencia:* Véase el problema 41.42. Considere una capa esférica con centro en el origen, de radio interior r y espesor dr). *b*) ¿Para qué valores de r la probabilidad del inciso *a*) tiene su valor máximo? ¿Es este el mismo valor de r para el que $|\psi(x, y, z)|^2$ es un máximo? Explique cualquier diferencia.

41.44 •• PA CALC **Oscilador armónico isotrópico tridimensional.** Un oscilador armónico isotrópico tiene la función de energía potencial $U(x, y, z) = \frac{1}{2}k'(x^2 + y^2 + z^2)$. (*Isotrópico* significa que la constante de fuerza k' es la misma en las tres direcciones de las coordenadas). *a*) Demuestre que para esta energía potencial, una solución de la ecuación (41.5) está dada por $\psi = \psi_{n_x}(x)\psi_{n_y}(y)\psi_{n_z}(z)$. En esta expresión, $\psi_{n_x}(x)$ es una solución a la ecuación del oscilador armónico unidimensional de Shrödinger, ecuación (40.44), con energía $E_{n_x} = \left(n_x + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega$. Las funciones $\psi_{n_y}(y)$ y $\psi_{n_z}(z)$ son análogas a las funciones de onda unidimensionales en las direcciones y y z. Calcule la energía asociada con esta ψ. *b*) A partir de los resultados del inciso *a*), ¿cuáles son las energías del nivel base y del primer nivel excitado del oscilador isotrópico tridimensional? *c*) Demuestre que solo hay un estado (un conjunto de números cuánticos n_x, n_y y n_z) para el nivel base, pero tres estados para el primer nivel excitado.

41.45 •• PA CALC **Oscilador armónico anisotrópico tridimensional.** Un oscilador tiene la función de energía potencial $U(x, y, z) = \frac{1}{2}k_1'(x^2 + y^2) + \frac{1}{2}k_2'z^2$, donde $k_1' > k_2'$. Este oscilador se llama *anisotrópico* porque la constante de fuerza no es la misma en las tres direcciones de las coordenadas. *a*) Obtenga una expresión general para los niveles de energía del oscilador (véase el problema 41.44). *b*) A partir de los

resultados del inciso *a*), ¿cuáles son las energías del nivel base y del primer nivel excitado del oscilador? *c*) ¿Cuántos estados (conjuntos diferentes de números cuánticos n_x, n_y y n_z) existen para el nivel base y para el primer nivel excitado? Compare con el inciso *c*) del problema 41.44.

41.46 •• Un electrón de hidrógeno se encuentra en el estado 5*f*. Calcule el valor máximo posible de la componente *z* de su momento angular. *b*) Demuestre que para el electrón del inciso *a*) las componentes *x* y *y* correspondientes de su momento angular satisfacen la ecuación $\sqrt{L_x^2 + L_y^2} = \hbar\sqrt{3}$.

41.47 •• *a*) Demuestre que la cantidad total de estados atómicos (incluyendo estados con espín distinto) en una capa de número cuántico principal *n* es $2n^2$. [*Sugerencia:* La suma de los *N* primeros enteros $1 + 2 + 3 + \cdots + N$ es igual a $N(N+1)/2$]. *b*) ¿Qué capa tiene 50 estados?

41.48 •• ¿Cuál es la energía mínima posible (en electrón volts) de un electrón en un átomo de hidrógeno si su momento angular orbital es $\sqrt{12}\hbar$? *b*) ¿Cuáles son los valores máximo y mínimo de la componente *z* del momento angular orbital (en términos de $\hbar$) para el electrón del inciso *a*)? *c*) ¿Cuáles son los valores máximo y mínimo del momento angular de espín (en términos de $\hbar$) para el electrón del inciso *a*)? *d*) ¿Cuáles son los valores máximo y mínimo del momento angular orbital (en términos de $\hbar$) para un electrón en la capa *M* del hidrógeno?

41.49 • Considere un electrón de hidrógeno que tiene −0.5440 eV de energía total. *a*) ¿Cuáles son los valores posibles de su momento angular orbital (en términos de $\hbar$)? *b*) ¿Qué longitud de onda de la luz haría excitar este electrón a la siguiente capa superior? ¿Tal fotón sería visible para los seres humanos?

41.50 • *a*) Muestre todos los estados distintos para un electrón en la capa *N* del hidrógeno. Incluya los cuatro números cuánticos. *b*) Para un electrón *f* en la capa *N*, ¿cuáles son el momento angular orbital máximo posible y el máximo valor positivo posible para la componente de este momento angular en cualquier dirección elegida (el eje *z*)? ¿Cuál es la magnitud de su momento angular de espín? Exprese tales cantidades en unidades de $\hbar$. *c*) Para el electrón del estado *d* de la capa *N*, ¿cuáles son los ángulos máximo y mínimo entre su vector momento angular y cualquier dirección elegida (el eje *z*)? *d*) ¿Cuál es el valor máximo del momento angular orbital para un electrón *f* de la capa *M*?

41.51 • *a*) La energía de un electrón en el estado 4*s* del sodio es −1.947 eV. ¿Cuál es la carga neta efectiva del núcleo "vista" por este electrón? En promedio, ¿cuántos electrones apantallan el núcleo? *b*) Para un electrón exterior en el estado 4*p* del potasio, en promedio, 17.2 electrones internos apantallan el núcleo. **i.** ¿Cuál es la carga neta efectiva del núcleo "vista" por este electrón exterior? **ii.** ¿Cuál es la energía de este electrón exterior?

41.52 • **CALC** Para un átomo de hidrógeno, la probabilidad $P(r)$ de encontrar al electrón dentro de un cascarón esférico de radio interior *r* y radio exterior $r + dr$ está dada por la ecuación (41.25). Para un átomo de hidrógeno en el estado base 1*s*, ¿con qué valor de *r*, $P(r)$ tiene su valor máximo? ¿Cómo se compara su resultado con la distancia entre el electrón y el núcleo, para el estado $n = 1$ en el modelo de Bohr (ecuación 41.26)?

41.53 •• **CALC** Considere un átomo de hidrógeno en el estado 1*s*. *a*) ¿Para qué valor de *r*, la energía potencial $U(r)$ es igual a la energía total *E*? Exprese su respuesta en función de *a*. Este valor de *r* se llama *punto de retorno clásico*, ya que es donde una partícula newtoniana detendría su movimiento e invertiría su dirección. *b*) Para *r* mayor que el punto de retorno clásico, $U(r) > E$. Clásicamente, la partícula no se encuentra en esta región, porque la energía cinética no puede ser negativa. Calcule la probabilidad de que el electrón se encuentre en esta región clásicamente prohibida.

41.54 • **PA** **Átomos de Rydberg.** Los *átomos de Rydberg* son aquellos cuyo electrón externo se encuentra en un estado excitado, con un número cuántico principal *muy* grande. Se han producido en el laboratorio y se han detectado en el espacio interestelar. *a*) ¿Por qué todos los átomos neutros de Rydberg con el mismo valor de *n* tienen en esencia la misma energía de ionización, independiente de la cantidad total de electrones que tenga el átomo? *b*) ¿Cuál es la energía de ionización de un átomo de Rydberg con un número cuántico principal de 350? ¿Cuál es el radio, en el modelo de Bohr, de la órbita del electrón de Rydberg? *c*) Repita el inciso *b*) para $n = 650$.

41.55 ••• **CALC** La función de onda para un átomo de hidrógeno en el estado 2*s* es

$$\psi_{2s}(r) = \frac{1}{\sqrt{32\pi a^3}}\left(2 - \frac{r}{a}\right)e^{-r/2a}$$

a) Compruebe que esta función está normalizada. *b*) En el modelo de Bohr, la distancia entre el electrón y el núcleo en el estado $n = 2$ es exactamente 4*a*. Calcule la probabilidad de que un electrón en el estado 2*s* se encuentre a una distancia menor que 4*a* del núcleo.

41.56 •• **CALC** La función de onda normalizada para un átomo de hidrógeno en el estado 2*s* aparece en el problema 41.55. *a*) Para un átomo de hidrógeno en el estado 2*s*, ¿para qué valor de *r* es máxima $P(r)$? ¿Cómo se compara su resultado con 4*a*, la distancia entre el electrón y el núcleo en el estado $n = 2$ del modelo de Bohr? *b*) ¿A qué valor de *r* (distinto de $r = 0$ o $r = \infty$), $P(r)$ es igual a cero, de manera que la probabilidad para que el electrón se encuentre a esa distancia del núcleo es cero? Compare su resultado con la figura 41.9.

41.57 •• *a*) Para un estado excitado del hidrógeno, demuestre que el ángulo mínimo que puede formar el vector momento angular $\vec{L}$ con el eje *z* es

$$(\theta_L)_{\text{mín}} = \arccos\left(\frac{n-1}{\sqrt{n(n-1)}}\right)$$

b) ¿Cuál es la ecuación correspondiente para $(\theta_L)_{\text{máx}}$, el mayor ángulo posible entre $\vec{L}$ y el eje *z*?

41.58 •• *a*) Si se conoce el valor de L_z, no podemos conocer L_x ni L_y con precisión. Pero sí podemos conocer el valor de la cantidad $\sqrt{L_x^2 + L_y^2}$. Deduzca una ecuación para esta cantidad, en función de *l*, m_l y $\hbar$. *b*) ¿Qué significado tiene $\sqrt{L_x^2 + L_y^2}$? *c*) Para un estado de momento angular orbital distinto de cero, determine los valores máximo y mínimo de $\sqrt{L_x^2 + L_y^2}$. Explique sus resultados.

41.59 •• **CALC** La función de onda radial normalizada para el estado 2*p* del átomo de hidrógeno es $R_{2p} = \left(1/\sqrt{24a^5}\right)re^{-r/2a}$. Después de promediar las variables angulares, la función de probabilidad radial es $P(r)\,dr = (R_{2p})^2 r^2\,dr$. ¿Para qué valor de *r* es máxima $P(r)$ para el estado 2*p*? Compare sus resultados con el radio del estado $n = 2$ en el modelo de Bohr.

41.60 •• **PA** **Experimento de Stern-Gerlach.** En un experimento de Stern-Gerlach, la fuerza deflectora sobre el átomo es $F_z = -\mu_z(dB_z/dz)$, donde μ_z está determinada por la ecuación (41.40), y dB_z/dz es el gradiente del campo magnético. En determinado experimento, la región del campo magnético tiene 50.0 cm de longitud; suponga que el gradiente del campo magnético es constante en esta región. Un haz de átomos de plata entra al campo magnético con una rapidez de 525 m/s. ¿Qué valor de dB_z/dz se requiere para dar una separación de 1.0 mm entre las dos componentes de espín, conforme salen del campo? (*Nota:* El momento magnético dipolar de la plata es igual que el del hidrógeno, ya que su electrón de valencia se encuentra en un estado con $l = 0$).

41.61 • Considere una transición de un estado 3*d* a uno 2*p* del hidrógeno, en un campo magnético externo. Suponga que se pueden

ignorar los efectos del espín del electrón (lo cual en realidad no es el caso), para que el campo magnético solo interactúe con el momento angular orbital. Identifique cada transición permitida con los valores m_l de los estados inicial y final. Para cada una de esas transiciones permitidas, determine el corrimiento de la energía de transición con respecto al valor cero del campo, y demuestre que hay tres energías de transición distintas.

41.62 •• Un átomo en un estado $3d$ emite un fotón con longitud de onda de 475.082 nm, cuando decae a un estado $2p$. *a*) ¿Cuál es la energía (en electrón volts) del fotón emitido en esta transición? *b*) Use las reglas de selección descritas en la sección 41.4, para calcular las transiciones permitidas si el átomo está ahora en un campo magnético externo de 3.500 T. Ignore los efectos del espín del electrón. *c*) Para el caso del inciso *b*), si la energía del estado $3d$ era originalmente -8.50000 eV sin campo magnético presente, ¿cuáles serán las energías de los estados en los que se desdobla en el campo magnético? *d*) ¿Cuáles son las longitudes de onda permitidas de la luz emitida durante la transición en el inciso *b*)?

41.63 •• **CALC** **Análisis espectral.** Al estudiar el espectro de una nube gaseosa en el espacio, una astrónoma aumenta la línea espectral que resulta de una transición de un estado p a un estado s. Ella encuentra que la línea a 575.050 nm en realidad se ha desdoblado en tres líneas, con líneas adyacentes separadas 0.0462 nm, lo que indica que el gas está en un campo magnético externo. (Desprecie los efectos debidos al espín del electrón). ¿Cuál es la intensidad del campo magnético exterior?

41.64 •• Un átomo de hidrógeno efectúa una transición de un estado $n = 3$ a uno $n = 2$ (la línea H_α de Balmer) mientras está en un campo magnético de dirección $+z$ y magnitud 1.40 T. *a*) Si el número cuántico magnético es $m_l = 2$ en el estado inicial ($n = 3$) y $m_l = 1$ en el estado final ($n = 2$), ¿de cuánto es el corrimiento de cada nivel de energía con respecto al valor de campo cero? *b*) ¿De cuánto es el corrimiento en la longitud de onda de la línea H_α con respecto al valor de campo cero? ¿La longitud de onda aumenta o disminuye? No tome en cuenta el efecto del espín del electrón. [*Sugerencia:* Use el resultado del problema 39.86*c*)].

41.65 • **PA** Una gran cantidad de átomos de hidrógeno en los estados $1s$ se coloca en un campo magnético externo que tiene la dirección $+z$. Suponga que los átomos están en equilibrio térmico a la temperatura ambiente, $T = 300$ K. De acuerdo con la distribución de Maxwell-Boltzmann (véase la sección 39.4), ¿cuál es el cociente entre la cantidad de átomos en el estado $m_s = \frac{1}{2}$ y la cantidad en $m_s = -\frac{1}{2}$ cuando la magnitud del campo magnético es *a*) 5.00×10^{-5} T (más o menos el campo magnético de la Tierra); *b*) 0.500 T; *c*) 5.00 T?

41.66 •• **Campo magnético efectivo.** El electrón de un átomo de hidrógeno se encuentra en el estado $2p$. En un modelo sencillo del átomo, suponga que el electrón describe un círculo en torno al protón, en una órbita de radio r igual al radio del modelo de Bohr para $n = 2$. Suponga que la rapidez v del electrón en órbita se puede calcular haciendo $L = mvr$, y suponiendo que L tiene el valor mecánico-cuántico de un estado $2p$. En el marco de referencia del electrón, el protón gira en órbita con radio r y rapidez v. Modele al protón en órbita como una espira circular de corriente, y calcule el campo magnético que produce en el lugar del electrón.

41.67 •• **Universo extraño.** En otro universo, el electrón es una partícula de espín $\frac{3}{2}$ en lugar de $\frac{1}{2}$ pero el resto de la física es igual que la de nuestro universo. En ese universo, *a*) ¿cuáles son los números atómicos de los dos gases inertes más ligeros? *b*) ¿Cuál es la configuración electrónica de estado base del sodio?

41.68 • Para un ion con carga nuclear Z y un solo electrón, la energía potencial eléctrica es $-Ze^2/4\pi\epsilon_0 r$ y la ecuación de las energías para los estados y para las funciones de onda normalizadas se obtiene a partir de las del hidrógeno, sustituyendo e^2 por Ze^2. Para el ion N^{+6}, con siete protones y un electrón, *a*) ¿cuál es la energía de estado base en electrón volts? *b*) ¿Cuál es la energía de ionización, la necesaria para sacar el electrón del ion N^{+6}, si inicialmente se encuentra en el estado base? *c*) Cuál es la distancia a [definida para el hidrógeno por la ecuación (41.26)] para este ion? *d*) ¿Cuál es la longitud de onda del fotón emitido cuando el ion N^{+6} hace una transición del estado $n = 2$ al estado base con $n = 1$?

41.69 •• Un átomo de hidrógeno en un estado con $n = 2$, $l = 1$, $m_l = -1$ emite un fotón al decaer a un estado base con $n = 1$, $l = 0$, $m_l = 0$. *a*) En ausencia de un campo magnético externo, ¿cuál es la longitud de onda de este fotón? *b*) Si el átomo está en un campo magnético en dirección $+z$ y con magnitud de 2.20 T, ¿cuál es el corrimiento de la longitud de onda del fotón, con respecto al valor con campo cero? ¿La longitud de onda aumenta o disminuye con el campo magnético? No tome en cuenta el efecto del espín del electrón. [*Sugerencia:* Use el resultado del problema 39.86*c*)].

41.70 •• Un átomo de litio tiene tres electrones, y la configuración electrónica $^2S_{1/2}$ de estado base es $1s^22s$. El estado excitado $1s^22p$ se desdobla en dos niveles muy cercanos, $^2P_{3/2}$ y $^2P_{1/2}$, por la interacción espín-órbita (véase el ejemplo 41.7, en la sección 41.5). Se emite un fotón de 67.09608 μm de longitud de onda en la transición $^2P_{3/2} \rightarrow {}^2S_{1/2}$ y un fotón en longitud de onda de 67.09761 μm es emitido en la transición $^2P_{1/2} \rightarrow {}^2S_{1/2}$. Calcule el campo magnético efectivo que "ve" el electrón en el estado $1s^22p$ del átomo de litio. ¿Cómo se compara su resultado con el del nivel $3p$ del sodio, que se determinó en el ejemplo 41.7?

41.71 • Estime las longitudes de onda mínima y máxima de los rayos x característicos emitidos por *a*) vanadio ($Z = 23$), *b*) renio ($Z = 45$). Describa las aproximaciones que haya hecho.

41.72 •• **PA** **Resonancia del espín del electrón.** Los electrones en el más bajo de dos estados de espín, en un campo magnético, pueden absorber un fotón de la frecuencia adecuada y pasar al estado más alto. *a*) Calcule la magnitud B del campo magnético necesaria para esta transición en un átomo de hidrógeno, con $n = 1$ y $l = 0$, que se va a inducir con microondas de longitud de onda λ. *b*) Calcule el valor de B para una longitud de onda de 3.50 cm.

PROBLEMAS DE DESAFÍO

41.73 ••• Cada uno de $2N$ electrones (de masa m) está en libertad de moverse a lo largo del eje x. La función de energía potencial para cada electrón es $U(x) = \frac{1}{2}k'x^2$, donde k' es una constante positiva. Las interacciones eléctrica y magnética entre los electrones se pueden pasar por alto. Use el principio de exclusión para demostrar que la energía mínima del sistema de $2N$ electrones es $\hbar N^2\sqrt{k'/m}$. (*Sugerencia:* Véase la sección 40.5, y la sugerencia para resolver el problema 41.47).

41.74 ••• **PA** Un modelo sencillo del átomo de helio tiene dos electrones, cada uno con masa m, que se mueven en torno al núcleo (de carga $+2e$) en la misma órbita circular. Cada electrón tiene un momento angular orbital $\hbar$ (esto es, la órbita es la de Bohr con radio mínimo), y los dos electrones siempre están en los lados opuestos del núcleo. Ignore los efectos del espín. *a*) Determine el radio de la órbita, y la rapidez orbital de cada electrón. [*Sugerencia:* Siga el procedimiento de la sección 39.3 para deducir las ecuaciones (39.8) y (39.9). Cada electrón siente una fuerza de atracción hacia el núcleo, y una fuerza de repulsión hacia el otro electrón]. *b*) ¿Cuál es la energía cinética total de los electrones? *c*) ¿Cuál es la energía potencial del sistema (el núcleo y los dos electrones)? *d*) En este modelo, ¿cuánta energía se necesita para llevar los dos electrones al infinito? ¿Cómo se compara con el valor experimental de 79.0 eV?

41.75 ••• **CALC** Repita el cálculo del problema 41.53 para un ion de un electrón con carga nuclear Z. (Véase el problema 41.68). ¿Cómo depende de Z la probabilidad de que el electrón se encuentre en la región clásicamente prohibida?

Respuestas

Pregunta inicial del capítulo 

El helio es inerte porque tiene llena la capa K; en tanto que el litio es muy reactivo porque su tercer electrón está débilmente ligado en una capa L. Véase la sección 41.6 para más detalles.

Preguntas de las secciones

Evalúe su comprensión

41.1 Respuesta: iv. Si $U(x, y, z) = 0$ en cierta región del espacio, podemos rescribir la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo [ecuación (41.5)] para la región como $\partial^2\psi/\partial x^2 + \partial^2\psi/\partial y^2 + \partial^2\psi/\partial z^2 = (-2mE/\hbar^2)\psi$. Se nos dice que todas las segundas derivadas de $\psi(x, y, z)$ son positivas en esta región, de modo que el lado izquierdo de esta ecuación es positivo. Por lo tanto, el lado derecho $(-2mE/\hbar^2)\psi$ también debe ser positivo. Como $E > 0$, la cantidad $-2mE/\hbar^2$ es negativa, y entonces $\psi(x, y, z)$ debe ser negativa.

41.2 Respuesta: iv, ii, i y iii (empate) La ecuación (41.16) indica que los niveles de energía en una caja cúbica son proporcionales a la cantidad $n_X^2 + n_Y^2 + n_Z^2$. Así, clasificar con base en esta cantidad es lo mismo que clasificar con base en la energía. Para los cuatro casos que nos dan, tenemos **i.** $n_X^2 + n_Y^2 + n_Z^2 = 2^2 + 3^2 + 2^2 = 17$; **ii.** $n_X^2 + n_Y^2 + n_Z^2 = 4^2 + 1^2 + 1^2 = 18$; **iii.** $n_X^2 + n_Y^2 + n_Z^2 = 2^2 + 2^2 + 2^2 = 17$, y **iv.** $n_X^2 + n_Y^2 + n_Z^2 = 1^2 + 3^2 + 3^2 = 19$. Los estados $(n_X, n_Y, n_Z) = (2, 3, 2)$ y $(n_X, n_Y, n_Z) = (2, 2, 3)$ tienen la misma energía (están degenerados).

41.3 Respuesta: ii y iii (empate), i. Un electrón en un estado con un número cuántico principal n es más probable que se encuentre en $r = n^2a$. Este resultado es independiente de los valores de los números cuánticos l y m_l. Por consiguiente, un electrón con $n = 2$ (que muy probablemente se encontrará en $r = 4a$) es más probable que se encuentre cerca de $r = 5a$ que un electrón con $n = 1$ (que probablemente se encontrará en $r = a$).

41.4 Respuesta: no Todo lo que importa es la componente del momento magnético orbital del electrón a lo largo de la dirección de $\vec{B}$. A esta cantidad se le llama μ_z en la ecuación (41.32), porque *determinamos* que el eje positivo de z tenga la dirección de $\vec{B}$. En realidad, los nombres de los ejes son arbitrarios por completo.

41.5 Respuesta: iv. Para que el momento magnético esté perfectamente alineado con la dirección z, la componente z del vector espín $\vec{S}$ debería tener el mismo valor absoluto que $\vec{S}$. No obstante, los valores posibles de S_z son $\pm\frac{1}{2}\hbar$ [ecuación (41.37)], mientras que la magnitud del vector espín es $S = \sqrt{\frac{3}{4}}\hbar$ [ecuación (41.38)]. Por lo tanto, $\vec{S}$ nunca puede estar perfectamente alineado con cualquier dirección del espacio.

41.6 Respuesta: más difícil Si no hubiera principio de exclusión, los 11 electrones del átomo de sodio estarían en el nivel de energía mínima (nivel $1s$) y la configuración sería $1s^{11}$. En consecuencia, sería más difícil quitar el primer electrón. (En un átomo de sodio real, el electrón de valencia se encuentra en un estado $3s$ apantallado, que tiene una energía comparativamente alta).

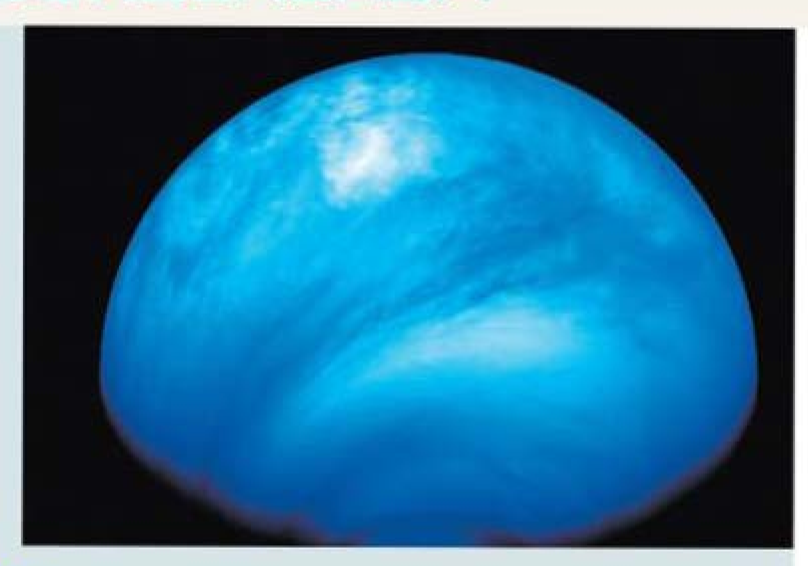
41.7 Respuesta: iv. Un borde de absorción aparece cuando la energía del fotón es lo suficientemente alta como para remover un electrón en un nivel de energía dado del átomo. En una muestra de hidrógeno a alta temperatura, esperamos encontrar átomos cuyo electrón esté en el nivel base ($n = 1$), el primer nivel excitado ($n = 2$) y el segundo nivel excitado ($n = 3$). De acuerdo con la ecuación (41.21), estos niveles tienen energías $E_n = (-13.60 \text{ eV})/n^2 = -13.60$ eV, -3.40 eV y -1.5 eV (véase la figura 38.9*b*).

Problema práctico

Respuestas: ***a)*** 2.37×10^{-10} m
b) Valores de (n_X, n_Y, n_Z, m_s) para los 22 electrones: $(1, 1, 1, +\frac{1}{2})$, $(1, 1, 1, -\frac{1}{2})$, $(2, 1, 1, +\frac{1}{2})$, $(2, 1, 1, -\frac{1}{2})$, $(1, 2, 1, +\frac{1}{2})$, $(1, 2, 1, -\frac{1}{2})$, $(1, 1, 2, +\frac{1}{2})$, $(1, 1, 2, -\frac{1}{2})$, $(2, 2, 1, +\frac{1}{2})$, $(2, 2, 1, -\frac{1}{2})$, $(2, 1, 2, +\frac{1}{2})$, $(2, 1, 2, -\frac{1}{2})$, $(1, 2, 2, +\frac{1}{2})$, $(1, 2, 2, -\frac{1}{2})$, $(3, 1, 1, +\frac{1}{2})$, $(3, 1, 1, -\frac{1}{2})$, $(1, 3, 1, +\frac{1}{2})$, $(1, 3, 1, -\frac{1}{2})$, $(1, 1, 3, +\frac{1}{2})$, $(1, 1, 3, -\frac{1}{2})$, $(2, 2, 2, +\frac{1}{2})$, $(2, 2, 2, -\frac{1}{2})$
c) 20.1 eV, 40.2 eV, 60.3 eV, 73.7 eV y 80.4 eV
d) 60.3 eV contra 4.52×10^3 eV

MOLÉCULAS Y MATERIA CONDENSADA





? Esta imagen en color falso de Venus muestra su misteriosa atmósfera nublada y densa, la cual contiene 96.5% de dióxido de carbono (CO_2). La atmósfera eleva la temperatura de la superficie de Venus a 735 K (462°C = 863°F), más caliente incluso que Mercurio, el planeta más cercano al Sol. ¿Qué propiedad de las moléculas de CO_2 las convierte en un medio poderoso para elevar la temperatura de Venus?

OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

Al estudiar este capítulo, usted aprenderá:

- Los diversos tipos de enlaces que mantienen unidos a los átomos.
- Cómo la dinámica de rotación y vibración de las moléculas se manifiesta en los espectros moleculares.
- Cómo y por qué los átomos forman estructuras cristalinas.
- Como utilizar el concepto de banda de energía para explicar las propiedades eléctricas de los sólidos.
- Un modelo sencillo de los metales que explica muchas de sus propiedades físicas.
- Cómo las características de un semiconductor pueden transformarse radicalmente al agregarle pequeñas cantidades de una impureza.
- Algunas de las aplicaciones tecnológicas de los dispositivos semiconductores.
- Por qué ciertos materiales se vuelven superconductores a baja temperatura.

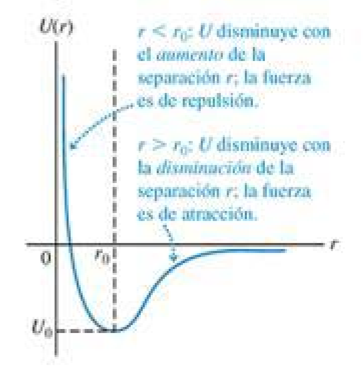
En el capítulo 41 analizamos la estructura y las propiedades de los átomos aislados. No obstante, dichos átomos son una excepción, porque usualmente se encuentran combinados formando moléculas o estructuras más grandes que conocemos como materia condensada (líquida o sólida). Las fuerzas de atracción entre los átomos, conocidas como enlaces moleculares, son las que provocan su combinación. En este capítulo estudiaremos varias clases de enlaces, así como los niveles de energía y los espectros relacionados con las moléculas diatómicas. Veremos que así como los átomos tienen energías cuantizadas, determinadas por el estado mecánico-cuántico de sus electrones, también las moléculas tienen energías cuantizadas, determinadas por sus estados de rotación y vibración.

Los mismos principios físicos de los enlaces moleculares se aplican de igual manera en el estudio de la materia condensada, en la cual se presentan varios tipos de enlaces. Investigaremos el concepto de bandas de energía y veremos cómo ayudan a explicar las propiedades de los sólidos. A continuación, examinaremos con más detalle las propiedades de un tipo especial de sólidos conocidos como semiconductores. En los receptores de radio, los televisores, las calculadoras de bolsillo y las computadoras actuales se usan los semiconductores, los cuales revolucionaron totalmente el campo de la electrónica durante la mitad del siglo pasado.

42.1 Tipos de enlaces moleculares

Podemos aprovechar el análisis de la estructura atómica del capítulo 41 como punto de partida para investigar la naturaleza de los *enlaces moleculares*, es decir, las interacciones que mantienen unidos a los átomos para formar estructuras estables, como moléculas y sólidos.

42.1 Cuando la separación r entre dos iones con carga opuesta es grande, la energía potencial $U(r)$ es proporcional a $1/r$ como en las cargas puntuales, y la fuerza es de atracción. A medida que r disminuye, las nubes de carga de los dos átomos se traslapan y la fuerza de atracción es menor. Si r es menor que la separación de equilibrio r_0, la fuerza es de repulsión.



Enlaces iónicos

Un **enlace iónico** es la interacción entre átomos *ionizados* con carga opuesta. El ejemplo más conocido es el cloruro de sodio (NaCl), donde el átomo de sodio cede su único electrón $3s$ al átomo de cloro, llenando su vacante en la subcapa $3p$.

Revisemos el balance de energía en esta operación. Para remover el electrón $3s$ de un átomo neutro de sodio se requieren 5.138 eV de energía; esto se conoce como *energía de ionización* del sodio. El átomo neutro de cloro puede atraer un electrón adicional en la vacante de la subcapa $3p$, donde es apantallado en forma incompleta por los demás electrones y, en consecuencia, es atraído hacia el núcleo. Este estado tiene una energía de 3.613 eV menor que un átomo neutro de cloro, y un electrón libre distante; 3.613 eV es la magnitud de la *afinidad electrónica* del cloro. De esta manera, para separar los iones de Na^+ y Cl^- se requiere una inversión de tan solo 5.138 eV − 3.613 eV = 1.525 eV. Cuando los dos iones con carga opuesta se acercan debido a su atracción, la magnitud de su energía potencial negativa se determina por la cercanía a la que pueden llegar. A la vez, esa cercanía está limitada por el principio de exclusión, que prohíbe demasiado traslape de las nubes de electrones de los dos iones. Al disminuir la distancia, el principio de exclusión distorsiona las nubes de carga, por lo que los iones ya no interaccionan como cargas puntuales, y la interacción termina por volverse repulsiva (figura 42.1).

El mínimo de la energía potencial eléctrica del NaCl es −5.7 eV a una separación de 0.24 nm. La energía liberada durante la formación de los iones, y en su acercamiento a la posición de equilibrio, de 0.24 nm, es 5.7 eV − 1.525 eV = 4.2 eV. Así, si se ignora la energía cinética de los iones, 4.2 eV es la *energía de enlace* de la molécula de NaCl; la misma que se necesita para disociar la molécula en átomos neutros separados.

Los enlaces iónicos pueden incluir más de un electrón por átomo. Por ejemplo, los elementos alcalinotérreos forman compuestos iónicos en los cuales un átomo pierde *dos* electrones; un caso es el cloruro de magnesio, o $Mg^{2+}(Cl^-)_2$. Los enlaces iónicos que implican la pérdida de más de dos electrones son relativamente raros. En su lugar, entra en acción un diferente tipo de enlace, el enlace *covalente*. En seguida estudiaremos este tipo de enlace.

Ejemplo 42.1 Energía potencial eléctrica de la molécula de NaCl



Calcule la energía potencial eléctrica de los iones Na^+ y Cl^- separados 0.24 nm, considerando los iones como cargas puntuales.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: La ecuación (23.9) de la sección 23.1 nos indica que la energía potencial eléctrica de dos cargas puntuales q y q_0, separadas por una distancia r, es $U = qq_0/4\pi\epsilon_0 r$.

EJECUTAR: Tenemos que $q = +e$ (para el Na^+) y $q_0 = -e$ (para el Cl^-), y $r = 0.24\text{ nm} = 0.24 \times 10^{-9}$ m. De acuerdo con la ecuación (23.9),

$$U = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^2}{r_0} = -(9.0 \times 10^9\ \text{N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2)\frac{(1.6 \times 10^{-19}\ \text{C})^2}{0.24 \times 10^{-9}\ \text{m}}$$
$$= -9.6 \times 10^{-19}\text{J} = -6.0\ \text{eV}$$

EVALUAR: Este resultado está muy de acuerdo con el valor observado de −5.7 eV. La diferencia se debe a que en la distancia de equilibrio de 0.24 nm, las regiones exteriores de las nubes de electrones se traslapan, por lo que los iones no se comportan exactamente como cargas puntuales.

MasteringPHYSICS
PhET: Double Wells and Covalent Bonds

Enlaces covalentes

El **enlace covalente** se caracteriza por una participación más equitativa de los dos átomos, a diferencia de lo que sucede en el enlace iónico. El enlace covalente más sencillo se encuentra en la molécula de hidrógeno, que es una estructura que contiene dos protones y dos electrones. Al acercarse los átomos separados (figura 42.2*a*), las funciones de onda de los electrones se distorsionan y se concentran más en la región entre los dos protones (figura 42.2*b*). La atracción total de los electrones hacia cada protón balancea la repulsión de los dos protones y los dos electrones.

La interacción atractiva se produce entonces por un *par* de electrones; cada átomo contribuye con uno, y las nubes de carga se concentran principalmente en la región entre los dos átomos. La energía del enlace covalente en la molécula de hidrógeno H_2 es −4.48 eV.

Como vimos en el capítulo 41, el principio de exclusión permite que dos electrones ocupen la misma región del espacio (esto es, que estén en el mismo estado cuántico espacial), solo cuando sus espines son opuestos. Cuando estos son paralelos, el principio de exclusión prohíbe el estado molecular que sería más favorable desde el punto de vista de energía (con ambos electrones en la región entre los átomos). Los espines opuestos son requisito esencial para que se forme un enlace covalente, y no pueden participar más de dos electrones en ese enlace.

Sin embargo, un átomo con varios electrones en su capa más externa puede formar varios enlaces covalentes. El enlace de los átomos de carbono e hidrógeno, de importancia central en la química orgánica, es un ejemplo. En la molécula de *metano* (CH_4), el átomo de carbono está en el centro de un tetraedro regular, con un átomo de hidrógeno en cada vértice. El átomo de carbono tiene cuatro electrones en su capa *L*, y cada uno de ellos forma un enlace covalente con uno de los cuatro átomos de hidrógeno (figura 42.3). En moléculas orgánicas más complejas se dan patrones semejantes.

Debido al papel que desempeña el principio de exclusión, los enlaces covalentes son muy direccionales. En la molécula de metano, la función de onda de cada uno de los cuatro electrones de valencia del carbono es una combinación de las funciones de onda 2*s* y 2*p*, que se llama *función de onda híbrida*. La distribución de probabilidad de cada una tiene un lóbulo que sobresale hacia un vértice del tetraedro. Esta configuración simétrica minimiza el traslape de las funciones de onda para los pares de electrones, reduciendo al mínimo su energía potencial de repulsión.

Los enlaces iónicos y covalentes representan dos extremos en la interacción molecular, pero no hay una división definida entre ambos tipos. A menudo, hay una transferencia *parcial* de uno o más electrones, de uno a otro átomo. El resultado es que muchas moléculas que tienen átomos distintos tienen momentos dipolares eléctricos, esto es, una distribución de carga positiva en un extremo y de carga negativa en el otro. Estas moléculas se llaman moléculas *polares*. Las moléculas de agua tienen momentos dipolares eléctricos grandes; son los responsables de la constante dieléctrica excepcionalmente grande del agua en estado líquido (véase las secciones 24.4 y 24.5).

Enlaces de Van der Waals

Los enlaces iónicos y covalentes, con energías de interacción características de 1 a 5 eV, se llaman *enlaces fuertes*. Hay también dos tipos de enlaces más débiles. Uno de ellos es el **enlace de Van der Waals**, que es una interacción entre los momentos dipolares eléctricos de átomos o moléculas; las energías características son de 0.1 eV o menores. El enlace de las moléculas de agua en estado líquido y sólido se debe, en parte, a las interacciones dipolo-dipolo.

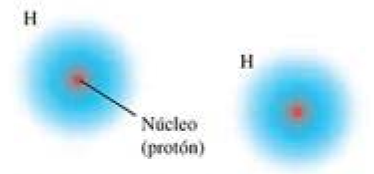
Ningún átomo tiene un momento dipolar eléctrico permanente, así como tampoco lo tienen muchas moléculas. Sin embargo, las distribuciones variables de carga pueden generar momentos dipolares variables, que a la vez pueden inducir momentos dipolares en las estructuras vecinas. En general, la interacción resultante dipolo-dipolo es de atracción, y produce un enlace débil entre átomos o moléculas. La energía potencial de interacción disminuye con mucha rapidez al aumentar la distancia *r* entre las moléculas, por lo general en relación de $1/r^6$. La licuefacción y la solidificación de los gases inertes, y de moléculas como H_2, O_2 y N_2, se deben a interacciones de Van der Waals entre dipolos inducidos. No se necesita mucha energía térmica de agitación para romper estos enlaces débiles, por lo que muchas sustancias se encuentran normalmente en los estados sólido y líquido tan solo a temperaturas muy bajas.

Puentes de hidrógeno

En otra clase de enlace débil, el **puente de hidrógeno**, un protón (ion H^+) se interpone entre dos átomos, los polariza y los atrae por medio de los dipolos inducidos. Este enlace es exclusivo de los compuestos que contienen hidrógeno, porque solo el hidrógeno tiene un estado simplemente ionizado sin nube de electrones remanentes; el ion de hidrógeno es un protón, mucho menor que cualquier átomo simplemente ionizado. La energía de enlace suele ser menor de 0.5 eV. El puente de hidrógeno es el responsable del enlace cruzado de las moléculas orgánicas de cadenas grandes como del polietileno (usado en bolsas de plástico). Los puentes de hidrógeno también desempeñan un papel importante en la estructura del hielo.

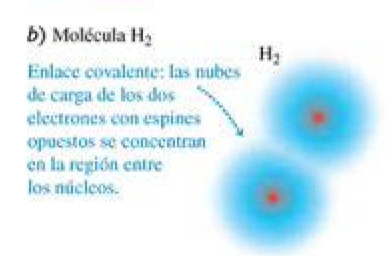
42.2 Enlace covalente en una molécula de hidrógeno.

a) Átomos separados de hidrógeno

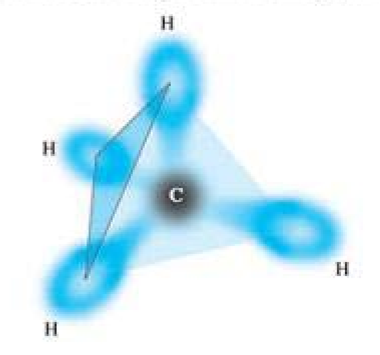


Por lo general, los átomos de hidrógeno individuales están muy separados y no interactúan.

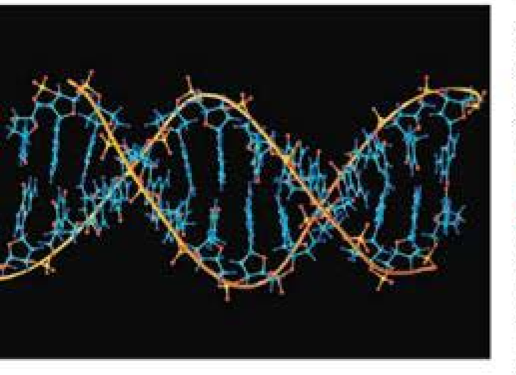
b) Molécula H_2



42.3 Esquema de la molécula de metano (CH_4). El átomo de carbono está en el centro de un tetraedro regular, y forma cuatro enlaces covalentes con los átomos de hidrógeno en los vértices. Cada enlace covalente incluye dos electrones con espines opuestos, que forman una nube de carga concentrada entre el átomo de carbono y un átomo de hidrógeno.



Aplicación Cremallera molecular
Una molécula de ADN funciona como una cremallera torcida. Cada uno de los dos lados (hilos) de la "cremallera" forma una columna vertebral exterior con "dientes" de nucleótidos hacia adentro; los enlaces del hidrógeno entre los dientes "cierran" la cremallera. Los enlaces covalentes que mantienen juntos a los átomos de cada hilo son fuertes, mientras que los puentes del hidrógeno son relativamente débiles, de modo que la maquinaria bioquímica de la célula puede separar fácilmente los hilos para leer o copiar.



Todos estos tipos de enlace mantienen unidos los átomos que forman *sólidos* y moléculas. De hecho, un sólido es, en muchos aspectos, una molécula gigante. Aún hay otro tipo de interacción, el *enlace metálico*, que entra en acción en la estructura de los sólidos metálicos. Regresaremos a este tema en la sección 42.3.

Evalúe su comprensión de la sección 42.1 Si los electrones cumplieran el principio de exclusión, pero *no* tuvieran espín, ¿cuántos electrones podrían participar en un enlace covalente? **i.** Uno; **ii.** dos; **iii.** tres; **iv.** más de tres.



42.2 Espectros moleculares

Las moléculas tienen niveles de energía que están relacionados con el movimiento giratorio de una molécula como un todo y con el movimiento vibratorio de los átomos, uno respecto del otro. Así como las transiciones entre niveles de energía en los átomos generan los espectros atómicos, las transiciones entre los niveles rotacional y vibratorio en las moléculas producen *espectros moleculares*.

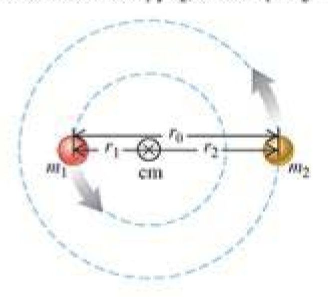
Niveles de energía de rotación

En este análisis nos concentraremos más en las moléculas *diatómicas*, para mantener las explicaciones lo más sencillas posible. En la figura 42.4 se muestra una molécula diatómica como una mancuerna rígida (dos masas puntuales m_1 y m_2 separadas una distancia constante r_0) que pueden *girar* alrededor de ejes que pasan por su centro de masa, perpendicular a la recta que las une. ¿Cuáles son los niveles de energía asociados con este movimiento?

En la sección 10.5 (vol. 1) vimos que cuando un cuerpo rígido gira con rapidez angular ω en torno a un eje perpendicular que pasa por su centro de masa, la magnitud L de su momento angular se define por la ecuación (10.28), $L = I\omega$, donde I es el momento de inercia con respecto a ese eje de simetría. Su energía cinética se determina con la ecuación (9.17), $K = \frac{1}{2}I\omega^2$. Combinando estas dos ecuaciones vemos que $K = L^2/2I$. No hay energía potencial U, por lo que la energía cinética K es igual a la energía mecánica total E:

$$E = \frac{L^2}{2I} \qquad (42.1)$$

42.4 Molécula diatómica modelada como dos masas puntuales m_1 y m_2 separadas una distancia r_0. Las distancias de las masas al centro de masa son r_1 y r_2, siendo $r_1 + r_2 = r_0$.



La energía potencial igual a cero significa que U no depende de la coordenada angular de la molécula. Pero la función U de energía potencial en el átomo de hidrógeno tampoco depende de las coordenadas angulares (véase la sección 41.3). Entonces, las soluciones angulares de la ecuación de Schrödinger para la rotación de un cuerpo rígido son iguales que para el átomo de hidrógeno, y el momento angular se cuantiza de la misma forma. Como en la ecuación (41.21),

$$L = \sqrt{l(l+1)}\hbar \qquad (l = 0, 1, 2, \dots) \qquad (42.2)$$

Combinando las ecuaciones (42.1) y (42.2) obtenemos los *niveles de la energía rotacional*:

$$E_l = l(l+1)\frac{\hbar^2}{2I} \qquad (l = 0, 1, 2, \dots) \qquad \text{(niveles de la energía rotacional, molécula diatómica)} \qquad (42.3)$$

42.5 El nivel fundamental y los cuatro primeros niveles excitados de energía de rotación, para una molécula diatómica. Los niveles no están a la misma distancia.



La figura 42.5 es un diagrama de niveles de energía, que muestra esos niveles rotacionales. El nivel fundamental tiene número cuántico l igual a cero, correspondiente a una cantidad de movimiento angular cero (no hay rotación, por lo que la energía rotacional E es igual a cero). La distancia entre los niveles adyacentes se incrementa al aumentar l.

El momento de inercia I en las ecuaciones (42.1) y (42.3) se puede expresar en función de la *masa reducida* m_r de la molécula:

$$m_r = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \qquad (42.4)$$

La masa reducida fue presentada en la sección 39.3 para adaptar la masa nuclear finita del átomo de hidrógeno. En la figura 42.4, las distancias r_1 y r_2 son las distan-

cias del centro de masa a los núcleos de los átomos. Por definición de centro de masa, $m_1r_1 = m_2r_2$ y en la figura también se ve que $r_0 = r_1 + r_2$. Al despejar r_1 y r_2 de estas ecuaciones,

MasteringPHYSICS
PhET: The Greenhouse Effect

$$r_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} r_0 \qquad r_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} r_0 \qquad (42.5)$$

El momento de inercia es $I = m_1r_1^2 + m_2r_2^2$; sustituyendo la ecuación (42.5), se obtiene

$$I = m_1 \frac{m_2^2}{(m_1 + m_2)^2} r_0^2 + m_2 \frac{m_1^2}{(m_1 + m_2)^2} r_0^2 = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} r_0^2 \quad \text{o}$$

$$I = m_r r_0^2 \qquad \text{(momento de inercia de una molécula diatómica)} \qquad (42.6)$$

La masa reducida nos permite convertir este problema de dos cuerpos a uno equivalente de un cuerpo (una partícula de masa m_r que se mueve en un círculo de radio r_0), como lo hicimos con el átomo de hidrógeno. De hecho, la única diferencia entre este problema y el átomo de hidrógeno es la diferencia en las fuerzas radiales. Para conservar el momento angular, y tomar en cuenta el momento angular del fotón emitido o absorbido, las transiciones permitidas entre estados rotacionales deben satisfacer la misma regla de selección que vimos en la sección 41.4 para las transiciones permitidas entre los estados de un átomo: l debe cambiar exactamente una unidad, es decir, $\Delta l = \pm 1$.



Ejemplo 42.2 Espectro rotacional del monóxido de carbono

Los dos núcleos en la molécula de monóxido de carbono (CO) están separados una distancia de 0.1128 nm. La masa del átomo de carbono más común es 1.993×10^{-26} kg, la masa del átomo de oxígeno más común es 2.656×10^{-26} kg. *a*) Determine las energías de los tres niveles de energía rotacional mínimos del CO. Exprese los resultados en meV (1 meV $= 10^{-3}$ eV). *b*) Calcule la longitud de onda del fotón emitido en la transición del nivel $l = 2$ al nivel $l = 1$.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Este problema utiliza las ideas desarrolladas en esta sección acerca de los niveles de energía rotacional de las moléculas. Nos dan la distancia r_0 entre los átomos y sus masas, m_1 y m_2. Calcularemos la masa reducida m_r usando la ecuación (42.4), el momento de inercia I de la molécula, usando la ecuación (42.6) y las energías E_l usando la ecuación (42.3). La energía E del fotón emitido es igual a la diferencia de energías entre los niveles $l = 2$ y $l = 1$. (Esta transición cumple la regla de selección $\Delta l = \pm 1$, puesto que $\Delta l = 1 - 2 = -1$). Determinaremos la longitud de onda del fotón usando la ecuación $E = hc/\lambda$.

EJECUTAR: *a*) De las ecuaciones (42.4) y (42.6), la masa reducida y el momento de inercia de la molécula de CO son:

$$\begin{aligned} m_r &= \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \\ &= \frac{(1.993 \times 10^{-26}\,\text{kg})(2.656 \times 10^{-26}\,\text{kg})}{(1.993 \times 10^{-26}\,\text{kg}) + (2.656 \times 10^{-26}\,\text{kg})} \\ &= 1.139 \times 10^{-26}\,\text{kg} \\ I &= m_r r_0^2 \\ &= (1.139 \times 10^{-26}\,\text{kg})(0.1128 \times 10^{-9}\,\text{m})^2 \\ &= 1.449 \times 10^{-46}\,\text{kg} \cdot \text{m}^2 \end{aligned}$$

Los niveles rotacionales se calculan con la ecuación (42.3):

$$\begin{aligned} E_l &= l(l+1)\frac{\hbar^2}{2I} = l(l+1)\frac{(1.0546 \times 10^{-34}\,\text{J} \cdot \text{s})^2}{2(1.449 \times 10^{-46}\,\text{kg} \cdot \text{m}^2)} \\ &= l(l+1)(3.838 \times 10^{-23}\,\text{J}) = l(l+1)0.2395\,\text{meV} \end{aligned}$$

(1 meV $= 10^{-3}$ eV). Sustituyendo $l = 0, 1, 2$, obtenemos

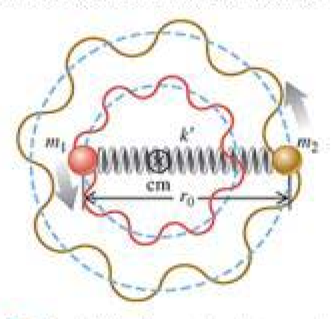
$$E_0 = 0 \qquad E_1 = 0.479\,\text{meV} \qquad E_2 = 1.437\,\text{meV}$$

b) La energía y longitud de onda del fotón son:

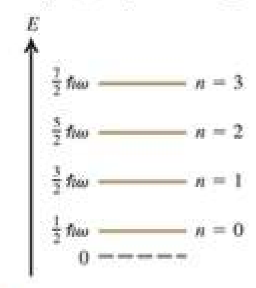
$$\begin{aligned} E &= E_2 - E_1 = 0.958\,\text{meV} \\ \lambda &= \frac{hc}{E} = \frac{(4.136 \times 10^{-15}\,\text{eV} \cdot \text{s})(3.00 \times 10^8\,\text{m/s})}{0.958 \times 10^{-3}\,\text{eV}} \\ &= 1.29 \times 10^{-3}\,\text{m} = 1.29\,\text{mm} \end{aligned}$$

EVALUAR: Las diferencias entre los primeros niveles de energía rotacional del CO son muy pequeñas (más o menos 1 meV $= 10^{-3}$ eV), en comparación con la diferencia entre los niveles atómicos de energía (normalmente algunos eV). Por consiguiente, un fotón emitido por una molécula de CO en una transición del nivel $l = 2$ al nivel $l = 1$ tiene una energía muy baja, y una longitud de onda muy grande en comparación con la luz visible emitida por átomos excitados. Las longitudes de onda de los fotones para transiciones rotacionales en las moléculas se encuentran normalmente en las regiones de microondas y del infrarrojo lejano del espectro.

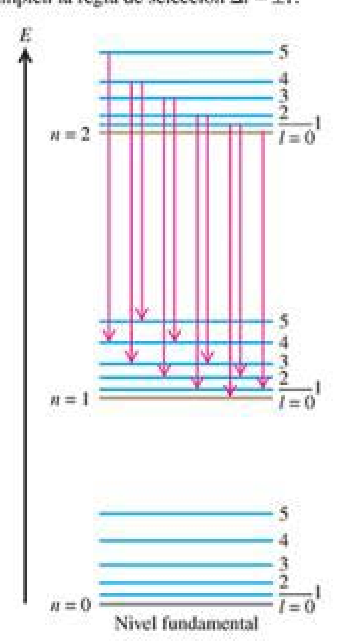
En este ejemplo el dato fue la separación de equilibrio entre los átomos, llamada también la *longitud de enlace*, y se usó para calcular una de las longitudes de onda emitidas por moléculas excitadas de CO. En los experimentos reales, los investigadores trabajan este problema a la inversa: midiendo las emisiones de longitudes de onda de una muestra de moléculas diatómicas, determinan el momento de inercia de la molécula y con ello la longitud del enlace.



42.6 Una molécula diatómica modelada como dos masas puntuales m_1 y m_2, unidas por un resorte con constante de fuerza k'.



42.7 El nivel fundamental y los tres primeros niveles excitados de vibración para una molécula diatómica, suponiendo pequeños desplazamientos desde el equilibrio, de modo que podemos tratar las oscilaciones como armónicas simples. (Compare con la figura 40.25).



42.8 Diagrama de niveles de energías de los niveles vibratorios y rotacionales de una molécula diatómica. Para cada nivel de vibración (n) hay una serie de niveles de rotación (l) más cercanos entre sí. Se muestran varias transiciones que corresponden a una sola banda de espectro. Esas transiciones cumplen la regla de selección $\Delta l = \pm 1$.

Niveles de energía vibratoria

Las moléculas nunca son completamente rígidas. En un modelo más realista de una molécula diatómica, la unión entre los átomos se representa no como una varilla rígida, sino como un resorte (figura 42.6). Entonces, además de girar, los átomos de la molécula pueden *vibrar* con respecto a sus posiciones de equilibrio, a lo largo de la línea que los une. Para oscilaciones pequeñas, se puede suponer que la fuerza de restitución es proporcional al desplazamiento con respecto a la separación r_0 de equilibrio (como un resorte que cumple la ley de Hooke con una constante de fuerza k'), y el sistema es un oscilador armónico. En la sección 40.5 describimos el oscilador armónico mecánico-cuántico. Los niveles de energía están dados por la ecuación (40.46), sustituyendo la masa m por la masa reducida m_r:

$$E_n = \left(n + \tfrac{1}{2}\right)\hbar\omega = \left(n + \tfrac{1}{2}\right)\hbar\sqrt{\frac{k'}{m_r}} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots) \tag{42.7}$$

(niveles de energía vibratoria de una molécula diatómica)

Esto representa una serie de niveles de energías con igual espaciamiento entre ellos, con una energía de separación de

$$\Delta E = \hbar\omega = \hbar\sqrt{\frac{k'}{m_r}} \tag{42.8}$$

La figura 42.7 es un diagrama de niveles de energía, que muestra esos niveles de vibración. Por ejemplo, para la molécula de monóxido de carbono del ejemplo 42.2 el espaciamiento $\hbar\omega$ entre niveles de energía de vibración es de 0.2690 eV. Según la ecuación (42.8), esto corresponde a una constante de fuerza de 1.90×10^3 N/m, la cual pertenece a un resorte bastante flojo. (Para estirar 1.0 cm un resorte macroscópico con este valor de k', solo se requiere una fuerza de 19 N o 4 lb aproximadamente). Las constantes de fuerza para moléculas diatómicas usualmente son de 100 a 200 N/m.

CUIDADO **Esté atento con k, k' y K** Como en la sección 40.5, de nuevo estamos usando k' como constante de fuerza, esta vez para minimizar la confusión con la constante de Boltzmann k, la constante del gas por molécula (introducida en la sección 18.3). Además de las cantidades k y k', también usaremos la unidad de temperatura 1 K = 1 kelvin.

Rotación y vibración combinadas

Los fotones de luz visible tienen energías entre 1.65 eV y 3.26 eV. La diferencia de energía de 0.2690 eV entre los niveles vibratorios del monóxido de carbono corresponden a un fotón de longitud de onda de 4.613 μm, en la región infrarroja del espectro. Esto está más cerca de la región visible que el fotón de la transición rotacional del ejemplo 42.2. En general, las diferencias de energía en la *vibración* molecular son mucho más pequeñas que las que producen los espectros atómicos, pero mucho mayores que las diferencias de energía de la *rotación* molecular.

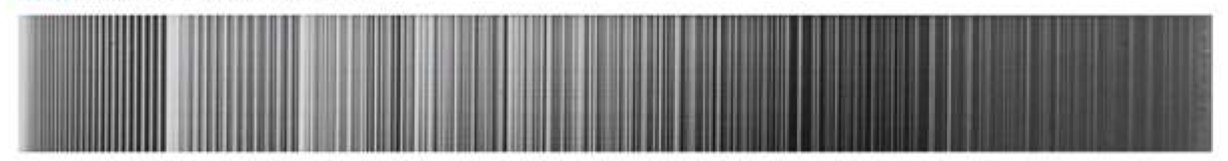
Si se incluyen *tanto* la energía rotacional *como* la vibratoria, los niveles de energía de nuestra molécula diatómica son

$$E_{nl} = l(l+1)\frac{\hbar^2}{2I} + \left(n + \tfrac{1}{2}\right)\hbar\sqrt{\frac{k'}{m_r}} \tag{42.9}$$

El diagrama de nivel de energía se muestra en la figura 42.8. Para cada valor de n hay muchos valores de l, que forman una serie de niveles estrechamente espaciados.

En la figura 42.8 las flechas rojas muestran varias transiciones posibles en las que una molécula pasa de un nivel con $n = 2$ a uno con $n = 1$, emitiendo un fotón. Como se mencionó anteriormente, esta transición debe cumplir la regla de selección $\Delta l = \pm 1$ para conservar el momento angular. Una regla de selección adicional establece que si cambia el nivel vibratorio, debe aumentar el número cuántico vibratorio n en la ecuación (42.9) en 1 ($\Delta n = 1$), si se absorbe un fotón; o disminuir en 1 ($\Delta n = -1$) si se emite un fotón.

42.9 Espectro de banda molecular típico.



Por ejemplo, la figura 42.8 muestra que una molécula en el nivel $n = 2$, $l = 4$ puede emitir un fotón y bajar al nivel $n = 1$, $l = 5$ ($\Delta n = -1$, $\Delta l = +1$), o al nivel $n = 1$, $l = 3$ ($\Delta n = -1$, $\Delta l = -1$), pero se prohíbe que haga una transición $\Delta n = -1$, $\Delta l = 0$ en el nivel $n = 1$, $l = 4$.

Las transiciones entre estados con varios pares de valores de n producen distintas series de líneas espectrales, y el espectro que resulta tiene una serie de *bandas*. Cada banda corresponde a una transición vibratoria particular, y cada línea individual en una banda representa una transición rotacional particular, con la regla de selección $\Delta l = \pm 1$. En la figura 42.9 se muestra un *espectro de bandas* típico.

Todas las moléculas pueden tener estados excitados de los *electrones*, además de los estados de rotación y de vibración que hemos descrito. En general, están a mayores energías que los estados rotacionales y vibratorios, y no hay alguna regla sencilla que los relacione. Cuando hay una transición entre estados electrónicos, ya no es válida la regla de selección $\Delta n = \pm 1$, para los niveles de vibración.



Ejemplo 42.3 Espectro de vibración-rotación del monóxido de carbono

De nuevo consideremos la molécula de CO del ejemplo 42.2. Determine la longitud de onda del fotón emitido por una molécula de CO cuando hay un cambio en su energía vibratoria, y su energía de rotación es *a*) inicialmente cero, y *b*) finalmente cero.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Necesitamos usar las reglas de selección para las transiciones de vibración y rotación de una molécula diatómica. Como un fotón se emite cuando cambia la energía vibratoria, la regla de selección $\Delta n = -1$ nos dice que el número cuántico de vibración n disminuye en 1 tanto en el inciso *a*) como en el inciso *b*). En el inciso *a*), el valor inicial de l es cero; la regla de selección $\Delta l = \pm 1$ indica que el valor *final* de l es 1, de modo que la energía rotacional se incrementa en este caso. En el inciso *b*), el valor *final* de l es cero; $\Delta l = \pm 1$ indica ahora que el valor *inicial* de l es 1 y, por consiguiente, la energía rotacional disminuye.

En cada caso, la energía E del fotón emitido es la diferencia entre las energías inicial y final de la molécula, tomando en cuenta tanto el cambio de energía vibratoria como rotacional. En el inciso *a*), E es igual a la diferencia $\hbar\omega$ entre niveles adyacentes de energía vibratoria *menos* la cantidad de energía de rotación que *gana* la molécula; mientras que en el inciso *b*), E es igual a $\hbar\omega$ *más* la cantidad de energía de rotación que *pierde* la molécula. El ejemplo 42.2 nos indica que la diferencia entre los niveles de energía rotacional $l = 0$ y $l = 1$ es de 0.479 meV = 0.000479 eV, y aprendimos anteriormente que el nivel de energía de vibración para la separación del CO es $\hbar\omega = 0.2690$ eV. Usaremos $E = hc/\lambda$ para determinar las longitudes de onda correspondientes (las incógnitas).

EJECUTAR: *a*) En esta transición, la molécula de CO pierde $\hbar\omega =$ 0.2690 eV de energía de vibración y gana 0.000479 eV de energía rotacional. Por lo tanto, la energía E del fotón emitido es igual a 0.2690 eV *menos* 0.000479 eV, es decir, 0.2685 eV. La longitud de onda del fotón es

$$\lambda = \frac{hc}{E} = \frac{(4.136 \times 10^{-15}\ \text{eV}\cdot\text{s})(2.998 \times 10^{8}\ \text{m/s})}{0.2685\ \text{eV}}$$
$$= 4.618 \times 10^{-6}\ \text{m} = 4.618\ \mu\text{m}$$

b) Ahora la molécula de CO pierde $\hbar\omega = 0.2690$ eV de energía de vibración y también pierde 0.000479 eV de energía rotacional, de modo que la energía que adquiere el fotón es $E = 0.2690\ \text{eV} + 0.000479\ \text{eV} = 0.2695$ eV. La longitud de onda es

$$\lambda = \frac{hc}{E} = \frac{(4.136 \times 10^{-15}\ \text{eV}\cdot\text{s})(2.998 \times 10^{8}\ \text{m/s})}{0.2695\ \text{eV}}$$
$$= 4.601 \times 10^{-6}\ \text{m} = 4.601\ \mu\text{m}$$

EVALUAR: En el inciso *b*), la molécula pierde más energía que en el inciso *a*), por lo que el fotón emitido debe tener mayor energía y menor longitud de onda. Es precisamente lo que indican nuestros resultados.

Moléculas complejas

Podemos aplicar los mismos principios a moléculas más complejas. Una molécula con tres átomos o más tiene varias clases distintas de *modos* de movimiento vibratorio. Cada modo tiene su propio conjunto de niveles de energía, relacionados con su fre-

42.10 La molécula de dióxido de carbono puede vibrar en tres modos diferentes. Para efectos de claridad, los átomos no se muestran a escala: la separación entre los átomos es realmente comparable a sus diámetros.

a) Modo de balanceo



b) Modo de alargamiento simétrico



c) Modo de alargamiento asimétrico



cuencia por la ecuación (42.7). En casi todos los casos, la radiación asociada está en la región infrarroja del espectro electromagnético.

La espectroscopia infrarroja ha demostrado ser una herramienta analítica extremadamente valiosa. Proporciona información sobre la resistencia, rigidez y longitud de los enlaces moleculares, así como de la estructura de moléculas complejas. Además, ya que cada molécula (al igual que cada átomo) tiene su espectro característico, con la espectroscopia infrarroja se pueden identificar compuestos desconocidos.



Una molécula que fácilmente puede absorber y emitir radiación infrarroja es el dióxido de carbono (CO_2). La figura 42.10 muestra los tres modos posibles de vibración de una molécula de CO_2. Numerosas transiciones son posibles entre niveles excitados del mismo modo de vibración así como entre niveles de modo de vibración diferentes. Las diferencias de energía son menores de 1 eV en todas estas transiciones y, por lo tanto, implican fotones infrarrojos de longitud de onda mayor que 1 μm. Por eso, el CO_2 gaseoso puede absorber fácilmente luz infrarroja de varias longitudes de onda. Esto hace del CO_2 un gas de invernadero muy efectivo (véase la sección 17.7 vol. 1) incluso en la Tierra, donde el dióxido de carbono es exactamente el 0.04% del volumen de la atmósfera. En Venus, sin embargo, la atmósfera tiene más de 90 veces la masa total de nuestra atmósfera y es casi completamente de CO_2. El efecto invernadero resultante es tremendo: la temperatura en la superficie de Venus es más de 400 kelvins de lo que sería si el planeta no tuviera atmósfera.

Evalúe su comprensión de la sección 42.2 Una molécula diatómica giratoria emite un fotón cuando hace una transición de un nivel l a un nivel $l - 1$. Si aumenta el valor de l, ¿la longitud de onda del fotón emitido **i.** aumenta, **ii.** disminuye, o **iii.** permanece sin cambio?

MP

42.3 Estructura de los sólidos

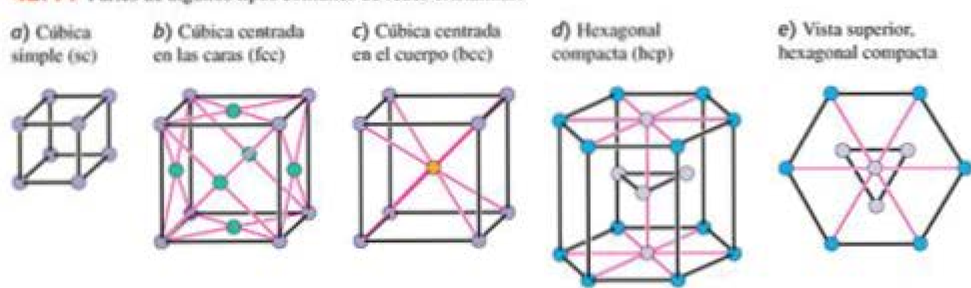
El término *materia condensada* incluye tanto los sólidos como los líquidos. En ambos estados, las interacciones entre átomos o moléculas son lo bastante fuertes para dar un volumen definido al material, que cambia relativamente poco al aplicarles una fuerza. En la materia condensada, los átomos adyacentes se atraen entre sí, hasta que sus nubes de carga electrónica externa comienzan a traslapar en forma importante. Así, las distancias entre átomos adyacentes de la materia condensada son más o menos iguales que los diámetros de los átomos mismos, comúnmente de 0.1 a 0.5 nm. Al hablar de distancias entre átomos, nos referiremos a distancias de centro a centro (de núcleo a núcleo).

Normalmente, uno se imagina un líquido como un material que puede fluir, y un sólido como un material con forma definida. No obstante, si el lector calienta una varilla horizontal de vidrio en la llama de un mechero, verá que la varilla se comienza a colgar (a fluir), con cada vez más facilidad a medida que aumenta su temperatura. El vidrio no tiene una transición definida de sólido a líquido, ni un punto de fusión definido. Desde este punto de vista, se puede considerar que el vidrio a temperatura ambiente es un líquido extremadamente viscoso. El asfalto y la mantequilla tienen comportamientos parecidos.

¿Cuál es la diferencia microscópica entre materiales como el vidrio o la mantequilla, y los sólidos como el hielo o el cobre, que sí tienen puntos de fusión definidos? El hielo y el cobre son ejemplos de *sólidos cristalinos*, en los que los átomos tienen un *orden de largo alcance*, un patrón recurrente de posiciones atómicas que abarca muchos átomos. A este patrón se le llama *estructura cristalina*. En contraste, el vidrio a la temperatura ambiente es un ejemplo de un sólido *amorfo*, el cual no tiene orden de largo alcance, sino *orden de corto alcance* (correlaciones entre átomos o moléculas vecinos). Los líquidos también solo tienen orden de corto alcance. Las fronteras entre sólido cristalino, sólido amorfo y líquido pueden ser confusas a veces. Algunos sólidos, que son cristalinos cuando son perfectos, también pueden formarse con tantas imperfecciones en su estructura que casi no tienen orden de largo alcance. Al contrario, algunos cristales líquidos (compuestos orgánicos integrados por moléculas cilíndricas que tienden a alinearse paralelamente unos con otros) tienen un alto grado de orden de largo alcance.

Casi todo lo que conocemos de la estructura cristalina lo hemos aprendido de experimentos de difracción, al principio con rayos x y, después, con electrones y neu-

42.11 Partes de algunos tipos comunes de redes cristalinas.



trones. Una distancia normal entre átomos es del orden de 0.1 nm. El lector puede demostrar que los rayos x de 12.4 keV, los electrones de 150 eV y los neutrones de 0.0818 eV tienen longitudes de onda $\lambda = 0.1$ nm.

Redes y estructuras cristalinas

Una *red cristalina* es un patrón repetitivo de puntos matemáticos que se prolonga en el espacio. Hay 14 tipos generales de estos patrones; la figura 42.11 muestra pequeñas partes de algunos ejemplos comunes. La *red cúbica simple* (sc, por las siglas de *simple cubic*) tiene un punto de red en cada vértice de un arreglo cúbico (figura 42.11*a*). La *red cúbica centrada en la cara* (fcc, por las siglas de *face-centered cubic*) es como la cúbica simple, pero con un punto de red adicional en el centro de cada cara del cubo (figura 42.11*b*). La *red cúbica centrada en el cuerpo* (bcc, por las siglas de *body-centered cubic*) es como la cúbica simple, pero con un punto de red adicional en el centro de cada cubo (figura 42.11*c*). La *red hexagonal compacta* tiene capas de puntos de red en patrones hexagonales, y cada hexágono está formado por seis triángulos equiláteros (figuras 42.11*d* y 42.11*e*).

CUIDADO **Una red cristalina perfecta es infinitamente grande** La figura 42.11 muestra solo los puntos de red suficientes para visualizar con facilidad el patrón; la red, que es una abstracción matemática, se prolonga por el espacio. Así, los puntos de red mostrados se repiten indefinidamente en todas direcciones.

En una estructura cristalina, un átomo o un grupo de átomos están asociados con cada punto de red. El grupo puede contener átomos iguales o distintos. Este átomo o grupo de átomos se llama *base*. Así, una descripción completa de una estructura cristalina incluye tanto la red como la base. Al principio manejaremos *cristales perfectos* o *monocristales ideales*, en los que la estructura cristalina se prolonga sin interrupción en el espacio.

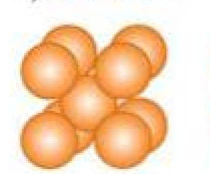
Las estructuras bcc y fcc son dos estructuras cristalinas sencillas y comunes. Los metales alcalinos tienen una estructura bcc, esto es, una red bcc basada en un átomo en cada punto de red. Cada átomo en una estructura bcc tiene ocho primeros vecinos (figura 42.12*a*). Los elementos Al, Ca, Cu, Ag y Au tienen una estructura fcc, es decir, una red fcc con una base de un átomo en cada punto de red. En una estructura fcc cada átomo tiene 12 primeros vecinos (figura 42.12*b*).

La figura 42.13 muestra una representación de la estructura del cloruro de sodio (NaC1, la sal ordinaria). Parece una estructura cúbica simple, pero no lo es. Los iones de sodio y de cloro forman cada uno una estructura fcc, por lo que podemos imaginar a grandes rasgos que la estructura del cloruro de sodio está formada por dos estructuras fcc que se traslapan. En forma más correcta, la estructura cristalina del cloruro de sodio, en la figura 42.13, tiene una red fcc con un ion cloruro en cada punto de red, y un ion sodio a medio cubo de longitud arriba de él. Esto es, su base consiste en un ion cloruro y un ion sodio.

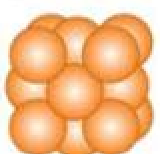
Otro ejemplo es la *estructura diamante*; se llama así por ser la estructura cristalina del carbono en forma de diamante. También lo es la del silicio, germanio y estaño gris. La red del diamante es fcc; la base consiste en un átomo en cada punto de red y un segundo átomo *idéntico* desplazado la cuarta parte de la longitud del cubo en cada una de las tres direcciones de las aristas del cubo. La figura 42.14 ayudará a visualizar

42.12 *a*) La *estructura* bcc está formada por una *red* bcc con una base de un átomo por cada punto de red. *b*) La *estructura* fcc está formada por una *red* fcc con una base de un átomo por cada punto de red. Estas estructuras se repiten con precisión para formar cristales perfectos.

a) La estructura bcc



b) La estructura fcc



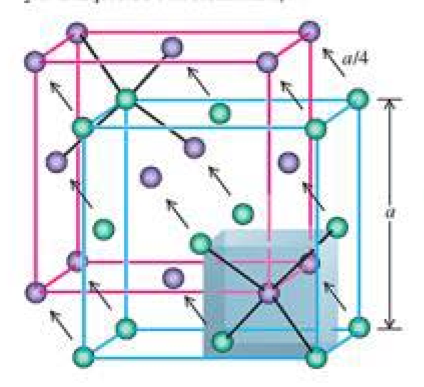
42.13 Representación de la estructura cristalina del cloruro de sodio. Están exageradas las distancias entre los iones.

Estructura cúbica centrada en las caras de los iones sodio

Na^+

Cl^-

Estructura cúbica centrada en las caras de los iones cloruro



42.14 La estructura diamante, mostrada como dos estructuras cúbicas centradas en la cara, que se traslapan, con distancias exageradas entre átomos. En relación con el átomo verde correspondiente, cada átomo púrpura está desplazado hacia arriba, atrás y a la izquierda una distancia $a/4$.

esto. El volumen sombreado en la figura 42.14 muestra la octava parte inferior derecha del cubo básico; los cuatro átomos que están en vértices alternados de este cubo se encuentran en los vértices de un tetraedro regular, y hay un átomo adicional en el centro. Entonces, cada átomo en la estructura del diamante está en el centro de un tetraedro regular con cuatro átomos vecinos más próximos en los vértices.

En la estructura diamante, las esferas púrpura y verde en la figura 42.14 representan átomos *idénticos*, por ejemplo, dos de carbono o dos de silicio. En la estructura cúbica del sulfuro de zinc, las esferas púrpuras representan una clase de átomo y las esferas verdes representan una clase *diferente*. Por ejemplo, en el sulfuro de zinc (ZnS), cada átomo de zinc (púrpura en la figura 42.14) está en el centro de un tetraedro regular con cuatro átomos de azufre (verdes en la figura 42.14) en sus vértices, y viceversa. El arseniuro de galio (GaAs) y compuestos similares tienen esta misma estructura.

Enlaces en los sólidos

Las fuerzas responsables del arreglo regular de átomos en un cristal son las mismas que las que intervienen en los enlaces moleculares, y además hay un tipo adicional. No debe sorprender que los enlaces moleculares *iónicos* y *covalentes* se encuentren en cristales iónicos y covalentes, respectivamente. Los *cristales iónicos* más conocidos son los haluros alcalinos, como la sal ordinaria (NaCl). Los iones sodio positivos y los iones cloruro negativos ocupan posiciones alternadas en un arreglo cúbico (figura 42.13). Las fuerzas de atracción son las conocidas fuerzas de la ley de Coulomb, entre partículas cargadas. Estas fuerzas no tienen una dirección preferente, y el arreglo para que el material cristalice está determinado en parte por el tamaño relativo de los dos iones. Esa estructura es *estable* en el sentido que tiene menor energía total que los iones separados (véase el ejemplo siguiente). Las energías potenciales negativas de pares de cargas opuestas son mayores en valor absoluto que las energías positivas de pares de cargas iguales, porque los pares de cargas desiguales están más cercanos entre sí, en promedio.

Ejemplo 42.4 Energía potencial en un cristal iónico



Imagine que un cristal iónico unidimensional consiste en una cantidad muy grande de iones positivos y negativos alternados, con cargas e y $-e$, respectivamente, a distancias iguales a a lo largo de una recta. Demuestre que la energía potencial total de interacción es negativa, lo cual significa que este "cristal" es estable.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Consideraremos que cada ion es una carga puntual, y usaremos los resultados de la sección 23.1 de la energía potencial eléctrica de un conjunto de cargas puntuales. Las ecuaciones (23.10) y (23.11) nos dicen que hay que tener presente la energía potencial eléctrica U de cada pareja de cargas. La energía potencial total del sistema es la suma de los valores de U para cada par posible; consideraremos infinito el número de pares.

EJECUTAR: Seleccionemos un ion en algún lugar de la parte media de la línea, y sumemos las energías potenciales de sus interacciones con todos los iones a uno de sus lados. Según la ecuación (23.11) esa suma es

$$\begin{aligned}\sum U &= -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{a} + \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{2a} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{3a} + \cdots \\ &= -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a}\left(1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \cdots\right)\end{aligned}$$

El lector notará la semejanza de la serie entre paréntesis con la serie de Taylor para $\ln(1 + x)$:

$$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots$$

Cuando $x = 1$, se obtiene la serie entre paréntesis, y

$$\sum U = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a}\ln 2$$

Desde luego, esta es una cantidad negativa. Los átomos en el otro lado del ion del que partimos hacen una contribución igual a la energía potencial. Y si incluimos las energías potenciales de todos los pares de átomos, es evidente que la suma es negativa.

EVALUAR: Se concluye que este "cristal" iónico unidimensional es estable: tiene menor energía que la energía potencial eléctrica igual a cero que se obtiene cuando todos los iones están a distancias infinitas entre sí.

Tipos de cristales

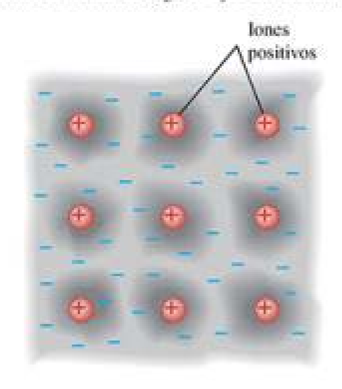
El carbono, silicio, germanio y estaño con la estructura diamante son ejemplos sencillos de *cristales covalentes*. Esos elementos están en el grupo IV de la tabla periódica,

lo cual quiere decir que cada átomo tiene cuatro electrones en su capa externa. Cada átomo forma un enlace covalente con cada uno de los cuatro átomos adyacentes, en los vértices de un tetraedro (figura 42.14). Estos enlaces son muy direccionales, debido a las distribuciones electrónicas asimétricas que indica el principio de exclusión, y el resultado es la estructura tetraédrica de diamante.

Una tercera clase de cristales, menos relacionada con el enlace químico de los cristales iónicos o covalentes, es el **cristal metálico**. En esta estructura, uno o más de los electrones externos en cada átomo se desprenden de su átomo (dejando un ion positivo) y tienen libertad de movimiento a través del cristal. Estos electrones no están ubicados cerca de los iones individuales. Las funciones de onda correspondientes de los electrones abarcan muchos átomos.

Así, podemos imaginarnos que un cristal metálico es un arreglo de iones positivos inmersos en un mar de electrones libres, cuya atracción hacia los iones positivos mantiene unido el cristal (figura 42.15). Esos electrones también dan a los metales sus altas conductividades eléctricas y térmicas. Este mar de electrones tiene muchas de las propiedades de un gas, y de hecho, se habla del *modelo del gas de electrones* en los sólidos metálicos. La versión más sencilla de este modelo es el *modelo del electrón libre*, el cual no tiene en cuenta, en absoluto, las interacciones con los iones (excepto en la superficie). Regresaremos a este modelo en la sección 42.5.

42.15 En un sólido metálico, hay uno o más electrones que se desprenden de cada átomo, y quedan en libertad para vagar por el cristal formando un "gas de electrones". Las funciones de onda de esos electrones se extienden sobre muchos átomos. Los iones positivos vibran en lugares fijos del cristal.



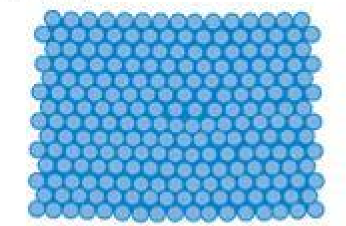
En un cristal metálico, los electrones libres no están localizados, sino que están compartidos entre *muchos* átomos. Esto produce una interacción que no está localizada ni es muy direccional. La estructura cristalina está determinada principalmente por consideraciones de *empacamiento compacto*, esto es, la cantidad máxima de átomos que pueden caber en determinado volumen. Las dos redes cristalinas metálicas más comunes son la cúbica centrada en la cara y la hexagonal compacta (véase las figuras 42.11*b*, 42.11*d* y 42.11*e*). En estructuras formadas con estas redes, con una base de un átomo, cada átomo tiene 12 vecinos inmediatos.

Como mencionamos en la sección 42.1, las interacciones de Van der Waals y los puentes de hidrógeno también desempeñan un papel importante en la estructura de algunos sólidos. En el polietileno y en los polímeros similares, el enlace covalente de los átomos forma moléculas de cadena larga, y los puentes de hidrógeno forman enlaces cruzados entre cadenas adyacentes. En el agua en estado sólido, tienen importancia tanto las fuerzas de Van der Waals como los puentes de hidrógeno al determinar las estructuras cristalinas del hielo.

Nuestro estudio se ha centrado en los cristales perfectos o monocristales ideales. Los cristales reales muestran diversas desviaciones de esta estructura idealizada. Con frecuencia, los materiales son *policristalinos*, formados por muchos monocristales pequeños pegados entre sí en sus *límites de grano*. Dentro de un monocristal puede haber *defectos puntuales*: átomos *intersticiales* en lugares donde no pertenecen; y puede haber *vacantes*, que son posiciones que deberían estar ocupadas por un átomo, pero están vacías. Un defecto puntual de especial interés en los semiconductores, que describiremos en la sección 42.6, es la *impureza por sustitución*; es un átomo extraño que reemplaza un átomo normal (por ejemplo, arsénico en un cristal de silicio).

Hay varias clases básicas de defectos extendidos, llamadas *dislocaciones*. Una de ellas es la *dislocación de borde*, que se ve en forma esquemática en la figura 42.16, donde un plano de átomos se desliza en relación con otro. Las propiedades mecánicas de los cristales metálicos dependen mucho de la presencia de dislocaciones. La ductilidad y la maleabilidad de algunos metales están relacionadas con la presencia de dislocaciones que se puedan propagar por el cristal, durante deformaciones plásticas. Los físicos de estado sólido señalan con frecuencia el hecho de que el defecto extendido mayor de todos, presente en *todos* los cristales reales, es la superficie del material con sus enlaces en agitación y su cambio abrupto de energía potencial.

42.16 Una dislocación de borde en dos dimensiones. En tres dimensiones, la dislocación de borde se vería como un plano adicional de átomos parcialmente introducido en el cristal.



La irregularidad se ve con más facilidad mirando la figura desde varias direcciones, a un ángulo rasante con la página.

Evalúe su comprensión de la sección 42.3 Si en un cristal de NaCl, *a* es la distancia de un ion Na^+ a su primer vecino, uno de sus iones Cl^-, ¿cuál es la distancia de un ion Na^+ a un *segundo vecino* de sus iones Cl^-? **i.** $a\sqrt{2}$; **ii.** $a\sqrt{3}$; **iii.** $2a$; **iv.** ninguna de estas.

MP

42.17 El concepto de bandas de energía fue desarrollado por el físico suizo-estadounidense Felix Bloch (1905-1983) en su tesis doctoral. Nuestra comprensión moderna de la conductividad eléctrica parte de ese notable trabajo. La investigación de Bloch, en física nuclear, le valió (junto con Edward Purcell) el Premio Nobel de Física en 1952.

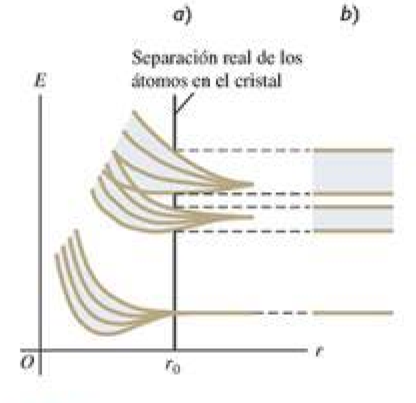


42.4 Bandas de energía

El concepto de **banda de energía**, introducido en 1928 (figura 42.17) es de gran ayuda para comprender varias propiedades de los sólidos. Para presentar esta idea, supongamos que hay una gran cantidad N de átomos idénticos, suficientemente apartados de modo que sus interacciones son despreciables. Cada átomo tiene el mismo diagrama de niveles de energía. Se puede dibujar un diagrama de niveles de energía para *todo el sistema*. Se ve justo como el de un solo átomo, pero el principio de exclusión, aplicado a todo el sistema, permite que cada estado esté ocupado por N electrones, en lugar de uno solo.

Ahora acerquemos entre sí uniformemente a los átomos. Debido a las interacciones eléctricas y al principio de exclusión, las funciones de onda se comienzan a distorsionar, en especial las de los electrones externos o *de valencia*. Las energías correspondientes también se desplazan, algunas hacia arriba y otras hacia abajo, en cantidades variables, a medida que las funciones de onda del electrón de valencia se vuelven menos localizadas y se extienden sobre cada vez más átomos. Entonces, los estados de valencia que antes producían un estado en el *sistema*, con un nivel definido de energía que podía dar cabida a N electrones, ahora producen una *banda* que contiene N niveles muy cercanos (figura 42.18). Normalmente, N es muy grande, del orden del número de Avogadro (10^{24}), por lo que podemos considerar con exactitud que los niveles forman una distribución *continua* de energías dentro de una banda. Entre bandas de energía adyacentes hay espacios o regiones prohibidas, donde *no* hay niveles de energía permitidos. Los electrones internos de un átomo se afectan mucho menos por los átomos cercanos que los electrones de valencia, y sus niveles de energía permanecen relativamente definidos.

42.18 Origen de las bandas de energía en un sólido. *a*) A medida que disminuye la distancia r entre los átomos, los niveles de energía se reparten formando bandas. La línea vertical en r_0 muestra la distancia atómica real en el cristal. *b*) Representación simbólica de las bandas de energía.

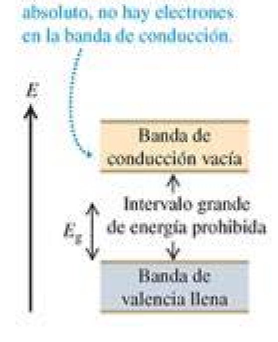


Aislantes, semiconductores y conductores

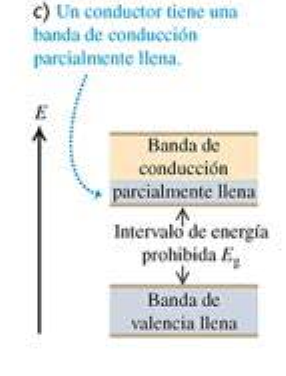
La naturaleza de las bandas de energía determina si el material es un aislante eléctrico, un semiconductor o un conductor. En particular, lo que importa es si los estados de cada banda están ocupados y la distancia, o *intervalo de energía prohibida*, que haya entre bandas adyacentes. Un factor crucial es el principio de exclusión (véase la sección 41.6), el cual establece que solo un electrón puede ocupar determinado estado mecánico-cuántico.

En un *aislante* a la temperatura del cero absoluto, la **banda de valencia** es la banda más alta que está totalmente llena, o que tiene algún electrón en ella. La siguiente banda, llamada **banda de conducción**, está totalmente vacía; no hay electrones en sus estados (figura 42.19*a*). Imagine lo que sucede si un campo eléctrico se aplica a un material de esta clase. Al moverse el electrón en respuesta al campo, debería pasar a un estado cuántico distinto, con una energía diferente. Sin embargo, no lo puede hacer, porque todos los estados vecinos ya están ocupados. La única forma en que ese electrón se puede mover es saltando a través del intervalo de energía prohibida y entrando a la banda de conducción, donde hay muchos estados cercanos desocupados. Para cualquier temperatura mayor que el cero absoluto, hay alguna probabilidad de que este salto suceda, porque el electrón puede adquirir energía por movimientos tér-

42.19 Tres tipos de estructura de bandas de energía.







micos. Sin embargo, en un aislante, el intervalo de energía prohibida entre las bandas de valencia y de conducción pueden ser de 5 eV o más, y normalmente esa energía térmica no está disponible. Por consiguiente, fluye poca o nada de corriente como respuesta a un campo eléctrico aplicado, y la conductividad eléctrica es baja (sección 25.2). La conductividad térmica (sección 17.7 vol. 1), que también depende de los electrones móviles, es baja.

MasteringPHYSICS

PhET: Band Structure
PhET: Conductivity

En la sección 24.4 vimos que un aislante se vuelve conductor, si se somete a un campo eléctrico suficientemente grande; a esto se le llama *ruptura del dieléctrico*. Si el campo eléctrico es del orden de 10^{10} V/m, hay una diferencia de potencial de algunos volts en una distancia comparable a los tamaños atómicos. En este caso, el campo puede efectuar el trabajo suficiente sobre un electrón de valencia para impulsarlo a cruzar el intervalo de energía prohibida y penetrar en la banda de conducción. (En la práctica, la ruptura del dieléctrico se presenta con campos mucho menores que 10^{10} V/m, por las imperfecciones en la estructura de un aislante, que proporcionan estados de energía algo más accesibles *dentro* del intervalo de energía prohibida).

Como en un aislante, un *semiconductor* en el cero absoluto, tiene una banda de conducción vacía arriba de la banda de valencia llena. La diferencia es que en un semiconductor el intervalo de energía prohibida entre esas bandas es relativamente pequeño, y los electrones pueden saltar con más facilidad para entrar a la banda de conducción (figura 42.19*b*). A medida que aumenta la temperatura de un semiconductor, la población en la banda de conducción aumenta con mucha rapidez, al igual que la conductividad eléctrica. Por ejemplo, en un semiconductor cercano a la temperatura ambiente, con un intervalo de energía prohibida de 1 eV, la cantidad de electrones de conducción se duplica cuando la temperatura aumenta solo 10°C. Usaremos el concepto de bandas de energía para explorar a los semiconductores con más detalle en la sección 42.6.

En un *conductor*, como lo es un metal, hay electrones en la banda de conducción aun en el cero absoluto (figura 42.19*c*). El sodio metálico es un ejemplo. Un análisis del diagrama de niveles atómicos de energía del sodio (figura 39.19*a*) muestra que para un átomo aislado de sodio, los seis estados excitados inferiores (todos los estados 3*p*) están a unos 2.1 eV arriba de los dos estados base 3*s*. Sin embargo, en el sodio sólido, los átomos están tan cercanos entre sí que las *bandas* 3*s* y 3*p* se extienden y se traslapan, formando una sola banda. Cada átomo de sodio aporta un electrón a la banda, que deja atrás un ion Na^+. Cada átomo también aporta ocho *estados* a esa banda (dos 3*s*, seis 3*p*), por lo que la banda solo está ocupada en una octava parte. A esta estructura se le llama banda de *conducción*, porque solo está parcialmente ocupada. Los electrones cercanos a la zona superior de la parte llena de la banda tienen muchos estados adyacentes desocupados y disponibles, y pueden ganar o perder con facilidad pequeñas cantidades de energía como respuesta a un campo eléctrico aplicado. Por lo tanto, esos electrones son móviles dando al sodio sólido su alta conductividad eléctrica y térmica. Una descripción parecida se aplica a otros materiales conductores.



Ejemplo 42.5 Fotoconductividad del germanio

A temperatura ambiente, el germanio puro tiene una banda de valencia casi totalmente llena, separada de una banda de conducción casi totalmente vacía por un intervalo de 0.67 eV. Es mal conductor eléctrico, pero su conductividad aumenta bastante cuando se irradia con ondas electromagnéticas de cierta longitud de onda máxima. ¿Cuál es esa longitud de onda?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: La conductividad de un semiconductor aumenta mucho cuando los electrones saltan de la banda de valencia a la banda de conducción. En el germanio, esta excitación sucede cuando un electrón absorbe un fotón con una energía mínima $E_{mín} = 0.67$ eV. Según la ecuación $E = hc/\lambda$, la longitud de onda *máxima* $\lambda_{máx}$ (la incógnita) corresponde a esta energía *mínima* del fotón.

EJECUTAR: La longitud de onda de un fotón con energía $E_{mín} = 0.67$ eV es

$$\lambda_{máx} = \frac{hc}{E_{mín}} = \frac{(4.136 \times 10^{-15}\ \text{eV}\cdot\text{s})(3.00 \times 10^8\ \text{m/s})}{0.67\ \text{eV}}$$
$$= 1.9 \times 10^{-6}\ \text{m} = 1.9\ \mu\text{m} = 1900\ \text{nm}$$

EVALUAR: Esta longitud de onda está en la parte infrarroja del espectro, así que los fotones de luz visible (que tienen menor longitud de onda y mayor energía) también inducirán la conductividad en el germanio. Como veremos en la sección 42.7, los cristales de un semiconductor se usan mucho como fotoceldas, y en muchas otras aplicaciones.

Evalúe su comprensión de la sección 42.4 Un tipo de termómetro funciona midiendo la resistividad eléctrica dependiente de la temperatura de una muestra. ¿Cuál de los siguientes tipos de material muestra el mayor cambio en resistividad para un cambio de temperatura dado? **i.** Aislante; **ii.** semiconductor; **iii.** resistor.

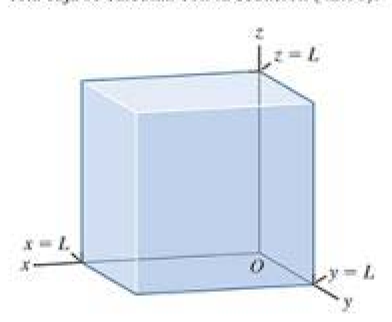


42.5 Modelo de electrones libres para los metales

El estudio de los estados de energía de los electrones en los metales nos brinda una gran comprensión de sus propiedades eléctricas y magnéticas, las contribuciones del electrón a las capacidades caloríficas y otros comportamientos. Como vimos en la sección 42.3, una de las propiedades distintivas de un metal es que uno o más electrones de valencia se desprenden de su átomo, y pueden moverse con libertad dentro del metal, con funciones de onda que abarcan muchos átomos.

El **modelo de electrones libres** supone que esos electrones están totalmente libres dentro del material, que no interactúan en absoluto con los iones ni entre sí, pero que en las superficies hay barreras infinitas de energía potencial. La idea es que un electrón típico se mueve tan rápidamente dentro del metal que "ve" el efecto de los iones y otros electrones como una función de energía potencial uniforme, cuyo valor podemos igualarlo a cero.

Podemos representar las superficies del metal por la misma caja cúbica que analizamos en la sección 41.2 (la versión tridimensional de una partícula en una caja estudiada en la sección 40.2). Si la caja tiene lados de longitud L (figura 42.20), las energías de los estados estacionarios (estados cuánticos de energía definida) son



42.20 Caja cúbica con longitud de lado L. Estudiamos esta versión tridimensional del pozo cuadrado infinito en la sección 41.2. Los niveles de energía de una partícula en esta caja se calculan con la ecuación (42.10).

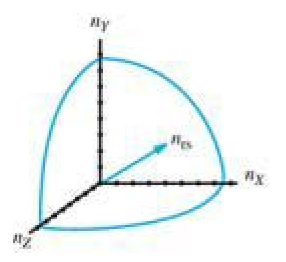
$$E_{n_X,n_Y,n_Z} = \frac{(n_X{}^2 + n_Y{}^2 + n_Z{}^2)\pi^2\hbar^2}{2mL^2} \quad \begin{array}{l}(n_X = 1, 2, 3, \ldots;\ n_Y = 1,\\ 2, 3, \ldots;\ n_Z = 1, 2, 3, \ldots)\end{array} \tag{42.10}$$

Cada estado se identifica por los tres números cuánticos enteros positivos (n_X, n_Y y n_Z).

Densidad de estados

Después necesitaremos conocer el *número dn* de estados cuánticos que tienen energías en determinado intervalo dE. El número de estados por unidad de energía, dn/dE, se llama **densidad de estados**, y se representa con $g(E)$. Comenzaremos deduciendo una ecuación para $g(E)$. Imaginemos un espacio tridimensional con coordenadas (n_X, n_Y, n_Z) (figura 42.21). El radio n_{rs} de una esfera centrada en el origen, en ese espacio, es $n_{rs} = (n_X{}^2 + n_Y{}^2 + n_Z{}^2)^{1/2}$. Cada punto con coordenadas enteras, en ese espacio, representa un estado cuántico espacial. Así, cada punto corresponde a una unidad de volumen en el espacio, y la cantidad total de puntos con coordenadas enteras dentro de una esfera es igual al volumen de la esfera, $\frac{4}{3}\pi n_{rs}{}^3$. Como todas las n son positivas, solo debemos considerar un *octante* de la esfera, con $\frac{1}{8}$ del volumen total: $(\frac{1}{8})(\frac{4}{3}\pi n_{rs}{}^3) = \frac{1}{6}\pi n_{rs}{}^3$. Las partículas son electrones, así que cada punto corresponde a *dos* estados con componentes opuestos de espín $(m_s = \pm\frac{1}{2})$, y el número total n de estados electrónicos correspondientes a puntos dentro del octante es el doble de $\frac{1}{6}\pi n_{rs}{}^3$, es decir,

42.21 Los valores permitidos de n_X, n_Y y n_Z son los enteros positivos para los estados electrónicos en el modelo del gas de electrones libres. Al incluir el espín, hay dos estados por cada unidad de volumen en el espacio n.



$$n = \frac{\pi n_{rs}{}^3}{3} \tag{42.11}$$

La energía E de los estados en la superficie de la esfera se puede expresar en función de n_{rs}. La ecuación (42.10) se convierte en

$$E = \frac{n_{rs}{}^2\pi^2\hbar^2}{2mL^2} \tag{42.12}$$

Es posible combinar las ecuaciones (42.11) y (42.12) para obtener una relación entre E y n que no contenga n_{rs}. Dejaremos los detalles como ejercicio (ejercicio 42.24); el resultado es

$$n = \frac{(2m)^{3/2}VE^{3/2}}{3\pi^2\hbar^3} \tag{42.13}$$

donde $V = L^3$ es el volumen de la caja. La ecuación (42.13) indica el número total de estados con energías E o menores.

Para obtener el número de estados dn en un intervalo de energía dE, consideramos que n y E son variables continuas y diferenciamos ambos lados de la ecuación (42.13). Se obtiene

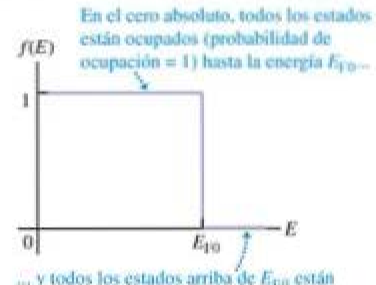
$$dn = \frac{(2m)^{3/2}VE^{1/2}}{2\pi^2\hbar^3}\,dE \qquad (42.14)$$

La densidad de estados, $g(E)$, es igual a dn/dE; por lo tanto, de la ecuación (42.14) obtenemos

$$g(E) = \frac{(2m)^{3/2}V}{2\pi^2\hbar^3}E^{1/2} \quad \text{(densidad de estados, modelo de electrones libres)} \qquad (42.15)$$

Distribución de Fermi-Dirac

Ahora necesitamos conocer la forma en que están distribuidos los electrones entre los diversos estados cuánticos a cualquier temperatura. La distribución de Maxwell-Boltzmann establece que el número promedio de partículas en un estado de energía E es proporcional a $e^{-E/kT}$ (véase las secciones 18.5 (vol. 1) y 39.4). Sin embargo, no sería correcto usar la distribución de Maxwell-Boltzmann, por dos razones muy importantes. La primera es el principio de exclusión. En el cero absoluto, la distribución de Maxwell-Boltzmann indica que *todos* los electrones pasarían a los dos estados base del sistema, con $n_X = n_Y = n_Z = 1$ y $m_s = \pm\frac{1}{2}$. Pero el principio de exclusión solo permite un electrón en cada estado. En el cero absoluto, los electrones pueden llenar los estados inferiores *disponibles*, pero no hay espacio suficiente como para que *todos* ellos vayan a esos estados inferiores. Así, una hipótesis razonable acerca de la forma de la distribución sería como la de la figura 42.22. A la temperatura del cero absoluto, los estados se llenan hasta cierto valor de energía E_{F0}, y todos los estados arriba de dicho valor están vacíos.



42.22 Distribución de probabilidad para la ocupación de estados de energía de electrones libres, en el cero absoluto.

La segunda razón por la que no podemos usar la distribución de Maxwell-Boltzmann es más sutil. En esa distribución se supone que estamos manejando partículas *distinguibles*. Parecería que se puede colocar una etiqueta en cada electrón, y saber cuál es cuál. Pero los electrones que se traslapan en un sistema como un metal son *indistinguibles*. Suponga que hay dos electrones; un estado en el que el primero está en un nivel de energía E_1 y el segundo está en el nivel E_2; dicho estado no es distinguible de uno donde los dos electrones están invertidos, porque no podemos decir cuál electrón es cuál.

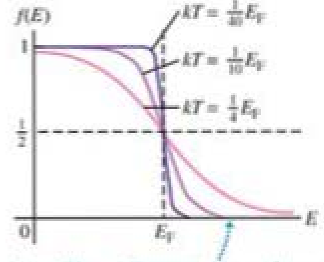
La función de distribución debido al principio de exclusión y el requerimiento de indistinguibilidad se llama (en honor de sus inventores) **distribución de Fermi-Dirac**. Debido al principio de exclusión, la probabilidad de que un estado determinado con energía E esté ocupado por un electrón es igual a $f(E)$, la fracción de estados con esa energía que están ocupados:

$$f(E) = \frac{1}{e^{(E-E_F)/kT} + 1} \quad \text{(distribución de Fermi-Dirac)} \qquad (42.16)$$

A la energía E_F se le llama **energía de Fermi** o *nivel de Fermi*; más adelante analizaremos su importancia. Usaremos E_{F0} para representar su valor en el cero absoluto ($T = 0$) y E_F para otras temperaturas. Se puede determinar, con exactitud, que $E_F = E_{F0}$ para los metales, porque la energía de Fermi no cambia mucho con la temperatura en los conductores. Sin embargo, no es seguro suponer que $E_F = E_{F0}$ para los semiconductores, en los que la energía de Fermi por lo general no cambia con la temperatura.

La figura 42.23 muestra gráficas de la ecuación (42.16) para tres temperaturas. La tendencia de esta función, cuando kT tiende a cero, confirma nuestra hipótesis. Cuando $E = E_F$, el exponente es cero y $f(E_F) = \frac{1}{2}$. Esto es, hay una probabilidad de $\frac{1}{2}$ de que un estado en la energía de Fermi contenga un electrón. En forma alternativa, cuando $E = E_F$, la mitad de los estados está llena (y la mitad vacía).

42.23 Gráficas de la función de distribución de Fermi-Dirac para varios valores de kT, suponiendo que la energía de Fermi E_F es independiente de la temperatura T.



Para $E < E_F$ el exponente es negativo, y $f(E) > \frac{1}{2}$. Para $E > E_F$ el exponente es positivo y $f(E) < \frac{1}{2}$. La forma depende de la razón E_F/kT. Cuando $T \ll E_F/k$ esta razón es muy grande. Entonces, para $E < E_F$ la curva tiende con mucha rapidez a 1, y para $E > E_F$, tiende a cero con rapidez. Cuando T es mayor, los cambios son más graduales. Cuando T es cero, todos los estados están llenos hasta el nivel de Fermi E_{F0} y todos los estados arriba de ese nivel están vacíos (figura 42.22).



Ejemplo 42.6 Probabilidades en el modelo de electrones libres

En el caso de electrones libres en un sólido, ¿para qué energía la probabilidad de que un determinado estado se encuentre ocupado es igual a *a*) 0.01 y *b*) 0.99?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Este problema nos pide explorar la distribución de Fermi-Dirac. La ecuación (42.16) nos indica la probabilidad de ocupación $f(E)$ para una energía E. Si de esta ecuación despejamos E, obtendremos una ecuación para la energía, que corresponde a una probabilidad de ocupación determinada, que es justo lo que necesitamos para resolver este problema.

EJECUTAR: Usando la ecuación (42.16), se muestra que

$$E = E_F + kT \ln\left(\frac{1}{f(E)} - 1\right)$$

a) Cuando $f(E) = 0.01$,

$$E = E_F + kT \ln\left(\frac{1}{0.01} - 1\right) = E_F + 4.6kT$$

La probabilidad de que el estado $4.6kT$ arriba del nivel de Fermi esté ocupado es solo de 0.01, o 1%.

b) Cuando $f(E) = 0.99$,

$$E = E_F + kT \ln\left(\frac{1}{0.99} - 1\right) = E_F - 4.6kT$$

La probabilidad de que el estado $4.6kT$ abajo del nivel de Fermi esté ocupado es de 0.99, o 99%.

EVALUAR: A temperaturas muy bajas, $4.6kT$ es mucho menor que E_F. Por lo que la probabilidad de ocupación de niveles incluso ligeramente debajo de E_F es aproximadamente 1 (100%), y para niveles ligeramente arriba de E_F es casi cero (véase la figura 42.23). En general, si existe la probabilidad P de que un estado se encuentre ocupado con una energía ΔE *arriba* de E_F, hay la probabilidad $1 - P$ de que un estado ΔE *abajo* de E_F esté ocupado. Dejaremos la demostración como problema (véase el problema 42.50).

Concentración de electrones y energía de Fermi

La ecuación (42.16) muestra la probabilidad de que algún estado específico con energía E esté ocupado a una temperatura T. Para obtener la cantidad real de electrones en cualquier intervalo dE de energía, hay que multiplicar esta probabilidad por el número dn de estados en ese intervalo, $g(E)\,dE$. Entonces, la cantidad dN de electrones con energías en el intervalo dE es

$$dN = g(E)f(E)\,dE = \frac{(2m)^{3/2}VE^{1/2}}{2\pi^2\hbar^3}\frac{1}{e^{(E-E_F)/kT}+1}\,dE \qquad (42.17)$$

La energía de Fermi E_F está determinada por la cantidad total N de electrones; a cualquier temperatura los estados electrónicos se llenan hasta un punto donde todos los electrones estén acomodados. En el cero absoluto, hay una relación sencilla entre E_{F0} y N. *Todos* los estados menores que E_{F0} están llenos; en la ecuación (42.13) se iguala n con el número N total de electrones, y E con la energía de Fermi en el cero absoluto E_{F0}:

$$N = \frac{(2m)^{3/2}VE_{F0}{}^{3/2}}{3\pi^2\hbar^3} \qquad (42.18)$$

Se despeja E_{F0} de la ecuación (42.18) para obtener

$$E_{F0} = \frac{3^{2/3}\pi^{4/3}\hbar^2}{2m}\left(\frac{N}{V}\right)^{2/3} \qquad (42.19)$$

La cantidad N/V es el número de electrones libres por unidad de volumen. Se llama *concentración de electrones*, y se suele representar por n.

Si sustituimos N/V por n, la ecuación (42.19) se convierte en

$$E_{F0} = \frac{3^{2/3}\pi^{4/3}\hbar^2 n^{2/3}}{2m} \qquad (42.20)$$

CUIDADO **Concentración de electrones y cantidad de electrones** No confunda la concentración de electrones n con algún número cuántico n. Además, en general la cantidad de estados *no* es igual que la cantidad total de electrones N.



Ejemplo 42.7 La energía de Fermi en el cobre

A bajas temperaturas, el cobre tiene una concentración de electrones libres igual a $8.45 \times 10^{28}\ \text{m}^{-3}$. Usando el modelo de electrón libre, determine la energía de Fermi del cobre, y calcule la rapidez de un electrón cuya energía cinética sea igual a la energía de Fermi.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Este problema utiliza la relación entre energía de Fermi y la concentración de electrones libres. Como el cobre es un conductor, su energía de Fermi cambia muy poco con la temperatura, y se puede usar la ecuación de la energía de Fermi en el cero absoluto, ecuación (42.20). Calcularemos la *rapidez de Fermi* v_F que corresponde a la energía cinética E_F usando la fórmula no relativista $E_F = \frac{1}{2}mv_F^2$.

EJECUTAR: Se usa el valor dado para n para despejar E_F y v_F:

$$E_F = \frac{3^{2/3}\pi^{4/3}(1.055 \times 10^{-34}\ \text{J}\cdot\text{s})^2(8.45 \times 10^{28}\ \text{m}^{-3})^{2/3}}{2(9.11 \times 10^{-31}\ \text{kg})}$$

$$= 1.126 \times 10^{-18}\ \text{J} = 7.03\ \text{eV}$$

$$v_F = \sqrt{\frac{2E_F}{m}} = \sqrt{\frac{2(1.126 \times 10^{-18}\ \text{J})}{9.11 \times 10^{-31}\ \text{kg}}} = 1.57 \times 10^6\ \text{m/s}$$

EVALUAR: Los valores de E_F y v_F están dentro de los rangos de valores típicos para los metales, de 1.6 a 14 eV y 0.8 a 2.2×10^6 m/s, respectivamente. Observe que la rapidez de Fermi calculada es mucho menor que la rapidez de la luz, $c = 3.00 \times 10^8$ m/s, lo que justifica el uso de las fórmulas no relativistas $\frac{1}{2}mv_F^2 = E_F$.

La energía de Fermi calculada es mucho mayor que kT a temperaturas ordinarias. (A temperatura ambiente, $T = 20°\text{C} = 293$ K, entonces la cantidad kT es igual a $(1.381 \times 10^{-23}\ \text{J/K})(293\ \text{K}) = 4.04 \times 10^{-21}\ \text{J} = 0.0254$ eV). Por ello, es una buena aproximación suponer que casi todos los estados menores que E_F están totalmente llenos, y casi todos los mayores que E_F están totalmente vacíos (véase la figura 42.22).

También se puede usar la ecuación (42.15) para determinar $g(E)$ si se conocen E y V. El lector puede demostrar que si $E = 7.03$ eV y $V = 1\ \text{cm}^3$, $g(E)$ es más o menos igual a 2×10^{22} estados/eV. Este número tan gigantesco muestra por qué era justificado el tratamiento de n y E como variables continuas en nuestra deducción de la densidad de estados.

Energía media de los electrones libres

Podemos calcular la energía *media* de los electrones libres en un metal, en el cero absoluto, con los mismos conceptos que usamos para determinar E_{F0}. Según la ecuación (42.17), el número dN de electrones cuyas energías estén dentro del intervalo dE es $g(E)f(E)dE$. La energía de estos electrones es $E\,dN = Eg(E)f(E)\,dE$. En el cero absoluto, se sustituye $f(E) = 1$ desde $E = 0$ hasta $E = E_{F0}$ y $f(E) = 0$ para las demás energías. Entonces, la energía total E_{tot} de todos los N electrones es

$$E_{tot} = \int_0^{E_{F0}} Eg(E)(1)\,dE + \int_{E_{F0}}^{\infty} Eg(E)(0)\,dE = \int_0^{E_{F0}} Eg(E)\,dE$$

La forma más sencilla de evaluar esta ecuación es comparar las ecuaciones (42.15) y (42.19), observando que

$$g(E) = \frac{3NE^{1/2}}{2E_{F0}{}^{3/2}}$$

Al sustituir esta ecuación en la integral, y usando $E_{med} = E_{tot}/N$, se obtiene

$$E_{av} = \frac{3}{2E_{F0}{}^{3/2}} \int_0^{E_{F0}} E^{3/2}\,dE = \tfrac{3}{5}E_{F0} \qquad (42.21)$$

En el cero absoluto, la energía media de los electrones libres es igual a $\frac{3}{5}$ de la energía de Fermi.



Ejemplo 42.8 Gas de electrones libres en comparación con el gas ideal

a) Determine la energía media de los electrones libres en el cobre, en el cero absoluto (véase el ejemplo 42.7). *b*) ¿Cuál sería la energía cinética media de los electrones si se comportaran como un gas ideal a temperatura ambiente, 20°C? (Véase la sección 18.3). ¿Cuál sería la rapidez de un electrón con esa energía cinética? Compare estos valores de gas ideal con los valores (correctos) de los electrones libres.

Continúa

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: En un metal los electrones libres se comportan como un gas. En el inciso *a*) usaremos la ecuación (42.21) para determinar la energía cinética media de los electrones libres en términos de la energía de Fermi en el cero absoluto, la cual conocemos para el cobre por el ejemplo 42.7. En el inciso *b*) consideraremos a electrones como un gas ideal a temperatura ambiente: la ecuación (18.16) muestra la energía cinética media por electrón como $E_{med} = \frac{3}{2}kT$ y $E_{med} = \frac{1}{2}mv^2$ nos da la rapidez correspondiente v del electrón.

EJECUTAR: *a*) Según el ejemplo 42.7, la energía de Fermi en el cobre en el cero absoluto es 1.126×10^{-18} J = 7.03 eV. De acuerdo con la ecuación (42.21), la energía media es $\frac{3}{5}$ de la anterior, es decir, 6.76×10^{-19} J = 4.22 eV.

b) En el ejemplo 42.7 determinamos que $kT = 4.04 \times 10^{-21}$ J = 0.0254 eV, a temperatura ambiente, $T = 20°C = 293$ K. Si los electrones se comportaran como un gas ideal a esta temperatura, la energía cinética media por electrón sería $\frac{3}{2}$ de ese valor, o 6.07×10^{-21} J = 0.0379 eV. La rapidez de un electrón con esta energía cinética sería

$$v = \sqrt{\frac{2E_{med}}{m}} = \sqrt{\frac{2(6.07 \times 10^{-21}\ \text{J})}{9.11 \times 10^{-31}\ \text{kg}}} = 1.15 \times 10^5\ \text{m/s}$$

EVALUAR: El modelo del gas ideal predice una energía media aproximadamente del 1% del valor dado por el modelo del electrón libre, y una rapidez que es aproximadamente del 7% de la rapidez de Fermi del electrón libre $v_F = 1.57 \times 10^6$ m/s que se obtuvo en el ejemplo 42.7. Así, la temperatura desempeña un papel *muy* pequeño en la determinación de las propiedades de los electrones en los metales; sus energías medias están determinadas casi totalmente por el principio de exclusión.

Un análisis semejante nos permite determinar las aportaciones de los electrones a las capacidades caloríficas de un metal. Si hay un electrón de conducción por átomo, el principio de la equipartición de la energía (véase la sección 18.4) indicaría que las energías cinéticas de esos electrones aportan $3R/2$ a la capacidad calorífica molar a volumen constante, C_V. Pero cuando kT es mucho menor que E_F, lo cual suele ser el caso en los metales, solo los electrones que estén cerca del nivel de Fermi pueden encontrar estados vacíos, y cambiar de energía en forma apreciable cuando se modifica la temperatura. La cantidad de esos electrones es proporcional a kT/E_F, por lo que se esperaría que la capacidad calorífica molar de los electrones, a volumen constante, sea proporcional a $(kT/E_F)(3R/2) = (3kT/2E_F)R$. Un análisis más detallado demuestra que la contribución real de los electrones al C_V de un metal sólido es $(\pi^2kT/2E_F)R$, no muy apartada de nuestra estimación. Puede usted comprobar que si $T = 293$ K y $E_F = 7.03$ eV, la contribución de los electrones a C_V es $0.018R$, que solo es el 1.2% de la predicción $3R/2$ (incorrecta) basada en el principio de equipartición. Como la contribución de los electrones es tan pequeña, la capacidad calorífica general de la mayoría de los metales sólidos se debe principalmente a la vibración de los átomos en la estructura cristalina (véase la figura 18.18 en la sección 18.4).

Evalúe su comprensión de la sección 42.5 Un gas ideal cumple la ecuación $pV = nRT$ (véase la sección 18.1 vol. 1). Esto es, para determinado volumen V y cantidad de moles n, al bajar la temperatura T, la presión p disminuye en forma proporcional y tiende a cero cuando T tiende al cero absoluto. ¿Sucede lo mismo con el gas de electrones libres en un metal sólido? |



PhET: Semiconductors
PhET: Conductivity

42.6 Semiconductores

Un **semiconductor** tiene una resistividad eléctrica intermedia entre las de los buenos conductores y las de los buenos aislantes. La enorme importancia de los semiconductores en la electrónica actual se debe, en parte, al hecho de que sus propiedades eléctricas son muy sensibles a concentraciones muy pequeñas de impurezas. Describiremos los conceptos básicos, usando como ejemplos de elementos semiconductores al silicio (Si) y al germanio (Ge).

El silicio y el germanio están en el grupo IV de la tabla periódica. Ambos tienen cuatro electrones en sus subcapas atómicas externas ($3s^23p^2$ para el silicio, $4s^24p^2$ para el germanio) y ambos cristalizan en la estructura diamante, con enlaces covalentes, descrita en la sección 42.3 (figura 42.14). Como los cuatro electrones externos intervienen en los enlaces, en el cero absoluto la estructura de bandas (véase la sección 42.4) tiene una banda de conducción totalmente vacía (figura 42.19*b*). Como explicamos en la sección 42.4, a temperaturas muy bajas los electrones no pueden saltar desde la banda de valencia llena hasta la banda de conducción. Dicha propiedad hace que estos materiales sean aislantes a temperaturas muy bajas; sus electrones no tienen estados cercanos disponibles a los que puedan pasar como respuesta a un campo eléctrico aplicado.

Sin embargo, en los semiconductores el intervalo de energía prohibida E_g entre las bandas de valencia y de conducción es pequeña, en comparación con el intervalo de energía prohibida de 5 eV o más, para muchos aislantes; los valores a temperatura ambiente son 1.12 eV para el silicio y solo 0.67 eV para el germanio. Así, aun a temperatura ambiente, una cantidad apreciable de electrones puede ganar la energía suficiente como para saltar el intervalo de energía prohibida y llegar a la banda de conducción, donde se disocian de los átomos a los que pertenecían y quedan en libertad para moverse por todo el cristal. La cantidad de esos electrones aumenta rápidamente con la temperatura.



Ejemplo 42.9 Saltando el intervalo de energía prohibida

Un material tiene la estructura de bandas que se describió anteriormente, con su energía de Fermi a la mitad del intervalo de energía prohibida (figura 42.24). Calcule la probabilidad de que el estado en la parte inferior de la banda de conducción esté ocupado a $T = 300$ K, y compárela con la probabilidad a $T = 310$ K, para intervalos de energía prohibida de *a*) 0.200 eV; *b*) 1.00 eV; *c*) 5.00 eV.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: La función de distribución de Fermi-Dirac muestra la probabilidad de que se encuentre ocupado un estado de energía E a la temperatura T. La figura 42.24 muestra que el estado de interés en la parte inferior de la banda de conducción tiene una energía $E = E_F + E_g/2$, que es mayor que la energía de Fermi E_F, con $E - E_F = E_g/2$. La figura 42.23 muestra que, a mayor temperatura, mayor es la fracción de electrones con energías más altas que la energía de Fermi.

EJECUTAR: *a*) Cuando $E_g = 0.200$ eV,

$$\frac{E - E_F}{kT} = \frac{E_g}{2}\frac{0.100 \text{ eV}}{(8.617 \times 10^{-5} \text{ eV/K})(300 \text{ K})} = 3.87$$

$$f(E) = \frac{1}{e^{3.87} + 1} = 0.0205$$

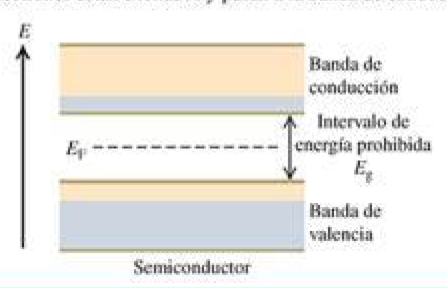
Para $T = 310$ K, el exponente es 3.74 y $f(E) = 0.0231$, un aumento de probabilidad del 13% para un aumento de temperatura de 10 K.

b) Cuando $E_g = 1.00$ eV, ambos exponentes son cinco veces más grandes que en el inciso *a*), concretamente, 19.3 y 18.7; los valores de $f(E)$ son 4.0×10^{-9} y 7.4×10^{-9}. En este caso, la (baja) probabilidad casi sube al doble con un aumento de temperatura de 10 K.

c) Cuando $E_g = 5.0$ eV, los exponentes son 96.7 y 93.6; los valores de $f(E)$ son 1.0×10^{-42} y 2.3×10^{-41}. La (extremadamente baja) probabilidad aumenta en un factor de 23 con un aumento de temperatura de 10 K.

EVALUAR: Este ejemplo ilustra dos aspectos importantes. Primero, la probabilidad de encontrar un electrón en un estado en la parte inferior de la banda de conducción es en extremo sensible al ancho del intervalo de energía prohibida. A temperatura ambiente, cuando el intervalo es 0.200 eV, la probabilidad es del 2% aproximadamente; para un intervalo de energía prohibida de 1.00 eV, la probabilidad es de pocas unidades en mil millones, y para un intervalo de energía prohibida de 5.00 eV es prácticamente cero. (El diamante puro, con un intervalo de energía prohibida de 5.47 eV, prácticamente no tiene electrones en la banda de conducción y es un excelente aislante). En segundo lugar, para cualquier intervalo de energía prohibida dado, la probabilidad depende mucho de la temperatura, más en intervalos grandes que en pequeños.

42.24 Estructura de bandas de un semiconductor. En el cero absoluto, una banda de valencia totalmente llena está separada por un intervalo de energía prohibida pequeño E_g, de 1 eV más o menos, de una banda de conducción totalmente vacía. A temperaturas ordinarias, varios electrones están excitados y pasan a la banda de conducción.

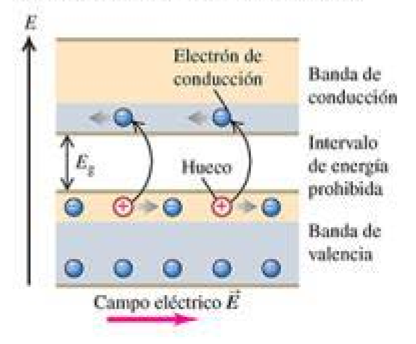


En principio podríamos continuar el cálculo del ejemplo 42.9 para determinar la densidad real, $n = N/V$, de los electrones en la banda de conducción a cualquier temperatura. Para hacerlo, habría que evaluar la integral $\int g(E)f(E)\,dE$ desde la parte inferior hasta la parte superior de la banda de conducción. Primero habría que conocer la función de densidad de estados, $g(E)$. No sería correcto usar la ecuación (42.15), porque la estructura de niveles de energía y la densidad de estados para sólidos reales son más complejas que las del modelo sencillo de electrones libres. No obstante, hay métodos teóricos para predecir cuál debería ser $g(E)$ cerca de la parte inferior de la banda de conducción, y se han hecho esos cálculos. Conociendo n podemos *comenzar* por determinar la resistividad del material (y su dependencia de la temperatura) usando el análisis de la sección 25.2, que quizá desee repasar el lector. Pero a continuación veremos que los electrones en la banda de conducción no dicen todo acerca de la conducción en los semiconductores.

Huecos

Cuando un electrón sale de un enlace covalente, deja tras de sí una vacante. Un electrón de un átomo vecino puede pasar a esa vacante y el átomo vecino se queda con la vacante. De esta forma, la vacante, llamada **hueco**, puede viajar por el material y servir como un portador adicional de corriente. Es como describir el movimiento de una burbuja en un líquido. En un semiconductor puro, *o intrínseco*, los huecos en la banda de valencia y los electrones en la banda de conducción siempre se encuentran en cantidades iguales. Cuando se aplica un campo eléctrico, se mueven en direcciones contrarias (figura 42.25). Así, un hueco en la banda de valencia se comporta como una partícula con carga positiva, aun cuando las cargas en movimiento en esa banda sean electrones. La conductividad que acabamos de describir, en un semiconductor

42.25 Movimiento de electrones en la banda de conducción, y de huecos en la banda de valencia de un semiconductor, bajo la acción de un campo eléctrico aplicado $\vec{E}$.



puro, se llama *conductividad intrínseca*. Otra clase de conductividad, que describiremos en la siguiente sección, se debe a las impurezas.

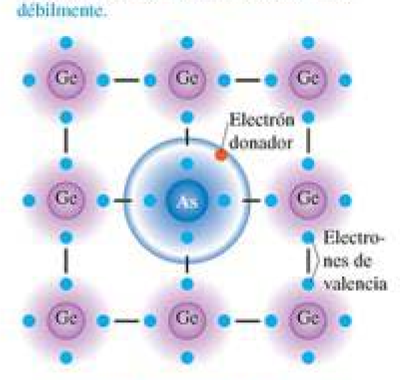
Con una analogía nos ayudamos a representar la conducción en un semiconductor intrínseco. La banda de valencia en el cero absoluto es como el piso de un estacionamiento, lleno de vehículos con sus parachoques uno tras otro (que representan los electrones). No se pueden mover, porque no hay a dónde ir. Pero si uno se mueve al piso vacío de arriba, lo hace con libertad, igual que los electrones que logran pasar libremente a la banda de conducción. También, el espacio que queda libre permite que los demás automóviles se muevan en el piso casi lleno, y de ese modo el espacio vacío se mueve, del mismo modo que los huecos se mueven en la banda de valencia normalmente llena.

Impurezas

Suponga que en cierta cantidad de germanio fundido ($Z = 32$) mezclamos una pequeña cantidad de arsénico ($Z = 33$), el elemento que sigue al germanio en la tabla periódica. Esta adición deliberada de elementos de impureza se llama *dopado*. El arsénico está en el grupo V; tiene *cinco* electrones de valencia. Cuando se quita uno de esos electrones, la estructura electrónica restante es esencialmente idéntica a la del germanio. La única diferencia es que es más pequeño; el núcleo del arsénico tiene una carga de $+33e$, y no de $+32e$, y atrae un poco más a los electrones. Un átomo de arsénico puede tomar sin problemas el lugar de un átomo de germanio, como impureza por sustitución. Cuatro de sus cinco electrones de valencia forman los enlaces covalentes necesarios con los vecinos más cercanos.

42.26 Un semiconductor tipo *n*.

a) Un átomo de impureza donador (tipo *n*) tiene un quinto electrón de valencia que no participa en el enlace covalente, y está enlazado muy débilmente.



b) Diagrama de bandas de energía para un semiconductor tipo *n* a baja temperatura. Se ha excitado un electrón donador, desde los niveles del donador hasta la banda de conducción.



El quinto electrón de valencia se enlaza débilmente (figura 42.26*a*); no participa en los enlaces covalentes y está apantallado por la carga nuclear de $+33e$ y por los 32 electrones, quedando una carga efectiva neta aproximada de $+e$. Podríamos suponer que la energía de enlace tendría el mismo orden de magnitud que la del nivel $n = 4$ en el átomo de hidrógeno, esto es, $(\frac{1}{4})^2(13.6\text{ eV}) = 0.85$ eV. De hecho, es mucho menor, aproximadamente 0.01 eV, porque la distribución de probabilidad electrónica se extiende por muchos diámetros atómicos, y la polarización de los átomos que participan brinda un apantallamiento adicional.

El nivel de energía de este quinto electrón corresponde en la representación de bandas a un nivel aislado de energía que se encuentra en el intervalo de energía prohibida, a 0.01 eV aproximadamente, abajo de la parte inferior de la banda de conducción (figura 42.26*b*). Este nivel se llama *nivel donador*, y el átomo responsable de esta impureza se llama *donador*. Todos los elementos del grupo V, incluyendo N, P, As, Sb y Bi pueden servir como donadores. A temperatura ambiente, kT es de unos 0.025 eV. Esto es bastante mayor que 0.01 eV, por lo que a temperaturas ordinarias, la mayoría de los electrones pueden ganar la energía suficiente como para saltar de los niveles del donador a la banda de conducción, donde quedan en libertad para vagar por el material. El donador ionizado queda en su sitio en la estructura, y no participa en la conducción.

El ejemplo 42.9 muestra que a temperaturas ordinarias, y con un intervalo de energía prohibida de 1.0 eV, solo una pequeña fracción (del orden de 10^{-9}) de los estados en la parte inferior de la banda de conducción, en un semiconductor puro, contiene electrones que participan en la conductividad intrínseca. Entonces, se esperaría que la conductividad de ese semiconductor sea aproximadamente 10^{-9} el valor de la conductividad de los buenos conductores metálicos, y las mediciones confirman esta predicción. Sin embargo, una concentración de donadores tan pequeña como una parte en 10^8 puede aumentar la conductividad en forma tan drástica que la conducción debida a impurezas se vuelve, con mucho, el mecanismo dominante. En este caso, la conductividad se debe casi totalmente al movimiento de cargas *negativas* (electrones). A este material se le llama **semiconductor tipo *n***, con impurezas tipo *n*.

Si se agregan átomos de un elemento del grupo III (B, Al, Ga, In, Tl) con solo *tres* electrones de valencia, se consigue un efecto análogo. Un ejemplo es el galio ($Z = 31$); como una impureza por sustitución en el germanio, el átomo de galio tiende a formar cuatro enlaces covalentes, pero solo tiene tres electrones externos. Sin embargo, puede robar un electrón de un átomo vecino de germanio, para completar los cuatro enlaces covalentes requeridos (figura 42.27*a*). El átomo que resulta tiene la misma configuración electrónica que el Ge, pero es algo mayor, porque la carga nuclear del galio es menor, $+31e$ en lugar de $+32e$.

Este robo deja al átomo vecino con un *hueco*, o ausencia de electrón. El hueco funciona como carga positiva que se puede mover a través del cristal, igual que en la conductividad intrínseca. El electrón robado está enlazado al átomo de galio, en un nivel llamado *nivel aceptor*, aproximadamente a 0.01 eV arriba de la parte superior de la banda de valencia (figura 42.27*b*). El átomo de galio, llamado *aceptor*, atrapa un electrón para satisfacer su tendencia de cuatro enlaces covalentes. Este electrón adicional comunica al átomo de galio, antes neutral, una carga neta $-e$. El ion de galio que resulta *no* tiene libertad de movimiento. En un semiconductor dopado con aceptores, se considera que la conductividad se debe casi por completo al movimiento de cargas *positivas* (huecos). Al material se le llama **semiconductor tipo *p***, con impurezas tipo *p*. Algunos semiconductores se dopan con impurezas de *ambos* tipos: tipo *n* y tipo *p*. A esos materiales se les llama semiconductores *compensados*.

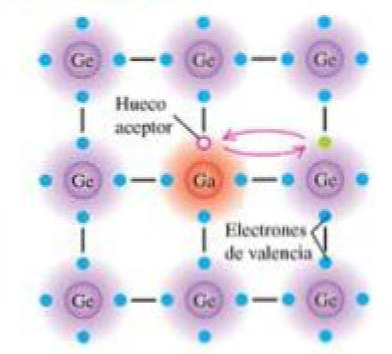
CUIDADO **El significado de "tipo *p*" y "tipo *n*"** Decir que un material es un semiconductor tipo *p* *no* quiere decir que el material tenga una carga positiva; normalmente sería neutro. Más bien, quiere decir que la *mayoría* de sus *portadores* de corriente son huecos positivos (y, en consecuencia, la *minoría* de sus *portadores* son electrones negativos). El mismo concepto es válido para un semiconductor tipo *n*; de ordinario *no* tiene una carga negativa, pero la mayoría de sus portadores son electrones negativos.

Podemos verificar la afirmación de que la corriente, en los semiconductores tipos *n* y *p*, en realidad sí es conducida por electrones y huecos, respectivamente, usando el efecto Hall (véase la sección 27.9). El signo de la fem de Hall es contrario en los dos casos. Los dispositivos de efecto Hall construidos con materiales semiconductores se usan en los sensores para medir campos magnéticos y las corrientes que los generan.

Evalúe su comprensión de la sección 42.6 ¿Habría alguna ventaja al agregar impurezas tipo *n* o tipo *p* al cobre? ¿Por qué?

42.27 Un semiconductor tipo *p*.

a) Una impureza (tipo *p*) es un átomo aceptor con solo tres electrones de valencia, por lo que puede solicitar prestado un electrón a un átomo vecino. El hueco que resulta se puede mover con libertad por el cristal.



b) Diagrama de bandas de energía de un semiconductor tipo *p* a baja temperatura. Un nivel aceptor atrapa un electrón de la banda de valencia, dejando atrás un hueco.

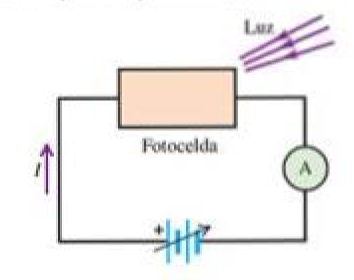


42.7 Dispositivos semiconductores

Los dispositivos semiconductores desempeñan un papel indispensable en la electrónica contemporánea. En los primeros días de la radio y la televisión, el equipo de transmisión y recepción se basaba en tubos de vacío, que han sido sustituidos casi totalmente en las últimas seis décadas por dispositivos de estado sólido, como transistores, diodos, circuitos integrados y otros dispositivos con semiconductores. Los únicos tubos de vacío que sobreviven en la electrónica del hogar son los cinescopios en los antiguos receptores de TV y en los monitores antiguos de computadora, pero aun estos se están sustituyendo rápidamente por pantallas planas.

Un dispositivo semiconductor sencillo es la *fotocelda* (figura 42.28). Cuando una placa delgada de semiconductor se irradia con una onda electromagnética cuyos fotones tienen, al menos, tanta energía como el intervalo de energía prohibida entre las bandas de valencia y de conducción, un electrón en la banda de valencia puede absorber un fotón y saltar a la banda de conducción, donde él y el agujero que dejó atrás contribuyen a la conductividad (véase el ejemplo 42.5, en la sección 42.4). En consecuencia, la conductividad aumenta con la intensidad de la onda, incrementando así la corriente I en el circuito de la fotocelda de la figura 42.28. Por lo tanto, la lectura del amperímetro indica la intensidad de la luz.

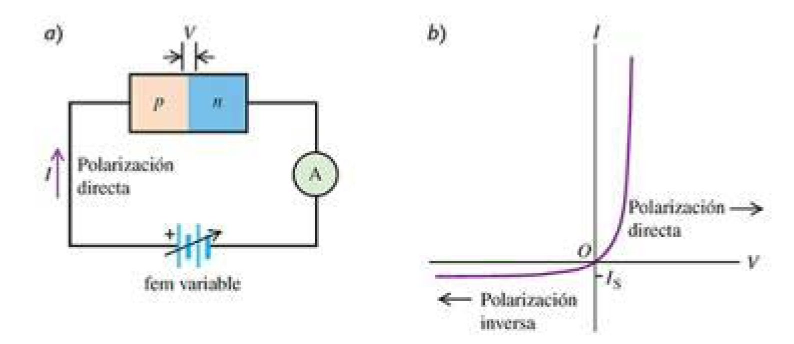
42.28 Fotocelda semiconductora en un circuito. Cuanto más intensa sea la luz que incide sobre la fotocelda, mayores serán la conductividad de la fotocelda y la corriente medida por el amperímetro (A).



Los detectores de partículas cargadas funcionan con el mismo principio. Un circuito externo aplica un voltaje a través de un semiconductor. Una partícula con carga eléctrica que pasa por el semiconductor choca en forma inelástica con los electrones de valencia y los excita haciéndolos pasar de la banda de valencia a la de conducción, formando pares de huecos y electrones conductores. La conductividad aumenta en forma momentánea, produciendo un impulso de corriente en el circuito externo. Los detectores de estado sólido se usan mucho en investigación nuclear y en la física de altas energías.

La unión *p*-*n*

En muchos dispositivos semiconductores, el principio esencial es que la conductividad del material está controlada por concentraciones de impurezas, que pueden variar



42.29 *a*) Unión *p-n* de un semiconductor en un circuito. *b*) Gráfica que muestra la relación asimétrica entre corriente y voltaje. La curva se describe con la ecuación (42.22).

dentro de límites amplios, de una región de un dispositivo a otra. Un ejemplo de esto es la **unión *p-n*** en la frontera entre una región de un semiconductor con impurezas tipo *p*, y otra región que contiene impurezas tipo *n*. Una forma de fabricar una unión *p-n* es depositar algo de material tipo *n* sobre la superficie *muy* limpia de algún material tipo *p*. (No solo se trata de unir piezas de tipo *p* y *n* y esperar que la unión trabaje bien, por la imposibilidad de hacer coincidir sus superficies a escala atómica).

Cuando una unión *p-n* se conecta con un circuito externo, como en la figura 42.29*a*, y la diferencia de potencial $V_p - V_n = V$ varía a través de la unión, la corriente I varía como se ve en la figura 42.29*b*. En notable contraste con el comportamiento simétrico de los resistores que obedecen la ley de Ohm y producen una recta en una gráfica *I-V*, una unión *p-n* conduce con mucha mayor facilidad en la dirección de *p* a *n* que a la inversa. A ese dispositivo (casi) unidireccional se le llama **diodo rectificador**. Después describiremos el comportamiento de la unión *p-n* de un modelo sencillo que pronostica una relación entre corriente y voltaje de la forma

$$I = I_S(e^{eV/kT} - 1) \qquad \text{(corriente a través de una unión } p\text{-}n\text{)} \qquad (42.22)$$

En el exponente, $e = 1.602 \times 10^{-19}$ C es el cuanto de carga, k es la constante de Boltzmann y T es la temperatura absoluta.

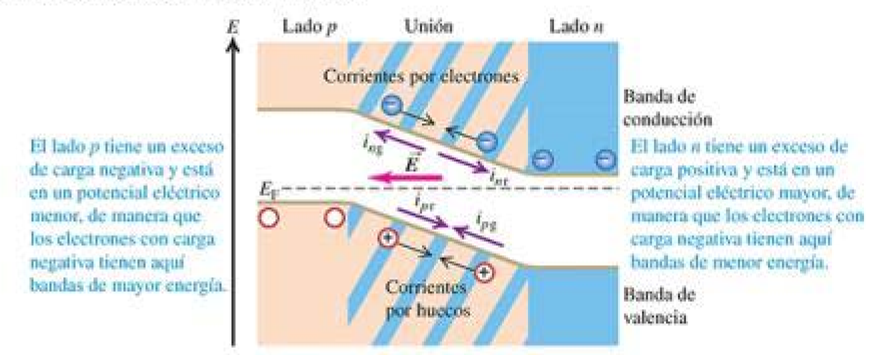
CUIDADO **Dos usos diferentes de e** En $e^{eV/kT}$, la base del exponente también tiene el símbolo e, que representa la base de los logaritmos naturales, 2.71828... Esta e es muy distinta de $e = 1.602 \times 10^{-19}$ C en el exponente.

La ecuación (42.22) es válida para valores tanto positivos como negativos de V; observe que V e I tienen siempre el mismo signo. Cuando V se vuelve muy negativo, I tiende al valor $-I_S$. La magnitud I_S (siempre positiva) se llama *corriente de saturación*.

Corrientes a través de una unión *p-n*

Podemos entender el comportamiento de un diodo de unión *p-n* en forma cualitativa, con base en los mecanismos de la conductividad en las dos regiones. Suponga, como en la figura 42.29*a*, que se conecta la terminal positiva de una batería a la región *p*, y la terminal negativa a la región *n*. Entonces, la región *p* está a mayor potencial que la región *n*, lo que corresponde a una V positiva en la ecuación (42.22) y el campo eléctrico resultante tiene la dirección de *p* a *n*. A esto se le llama dirección *en sentido directo*, y a la diferencia de potencial positiva se le llama *polarización directa*. Los huecos, abundantes en la región *p* atraviesan con facilidad la unión y entran a la región *n*; en tanto que los electrones libres, abundantes en la región *n*, pasan con facilidad a la región *p*; esos movimientos de la carga constituyen una corriente *en sentido directo*. Al conectar la batería con polaridad opuesta se obtiene una *polarización inversa*, y el campo tiende a impulsar los electrones de *p* a *n*, y a los huecos de *n* a *p*. Pero hay muy pocos electrones libres en la región *p*, y muy pocos huecos en la región *n*. El resultado es que la corriente en dirección *inversa* es mucho menor de la que produce el mismo potencial en el sentido directo.

42.30 Una unión *p-n* en equilibrio, sin campo ni diferencia de potencial externamente aplicados. Las corrientes de generación y recombinación se equilibran exactamente. La energía de Fermi E_F es igual en ambos lados de la unión. Los excesos de carga positiva y negativa en los lados *n* y *p* producen un campo eléctrico $\vec{E}$ en la dirección indicada.



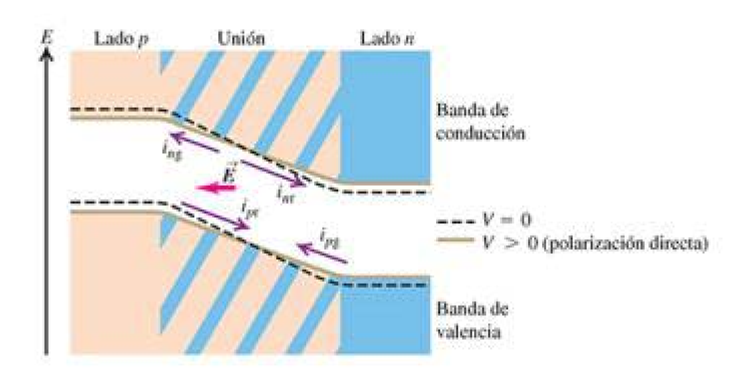
Suponga que hay una caja con una barrera que separa su lado izquierdo del derecho. El lado izquierdo se llena con oxígeno gaseoso; y el lado derecho, con nitrógeno gaseoso. ¿Qué sucede si la barrera tiene fugas? El oxígeno se difunde hacia la derecha y el nitrógeno se difunde hacia la izquierda. Una difusión parecida sucede a través de una unión *p-n*. Primero examinemos el caso de equilibrio, sin voltaje aplicado (figura 42.30). Los huecos abundantes en la región *p* funcionan como el hueco del gas que se difunde atravesando la unión y penetrando en la región *n*. Una vez ahí, los huecos se recombinan con algunos de los muchos electrones libres. Asimismo, los electrones se difunden de la región *n* hacia la región *p*, y caen en algunos de los muchos huecos que hay ahí. Las corrientes de difusión de huecos y electrones producen una carga positiva neta en la región *n* y una carga negativa neta en la región *p*, generando así un campo eléctrico en la unión, con dirección de *n* a *p*. La energía potencial asociada con este campo eleva los niveles de energía de los electrones en la región *p*, en relación con los mismos niveles en la región *n*.

Como se indica, en la unión hay cuatro corrientes que la cruzan. Los procesos de difusión originan las *corrientes de recombinación* de huecos y electrones, identificadas con i_{pr} e i_{nr} en la figura 42.30. Al mismo tiempo, se generan pares de electrón-hueco en la región de la unión, por excitación térmica. El campo eléctrico que describimos arriba barre estos electrones y huecos, y los saca de la unión; los electrones son barridos en dirección contraria al campo, hacia el lado *n*; mientras que los huecos son barridos en la misma dirección que la del campo, hacia el lado *p*. Las corrientes correspondientes, llamadas *corrientes de generación*, se identifican con i_{pg} e i_{ng}. En el equilibrio, las magnitudes de las corrientes de generación y de recombinación son iguales:

$$|i_{pg}| = |i_{pr}| \quad \text{y} \quad |i_{ng}| = |i_{nr}| \tag{42.23}$$

En el equilibrio térmico, la energía de Fermi es igual en cada punto a través de la unión.

Ahora se aplica una polarización en sentido directo, esto es, una diferencia positiva de potencial V a través de la unión. Una polarización directa *disminuye* el campo eléctrico en la región de la unión. También disminuye la diferencia entre los niveles de energía en los lados *p* y *n* (figura 42.31) en una cantidad $\Delta E = -eV$. A los elec-



42.31 Una unión *p-n* en condiciones de polarización directa. La diferencia de potencial entre las regiones *p* y *n* se reduce, al igual que el campo eléctrico dentro de la unión. Las corrientes de recombinación aumentan, pero las de generación son casi constantes, ocasionando una corriente neta de izquierda a derecha. (Compare con la figura 42.30).

trones de la región n se les facilita la subida de la colina de energía potencial y difundirse en la región p; y a los huecos en la región p, difundirse en la región n. Este efecto aumenta tanto las corrientes de recombinación en el factor de Maxwell-Boltzmann $e^{-\Delta E/kT} = e^{eV/kT}$. (No hay que usar la distribución de Fermi-Dirac, porque la mayoría de los estados disponibles para los electrones y los huecos que se difunden están vacíos, por lo que el principio de exclusión tiene poco efecto). Las corrientes de generación no cambian en forma apreciable, por lo que la corriente por huecos neta es

$$\begin{aligned} i_{p\text{tot}} &= i_{pr} - |i_{pg}| \\ &= |i_{pg}|e^{eV/kT} - |i_{pg}| \\ &= |i_{pg}|(e^{eV/kT} - 1) \end{aligned} \tag{42.24}$$

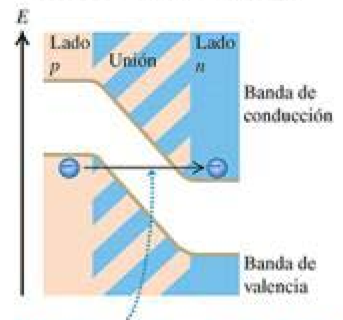
La corriente por electrones neta $i_{n\text{tot}}$ se calcula con una ecuación similar, por lo que la corriente total $I = i_{p\text{tot}} + i_{n\text{tot}}$ es

$$I = I_S(e^{eV/kT} - 1) \tag{42.25}$$

de acuerdo con la ecuación (42.22). Todo este análisis se puede repetir para la polarización inversa (V e I negativas) con el mismo resultado. Por consiguiente, la ecuación (42.22) es válida para valores positivos y negativos.

Algunos factores complican el comportamiento de los diodos de unión p-n en la práctica más de lo que indica este análisis sencillo. Hay un efecto, la *ruptura por avalancha*, cuando la polarización inversa es grande. El campo eléctrico en la unión es tan grande que los portadores pueden adquirir la energía suficiente, entre choques, para formar pares de electrón-hueco durante choques inelásticos. Entonces, los electrones y los huecos pueden ganar energía y chocar para formar más pares, y así sucesivamente. (Un efecto parecido sucede en la falla o ruptura del dieléctrico en los aislantes, que describimos en la sección 42.4).

42.32 En condiciones de polarización inversa, la diferencia de energía potencial entre los lados p y n de una unión es mayor que en el equilibrio. Si esta diferencia es suficientemente grande, la parte inferior de la banda de conducción en el lado n puede en realidad estar abajo de la parte superior de la banda de valencia en el lado p.



Una segunda clase de falla se inicia cuando la polarización inversa es suficientemente grande para que la parte superior de la banda de valencia en la región p tenga apenas mayor energía, que el fondo de la banda de conducción en la región n (figura 42.32). Si la región de la unión es suficientemente delgada, son grandes las probabilidades para que los electrones *atraviesen* cuánticamente la banda de valencia de la región p, a la banda de conducción de la región n. A este proceso se le llama *ruptura de Zener*. Se presenta en los diodos Zener, muy usados en regulación de voltaje y protección contra aumentos de voltaje repentinos.

Dispositivos semiconductores y luz

Un *diodo emisor de luz* (LED, por las siglas de *light-emitting diode*) es un diodo de unión p-n que emite luz. Cuando la unión se polariza en sentido directo, muchos huecos son impulsados desde su región p hacia la región de la unión, y muchos electrones son impulsados desde su región n hacia la región de la unión. En la región de la unión, los electrones caen en huecos (se recombinan). Al recombinarse, el electrón puede emitir un fotón de energía aproximadamente igual al intervalo de energía prohibida. Esta energía (y, por consiguiente, la longitud de onda del fotón y el color de la luz) se puede variar, usando materiales con intervalos de energía prohibida diferentes. Los diodos emisores de luz son fuentes de luz con alta eficiencia de energía, y tienen muchas aplicaciones como faros para automóviles, semáforos y pantallas grandes en los estadios.

Aplicación Ingerir un dispositivo semiconductor
Esta pequeña cápsula, diseñada para ser ingerida por un paciente, contiene una cámara en miniatura con un detector de luz CCD, además de seis diodos emisores de luz (LED) para iluminar el objetivo. La cápsula envía imágenes de alta resolución a una unidad de registro externa conforme pasa sin provocar dolor a través del estómago e intestinos del paciente. Esta técnica hace posible examinar el intestino delgado, el cual no es fácilmente accesible con la endoscopia tradicional.



El proceso inverso se llama *efecto fotovoltaico*. En él, el material absorbe fotones y se crean pares de electrón-hueco. Los pares creados en la unión p-n, o lo bastante cercanos para migrar hacia ella sin recombinarse, se separan por el campo eléctrico descrito anteriormente, que barre los electrones hacia el lado n, y a los agujeros hacia el lado p. Este dispositivo se puede conectar con un circuito externo, con lo que se transforma en una fuente fem y produce una potencia. A un dispositivo de estos se le llama con frecuencia *celda solar*, aunque no se requiera la luz solar. *Cualquier* luz con un fotón de energía mayor que el intervalo de energía prohibida da este resultado. Podría ser que el lector tenga una calculadora energizada con esas celdas. La producción de celdas fotovoltaicas de bajo costo para conversión de energía solar en gran escala es un campo de investigación muy activo. Los mismos fenómenos físicos básicos se usan en los detectores de imagen con dispositivo de carga acoplada (CCD, de *charge-coupled device*), cámaras digitales y cámaras de video.

Transistores

Un *transistor de unión bipolar* contiene dos uniones *p-n* configuradas en un "emparedado", que puede ser *p-n-p* o bien *n-p-n*. El transistor *p-n-p* se muestra en la figura 42.33. Como se indica, estas tres regiones se llaman emisor, base y colector. Cuando no hay corriente en la malla izquierda del circuito, solo hay una corriente muy pequeña que pasa por el resistor R, ya que el voltaje a través de la unión entre base y colector tiene dirección en sentido inverso. Pero cuando se aplica una polarización directa entre el emisor y la base, como se muestra, la mayoría de los huecos que van del emisor a la base *atraviesan* la base (que por lo general es angosta y a la vez ligeramente dopada) y van a la segunda unión, donde llegan bajo la influencia de la diferencia de potencial entre colector y base, y pasan por el colector produciendo mayor corriente en el resistor.

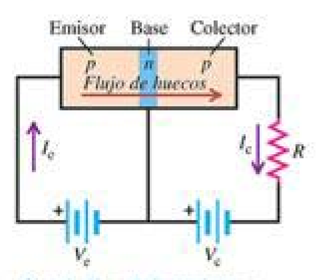
De esta forma se *controla* la corriente en el circuito del colector, mediante la corriente en el circuito del emisor. Además, V_c puede ser bastante mayor que V_e, por lo que la *potencia* disipada en R puede ser mucho mayor que la suministrada al circuito emisor por la batería V_e. Así, el dispositivo funciona como *amplificador de potencia*. Si la caída de potencial a través de R es mayor que V_e, también puede ser un amplificador de voltaje.

En esta configuración, la *base* es el elemento común entre los lados de "entrada" y "salida" del circuito. Otro arreglo que se usa mucho es el circuito con *emisor común*, de la figura 42.34. En él, la corriente en el lado del colector es mucho mayor que la del lado de la base en el circuito, y el resultado es la amplificación de corriente.

El *transistor de efecto de campo* (figura 42.35) es muy importante. En una variación, se forma una placa de silicio tipo *p* con dos regiones tipo *n* en la parte superior, llamadas *fuente* y *drenador*; a cada una se conecta un conductor metálico. Un tercer electrodo, llamado *compuerta*, está separado de la placa, la fuente y la compuerta mediante una capa de SiO_2 aislante. Cuando no hay carga en la compuerta y se aplica una diferencia de potencial de cualquier polaridad entre la fuente y el drenador, hay muy poca corriente porque una de las uniones *p-n* tiene polarización inversa.

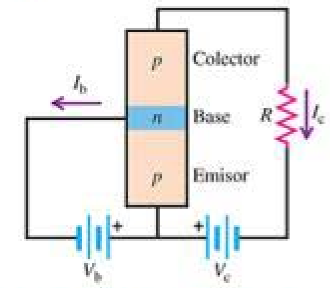
Ahora se conecta una carga positiva a la compuerta. Como tiene dimensiones del orden de 10^{-6} m, necesita escasa carga para desarrollar un campo eléctrico apreciable. Así, hay muy poca corriente que entre o salga por la compuerta. No hay muchos electrones libres en el material tipo *p*, aunque hay algunos, y el efecto del campo es atraerlos hacia la compuerta positiva. La concentración de electrones muy amplificada que resulta cerca de la compuerta (y entre las dos uniones) permite que la corriente pase entre la fuente y el drenador. La corriente es muy sensible a la carga y al potencial de la compuerta, y el dispositivo funciona como amplificador. Al dispositivo que acabamos de describir se le llama *MOSFET de enriquecimiento* (MOSFET, por las siglas de *metal-oxide-semiconductor field-effect transistor*, que significa transistor de efecto de campo metal-óxido-semiconductor).

42.33 Esquema de un transistor *p-n-p* con su circuito.



- Cuando $V_e = 0$, la corriente es muy pequeña.
- Cuando se aplica un potencial V_e entre el emisor y la base, los huecos viajan del emisor a la base.
- Cuando V_c es suficientemente grande, la mayoría de los huecos continúa y penetra en el colector.

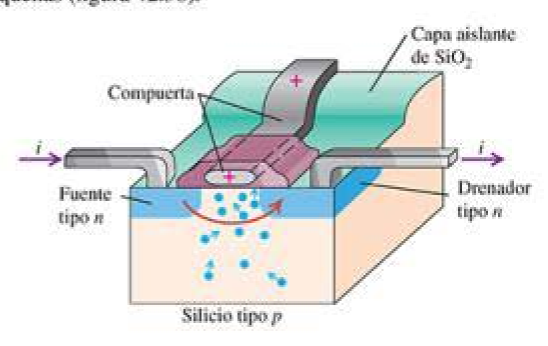
42.34 Un circuito con emisor común.



- Emisor $V_b = 0$, I_c es muy pequeña, y la mayor parte del voltaje V_c aparece en la unión entre base y colector.
- Al aumentar V_b disminuye el potencial entre base y colector, y se pueden difundir más huecos en el colector, por lo que aumenta I_c. De ordinario, I_c es mucho mayor que I_b.

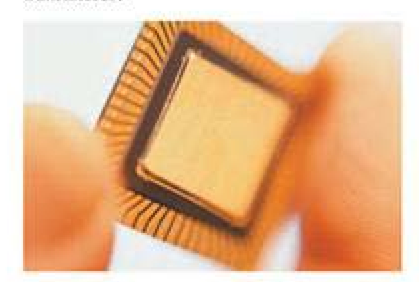
Circuitos integrados

Un refinamiento más en la tecnología de semiconductores es el *circuito integrado*. Al depositar consecutivamente capas de material con grabados y patrones para definir las trayectorias de la corriente, se pueden combinar las funciones de varios MOSFET, capacitores y resistores en un solo cuadro de material semiconductor, que puede tener unos pocos milímetros por lado. Un desarrollo de este concepto conduce a los *circuitos integrados en gran escala*. Los chips resultantes de este circuito integrado son el corazón de todas las calculadoras de bolsillo y las computadoras actuales, sean grandes o pequeñas (figura 42.36).



42.35 Un transistor de efecto de campo. La corriente de la fuente al drenador se controla con la diferencia de potencial entre fuente y drenador, y por la carga en la compuerta; no pasa corriente por la compuerta.

42.36 Un circuito integrado del tamaño de su pulgar puede contener millones de transistores.



Los primeros dispositivos semiconductores se inventaron en 1947. Desde entonces, han revolucionado por completo la industria de la electrónica, gracias a su miniaturización, confiabilidad, rapidez, consumo de energía y costo. Tienen aplicación en las comunicaciones, los sistemas de cómputo, los sistemas de control y muchas otras áreas. Al transformar estas áreas, han tenido repercusiones en la civilización misma.

Evalúe su comprensión de la sección 42.7 Suponga que en la compuerta del MOSFET de la figura 42.35 se aplica una carga negativa. ¿Pasará una corriente apreciable entre la fuente y el drenador? ❙

42.8 Superconductividad

La superconductividad es la desaparición total de la resistencia eléctrica a bajas temperaturas. Ya describimos esta propiedad al terminar la sección 25.2, y las propiedades magnéticas de los superconductores de tipo I y de tipo II en la sección 29.8. En esta sección, relacionaremos la superconductividad con la estructura y el modelo de bandas de energía de un sólido.

Aunque la superconductividad fue descubierta en 1911, no se comprendió bien en el aspecto teórico sino hasta 1957. En ese año, los físicos estadounidenses John Bardeen, Leon Cooper y Robert Schrieffer publicaron la teoría de la superconductividad, que hoy se llama teoría BCS, y que les valió el Premio Nobel de Física en 1972. (Fue el segundo Premio Nobel para Bardeen; compartió su primer premio, por sus trabajos sobre el desarrollo del transistor). La clave de la teoría BCS es una interacción entre *pares* de electrones, llamados *pares de Cooper*, debido a una interacción con los iones positivos del cristal. A continuación se describe una imagen cualitativa aproximada de lo que sucede. Un electrón libre ejerce fuerzas de atracción sobre los iones positivos cercanos, tirando de ellos y acercándolos un poco. La ligera concentración de carga positiva que se produce, ejerce entonces una fuerza de atracción sobre otro electrón libre, cuya cantidad de movimiento es contraria a la del primero. A temperaturas ordinarias, esta interacción entre el par de electrones es muy pequeña, en comparación con las energías de los movimientos térmicos, pero a temperaturas muy bajas se vuelve importante.

Ligados entre sí de esta forma, los pares de electrones no pueden ganar o perder *en forma individual* cantidades muy pequeñas de energía, como sucede comúnmente en una banda de conducción parcialmente llena. Su apareamiento produce un intervalo de energía prohibida en los niveles electrónicos cuánticos permitidos, y a bajas temperaturas no hay energía por colisión suficiente para que salten esa banda. En consecuencia, los electrones se pueden mover con libertad a través del cristal, sin intercambiar energía alguna por choques; esto es, se mueven con resistencia cero.

Los investigadores aún no logran un consenso acerca de si alguna modificación de la teoría BCS puede explicar las propiedades de los superconductores con alta T_C, que se han descubierto desde 1986. *Sí* hay pruebas de apareamiento, pero de una clase diferente al de los superconductores convencionales. Además, el mecanismo original de apareamiento de la teoría BCS parece demasiado débil para explicar este fenómeno de altas temperaturas de transición y grandes campos críticos de los nuevos superconductores.

RESUMEN



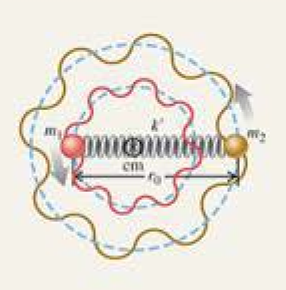
Enlaces y espectros moleculares: Los tipos principales de enlaces moleculares son iónico, covalente, de Van der Waals y puentes de hidrógeno. En una molécula diatómica, los niveles de energía de rotación están dados por la ecuación (42.3), donde I es el momento de inercia de la molécula, m_r es su masa reducida y r_0 es la distancia entre los dos átomos. Los niveles de energía de vibración están dados por la ecuación (42.7), donde k' es la constante de fuerza efectiva de la interacción interatómica. (Véase los ejemplos 42.1 a 42.3).

$$E_l = l(l+1)\frac{\hbar^2}{2I} \quad (l = 0, 1, 2, \ldots) \qquad (42.3)$$

$$I = m_r r_0^2 \qquad (42.6)$$

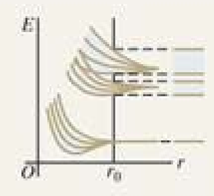
$$m_r = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \qquad (42.4)$$

$$E_n = \left(n + \tfrac{1}{2}\right)\hbar\omega = \left(n + \tfrac{1}{2}\right)\hbar\sqrt{\frac{k'}{m_r}} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots) \qquad (42.7)$$



Sólidos y bandas de energía: Los enlaces interatómicos en los sólidos son de los mismos tipos que en las moléculas, con un ingrediente adicional, el enlace metálico. Al asociar la base con cada punto de red se obtiene la estructura cristalina. (Véase el ejemplo 42.4).

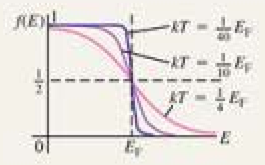
Cuando los átomos interaccionan entre sí en la materia condensada, sus niveles externos de energía forman bandas. En el cero absoluto, los aislantes y los conductores tienen una banda de valencia totalmente llena, separada por un intervalo de energía prohibida, de la banda de conducción que se encuentra vacía. Los conductores, incluyendo los metales, tienen bandas de conducción parcialmente llenas. (Véase el ejemplo 42.5).



Modelo de los electrones libres de los metales: En el modelo de electrones libres para conductores, se considera que los electrones son partículas totalmente libres dentro del conductor. En este modelo, la densidad de estados se determina con la ecuación (42.15). La probabilidad de que un estado de energía E esté ocupado se determina con la distribución de Fermi-Dirac, ecuación (42.16), que es una consecuencia del principio de exclusión. En la ecuación (42.16), E_F es la energía de Fermi. (Véase los ejemplos 42.6 a 42.8).

$$g(E) = \frac{(2m)^{3/2}V}{2\pi^2\hbar^3}E^{1/2} \qquad (42.15)$$

$$f(E) = \frac{1}{e^{(E-E_F)/kT} + 1} \qquad (42.16)$$

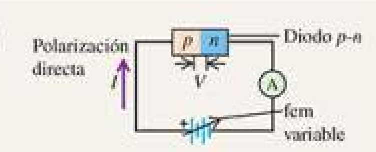


Semiconductores: Un semiconductor tiene un intervalo de energía prohibida aproximadamente de 1 eV entre sus bandas de valencia y de conducción. Sus propiedades eléctricas pueden cambiar en forma drástica por la adición de pequeñas concentraciones de impurezas donadoras, obteniéndose así un semiconductor tipo n; o con impurezas aceptoras, obteniéndose un semiconductor tipo p. (Véase el ejemplo 42.9).



Dispositivos semiconductores: Muchos dispositivos semiconductores, que incluyen diodos, transistores y circuitos integrados, usan una o más uniones p-n. La relación entre corriente y voltaje de un diodo de unión p-n ideal se define con la ecuación (42.22).

$$I = I_S\left(e^{eV/kT} - 1\right) \qquad (42.22)$$





PROBLEMA PRÁCTICO Detección de fotones infrarrojos

A una temperatura de 80 K, la banda de energía prohibida en un semiconductor de antimoniuro de indio (InSb) es 0.230 eV. Un fotón emitido por una molécula de fluoruro de hidrógeno (HF) que experimenta una transición vibración-rotación de $(n = 1, l = 0)$ a $(n = 0, l = 1)$ es absorbido por un electrón que se encuentra en la parte superior de la banda de valencia del InSb. *a*) ¿Qué tan arriba de la parte superior del intervalo de energía prohibida (en eV) se encuentra el estado final del electrón? *b*) ¿Cuál es la probabilidad de que el estado final esté ocupado? La frecuencia de vibración de HF es 1.24×10^{14} Hz, la masa del átomo de hidrógeno es 1.67×10^{-27} kg, la masa de un átomo de flúor es 3.15×10^{-26} kg, y la distancia de equilibrio entre los dos núcleos es 0.092 nm. Suponga que la energía de Fermi para el InSb está a la mitad del intervalo de energía prohibida.

GUÍA DE SOLUCIÓN

Véase el área de estudio MasteringPhysics® para consultar una solución con Video Tutor.



IDENTIFICAR y PLANTEAR

1. Este problema involucra las transiciones moleculares estudiadas en la sección 42.2, acerca de la distribución Fermi-Dirac de la sección 42.5, y la relación con semiconductores de la sección 42.6.
2. La ecuación (42.9) muestra la relación entre la energía combinada de rotación-vibración de los estados moleculares inicial y final. La diferencia entre las energías moleculares inicial y final es igual a la energía E del fotón emitido, la cual resulta ser igual a la ganada por el electrón de valencia del InSb cuando absorbe ese fotón. La probabilidad de que el estado final se encuentre ocupado está dada por la distribución de Fermi-Dirac, ecuación (42.16).

EJECUTAR

3. Antes de usar la ecuación (42.9), necesita usar primero los datos que se proporcionan para calcular el momento de inercia I y la cantidad $\hbar\omega$ de la molécula HF. (*Sugerencia:* Tenga cuidado de no confundir la frecuencia f con la frecuencia angular ω).
4. Use los resultados del paso 3 para calcular las energías inicial y final de la molécula de HF. (*Sugerencia:* ¿La energía vibratoria aumenta o disminuye? ¿Y la energía rotacional?).
5. Use los resultados del paso 4 para obtener la energía transmitida al electrón del InSb. Determine la energía final de este electrón en relación con la parte inferior de la banda de conducción.
6. Use el resultado del paso 5 para determinar la probabilidad de que el estado final en el InSb realmente se encuentre ocupado.

EVALUAR

7. ¿La transición molecular de la molécula de HF está permitida? ¿Qué es mayor, el cambio en la energía vibratoria o el cambio en la energía rotacional?
8. ¿Cuál es la probabilidad de que el electrón excitado del InSb esté impedido para entrar a un estado en la banda de conducción?

Problemas

Para tareas asignadas por el profesor, visite www.masteringphysics.com



•, ••, •••: Problemas de dificultad creciente. **PA**: Problemas acumulativos que incorporan material de capítulos anteriores. **CALC**: Problemas que requieren cálculo. **BIO**: Problemas de ciencias biológicas.

PREGUNTAS PARA ANÁLISIS

P42.1 Los enlaces iónicos se deben a la atracción eléctrica entre partículas con carga opuesta. ¿Hay otras clases de enlaces moleculares, también de naturaleza eléctrica o interviene alguna otra interacción? Explique su respuesta.

P42.2 En los enlaces iónicos, un electrón es transferido de un átomo a otro, por lo que ya no "pertenece" al átomo de donde partió. ¿Hay transferencias similares de pertenencia de electrones en otras clases de enlaces moleculares? Explique su respuesta.

P42.3 Los enlaces de Van der Waals se forman en muchas moléculas, pero los puentes de hidrógeno solo se forman en materiales que contienen hidrógeno. ¿Por qué este tipo de enlace es exclusivo del hidrógeno?

P42.4 Se dice que el enlace del arseniuro de galio (GaAs) es 31% iónico y 69% covalente. Explique por qué.

P42.5 La molécula H_2^+ consiste en dos núcleos de hidrógeno y un solo electrón. ¿Qué clase de enlace molecular cree usted que mantiene unida esta molécula? Explique su respuesta.

P42.6 El momento de inercia con respecto a un eje que pasa por el centro de masa de una molécula diatómica, calculado a partir de la longitud de onda emitida en una transición $l = 19 \rightarrow l = 18$, es diferente del calculado con el fotón emitido en una transición $l = 1 \rightarrow l = 0$. Explique esta diferencia. ¿Qué transición corresponde al momento de inercia mayor?

P42.7 El análisis del espectro de absorción de fotones de una molécula diatómica muestra que los niveles de energía de vibración, para pequeños valores de n, están a distancias casi iguales, pero los niveles para n grande no están a distancias iguales. Describa la causa de esta observación. ¿Espera usted que los niveles adyacentes se acerquen o se alejen cuando n aumenta? Explique su respuesta.

P42.8 Describa las diferencias entre los niveles de energía de rotación y de vibración de la molécula de deuterio ("hidrógeno pesado") D_2, y los de la molécula de hidrógeno ordinario H_2. Un átomo de deuterio tiene doble masa en comparación con la de un átomo de hidrógeno ordinario.

P42.9 Se han descubierto varias moléculas orgánicas en el espacio interestelar. ¿Por qué tales descubrimientos se lograron con radiotelescopios en lugar de telescopios ópticos?

P42.10 El aire que usted respira contiene principalmente nitrógeno (N_2) y oxígeno (O_2). Muchas de esas moléculas se encuentran en niveles excitados de energía de rotación ($l = 1, 2, 3, \ldots$), pero casi todas están en el nivel vibratorio fundamental ($n = 0$). Explique esta diferencia en el comportamiento rotatorio y vibratorio de las moléculas.

P42.11 ¿Cuándo algunos átomos de una molécula diatómica se comportan como si estuvieran unidos por un resorte? ¿En qué aspectos es inadecuada esta descripción de la interacción entre los átomos?

P42.12 Los átomos individuales tienen niveles de energía discretos, pero ciertos sólidos (que solo están formados por átomos individuales) muestran bandas de energía e intervalos de energía prohibida. ¿Qué provoca que los sólidos se comporten de manera tan diferente con respecto a los átomos que los componen?

P42.13 ¿Qué factores determinan si un material es conductor eléctrico o aislante? Explique su respuesta.

P42.14 A menudo los cristales iónicos son transparentes, mientras que los cristales metálicos siempre son opacos. ¿Por qué?

P42.15 La rapidez de las moléculas en un gas varía con la temperatura, mientras que la de los electrones en la banda de conducción de un metal es casi independiente de la temperatura. ¿Por qué son tan distintos tales comportamientos?

P42.16 Use el modelo de bandas para explicar cómo es posible que ciertos materiales experimenten una transición de semiconductor a metal al variar la temperatura o la presión.

P42.17 Un átomo aislado de zinc tiene una configuración electrónica en el estado base con subcapas $1s$, $2s$, $2p$, $3s$, $3p$ y $4s$ llenas. ¿Cómo puede ser conductor el zinc si su subcapa de valencia está llena?

P42.18 El *modelo del electrón libre* en los metales quizá parezca ilógica, ya que los electrones ejercen entre sí fuerzas eléctricas poderosas. Mencione algunas razones de ¿por qué dichas suposiciones en realidad tienen sentido físico?

P42.19 ¿Por qué los materiales que son buenos conductores de calor también son buenos conductores de electricidad? ¿Qué clase de problemas genera esto en el diseño de electrodomésticos como planchas para ropa y calentadores eléctricos? ¿Hay materiales que no sigan esta regla general?

P42.20 ¿Cuál es la característica esencial para que un elemento sirva como impureza donadora en un semiconductor, como el Si o el Ge? ¿Y para que sirva como impureza aceptora? Explique su respuesta.

P42.21 Hay varios métodos para sacar electrones de la superficie de un semiconductor. ¿Pueden sacarse huecos de la superficie? Explique su respuesta.

P42.22 Un estudiante asegura que el silicio y el germanio se vuelven buenos aislantes a temperaturas muy bajas, y buenos conductores a temperaturas muy altas. ¿Está usted de acuerdo? Explique su razonamiento.

P42.23 La conductividad eléctrica de la mayoría de los metales disminuyen en forma gradual al aumentar la temperatura, pero la conductividad intrínseca de los semiconductores *aumenta* siempre y con rapidez al incrementarse la temperatura. ¿Cuál es la razón de esta diferencia?

P42.24 ¿Cómo podría fabricar silicio compensado que tuviera doble cantidad de aceptores que de donadores?

P42.25 Para partes electrónicas como los amplificadores, ¿cuáles son algunas ventajas de los transistores, en comparación con los tubos de vacío? ¿Cuáles son algunas desventajas? ¿Hay muchos casos en los cuales los tubos de vacío *no se pueden* sustituir por dispositivos de estado sólido? Explique su respuesta.

P42.26 ¿Por qué el tunelamiento limita la miniaturización de los MOSFET?

P42.27 La corriente de saturación I_S de una unión *p-n*, ecuación (42.22), depende mucho de la temperatura. Explique por qué.

EJERCICIOS

Sección 42.1 Tipos de enlaces moleculares

42.1 • Si la energía en el enlace covalente del H_2 es de −4.48 eV, ¿cuál es la longitud de onda de la luz que se necesita para separar la molécula? ¿En qué parte del espectro electromagnético se encuentra esta luz?

42.2 • **Un enlace iónico.** *a*) Calcule la energía potencial eléctrica de un ion K^+ y un ion Br^- separados una distancia de 0.29 nm, que es la separación de equilibrio de la molécula de KBr. Considere que los iones son cargas puntuales. *b*) La energía de ionización del átomo de potasio es 4.3 eV. El bromo atómico tiene una afinidad electrónica de 3.5 eV. Con estos datos y los resultados del inciso *a*) estime la energía de enlace de la molécula de KBr. ¿Espera que la energía real de enlace sea mayor o menor que su estimación? Explique su razonamiento.

42.3 • En el capítulo 18 (vol. 1) vimos que la energía cinética media de un átomo o molécula de gas ideal a la temperatura T en kelvins es $\frac{3}{2}kT$. ¿Para qué valor de T esta energía corresponde a *a*) la energía del enlace de Van der Waals en el He_2 (7.9×10^{-4} eV)? y *b*) la energía del enlace covalente del H_2 (4.48 eV)? *c*) La energía cinética en un choque entre moléculas puede emplearse para disociar una o ambas moléculas, siempre que sea mayor que la energía de enlace. A temperatura ambiente (300 K), ¿es probable que las moléculas de He_2 queden intactas después de un choque? ¿Y las moléculas de H_2? Explique su respuesta.

42.4 •• *a*) La luz con longitud de onda de 3.10 nm incide y es absorbida en una molécula. ¿Qué niveles de energía rotacional, vibratoria o atómica es más probable que altere este proceso? Explique su razonamiento. *b*) Si la luz del inciso *a*) tuviera una longitud de onda de 207 nm, ¿qué niveles de energía sería más probable afectar? Explique su respuesta.

42.5 • En la molécula del H_2 la distancia de equilibrio entre los dos protones es 0.074 nm. La masa de un átomo de hidrógeno es 1.67×10^{-27} kg. Calcule la longitud de onda del fotón emitido en la transición rotacional $l = 2$ a $l = 1$.

42.6 • *a*) La energía vibratoria de una molécula disminuye 0.250 eV emitiendo un fotón de luz. ¿Cuál es la longitud de onda de la luz que se genera durante este proceso y en qué parte del espectro electromagnético se encuentra? *b*) La energía de un átomo disminuye 8.50 eV emitiendo un fotón de luz. ¿Cuál es la longitud de onda de la luz que se genera durante este proceso y en qué parte del espectro electromagnético se encuentra? *c*) La energía rotacional de una molécula disminuye 3.20×10^{-3} eV emitiendo un fotón de luz. ¿Cuál es la longitud de onda de la luz que se genera durante este proceso y en qué parte del espectro electromagnético se encuentra?

Sección 42.2 Espectros moleculares

42.7 • Una molécula hipotética de NH efectúa una transición del nivel rotacional $l = 3$ a $l = 1$, y al hacerlo produce un fotón con longitud de onda de 1.780 nm. ¿Cuál es la separación entre los dos átomos en esta molécula, si los modelamos como masas puntuales? La masa del hidrógeno es de 1.67×10^{-27} kg, y la masa del nitrógeno es 2.33×10^{-26} kg.

42.8 • La molécula de agua tiene un nivel rotacional $l = 1$ de 1.01×10^{-5} eV arriba del nivel fundamental $l = 0$. Calcule la longitud de onda y la frecuencia del fotón absorbido por el agua, cuando sufre una transición de nivel rotacional de $l = 0$ a $l = 1$. El oscilador de un magnetrón en un horno de microondas genera microondas con frecuencia de 2450 MHz. ¿Esto tiene sentido, a la vista de la frecuencia calculada en este problema? Explique su respuesta.

42.9 • En el ejemplo 42.2, se calculó el momento de inercia del CO con la ecuación (42.6). *a*) En el CO ¿a qué distancia está cada átomo del centro de masa de la molécula? *b*) Use $I = m_1r_1^2 + m_2r_2^2$ para calcular el momento de inercia del CO con respecto a un eje que pasa por el centro de masa y es perpendicular a la recta que une los centros de los dos átomos. ¿Concuerda su resultado con el valor obtenido en el ejemplo 42.2?

42.10 • Dos átomos de cesio (Cs) pueden formar una molécula de Cs_2. La distancia de equilibrio entre los núcleos de una molécula de Cs_2 es 0.447 nm. Calcule el momento de inercia con respecto a un eje que pase por el centro de masa de los dos núcleos, y sea perpendicular a la línea que los une. La masa de un átomo de cesio es 2.21×10^{-25} kg.

42.11 •• PA Los niveles de energía rotacional del CO se calcularon en el ejemplo 42.2. Si la energía de la molécula giratoria se describe con la ecuación clásica $K = \frac{1}{2}I\omega^2$, para el nivel $l = 1$, ¿cuáles son *a*) la rapidez angular de la molécula en rotación, *b*) la rapidez lineal de cada

átomo? (use el resultado del ejercicio 42.9), y *c*) el periodo de rotación (el tiempo de una rotación)?

42.12 • Si una molécula de cloruro de sodio (NaCl) pudiera experimentar una transición vibratoria $n \rightarrow n - 1$ sin cambiar número cuántico rotacional, se emitiría un fotón de 20.0 μm de longitud de onda. La masa de un átomo de sodio es 3.82×10^{-26} kg, y la masa de un átomo de cloro es 5.81×10^{-26} kg. Calcule la constante de fuerza k' para la fuerza interatómica en el NaCl.

42.13 • Un átomo de litio tiene la masa de 1.17×10^{-26} kg; y uno de hidrógeno, de 1.67×10^{-27} kg. La separación de equilibrio entre los dos núcleos en la molécula de LiH es 0.159 nm. *a*) ¿Cuál es la diferencia de energía entre los niveles de rotación $l = 3$ y $l = 4$? *b*) ¿Cuál es la longitud de onda del fotón emitido en una transición del nivel $l = 4$ al $l = 3$?

42.14 •• Cuando una molécula diatómica hipotética que tiene atomos separados 0.8860 nm experimenta una transición rotacional del estado $l = 2$ al siguiente estado inferior, cede un fotón con energía de 8.841×10^{-4} eV. Cuando la molécula experimenta una transición vibratoria de un estado de energía al siguiente estado de energía inferior, cede 0.2560 eV. Determine la constante de fuerza de esta molécula.

42.15 • *a*) Demuestre que la diferencia de energía entre los niveles rotatorios con números cuánticos de momento angular l y $l - 1$ es $l\hbar^2/I$. *b*) En términos de l, $\hbar$ e I, ¿cuál es la frecuencia del fotón emitido en la transición de rotación pura $l \rightarrow l - 1$?

42.16 • Las energías vibratoria y rotacional del CO están dadas por la ecuación (42.9). Calcule la longitud de onda del fotón absorbido por el CO en cada una de las siguientes transiciones de vibración-rotación: *a*) $n = 0$, $l = 1 \rightarrow n = 1$, $l = 2$; *b*) $n = 0$, $l = 2 \rightarrow n = 1$, $l = 1$; *c*) $n = 0$, $l = 3 \rightarrow n = 1$, $l = 2$.

Sección 42.3 Estructura de los sólidos

42.17 • **Densidad del NaCl.** La distancia de los átomos adyacentes en un cristal de cloruro de sodio es de 0.282 nm. La masa de un átomo de sodio es 3.82×10^{-26} kg, y la de un átomo de cloro es 5.89×10^{-26} kg. Calcule la densidad del cloruro de sodio.

42.18 • El bromuro de potasio (KBr) tiene una densidad de 2.75×10^3 kg/m^3 y la misma estructura cristalina que el NaCl. La masa de un átomo de potasio es 6.49×10^{-26} kg, y la de un átomo de bromo es 1.33×10^{-25} kg. *a*) Calcule la distancia media entre átomos adyacentes en un cristal de KBr. *b*) ¿Cómo se compara el valor calculado en el inciso *a*) con las distancias en el NaCl (véase el ejercicio 42.17)? ¿La relación entre los dos valores es lo que usted esperaría cualitativamente? Explique su respuesta.

Sección 42.4 Bandas de energía

42.19 • La longitud de onda máxima de la luz que puede detectar cierta fotocelda de silicio es 1.11 μm. *a*) ¿Cuál es el intervalo de energía prohibida (en electrón volts) entre las bandas de conducción y de valencia para esta fotocelda? *b*) Explique por qué el silicio puro es opaco.

42.20 • La distancia entre la banda de valencia y la de conducción en un diamante es 5.47 eV. *a*) ¿Cuál es la longitud de onda máxima de un fotón para que pueda excitar un electrón desde la parte superior de la banda de valencia hasta la parte inferior de la banda de conducción? ¿En qué región del espectro electromagnético se encuentra ese fotón? *b*) Explique por qué el diamante puro es transparente e incoloro. *c*) La mayoría de los diamantes en joyería tienen un color amarillo. Explique cómo las impurezas del diamante generan este color.

42.21 • El espacio entre las bandas de valencia y de conducción en el silicio es 1.12 eV. Un núcleo de níquel, en un estado excitado, emite un fotón de rayos gamma con 9.31×10^{-4} nm de longitud de onda. ¿Cuántos electrones pueden excitarse desde la parte superior de la banda de valencia, hasta la parte inferior de la banda de conducción al absorber este rayo gamma?

Sección 42.5 Modelo de electrones libres para los metales

42.22 • Calcule v_{rms} para electrones libres con energía cinética media $\frac{3}{2}kT$ a una temperatura de 300 K. ¿Cómo se compara su resultado con la rapidez de un electrón con energía cinética igual a la energía de Fermi del cobre, calculada en el ejemplo 42.7? ¿Por qué hay tanta diferencia entre esas velocidades?

42.23 • Calcule la densidad de estados $g(E)$ para el modelo de electrones libres en un metal, si $E = 7.0$ eV y $V = 1.0$ cm^3. Exprese su respuesta en estados por electrón volt.

42.24 • Describa los detalles en la deducción de la ecuación (42.13), a partir de las ecuaciones (42.11) y (42.12).

42.25 • **PA** La plata tiene una energía de Fermi de 5.48 eV. Calcule la contribución electrónica a la capacidad calorífica molar a volumen constante de la plata, C_V, a 300 K. Exprese su resultado *a*) como múltiplo de R y *b*) como fracción del valor real para la plata, $C_V = 25.3$ J/mol · K. *c*) ¿El valor de C_V se debe principalmente a los electrones? Si no es así, ¿a qué se debe? (*Sugerencia:* Véase la sección 18.4).

42.26 • La energía de Fermi del sodio es 3.23 eV. *a*) Calcule la energía media E_{med} de los electrones en el cero absoluto. *b*) ¿Cuál es la rapidez de un electrón con energía E_{med}? *c*) ¿A qué temperatura T en kelvins es kT igual a E_F? (A esta se le llama *temperatura de Fermi* del metal. Es, aproximadamente, la temperatura a la cual las moléculas de un gas ideal clásico tendrían la misma energía cinética que el electrón más rápido en el metal).

42.27 •• Para un metal sólido con energía de Fermi de 8.500 eV, ¿cuál es la probabilidad, a temperatura ambiente, de que un estado que tenga una energía de 8.520 eV esté ocupado por un electrón?

Sección 42.6 Semiconductores

42.28 • El germanio puro tiene un intervalo de energía prohibida de 0.67 eV. La energía de Fermi está a la mitad de esa banda. *a*) Para temperaturas de 250, 300 y 350 K, calcule la probabilidad $f(E)$ de que esté ocupado un estado en el fondo de la banda de conducción. *b*) Para cada temperatura del inciso *a*), calcule la probabilidad de que esté vacío un estado en la parte superior de la banda de valencia.

42.29 • El germanio tiene un intervalo de energía prohibida de 0.67 eV. Al doparlo con arsénico, se agregan niveles donadores a la banda a 0.01 eV abajo de la parte inferior de la banda de conducción. A una temperatura de 300 K, hay una probabilidad de 4.4×10^{-4} para que un estado electrónico esté ocupado en el fondo de la banda de conducción. ¿Dónde está el nivel de Fermi en relación con la banda de conducción en este caso?

Sección 42.7 Dispositivos semiconductores

42.30 •• *a*) Suponga que una pieza de germanio muy puro se va a usar como detector de luz, a través de la absorción de fotones, debido al incremento en la conductividad por la generación de pares electrón-huecos. Si cada par requiere 0.67 eV de energía, ¿cuál es la longitud de onda máxima que se puede detectar? ¿En qué parte del espectro se encuentra? *b*) ¿Cuál sería la respuesta del inciso *a*) si el material fuera silicio, con una energía requerida por par de 1.14 eV, correspondiente al espacio entre las bandas de valencia y de conducción?

42.31 • **PA** A una temperatura de 290 K, cierta unión *p-n* tiene una corriente de saturación $I_S = 0.500$ mA. *a*) Calcule la corriente en esta temperatura, cuando el voltaje es **i.** 1.00 mV, **ii.** −1.00 mV, **iii.** 100 mV y **iv.** −100 mV. *b*) ¿Existe una región del voltaje aplicado donde el diodo cumple la ley de Ohm?

42.32 • Para cierto diodo de unión *p-n*, la corriente de saturación a temperatura ambiente (20°C) es de 0.750 mA. ¿Cuál es la resistencia de este diodo, cuando el voltaje que pasa por él es de *a*) 85.0 mV y *b*) −50.0 mV?

42.33 •• *a*) Un voltaje de polarización directa de 15.0 mV produce una corriente positiva de 9.25 mA a través de una unión *p-n* a 300 K. ¿En qué se transforma la corriente positiva, si el voltaje de polarización directa se reduce a 10.0 mV? *b*) Para voltajes de polarización inversa de −15.0 mV y −10.0 mV, ¿cuál es la corriente negativa de polarización inversa?

42.34 •• Una unión *p-n* tiene una corriente de saturación de 3.60 mA. *a*) A la temperatura de 300 K, ¿qué voltaje se necesita para producir una corriente positiva de 40.0 mA? *b*) Para un voltaje igual al negativo del valor calculado en el inciso *a*), ¿cuál es la corriente negativa?

PROBLEMAS

42.35 •• Una molécula diatómica de oxígeno hipotética (masa = 2.656×10^{-26} kg) e hidrógeno (masa = 1.67×10^{-27} kg) emite un fotón con longitud de onda de 2.39 μm cuando hace una transición de un estado vibratorio al siguiente estado inferior. Si modelamos esta molécula como dos masas puntuales en los extremos opuestos de un resorte sin masa, *a*) ¿cuál es la constante de fuerza de este resorte? *b*) ¿Cuántas vibraciones por segundo efectúa la molécula?

42.36 • Cuando una molécula diatómica experimenta una transición del estado rotacional $l = 2$ al $l = 1$, se emite un fotón de 63.8 μm de longitud de onda. ¿Cuál es el momento de inercia de la molécula para un eje que pase por su centro de masa y sea perpendicular a la línea que une los núcleos?

42.37 •• **PA** *a*) La separación de equilibrio de los dos núcleos en una molécula de NaCl es 0.24 nm. Si la molécula se considera como cargas $+e$ y $-e$ separadas 0.24 nm, ¿cuál es el momento dipolar eléctrico de la molécula (véase la sección 21.7)? *b*) El momento dipolar eléctrico de la molécula de NaCl medido es 3.0×10^{-29} C·m. Si este momento dipolar se debe a cargas puntuales $+q$ y $-q$ separadas 0.24 nm, ¿cuánto es q? *c*) Una definición del *carácter iónico fraccionario* del enlace es q/e. Si el átomo de sodio tiene la carga $+e$ y el de cloro tiene la carga $-e$, el carácter iónico fraccionario sería igual a 1. ¿Cuál es el carácter iónico fraccionario real para el enlace en el NaCl? *d*) La distancia de equilibro entre núcleos de la molécula de yoduro de hidrógeno (HI) es 0.16 nm, y el momento dipolar eléctrico medido de la molécula es 1.5×10^{-30} C·m. ¿Cuál es el carácter iónico fraccionario del enlace en el HI? ¿Cómo se compara su resultado con el del NaCl calculado en el inciso *c*)? Describa las razones de la diferencia en esos resultados.

42.38 • La energía de enlace de una molécula de cloruro de potasio (KCl) es 4.43 eV. La energía de ionización de un átomo de potasio es 4.3 eV, y la afinidad electrónica del cloro es 3.6 eV. Con estos datos estime la separación de equilibrio entre los dos átomos de la molécula de KCl. Explique por qué su resultado solo es una estimación y no un valor preciso.

42.39 • *a*) Para la molécula de cloruro de sodio (NaCl) descrita al principio de la sección 42.1, ¿cuál es la separación máxima de los iones, para que tengan estabilidad, si se consideran como cargas puntuales? Esto es, ¿cuál es la máxima separación para la cual la energía de un ion Na^+ y uno Cl^-, calculada en este modelo, es menor que la energía de los dos átomos separados, Na y Cl? *b*) Calcule esta distancia en la molécula de bromuro de potasio, descrita en el ejercicio 42.2.

42.40 •• El espectro rotacional del HCl contiene las siguientes longitudes de onda (entre otras): 60.4, 69.0, 80.4, 96.4 y 120.4 μm. Con este espectro determine el momento de inercia de la molécula de HCl con respecto a un eje que pasa por el centro de masa y es perpendicular a la línea que une los dos núcleos.

42.41 • *a*) Use el resultado del problema 42.40 para calcular la separación de equilibrio de los átomos en una molécula de HCl. La masa de un átomo de cloro es 5.81×10^{-26} kg y la de un átomo de hidrógeno es 1.67×10^{-27} kg. *b*) El valor de l cambia en ± 1, en las transiciones de rotación. ¿Cuál es el valor de l para el nivel superior de la transición que genera cada una de las longitudes de onda mencionadas en el problema 42.40? *c*) ¿Cuál es la línea de mayor longitud de onda en el espectro rotacional del HCl? *d*) Calcule las longitudes de onda de la luz emitida, para las transiciones correspondientes en la molécula de cloruro de deuterio (DCl). En esta molécula, el átomo de hidrógeno del HCl se sustituye por un átomo de deuterio, un isótopo del hidrógeno cuya masa es 3.34×10^{-27} kg. Suponga que la separación de equilibrio entre los átomos es igual que en el HCl.

42.42 • Cuando una molécula de NaF hace una transición del nivel de rotación $l = 3$ al $l = 2$ sin cambiar de número cuántico vibratorio ni el estado electrónico, se emite un fotón de 3.83 mm de longitud de onda. Un átomo de sodio tiene 3.82×10^{-26} kg de masa; y uno de flúor, 3.15×10^{-26} kg. Calcule la separación de equilibrio entre los núcleos en una molécula de NaF. ¿Cómo se compara su respuesta con el valor para el NaCl que aparece en la sección 42.1? ¿Es razonable este resultado? Explique su respuesta.

42.43 •• **PA** Un gas de moléculas diatómicas (con momento de inercia I) está a una temperatura absoluta T. Si E_g es la energía de estado base y E_{ex} es la energía de un estado excitado, entonces, la distribución de Maxwell-Boltzmann (véase la sección 39.4) indica que la razón de las cantidades de moléculas en los dos estados es

$$\frac{n_{ex}}{n_g} = e^{-(E_{ex}-E_g)/kT}$$

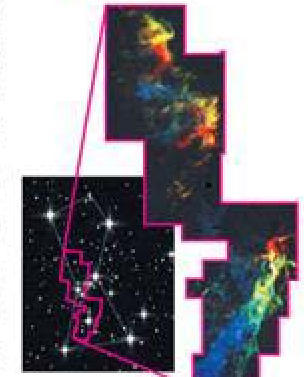
a) Explique por qué la razón entre la cantidad de moléculas en el l-ésimo *nivel* de energía de rotación y la cantidad de moléculas en el nivel de rotación fundamental ($l = 0$) es

$$\frac{n_l}{n_0} = (2l + 1)e^{-[l(l+1)\hbar^2]/2IkT}$$

(*Sugerencia:* Para cada valor de l, ¿cuántos estados hay con distintos valores de m_l?) *b*) Determine la relación n_l/n_0 para un gas de moléculas de CO a 300 K en los casos con **i.** $l = 1$; **ii.** $l = 2$; **iii.** $l = 10$; **iv.** $l = 20$; **v.** $l = 50$. El momento de inercia de la molécula de CO está en el ejemplo 42.2 (sección 42.2). *c*) Sus resultados del inciso *b*) demuestran que cuando aumenta l, la relación n_l/n_0 aumenta primero y después disminuye. Explique por qué.

42.44 •• Nuestra galaxia contiene numerosas *nubes moleculares*, regiones que se extienden por muchos años luz, en las que la densidad es suficientemente alta, y la temperatura suficientemente baja como para que los átomos formen moléculas complejas. La mayoría de las moléculas son H_2, pero una pequeña fracción son de monóxido de carbono (CO). En la figura P42.44 se ve una de esas nubes moleculares en la constelación de Orión. La imagen de la izquierda se logró con un telescopio ordinario de luz visible, y la de la derecha muestra la nube molecular de Orión obtenida con un radiotelescopio sintonizado a una longitud de onda emitida por CO en una transición de rotación. Los diversos colores en la imagen de radio indican regiones de la nube que se mueven hacia nosotros (al azul) o se alejan de nosotros (al rojo) en relación con el movimiento de la totalidad de la nube, determinado por el corrimiento

Figura **P42.44**



Doppler de la radiación. (Debido a que una nube molecular tiene unas 10,000 moléculas de hidrógeno por cada molécula de CO, parecería más razonable sintonizar un radiotelescopio a emisiones de H_2 que a emisiones de CO. Por desgracia, sucede que las moléculas de H_2 en las nubes moleculares no irradian en el rango de ondas de radio ni en la región visible del espectro electromagnético). *a*) Con los datos del ejemplo 42.2 (sección 42.2), calcule la energía y la longitud de onda del fotón emitido por una molécula de CO, en una transición de rotación $l = 1 \rightarrow l = 0$. *b*) Por regla, las moléculas a una temperatura T del gas se encontrarán en cierto nivel excitado de energía de rotación, siempre y cuando la energía de ese nivel no sea mayor que kT (véase el problema 42.43). Aplique esta regla para explicar por qué los astrónomos pueden detectar la radiación del CO en nubes moleculares, aunque la temperatura característica de ellas sea muy baja, de solo 20 K.

42.45 • **Líneas espectrales de isótopos.** La separación de equilibrio para el NaCl es 0.2361 nm. La masa de un átomo de sodio es 3.8176×10^{-26} kg. El cloro tiene dos isótopos estables, el ^{35}Cl y el ^{37}Cl, que tienen masas distintas, pero propiedades químicas idénticas. La masa atómica del ^{35}Cl es 5.8068×10^{-26} kg, y la del ^{37}Cl es 6.1384×10^{-26} kg. *a*) Calcule la longitud de onda del fotón emitido en las transiciones $l = 2 \rightarrow l = 1$ y $l = 1 \rightarrow l = 0$ para el $Na^{35}Cl$. *b*) Repita el inciso *a*) para el $Na^{37}Cl$. ¿Cuáles son las diferencias en las longitudes de onda de los dos isótopos?

42.46 • Cuando una molécula OH experimenta una transición del nivel vibratorio $n = 0$ al $n = 1$, su energía vibratoria interna aumenta 0.463 eV. Calcule la frecuencia de vibración y la constante de la fuerza interatómica. (La masa de un átomo de oxígeno es 2.66×10^{-26} kg, y la de un átomo de hidrógeno es 1.67×10^{-27} kg).

42.47 • La constante de la fuerza internuclear en una molécula de hidrógeno (H_2) es $k' = 576$ N/m. Un átomo de hidrógeno tiene 1.67×10^{-27} kg de masa. Calcule la energía vibratoria del punto cero para el H_2 (esto es, la energía vibratoria que tiene la molécula en el nivel fundamental vibratorio $n = 0$). ¿Cómo se compara la magnitud de esta energía con la energía de enlace del H_2, que es −4.48 eV?

42.48 • Suponga que el átomo de hidrógeno en el HF (véase el Problema práctico de este capítulo) se sustituye por un átomo de deuterio, un isótopo del hidrógeno con 3.34×10^{-27} kg de masa. La constante de fuerza se determina por la configuración electrónica, por lo que es igual para la molécula normal de HF. *a*) ¿Cuál es la frecuencia vibratoria de esta molécula? *b*) ¿Qué longitud de onda de luz corresponde a la diferencia de energía entre los niveles $n = 1$ y $n = 0$? ¿En qué región del espectro se encuentra esta longitud de onda?

42.49 • La molécula de yoduro de hidrógeno (HI) tiene una separación de equilibrio de 0.160 nm, y su frecuencia de vibración es 6.93×10^{13} Hz. La masa de un átomo de hidrógeno es 1.67×10^{-27} kg y la de un átomo de yodo es 2.11×10^{-25} kg. *a*) Calcule el momento de inercia del HI con respecto a un eje perpendicular que pase por su centro de masa. *b*) Calcule la longitud de onda del fotón emitido en cada caso de las siguientes transiciones de vibración y rotación: **i.** $n = 1, l = 1 \rightarrow n = 0, l = 0$; **ii.** $n = 1, l = 2 \rightarrow n = 0, l = 1$; **iii.** $n = 2, l = 2 \rightarrow n = 1, l = 3$.

42.50 •• Demuestre la siguiente afirmación: para los electrones libres en un sólido, si un estado que está a una energía ΔE mayor que E_F tiene probabilidad P de estar ocupado, entonces la probabilidad de que un estado a una energía ΔE menor que E_F esté ocupado es $1 - P$.

42.51 •• Calcule la energía de Fermi del potasio, haciendo la sencilla aproximación de que cada átomo aporta un electrón libre. La densidad del potasio es 851 kg/m^3 y la masa de un solo átomo de potasio es 6.49×10^{-26} kg.

42.52 •• El hidrógeno se encuentra en dos isótopos que se presentan en forma natural: hidrógeno normal (que contiene un solo protón en su núcleo) y deuterio (que tiene un protón y un neutrón). Suponiendo que ambas moléculas son del mismo tamaño, y que el protón y el neutrón tienen la misma masa (lo cual casi siempre sucede), calcule la razón de *a*) la energía de cualquier estado de rotación dado en una molécula diatómica de hidrógeno con respecto a la energía del mismo estado en la molécula diatómica de deuterio; y *b*) la energía de cualquier estado vibratorio dado en el hidrógeno con respecto al mismo estado en el deuterio (suponiendo que la constante de fuerza es la misma para ambas moléculas). ¿Por qué es físicamente lógico que la constante de fuerza fuera la misma para las moléculas de hidrógeno y de deuterio?

42.53 ••• El litio metálico tiene una estructura cristalina bcc. Cada celda unitaria es un cubo de lado $a = 0.35$ nm. *a*) Para una red bcc, ¿cuántos átomos hay por unidad de volumen? Exprese su respuesta en función de a. (*Sugerencia:* ¿Cuántos átomos hay por celda unitaria?) *b*) Use el resultado del inciso *a*) para calcular la energía de Fermi E_{F0} a temperatura cero para el litio metálico. Suponga que hay un electrón libre por átomo.

42.54 •• **CALC** El cálculo unidimensional del ejemplo 42.4 (sección 42.3) se puede ampliar a tres dimensiones. Para la red fcc tridimensional del NaCl, el resultado para la energía potencial de un par de iones Na^+ y Cl^- que se debe a la interacción electrostática con todos los iones en el cristal es $U = -\alpha e^2/4\pi\epsilon_0 r$, donde $\alpha = 1.75$ es la *constante de Madelung*. Otra contribución a la energía potencial es una interacción de repulsión a corta distancia iónica r, debida al traslape de las nubes de electrones. Esta contribución se puede expresar mediante A/r^8, donde A es una constante positiva, así que la ecuación de la energía potencial total es

$$U_{tot} = -\frac{\alpha e^2}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{A}{r^8}$$

a) Sea r_0 el valor de la separación iónica r para la que U_{tot} es mínima. Use esta definición para deducir una ecuación que relacione a r_0 y A, y a partir de ello exprese U_{tot} en función de r_0. Para el NaCl, $r_0 =$ 0.281 nm. Obtenga un valor numérico (en electrón volts) de U_{tot} para el NaCl. *b*) La cantidad $-U_{tot}$ es la energía necesaria para sacar un ion Na^+ y un ion Cl^- del cristal. Para formar un par de átomos neutros a partir de este par de iones, se requiere un desprendimiento de 5.14 eV (la energía de ionización del Na), y de 3.61 eV (la afinidad electrónica del Cl). Use el resultado del inciso *a*) con la finalidad de calcular la energía necesaria para quitar un par de átomos neutros Na y Cl del cristal. El valor experimental de esta cantidad es 6.39 eV. ¿Qué tan bien concuerda su cálculo?

42.55 •• **CALC** Hay un sistema de N electrones libres dentro de un volumen V. Aun en el cero absoluto, ese sistema ejerce una presión p sobre sus alrededores, debido al movimiento de los electrones. Para calcular esa presión, imagine que el volumen aumenta una pequeña cantidad dV. Los electrones efectuarán una cantidad de trabajo pdV sobre sus alrededores, lo cual significa que la energía total E_{tot} de ellos cambiará en una cantidad $dE_{tot} = -pdV$. Por consiguiente, $p = -dE_{tot}/dV$. *a*) Demuestre que la presión de los electrones, en el cero absoluto, es

$$p = \frac{3^{2/3}\pi^{4/3}\hbar^2}{5m}\left(\frac{N}{V}\right)^{5/3}$$

b) Evalúe esta presión para el cobre, cuya concentración de electrones libres es 8.45×10^{28} m^{-3}. Exprese su resultado en pascales y en atmósferas. *c*) La presión que calculó en el inciso *b*) es extremadamente alta. Entonces, ¿por qué los electrones que hay en un trozo de cobre no hacen explotar al metal?

42.56 •• **CALC** Cuando la presión p en un material aumenta una cantidad Δp, el volumen del material deberá cambiar de V a $V + \Delta V$, donde ΔV es negativo. El *módulo volumétrico* B del material se define

como la relación del cambio de presión Δp entre el valor absoluto del cambio fraccionario de volumen $|\Delta V/V|$. Cuanto mayor sea el módulo volumétrico, se necesitará mayor aumento de presión para alcanzar determinado cambio de volumen fraccionario, y el material es más incompresible (véase la sección 11.4). Como $\Delta V < 0$, se puede expresar el módulo volumétrico como $B = -\Delta p/(\Delta V/V_0)$. En el límite en que los cambios de presión y volumen son muy pequeños, esto se transforma en

$$B = -V\frac{dp}{dV}$$

a) Use el resultado del problema 42.55 para demostrar que el módulo volumétrico para un sistema de N electrones libres en un volumen V a bajas temperaturas es $B = \frac{5}{3}p$. (*Sugerencia:* La cantidad p en la ecuación $B = -V(dp/dV)$ es la presión *externa* sobre el sistema. ¿Puede usted explicar por qué es igual a la presión *interna* del sistema mismo, determinada en el problema 42.55?]. *b*) Evalúe el módulo volumétrico para los electrones en el cobre, cuya concentración de electrones libres es $8.45 \times 10^{28}\ \text{m}^{-3}$. Exprese su resultado en pascales. *c*) El valor del módulo volumétrico del cobre es 1.4×10^{11} Pa. Con base en su resultado del inciso *b*), ¿qué fracción de él se debe a los electrones libres en el cobre? (Este resultado demuestra que los electrones libres en un metal desempeñan un papel principal haciendo que el metal sea resistente a la compresión). ¿Cuál cree usted que sea el causante de la fracción restante del módulo volumétrico?

42.57 •• En la descripción de los electrones libres, en la sección 42.5, supusimos que se pueden pasar por alto los efectos relativistas. Esta hipótesis no es correcta si la energía de Fermi es mayor que $\frac{1}{100}mc^2$ (esto es, más de 1% de la energía en reposo de un electrón). *a*) Suponga que la energía de Fermi en el cero absoluto, obtenida con la ecuación (42.19), es igual a $\frac{1}{100}mc^2$. Demuestre que la concentración de electrones es

$$\frac{N}{V} = \frac{2^{3/2}m^3c^3}{3000\pi^2\hbar^3}$$

y determine el valor numérico de N/V. *b*) ¿Es buena la aproximación cuando no se tienen en cuenta los efectos relativistas para electrones en un metal, como el cobre, para el que la concentración de electrones es $8.45 \times 10^{28}\ \text{m}^{-3}$? Explique su respuesta. *c*) Una *estrella enana blanca* es lo que queda cuando una estrella como el Sol cesa de producir energía mediante reacciones nucleares. (Nuestro Sol se transformará en una enana blanca dentro de 6×10^9 años, más o menos). Una enana blanca normal tiene una masa de 2×10^{30} kg (comparable con la del Sol) y un radio de 6000 km (comparable con el de la Tierra). La atracción gravitacional mutua de distintas partes de la enana blanca tiende a comprimirla; lo que evita la compresión es la presión de los electrones libres dentro de ella (véase el problema 42.55). Estime la concentración de electrones dentro de una enana blanca normal haciendo las siguientes hipótesis: **i.** la enana blanca es de carbono, cuya masa es 1.99×10^{-26} kg por átomo; y **ii.** los seis electrones de cada átomo de carbono pueden moverse libremente por la estrella. *d*) ¿Una buena aproximación es no tener en cuenta los efectos relativistas en la estructura de una estrella enana blanca? Explique su respuesta.

42.58 •• PA Una batería de CD variable se conecta en serie con un resistor de 125 Ω y un diodo de unión *p-n* que tiene una corriente de saturación de 0.625 mA a temperatura ambiente (20°C). Cuando un voltímetro se conecta al resistor de 125 Ω, marca 35.0 V. ¿Cuáles son *a*) el voltaje en el diodo y *b*) la resistencia del diodo?

PROBLEMAS DE DESAFÍO

42.59 ••• PA Los enlaces de Van der Waals se producen por la interacción entre dos momentos dipolares eléctricos permanentes o inducidos en un par de átomos o moléculas. *a*) Imagine dos dipolos idénticos, cada uno formado por cargas $+q$ y $-q$, separados una distancia d y orientados como se ve en la figura P42.59*a*. Calcule la energía potencial eléctrica, expresada en función del momento dipolar eléctrico $p = qd$, para el caso en el que $r \gg d$. ¿La interacción es de atracción o de repulsión? ¿Cómo varía esta energía potencial en función de r, la separación entre los centros de los dos dipolos? *b*) Repita el inciso *a*) para la orientación de los dipolos que muestra la figura P42.59*b*. La interacción de dipolos es más complicada cuando hay que promediar sobre orientaciones relativas de los dos dipolos, debido al movimiento térmico, o cuando los dipolos son inducidos en vez de permanentes.

Figura **P42.59**

42.60 ••• PA CALC *a*) Imagine que la molécula de hidrógeno (H_2) es un oscilador armónico simple con una distancia de equilibrio de 0.074 nm, y estime las distancias entre niveles de energía vibratoria para el H_2. La masa de un átomo de hidrógeno es 1.67×10^{-27} kg. (*Sugerencia:* Estime la constante de fuerza igualando el cambio de repulsión de Coulomb entre los protones, cuando los átomos se acercan un poco más que r_0, con la fuerza del "resorte". Esto es, suponga que la fuerza del enlace químico permanece aproximadamente constante cuando r disminuye un poco con respecto a r_0). *b*) Use el resultado del inciso *a*) para calcular las distancias entre niveles de energía vibratoria para la molécula de deuterio, D_2. Suponga que la constante de resorte es igual para el D_2 que para el H_2. La masa de un átomo de deuterio es 3.34×10^{-27} kg.

Respuestas

Pregunta inicial del capítulo 

Venus debe radiar energía al espacio con la misma rapidez con que recibe de la luz solar. Sin embargo, las moléculas de dióxido de carbono (CO_2) en la atmósfera absorben la radiación infrarroja emitida por la superficie de Venus y la vuelven a emitir hacia el suelo. Para compensar esto y mantener el equilibrio entre la energía emitida y la recibida, se incrementa la temperatura de Venus y, con ello, aumenta la tasa de radiación de cuerpo negro de la superficie.

Preguntas de las secciones
Evalúe su comprensión

42.1 Respuesta: i. El principio de exclusión establece que solo puede haber un electrón en determinado estado. Los electrones reales tienen espín, por lo que dos electrones (uno con espín arriba y uno con espín abajo) pueden estar en un estado y, en consecuencia, dos pueden participar en el enlace covalente entre dos átomos. Si los electrones obedecieran el principio de exclusión pero no tuvieran espín, ese estado de un electrón estaría descrito totalmente por su distribución espacial y solo podría participar *un* electrón en un enlace covalente. (En el capítulo 44 veremos que este caso es totalmente imaginario: hay partículas subatómicas sin espín, pero *no* obedecen el principio de exclusión).

42.2 Respuesta: ii. La figura 42.5 muestra que la diferencia en energía entre niveles de rotación adyacentes aumenta al incrementarse l. Por lo tanto, al aumentar l, también se incrementa la energía E del fotón emitido, en tanto que disminuye la longitud de onda $\lambda = hc/E$.

42.3 Respuesta: ii. En la figura 42.13 considere a la distancia entre iones adyacentes Na^+ y Cl^-. Esta figura muestra que el ion Cl^- siguiente al vecino más cercano de un ion Na^+ está en la esquina opuesta de un cubo de lado a. La distancia entre estos dos iones es $\sqrt{a^2 + a^2 + a^2} = \sqrt{3a^2} = a\sqrt{3}$.

42.4 Respuesta: ii. Un pequeño cambio de temperatura provoca un aumento significativo en la población de electrones en la banda de conducción de un semiconductor y un incremento sustancialmente comparable en la conductividad. La conductividad de conductores y aislantes varía más gradualmente con la temperatura.

42.5 Respuesta: no El modelo cinético-molecular de un gas ideal (véase la sección 18.3) muestra que la presión del gas es proporcional a la energía cinética de traslación media E_{med} de las partículas que forman el gas. En un gas ideal clásico, E_{med} es directamente proporcional a la temperatura T media, por lo que la presión disminuye cuando T disminuye. En un gas de electrones libres, la energía cinética media por electrón *no* se relaciona directamente con T; como indica el ejemplo 42.8, para el gas de electrones libres en un metal, E_{med} es casi totalmente una consecuencia del principio de exclusión a temperatura ambiente, o más fría. Por consiguiente, la presión de un gas de electrones libres en un metal sólido *no* cambia en forma apreciable entre la temperatura ambiente y el cero absoluto.

42.6 Respuesta: no El cobre puro ya es un excelente conductor, porque tiene una banda de conducción parcialmente llena (figura 42.19*c*). Además, el cobre forma un cristal metálico (figura 42.15), en contraste con los cristales covalentes del silicio o del germanio, por lo que el esquema de usar una impureza para donar o aceptar un electrón no funciona para el cobre. De hecho, al agregar impurezas al cobre *disminuye* la conductividad, ya que una impureza tiende a dispersar los electrones, lo cual estorba el paso de la corriente.

42.7 Respuesta: no Una carga negativa en la compuerta repele los electrones en el silicio tipo p, no los atrae. Entonces, la concentración de electrones en la región intermedia de las dos uniones p-n será más pequeña todavía. Con tan pocos portadores de carga presentes en esta región, pasará muy poca corriente entre la fuente y el drenador.

Problema práctico

Respuestas: ***a)*** 0.278 eV
b) 1.74×10^{-25}

FÍSICA NUCLEAR

43



? Esta escultura de un mamut lanudo, de exactamente 3.7 cm (1.5 in) de longitud, fue esculpida en un colmillo de marfil por un artista que vivió en el sur de Alemania hace 35,000 años. ¿Qué principio físico hace posible fechar especímenes biológicos como este?

OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

Al estudiar este capítulo, usted aprenderá:

- Algunas propiedades clave de los núcleos atómicos, incluidos sus radios, densidades, espines y momentos magnéticos.
- Cómo depende la energía de enlace de un núcleo, de los números de protones y neutrones que contiene.
- Las formas más importantes en que los núcleos inestables experimentan desintegración radiactiva.
- Cómo la razón de desintegración de una sustancia radiactiva depende del tiempo.
- Algunos de los daños biológicos y usos médicos de la radiación.
- Cómo analizar algunos tipos importantes de reacciones nucleares.
- Qué sucede en una reacción de fisión nuclear en cadena y cómo puede controlarse.
- La secuencia de reacciones nucleares que permiten que el Sol y las estrellas brillen.

Durante el siglo pasado, las aplicaciones de la física nuclear han tenido efectos muy grandes sobre la especie humana; algunos fueron benéficos y otros catastróficos. Muchas personas tienen opiniones desfavorables sobre ciertas aplicaciones como bombas y reactores. Idealmente, esas opiniones deberían basarse en el conocimiento, y no en los prejuicios o en las emociones, por lo que esperamos que este capítulo ayude a alcanzar ese ideal.

Cada átomo contiene en su centro un *núcleo* extremadamente denso con carga positiva, que es mucho más pequeño que el tamaño total del átomo, pero que contiene la mayor parte de su masa. Examinaremos algunas propiedades generales importantes de los núcleos y de la fuerza nuclear que los mantiene unidos. La estabilidad o inestabilidad de un núcleo en particular está determinada por la diferencia entre la fuerza nuclear de atracción entre protones y neutrones, y las interacciones eléctricas de repulsión entre los protones. Los núcleos inestables *decaen* o *se desintegran*, transformándose en forma espontánea en otros núcleos, a través de diversos procesos de desintegración. Las reacciones nucleares también pueden inducirse por el impacto de una partícula o de algún núcleo sobre otro núcleo. Hay dos clases de reacciones de interés especial: la *fisión* y la *fusión*. No podríamos sobrevivir sin la energía liberada por el reactor de fusión cercano, que es nuestro Sol.

43.1 Propiedades de los núcleos

Como se describió en la sección 39.2, Rutherford encontró que el núcleo tiene un radio que es decenas de miles de veces menor que el del átomo mismo. Desde los experimentos iniciales de dispersión de Rutherford, se han hecho muchos más, usando protones, electrones y neutrones de alta energía, así como partículas alfa (núcleos de helio 4). Estos experimentos muestran que un núcleo se puede modelar como una esfera de radio R que depende de la cantidad total de *nucleones* (neutrones y protones)

que hay en el núcleo. Este número se llama **número nucleónico**, A. Los radios de la mayoría de los núcleos se representan bastante bien con la ecuación

$$R = R_0 A^{1/3} \qquad \text{(radio de un núcleo)} \tag{43.1}$$

donde R_0 es una constante determinada en forma experimental:

$$R_0 = 1.2 \times 10^{-15}\ \text{m} = 1.2\ \text{fm}$$

El número nucleónico A de la ecuación (43.1) también se conoce como **número de masa**, porque es el número entero más cercano a la masa del núcleo, medida en unidades de masa atómica unificada (u). (La masa del protón y la del neutrón son aproximadamente iguales a 1 u). El mejor factor de conversión hasta la fecha es

$$1\ \text{u} = 1.660538782(83) \times 10^{-27}\ \text{kg}$$

En la sección 43.2 estudiaremos con más detalle las masas de los núcleos. Observe que cuando hablamos de masas de núcleos y partículas, nos referimos a sus masas *en reposo*.

Densidad nuclear

El volumen V de una esfera es igual a $4\pi R^3/3$, por lo que la ecuación (43.1) indica que el *volumen* de un núcleo es proporcional a A. Al dividir A (la masa aproximada en u) entre el volumen, se obtiene la densidad aproximada y A se cancela. Por consiguiente, *todos los núcleos tienen aproximadamente la misma densidad.* Este hecho es de importancia fundamental para comprender la estructura nuclear.



Ejemplo 43.1 Cálculo de las propiedades nucleares

El tipo más común de núcleos de hierro tiene un número de masa $A = 56$. Calcule el radio, la masa aproximada y la densidad aproximada del núcleo.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: La ecuación (43.1) nos dice cómo depende el radio nuclear R del número de masa A. La masa del núcleo en unidades de masa atómica es aproximadamente igual al valor de A, y la densidad ρ es igual a la masa dividida entre el volumen.

EJECUTAR: El radio y la masa aproximada son

$$R = R_0 A^{1/3} = (1.2 \times 10^{-15}\ \text{m})(56)^{1/3}$$
$$= 4.6 \times 10^{-15}\ \text{m} = 4.6\ \text{fm}$$
$$m \approx (56\ \text{u})(1.66 \times 10^{-27}\ \text{kg/u}) = 9.3 \times 10^{-26}\ \text{kg}$$

El volumen V del núcleo (al cual consideraremos como una esfera de radio R) y su densidad ρ son

$$V = \tfrac{4}{3}\pi R^3 = \tfrac{4}{3}\pi R_0^3 A = \tfrac{4}{3}\pi(4.6 \times 10^{-15}\ \text{m})^3$$
$$= 4.1 \times 10^{-43}\ \text{m}^3$$
$$\rho = \frac{m}{V} \approx \frac{9.3 \times 10^{-26}\ \text{kg}}{4.1 \times 10^{-43}\ \text{m}^3} = 2.3 \times 10^{17}\ \text{kg/m}^3$$

EVALUAR: Como mencionamos anteriormente, *todos* los núcleos tienen aproximadamente la misma densidad. La densidad del hierro sólido es de aproximadamente $7000\ \text{kg/m}^3$, y el núcleo es unas 10^{13} veces más denso que el hierro en el material. Densidades de esta magnitud también se encuentran en las *estrellas de neutrones*, parecidas a núcleos gigantes formados casi totalmente por neutrones. Un cubo que mide 1 cm por lado, elaborado del material con esta densidad tendría una masa de 2.3×10^{11} kg, unas ¡230 millones de toneladas métricas!

Nucleidos e isótopos

Los constituyentes básicos del núcleo son el protón y el neutrón. En un átomo neutro, el núcleo está rodeado por un electrón por cada protón que tenga. Presentamos estas partículas en la sección 21.1; en el capítulo 44 volveremos a describir el descubrimiento del neutrón y del protón. Las masas de estas partículas son

$$\text{Protón:} \quad m_p = 1.007276\ \text{u} = 1.672622 \times 10^{-27}\ \text{kg}$$
$$\text{Neutrón:} \quad m_n = 1.008665\ \text{u} = 1.674927 \times 10^{-27}\ \text{kg}$$
$$\text{Electrón:} \quad m_e = 0.000548580\ \text{u} = 9.10938 \times 10^{-31}\ \text{kg}$$

La cantidad de protones en un núcleo es el **número atómico** Z. La cantidad de neutrones es el **número de neutrones**, N. El número nucleónico o número de masa A es la suma de la cantidad de Z protones y la cantidad de N neutrones,

$$A = Z + N \qquad (43.2)$$

Una especie nuclear particular que tiene valores específicos de Z y N se llama **nucleido**. La tabla 43.1 presenta una lista de valores de A, Z y N para algunos nucleidos. La estructura electrónica de un átomo, que es la responsable de sus propiedades químicas, está determinada por la carga Ze del núcleo. La tabla muestra algunos nucleidos que tienen la misma Z pero distinta N. A estos nucleidos se les llama **isótopos** de ese elemento; son de masas diferentes porque tienen cantidades distintas de neutrones en sus núcleos. Un ejemplo conocido es el cloro (Cl, $Z = 17$). Un 76% de los núcleos de cloro tienen $N = 18$, y el otro 24% tiene $N = 20$. Los diversos isótopos de un elemento suelen tener propiedades físicas un poco diferentes, como sus puntos de fusión y de ebullición, y sus razones de difusión. Los dos isótopos comunes del uranio, con $A = 235$ y 238, se separan a escala industrial aprovechando las distintas razones de difusión del hexafluoruro de uranio gaseoso (UF_6), que contiene los dos isótopos.

La tabla 43.1 muestra también la notación usual para los nucleidos individuales: el símbolo del elemento con un subíndice igual a Z y un superíndice igual al número de masa A. El formato general de un elemento "El" es $^{A}_{Z}\text{El}$. Los isótopos del cloro que mencionamos arriba, con $A = 35$ y 37 se representan con $^{35}_{17}\text{Cl}$ y $^{37}_{17}\text{Cl}$ y se denominan "cloro 35" y "cloro 37", respectivamente. Este nombre del elemento contiene el número atómico Z, por lo que se omite a veces el subíndice Z, como en $^{35}\text{C1}$.

La tabla 43.2 muestra las masas de algunos átomos comunes, incluyendo la de sus electrones. Observe que esta tabla muestra las masas de los átomos *neutros* (con Z electrones) y no las masas de los núcleos *desnudos*, porque es mucho más difícil medir las masas de estos con gran precisión. La masa de un átomo neutro de carbono 12 es exactamente 12 u; y es la forma en que se define la unidad de masa atómica unificada. Las masas de otros átomos son *aproximadamente* iguales a A unidades de masa atómica, como indicamos antes. De hecho, las masas atómicas son *menores* que la suma de sus partes (los Z protones, los Z electrones y los N neutrones). En la siguiente sección explicaremos esta diferencia de masa tan importante.

Tabla 43.1 Composiciones de algunos nucleidos comunes

Z = número atómico (número de protones)

N = número de neutrones

$A = Z + N$ = número de masa (número total de nucleones)

Núcleo	Z	N	$A = Z + N$
$^{1}_{1}\text{H}$	1	0	1
$^{2}_{1}\text{H}$	1	1	2
$^{4}_{2}\text{He}$	2	2	4
$^{6}_{3}\text{Li}$	3	3	6
$^{7}_{3}\text{Li}$	3	4	7
$^{9}_{4}\text{Be}$	4	5	9
$^{10}_{5}\text{B}$	5	5	10
$^{11}_{5}\text{B}$	5	6	11
$^{12}_{6}\text{C}$	6	6	12
$^{13}_{6}\text{C}$	6	7	13
$^{14}_{7}\text{N}$	7	7	14
$^{16}_{8}\text{O}$	8	8	16
$^{23}_{11}\text{Na}$	11	12	23
$^{65}_{29}\text{Cu}$	29	36	65
$^{200}_{80}\text{Hg}$	80	120	200
$^{235}_{92}\text{U}$	92	143	235
$^{238}_{92}\text{U}$	92	146	238

Tabla 43.2 Masas de átomos neutros, de algunos nucleidos ligeros

Elemento e isótopo	Número atómico, Z	Número de neutrones, N	Masa atómica (u)	Número de masa, A
Hidrógeno (^1_1H)	1	0	1.007825	1
Deuterio (^2_1H)	1	1	2.014102	2
Tritio (^3_1H)	1	2	3.016049	3
Helio (^3_2He)	2	1	3.016029	3
Helio (^4_2He)	2	2	4.002603	4
Litio (^6_3Li)	3	3	6.015122	6
Litio (^7_3Li)	3	4	7.016004	7
Berilio (^9_4Be)	4	5	9.012182	9
Boro ($^{10}_5B$)	5	5	10.012937	10
Boro ($^{11}_5B$)	5	6	11.009305	11
Carbono ($^{12}_6C$)	6	6	12.000000	12
Carbono ($^{13}_6C$)	6	7	13.003355	13
Nitrógeno ($^{14}_7N$)	7	7	14.003074	14
Nitrógeno ($^{15}_7N$)	7	8	15.000109	15
Oxígeno ($^{16}_8O$)	8	8	15.994915	16
Oxígeno ($^{17}_8O$)	8	9	16.999132	17
Oxígeno ($^{18}_8O$)	8	10	17.999160	18

Fuente: A. H. Wapstra y G. Audi, *Nuclear Physics* **A595**, 4 (1995).

Espines y momentos magnéticos nucleares

Al igual que los electrones, los protones y los neutrones también son partículas de espín $\frac{1}{2}$ con momentos angulares de espín dados por las mismas ecuaciones que las de la sección 41.5. La magnitud del momento angular de espín $\vec{S}$ de un nucleón es

$$S = \sqrt{\tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{2}+1\right)}\hbar = \sqrt{\tfrac{3}{4}}\hbar \qquad (43.3)$$

y la componente z es

$$Sz = \pm\tfrac{1}{2}\hbar \qquad (43.4)$$

Además del momento angular de espín de los nucleones, puede haber momento angular *orbital* asociado con los movimientos dentro del núcleo. El momento angular orbital de los nucleones está cuantizado de la misma manera que el de los electrones en los átomos.

El momento angular *total* $\vec{J}$ del núcleo es la suma vectorial de los momentos angulares de espín y orbital individuales de todos los nucleones. Su magnitud es

$$J = \sqrt{j(j+1)}\hbar \qquad (43.5)$$

y su componente z es

$$J_z = m_j\hbar \qquad (m_j = -j, -j+1, \ldots, j-1, j) \qquad (43.6)$$

Cuando el número total de nucleones A es *par*, j es un entero; cuando es *impar*, j es semientero. Todos los nucleidos para los cuales tanto Z como N son pares tienen $J = 0$, lo cual sugiere que el apareamiento de partículas con componentes de espín opuestos puede ser importante en la estructura nuclear. El número cuántico del momento angular total nuclear j usualmente se conoce como *espín nuclear*, aunque en general se refiere a una combinación de los momentos angulares orbital y de espín de los nucleones que forman el núcleo.

Asociado con el momento angular nuclear existe un *momento magnético*. Cuando analizamos los momentos magnéticos *electrónicos* en la sección 41.4, introdujimos el magnetón de Bohr $\mu_B = e\hbar/2m_e$ como la unidad natural de momento magnético. Encontramos que la magnitud de la componente z del momento magnético del espín

del electrón es casi exactamente igual a μ_B; es decir, $|\mu_{sz}|_{\text{electrón}} \approx \mu_B$. Al describir momentos magnéticos *nucleares*, se puede definir una cantidad análoga, el **magnetón nuclear** μ_n:

$$\mu_n = \frac{e\hbar}{2m_p} = 5.05078 \times 10^{-27}\ \text{J/T} = 3.15245 \times 10^{-8}\ \text{eV/T} \quad (43.7)$$

(magnetón nuclear)

donde m_p es la masa del protón. Como la masa del protón m_p es 1836 veces mayor que la masa del electrón m_e, el magnetón nuclear μ_n es 1836 veces menor que el magnetón de Bohr μ_B.

Se esperaría que la magnitud de la componente z del momento magnético de espín del protón sea aproximadamente μ_n. Sin embargo, resulta que es

$$|\mu_{sz}|_{\text{protón}} = 2.7928\mu_n \quad (43.8)$$

Lo más sorprendente es que el neutrón, que carece de carga, tenga un momento magnético de espín, cuya componente z tiene una magnitud de

$$|\mu_{sz}|_{\text{neutrón}} = 1.9130\mu_n \quad (43.9)$$

El protón tiene una carga positiva; como era de esperarse, su momento magnético de espín es paralelo a su momento angular de espín $\vec{S}$. Sin embargo, $\vec{\mu}$ y $\vec{S}$ son opuestos para un neutrón, como se esperaría para una distribución de carga *negativa*. Estos momentos magnéticos *anómalos* se deben a que en realidad el protón y el neutrón no son partículas fundamentales, sino que están hechos de partículas más simples llamadas *quarks*. En el siguiente capítulo describiremos los quarks con detalle.

El momento magnético de un núcleo completo suele ser de unos cuantos magnetones nucleares. Cuando un núcleo se coloca en un campo magnético externo $\vec{B}$, hay una energía de interacción $U = -\vec{\mu} \cdot \vec{B} = -\mu_z B$ igual que con los momentos magnéticos atómicos. Las componentes μ_z del momento magnético en la dirección del campo están cuantizadas, por lo que se produce una serie de niveles de energía con esta interacción.

Ejemplo 43.2 Giros del espín del protón



Unos protones se colocan en un campo magnético, de 2.30 T, que apunta en la dirección z positiva. *a*) ¿Cuál es la diferencia de energía entre un estado con la componente z del momento angular de espín del protón paralelo al campo, y uno con la componente antiparalela al campo? *b*) Un protón puede efectuar una transición de uno de estos estados a otro, emitiendo o absorbiendo un fotón con la energía adecuada. Calcule la frecuencia y la longitud de onda de ese fotón.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: El protón es una partícula de espín $\frac{1}{2}$ con un momento magnético $\vec{\mu}$ en la misma dirección que su espín $\vec{S}$, de manera que su energía depende de la orientación de su espín en relación con un campo magnético aplicado $\vec{B}$. Si la componente z de $\vec{S}$ está alineada con $\vec{B}$, entonces μ_z es igual al valor positivo dado por la ecuación (43.8); si la componente z de $\vec{S}$ es opuesta a $\vec{B}$, entonces μ_z es el negativo de ese valor. La energía de interacción en cualquier caso es $U = -\mu_z B$, y la diferencia de energías es la incógnita del inciso *a*). La frecuencia y la longitud de onda del fotón se determinan usando $E = hf = hc/\lambda$.

EJECUTAR: *a*) Cuando la componente z de $\vec{S}$ y $\vec{\mu}$ son paralelas a $\vec{B}$, la energía de interacción es

$$U = -|\mu_z|B = -(2.7928)(3.152 \times 10^{-8}\,\text{eV/T})(2.30\ \text{T}) = -2.025 \times 10^{-7}\,\text{eV}$$

Cuando las componentes z de $\vec{S}$ y $\vec{\mu}$ son antiparalelas al campo, la energía es $+2.025 \times 10^{-7}$ eV, y la *diferencia* de energía entre los estados es

$$\Delta E = 2(2.025 \times 10^{-7}\,\text{eV}) = 4.05 \times 10^{-7}\,\text{eV}$$

b) La frecuencia y la longitud de onda del fotón correspondientes son

$$f = \frac{\Delta E}{h} = \frac{4.05 \times 10^{-7}\,\text{eV}}{4.136 \times 10^{-15}\,\text{eV}\cdot\text{s}} = 9.79 \times 10^{7}\,\text{Hz} = 97.9\ \text{MHz}$$

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3.00 \times 10^{8}\,\text{m/s}}{9.79 \times 10^{7}\,\text{s}^{-1}} = 3.06\ \text{m}$$

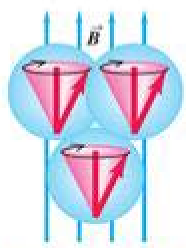
EVALUAR: Esta frecuencia se encuentra a la mitad de la banda FM de radio. Cuando una muestra de hidrógeno se coloca en un campo magnético de 2.30 T y se irradia con ondas de radio de esta frecuencia, pueden detectarse *giros de espín* de los protones por la absorción de la energía de la radiación.

43.1 Obtención de imágenes por resonancia magnética (IRM).

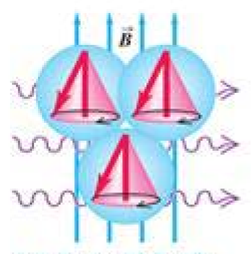
a)

Protones de hidrógeno con espines aleatorios

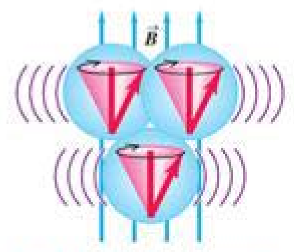
Los protones, núcleos de átomos de hidrógeno en el tejido que se estudia, normalmente tienen espines con orientaciones aleatorias.



En presencia de un campo magnético intenso, los espines se alinean con una componente paralela al campo $\vec{B}$.

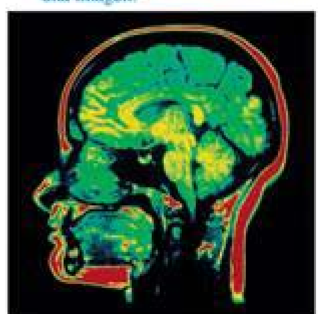


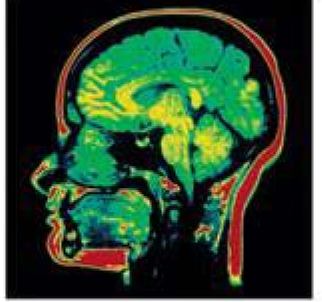
Una breve señal de radio hace girar los espines.



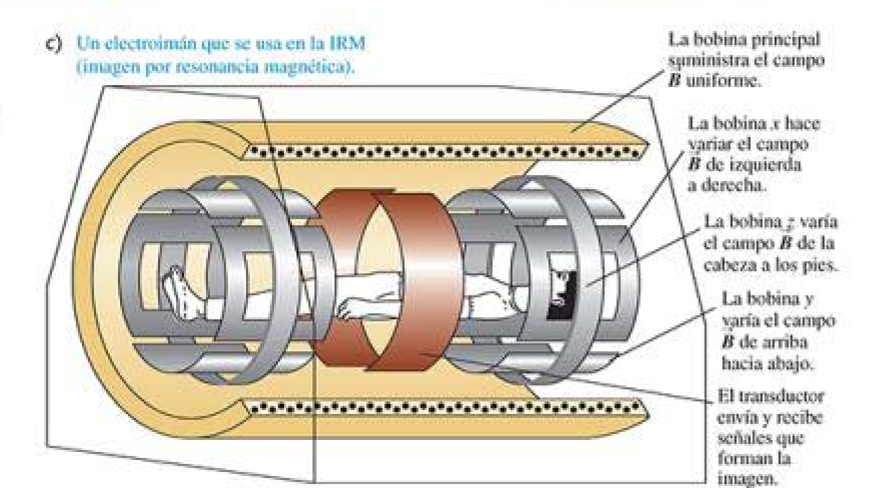
Cuando los protones se reorientan en relación con el campo $\vec{B}$ emiten ondas de radio que son captadas por detectores sensibles.

b) Como $\vec{B}$ tiene un valor distinto en diferentes regiones del tejido, las ondas de radio provenientes de distintas ubicaciones tienen diferentes frecuencias. Esto permite construir una imagen.





c) Un electroimán que se usa en la IRM (imagen por resonancia magnética).





PhET: Simplified MRI

Resonancia magnética nuclear e IRM

Los experimentos de giro de espín como el que se describió en el ejemplo 43.2 se llaman *resonancia magnética nuclear* (RMN). Se han hecho con muchos nucleidos diferentes. Las frecuencias y los campos magnéticos se pueden medir con mucha precisión, por lo que con esta técnica se pueden hacer mediciones exactas de los momentos magnéticos nucleares. Una materialización de esta idea básica lleva a la obtención de *imágenes de resonancia magnética* (IMR), una técnica no invasiva de obtención de imágenes, que discrimina los diversos tejidos corporales con base en los diferentes ambientes de los protones en los tejidos (figura 43.1).

El momento magnético de un núcleo también es la *fuente* de un campo magnético. En un átomo, la interacción del momento magnético de un electrón con el campo del momento magnético del núcleo causa desdoblamientos adicionales en los niveles y los espectros atómicos de energía. A este efecto lo llamamos *estructura hiperfina* en la sección 41.5. Las mediciones de la estructura hiperfina se pueden usar para determinar el espín nuclear en forma directa.

Evalúe su comprensión de la sección 43.1 *a)* ¿En qué factor debe aumentarse el número de masa de un núcleo para duplicar su volumen? **i.** $\sqrt[3]{2}$; **ii.** $\sqrt{2}$; **iii.** 2; **iv.** 4; **v.** 8. *b)* ¿En qué factor debe aumentarse el número de masa para que el radio del núcleo se duplique? **i.** $\sqrt[3]{2}$; **ii.** $\sqrt{2}$; **iii.** 2; **iv.** 4; **v.** 8.



43.2 Enlace nuclear y estructura nuclear

Como se debe suministrar energía a un núcleo para separar los protones y neutrones que lo forman, la energía total en reposo E_0 de los nucleones separados es mayor que la energía en reposo del núcleo. La energía que se debe agregar para separar los

nucleones se llama **energía de enlace** E_B; es la magnitud de la energía por la que los nucleones se mantienen juntos. Entonces, la energía en reposo del núcleo es $E_0 - E_B$. Si se usa la equivalencia entre masa en reposo y energía (véase la sección 37.8), vemos que la masa total de los nucleones siempre es mayor que la masa del núcleo en la cantidad E_B/c^2, que se llama *defecto de masa*. La energía de enlace de un núcleo que contiene Z protones y *N* neutrones se define como sigue:

$$E_B = (ZM_H + Nm_n - {}^A_ZM)c^2 \qquad \text{(energía de enlace nuclear)} \qquad (43.10)$$

donde ${}^A_ZM$ es la masa del átomo *neutro* que contiene al núcleo; la cantidad entre paréntesis es el defecto de masa y $c^2 = 931.5$ MeV/u. Observe que la ecuación (43.10) no incluye a Zm_p, la masa de los Z protones. Más bien contiene ZM_H, la masa de Z protones y Z electrones combinados en Z átomos neutros de ${}^1_1$H, para equilibrar los Z electrones que se incluyen en ${}^A_ZM$, la masa del átomo neutro.

El núcleo más simple es el del hidrógeno, con un solo protón. Después viene el núcleo de ${}^2_1$H, el isótopo del hidrógeno con número de masa 2, que se conoce generalmente como *deuterio*. Su núcleo consiste en un protón y un neutrón enlazados para formar una partícula llamada *deuterón*. Usando los valores de la tabla 43.2 en la ecuación (43.10), la energía de enlace del deuterón es

$$\begin{aligned} E_B &= (1.007825\text{ u} + 1.008665\text{ u} - 2.014102\text{ u})(931.5\text{ MeV/u}) \\ &= 2.224\text{ MeV} \end{aligned}$$

Toda esta energía se necesitaría para separar el deuterón y obtener un protón y un neutrón. Una medida importante de lo fuertemente unido que está un núcleo es la *energía de enlace por nucleón*, E_B/A. Con (2.224 MeV)/(2 nucleones) = 1.112 MeV por nucleón, el ${}^2_1$H tiene la energía mínima de enlace por nucleón de todos los nucleidos.

Aplicación El deuterio y la toxicidad del agua pesada
Un paso crucial en la división celular de plantas y animales es la formación de un huso, que separa los dos conjuntos de los cromosomas hijos. Si a una planta se le suministra solamente agua pesada —en la cual uno o los dos átomos de hidrógeno en la molécula de H_2O se reemplazan por un átomo de deuterio—, la división celular se detiene y la planta deja de crecer. Esto se debe a que el deuterio es más masivo que el hidrógeno ordinario, de manera que el enlace O-H en el agua pesada tiene energía de enlace ligeramente diferente, y el agua pesada manifiesta propiedades un tanto distintas como solvente. Las reacciones bioquímicas que ocurren durante la división celular son muy sensibles a estas propiedades de solvencia, de manera que el huso nunca se forma y la célula no puede reproducirse.



Estrategia para resolver problemas 43.1 Propiedades nucleares



IDENTIFICAR *los conceptos relevantes:* Las propiedades clave de un núcleo son la masa, el radio, la energía de enlace, el defecto de masa, la energía de enlace por nucleón y el momento angular.

PLANTEAR *el problema:* Una vez identificadas las incógnitas, se reúnen las ecuaciones necesarias para resolver el problema. Una cantidad relativamente pequeña de ecuaciones de esta sección y de la sección 43.1 es todo lo que se necesita.

EJECUTAR *la solución:* Resuelva las ecuaciones para obtener las incógnitas. Los cálculos de energía de enlace usando la ecuación (43.10) a menudo incluyen la resta de dos cantidades aproximadamente iguales. Para obtener la precisión suficiente en la diferencia, quizá necesite manejar nueve cifras significativas si están disponibles.

EVALUAR *su respuesta:* Es muy útil estar familiarizado con las siguientes magnitudes características. Las masas de los protones y neutrones son 1840 veces mayores que la masa del electrón. El radio de un núcleo es del orden de 10^{-15} m; la energía potencial eléctrica de dos protones en un núcleo es del orden de 10^{-13} J o 1 MeV, de modo que las energías de interacción nuclear son del orden de unos cuantos MeV, y no del orden de unos cuantos eV, como con los átomos. La energía de enlace por nucleón es aproximadamente el 1% de la energía en reposo del nucleón. (La energía de ionización del átomo de hidrógeno solo es el 0.003% de la energía en reposo del electrón). Los momentos angulares están determinados solo por el valor de $\hbar$, de modo que son del mismo orden de magnitud en los núcleos y en los átomos. Sin embargo, los momentos magnéticos de los núcleos son alrededor de 1000 veces *menores* que los de los electrones en los átomos, porque los núcleos son mucho más masivos que los electrones.

Ejemplo 43.3 El nucleido más fuertemente enlazado



Calcule el defecto de masa, la energía total de enlace y la energía de enlace por nucleón del ${}^{62}_{28}$Ni, el cual tiene la máxima energía de enlace por nucleón de todos los nucleidos (figura 43.2). La masa atómica del ${}^{62}_{28}$Ni neutro es 61.928349 u.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: El defecto de masa ΔM es la diferencia entre la masa del núcleo y la masa combinada de los nucleones que lo forman. La energía de enlace E_B es esta cantidad multiplicada por c^2, y la energía de enlace por nucleón es E_B dividida entre el número de masa *A*. Se usa la ecuación (43.10), $\Delta M = ZM_H + Nm_n - {}^A_ZM$, para determinar tanto el defecto de masa como la energía de enlace.

EJECUTAR: Con $Z = 28$, $M_H = 1.007825$ u, $N = A - Z = 62 - 28 = 34$, $m_n = 1.008665$ u y ${}^A_ZM = 61.928349$ u, de la ecuación (43.10) se obtiene $\Delta M = 0.585361$ u. Entonces, la energía de enlace es

$$E_B = (0.585361\text{ u})(931.5\text{ MeV/u}) = 545.3\text{ MeV}$$

Continúa

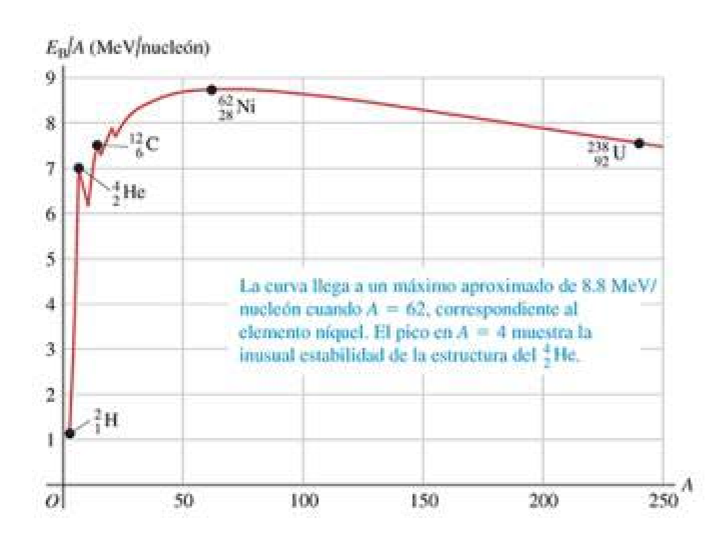
La energía de enlace por *nucleón* es $E_B/A = (545.3 \text{ MeV})/62$, es decir, 8.795 MeV por nucleón.

EVALUAR: El resultado significa que se necesitaría un mínimo de 545.3 MeV para separar totalmente un núcleo de $^{62}_{28}\text{Ni}$ en 28 protones y 34 neutrones. El defecto de masa del $^{62}_{28}\text{Ni}$ es aproximadamente el 1% de la masa atómica (o nuclear). La energía de enlace es más o menos el 1% de la energía en reposo del núcleo, y la energía de enlace por nucleón es aproximadamente el 1% de la energía en reposo de un nucleón. Observe que el defecto de masa es más de la mitad de la masa de un nucleón, lo que indica lo fuertemente que están enlazados los núcleos.

Casi todos los nucleidos estables, desde los más ligeros hasta los más masivos, tienen energías de enlace que van de 7 a 9 MeV por nucleón. La figura 43.2 es una gráfica de la energía de enlace por nucleón, en función del número de masa *A*. Observe el pico en $A = 4$, que indica una energía de enlace por nucleón excepcionalmente alta del núcleo He (partícula alfa) en relación con sus vecinos. Para explicar esta curva se deben tener en cuenta las interacciones entre los nucleones.

Fuerza nuclear

La fuerza que mantiene a los protones y neutrones en el núcleo, a pesar de la repulsión eléctrica de los protones, es un ejemplo de la *interacción fuerte* que mencionamos en la sección 5.5 del vol. 1. En el contexto de la estructura nuclear, a esta interacción se le llama *fuerza nuclear.* A continuación veremos algunas de sus características. En primer lugar, no depende de la carga; los neutrones y los protones se enlazan y el enlace es igual para los dos. En segundo lugar, tiene corto alcance, del orden de las dimensiones nucleares, esto es, de 10^{-15} m. (Si no fuera así, el núcleo crecería jalando más protones y neutrones). Pero dentro de este alcance, la fuerza nuclear es mucho más intensa que las fuerzas eléctricas; si no fuera así, el núcleo nunca sería estable. Resultaría ventajoso poder escribir una sola ecuación, como la ley de Newton de la gravitación o la ley de Coulomb, para describir esta fuerza, pero los físicos todavía están determinando su dependencia en función de la separación *r.* En tercer lugar, la densidad casi constante de la materia nuclear y la energía de enlace por nucleón casi constante de nucleidos más grandes muestran que un determinado nucleón no puede interactuar en forma simultánea con *todos* los demás nucleones del núcleo, sino solo con los pocos que tiene en su cercanía inmediata. Esto es distinto de las fuerzas eléctricas, donde *cada* protón en el núcleo repele a todos los demás. Esta cantidad limitada de interacciones se llama *saturación*; es análoga al enlace covalente en las moléculas y en los sólidos. Por último, la fuerza nuclear favorece el enlace de *pares* de protones o neutrones con espines opuestos, y de *pares de pares*, esto es, un par de protones y un par de neutrones, cada uno de los pares con espín opuesto. Por consiguiente, la partícula alfa (formada por dos protones y dos neutrones) es un núcleo de estabilidad excepcional para su número de masa. En el siguiente apartado veremos otras evidencias de los efectos de apareamiento en los núcleos. (En la sección 42.8



43.2 Energía de enlace aproximada por nucleón, en función del número de masa *A* (la cantidad total de nucleones) para nucleidos estables.

se describió un apareamiento análogo que enlaza electrones de espín opuesto para formar pares de Cooper, en la teoría BCS de la superconductividad).

El análisis de la estructura nuclear es más complicado que el de átomos con muchos electrones. Intervienen dos clases distintas de interacción (eléctrica y nuclear) y todavía no se comprende por completo la fuerza nuclear. Aun así, podemos adquirir cierta imagen de la estructura nuclear usando modelos sencillos. Describiremos en forma breve dos modelos distintos que han tenido éxito: el *modelo de gota líquida* y el *modelo de capas.*

Modelo de gota líquida

El **modelo de gota líquida**, propuesto por primera vez en 1928 por George Gamow, físico ruso, y desarrollado después por Niels Bohr, es resultado de la observación de que todos los núcleos tienen casi la misma densidad. Los nucleones individuales son análogos a las moléculas de un líquido, mantenidas juntas por interacciones de corto alcance y por efectos de la tensión superficial. Esta imagen sencilla ayuda a deducir una fórmula para estimar la energía total de enlace de un núcleo. Incluiremos cinco contribuciones:

1. Ya hemos indicado que las fuerzas nucleares presentan *saturación*; un nucleón individual solo interactúa con algunos de sus vecinos más cercanos. Este efecto da por resultado un término a la energía de enlace que es proporcional a la cantidad de nucleones. Escribiremos este término en la forma C_1A, donde C_1 es una constante determinada en forma experimental.
2. Los nucleones de la superficie del núcleo están menos fuertemente enlazados que los del interior, porque no tienen vecinos fuera de la superficie. Esta disminución en la energía de enlace produce un término de energía *negativo*, proporcional al área $4\pi R^2$ de la superficie. Como R es proporcional a $A^{1/3}$, este término es proporcional a $A^{2/3}$; lo escribiremos como $-C_2A^{2/3}$, donde C_2 es otra constante.
3. Cada uno de los Z protones repele a todos los demás $(Z - 1)$ protones. La energía potencial total de repulsión eléctrica es proporcional a $Z(Z - 1)$, e inversamente proporcional al radio R y, por consiguiente, a $A^{1/3}$. Este término de energía es negativo, porque los nucleones están menos fuertemente enlazados de lo que estarían si no hubiera repulsión eléctrica. Escribiremos esta corrección en la forma $-C_3Z(Z-1)/A^{1/3}$.
4. Para estar en un estado estable, de baja energía, el núcleo debe tener un equilibrio entre las energías asociadas con los neutrones y los protones. Esto quiere decir que N es cercano a Z para A pequeña, y que N es mayor que Z (pero no mucho mayor) cuando A es más grande. Se necesita un término negativo de energía, que corresponda a la diferencia $|N-Z|$. La mejor concordancia con las energías de enlace observadas se obtiene si este término es proporcional a $(N-Z)^2/A$. Si usamos $N = A - Z$ para expresar esta energía en función de A y de Z, esta corrección es $-C_4(A - 2Z)^2/A$.
5. Finalmente, la fuerza nuclear favorece el *apareamiento* de protones y neutrones. Este término de energía es positivo (hay más enlace) si tanto Z como N son pares, y negativo (menos enlace) si tanto Z como N son impares, y cero en cualquier otro caso. El mejor ajuste con los datos se obtiene con la forma $\pm C_5A^{-4/3}$ para este término.

La energía total de enlace estimada E_B es la suma de estos cinco términos:

$$E_B = C_1A - C_2A^{2/3} - C_3\frac{Z(Z-1)}{A^{1/3}} - C_4\frac{(A-2Z)^2}{A} \pm C_5A^{-4/3} \quad (43.11)$$

(energía de enlace nuclear)

Las constantes C_1, C_2, C_3, C_4 y C_5, elegidas para que esta fórmula se ajuste mejor a las energías de enlace observadas, son:

$$C_1 = 15.75 \text{ MeV}$$
$$C_2 = 17.80 \text{ MeV}$$
$$C_3 = 0.7100 \text{ MeV}$$
$$C_4 = 23.69 \text{ MeV}$$
$$C_5 = 39 \text{ MeV}$$

La constante C_1 es la energía de enlace por nucleón debida a la fuerza nuclear de saturación. Esta energía es casi de 16 MeV por nucleón, más o menos el doble de la energía *total* de enlace por nucleón en la mayoría de los nucleidos.

Si se estima la energía de enlace E_B usando la ecuación (43.11) se puede resolver la ecuación (43.10) y usarla para estimar la masa de cualquier átomo neutro:

$$^{A}_{Z}M = ZM_H + Nm_n - \frac{E_B}{c^2} \quad \text{(fórmula semiempírica de la masa)} \quad (43.12)$$

A la ecuación (43.12) se le llama *fórmula semiempírica de la masa.* El nombre es adecuado; es *empírica* porque hubo que determinar las C en forma empírica (experimental), aunque sí tiene una base teórica sólida.



Ejemplo 43.4 Estimación de la energía de enlace y la masa

Para el nucleido $^{62}_{28}$Ni del ejemplo 43.3, *a*) calcule los cinco términos de la energía de enlace y la energía total estimada de enlace, y *b*) determine su masa atómica neutra, usando la fórmula semiempírica de la masa.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Usaremos el modelo de gota líquida del núcleo y sus cinco contribuciones a la energía de enlace, dados por la ecuación (43.11), para calcular la energía total de enlace E_B. Luego usaremos la ecuación (43.12) para calcular la masa atómica del $^{62}_{28}M$ neutro.

EJECUTAR: *a*) Con $Z = 28$, $A = 62$ y $N = 34$, los cinco términos en la ecuación (43.11) son:

1. $C_1A = (15.75\ \text{MeV})(62) = 976.5\ \text{MeV}$
2. $-C_2A^{2/3} = -(17.80\ \text{MeV})(62)^{2/3} = -278.8\ \text{MeV}$
3. $-C_3\dfrac{Z(Z-1)}{A^{1/3}} = -(0.7100\ \text{MeV})\dfrac{(28)(27)}{(62)^{1/3}} = -135.6\ \text{MeV}$
4. $-C_4\dfrac{(A-2Z)^2}{A} = -(23.69\ \text{MeV})\dfrac{(62-56)^2}{62} = -13.8\ \text{MeV}$
5. $+C_5A^{-4/3} = (39\ \text{MeV})(62)^{-4/3} = 0.2\ \text{MeV}$

La corrección por apareamiento (término 5) es, con mucho, el más pequeño de todos los términos; es positivo, porque tanto Z como N son pares. La suma de todos los términos es la energía total estimada de enlace, $E_B = 548.5$ MeV.

b) Ahora usaremos $E_B = 548.5$ MeV en la ecuación (43.12):

$$^{62}_{28}M = 28(1.007825\ \text{u}) + 34(1.008665\ \text{u}) - \frac{548.5\ \text{MeV}}{931.5\ \text{MeV/u}} = 61.925\ \text{u}$$

EVALUAR: La energía de enlace del $^{62}_{28}$Ni calculada en el inciso *a*) solo es 0.6% mayor que el valor real de 545.3 MeV determinado en el ejemplo 43.3, y la masa calculada en el inciso *b*) solo es un 0.005% menor que el valor medido de 61.928349 u. ¡La fórmula semiempírica de la masa puede ser muy precisa!

El modelo de gota líquida y la fórmula de la masa deducida con este último son bastante buenos para correlacionar masas nucleares, y veremos después que son de gran ayuda para comprender los procesos de decaimiento de los nucleidos inestables. Algunos otros aspectos de los núcleos, como el momento angular y los estados excitados, se estiman mejor mediante otros modelos.

Modelo de capas

El **modelo de capas** de la estructura nuclear es análogo a la aproximación del campo central en física atómica (sección 41.6). Se considera a cada nucleón moviéndose en un potencial que representa el efecto promedio de todos los demás nucleones. Tal vez parezca que este no es un método muy prometedor; la fuerza nuclear es muy fuerte, de muy corto alcance y en consecuencia depende fuertemente de la distancia. Sin embargo, en algunos aspectos, funciona bastante bien.

La función para la energía potencial de la fuerza nuclear es igual para los protones que para los neutrones. Una hipótesis razonable de la forma de esta función se ve en la figura 43.3*a*: es una versión esférica del pozo cuadrado de potencial que estudiamos en la sección 40.3. Las esquinas están algo redondeadas, porque el núcleo no tiene una superficie claramente definida. Para los protones hay una energía potencial adicional asociada con la repulsión eléctrica. Consideraremos que cada protón interactúa con una esfera de densidad de carga uniforme, de radio R y carga total $(Z-1)e$. La figura 43.3*b* muestra las energías potenciales nuclear, eléctrica y total para un protón, en función de la distancia r al centro del núcleo.

En principio, podríamos resolver la ecuación de Schrödinger para un protón o un neutrón moviéndose en ese potencial. Para cualquier energía potencial con simetría esférica, los estados de momento angular son los mismos que para electrones en la aproximación de campo central, de la física atómica. En particular, se puede usar el concepto de *capas y subcapas llenas* y su relación con la estabilidad. En la estructura atómica encontramos que los valores de $Z = 2$, 10, 18, 36, 54 y 86 (los números atómicos de los gases nobles) corresponden a configuraciones electrónicas especialmente estables.

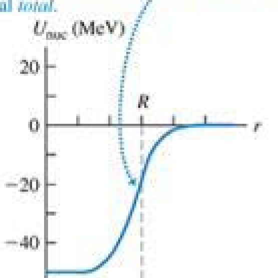
Un efecto semejante sucede en la estructura nuclear. Los números son distintos, porque la función de energía potencial es diferente, y la interacción nuclear espín-órbita es mucho más fuerte y de signo contrario que en los átomos, así que las subcapas se llenan en orden distinto al de los electrones en un átomo. Se ha encontrado que cuando la cantidad de neutrones *o bien* la cantidad de protones es 2, 8, 20, 28, 50, 82 o 126, la estructura que resulta tiene estabilidad excepcional, esto es, tiene una energía de enlace excepcionalmente grande. (No se han observado en la naturaleza nucleidos con $Z = 126$). A estos números se les llama *números mágicos*. Los nucleidos con Z igual a un número mágico tienden a tener una cantidad de isótopos estables mayor que el promedio. Hay varios nucleidos *doblemente mágicos* para los que tanto Z como N son mágicos, como los del

$$^{4}_{2}\mathrm{He} \qquad ^{16}_{8}\mathrm{O} \qquad ^{40}_{20}\mathrm{Ca} \qquad ^{48}_{20}\mathrm{Ca} \qquad ^{208}_{82}\mathrm{Pb}$$

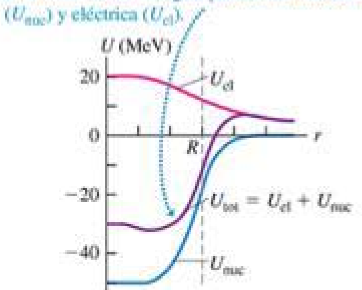
Todos estos nucleidos tienen energías de enlace por nucleón bastante mayores que los nucleidos con valores cercanos de N o de Z. Además, todos tienen espín nuclear cero. Los números mágicos corresponden a configuraciones de capa o subcapa llena, con niveles de energía nucleónica con un salto relativamente grande de energía hasta el siguiente nivel permitido.

43.3 Funciones aproximadas de energía potencial para un nucleón en un núcleo. El radio nuclear aproximado es R.

a) La energía potencial U_{nuc} debida a la fuerza nuclear es igual para los protones y los neutrones; para los neutrones, es la energía potencial *total*.



b) La energía potencial total U_{tot} para un protón es la suma de las energías potenciales nuclear (U_{nuc}) y eléctrica (U_{el}).



Evalúe su comprensión de la sección 43.2 Clasifique los siguientes núcleos en orden decreciente de su energía de enlace por nucleón. **i.** $^{4}_{2}\mathrm{He}$; **ii.** $^{52}_{24}\mathrm{Cr}$; **iii.** $^{152}_{62}\mathrm{Sm}$; **iv.** $^{200}_{80}\mathrm{Hg}$; **v.** $^{252}_{92}\mathrm{Cf}$. ❙

43.3 Estabilidad nuclear y radiactividad

MasteringPHYSICS

ActivPhysics 19.2: Nuclear Binding Energy
ActivPhysics 19.4: Radioactivity

De entre unos 2500 nucleidos conocidos, menos de 300 son estables. Los demás son estructuras inestables que se desintegran para formar otros nucleidos, emitiendo partículas y radiación electromagnética mediante un proceso llamado **radiactividad**. La escala de tiempos de esos procesos de decaimiento va desde una pequeña fracción de microsegundo hasta miles de millones de años. Los nucleidos *estables* se indican con puntos en la gráfica de la figura 43.4, donde el número de neutrones N y el número de protones (o número atómico) Z se grafican para cada nucleido. Esta gráfica se llama *gráfica de Segrè*, en honor de su inventor, el físico ítalo-estadounidense Emilio Segrè (1905-1989).

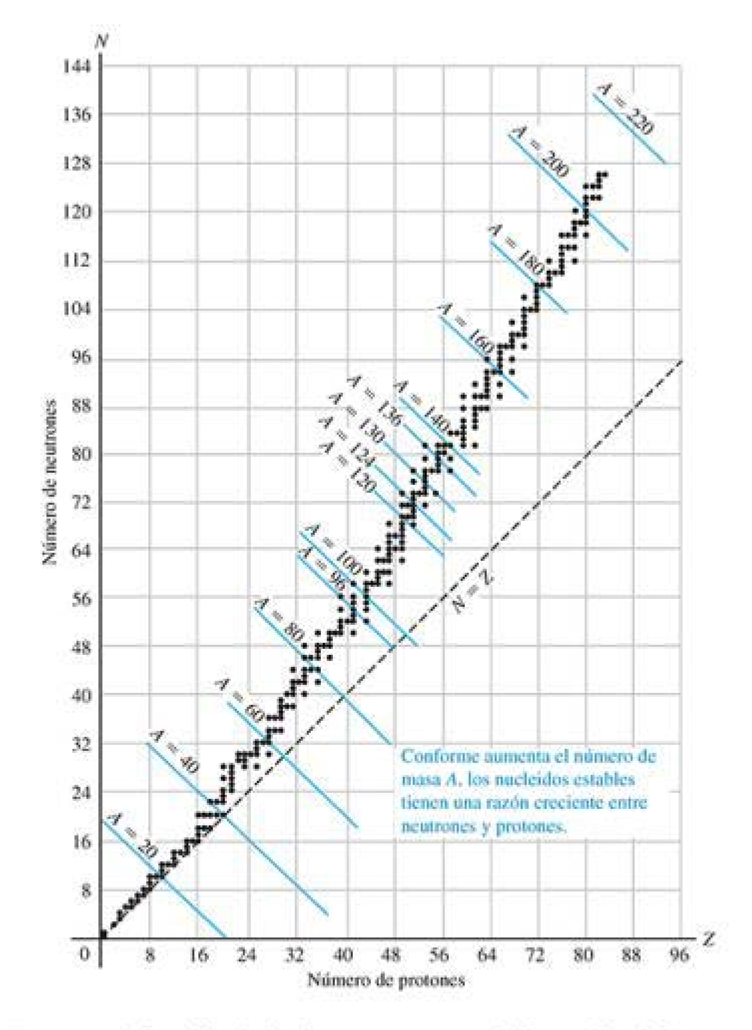
Cada línea azul perpendicular a la línea $N = Z$ representa un valor específico del número de masa $A = Z + N$. La mayor parte de las líneas de A constante solo pasan por uno o dos nucleidos estables; esto es, en general, hay un intervalo muy pequeño de estabilidad para determinado número de masa. Las líneas en $A = 20$, $A = 40$, $A = 60$ y $A = 80$ son algunos ejemplos. En cuatro casos, estas líneas pasan por *tres* nucleidos estables, a saber, $A = 96$, 124, 130 y 136.

Los cuatro nucleidos estables tienen Z impar y N impar:

$$^{2}_{1}\mathrm{H} \qquad ^{6}_{3}\mathrm{Li} \qquad ^{10}_{5}\mathrm{B} \qquad ^{14}_{7}\mathrm{N}$$

Estos se llaman *nucleidos impar-impar*. La ausencia de otros nucleidos impar-impar muestra la influencia del apareamiento. Además, *tampoco* hay nucleido estable con $A = 5$ o $A = 8$. El núcleo doblemente mágico $^{4}_{2}\mathrm{He}$, con un par de protones y un par de neutrones, no tiene interés en aceptar una quinta partícula en su estructura. Los conjuntos de ocho nucleones decaen a nucleidos menores, y un núcleo $^{8}_{4}\mathrm{Be}$ decae de inmediato, dividiéndose en dos núcleos de $^{4}_{2}\mathrm{He}$.

43.4 Gráfica de Segrè que muestra el número de neutrones y el número de protones para nucleidos estables.



Los puntos de la gráfica de Segrè que representan nucleidos estables definen una región relativamente estrecha de estabilidad. Para números de masa bajos, las cantidades de protones y neutrones son aproximadamente iguales, $N \approx Z$. La relación N/Z aumenta en forma gradual al aumentar A, hasta aproximadamente 1.6 para números de masa grandes, debido a la influencia creciente de la repulsión eléctrica de los protones. Los puntos a la derecha de la región de estabilidad representan nucleidos que tienen demasiados protones en relación con los neutrones, para ser estables. En esos casos gana la repulsión, y el núcleo se divide. A la izquierda están los nucleidos con demasiados neutrones en relación con los protones. En esos casos, la energía asociada con los neutrones está desbalanceada con la asociada a los protones, y los nucleidos decaen en un proceso que convierte los neutrones en protones. La gráfica muestra también que no hay un nucleido con $A > 209$ o con $Z > 83$ que sea estable. Un núcleo es inestable si es demasiado grande. También se observa que no hay un nucleido estable con $Z = 43$ (tecnecio) o 61 (prometio).

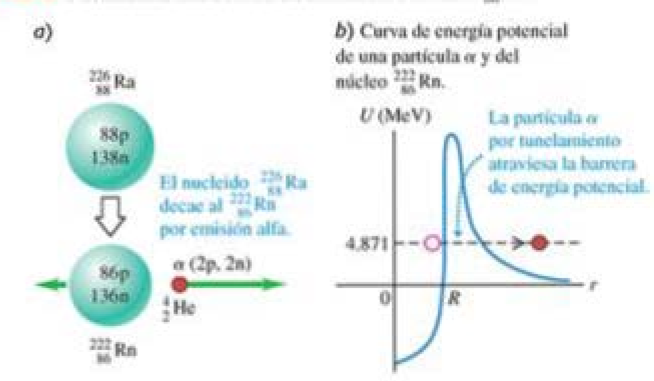


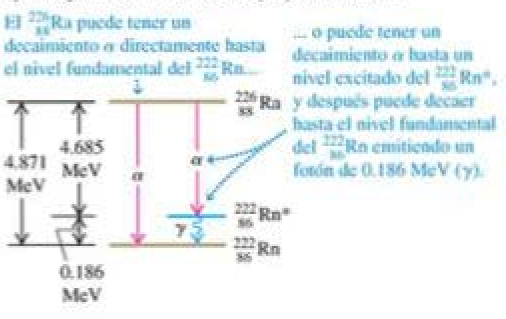
PhET: Alpha Decay

Decaimiento alfa

Casi el 90% de los 2500 nucleidos conocidos son *radiactivos*; no son estables, sino que se desintegran y forman otros nucleidos. Cuando los nucleidos inestables decaen y forman diferentes nucleidos, suelen emitir partículas alfa (α) o beta (β). Una **partícula alfa** es un núcleo ^{4}He, con dos protones y dos neutrones enlazados entre sí, con espín total cero. La emisión alfa se presenta principalmente en núcleos que son demasiado grandes para ser estables. Cuando un núcleo emite una partícula alfa, sus valores de N y Z disminuyen cada uno en dos, y A disminuye en cuatro, acercándose a la región estable en la gráfica de Segrè.

43.5 Decaimiento alfa del nucleido inestable del radio $^{226}_{88}$Ra.





Un ejemplo conocido de un emisor alfa es el radio, $^{226}_{88}$Ra (figura 43.5*a*). La rapidez de la partícula alfa emitida, determinada por la curvatura de su trayectoria en un campo magnético transversal, es de 1.52×10^7 m/s. Esta rapidez, aunque es elevada, solo es el 5% de la rapidez de la luz, por lo que podemos usar la ecuación no relativista de energía cinética $K = \frac{1}{2}mv^2$:

$$K = \tfrac{1}{2}(6.64 \times 10^{-27}\ \text{kg})(1.52 \times 10^7\ \text{m/s})^2 = 7.67 \times 10^{-13}\ \text{J} = 4.79\ \text{MeV}$$

Las partículas alfa siempre se emiten con energías cinéticas definidas, determinadas por la conservación del momento lineal y la energía. Debido a su carga y su masa, las partículas alfa solo pueden recorrer algunos centímetros en el aire, o algunos décimos o centésimos de milímetro en los sólidos antes de quedar en reposo debido a colisiones.

Algunos núcleos pueden decaer en forma espontánea emitiendo partículas α, porque se libera energía en esta desintegración. Puede usted aplicar la conservación de masa-energía para demostrar que

el decaimiento alfa es posible siempre que la masa del átomo neutro original sea mayor que la suma de las masas del átomo neutro final y del átomo neutro de helio 4.

En el decaimiento alfa, la partícula α mediante tunelamiento pasa a través de una barrera de energía potencial, como se ve en la figura 43.5*b*. Sería bueno que repasara la descripción del tunelamiento en la sección 40.4.



Ejemplo 43.5 Decaimiento alfa del radio

Demuestre que el proceso de emisión de partículas α, $^{226}_{88}\text{Ra} \rightarrow {}^{222}_{86}\text{Rn} + {}^{4}_{2}\text{He}$, es energéticamente posible, y calcule la energía cinética de la partícula α emitida. Las masas atómicas neutras son 226.025403 u para el $^{226}_{88}$Ra y 222.017571 u para el $^{222}_{86}$Rn.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: La emisión alfa es posible, si la masa del átomo de $^{226}_{88}$Ra es mayor que la suma de las masas atómicas del Rn y del $^{222}_{86}$Rn y $^{4}_{2}$He. La diferencia de masa entre el átomo inicial de radio y los átomos finales de radón y de helio corresponden (usando $E = mc^2$) a la energía E liberada en el decaimiento. Ya que se conservan el momento lineal y también la energía, *tanto* la partícula alfa *como* el átomo de $^{222}_{86}$Rn están en movimiento después de la desintegración; tendremos en cuenta esto para determinar la energía cinética de la partícula alfa.

EJECUTAR: De acuerdo con la tabla 43.2, la masa del átomo de $^{4}_{2}$He es 4.002603 u. La diferencia de masas entre el núcleo original y los productos de decaimiento es

$$226.025403\ \text{u} - (222.017571\ \text{u} + 4.002603\ \text{u}) = +0.005229\ \text{u}$$

Como el resultado tiene signo positivo, el decaimiento alfa es energéticamente posible. La energía equivalente a esta diferencia de masa es

$$E = (0.005229\ \text{u})(931.5\ \text{MeV/u}) = 4.871\ \text{MeV}$$

Así, cabe esperar que los productos del decaimiento salgan con una energía cinética total de 4.871 MeV. También se conserva el momento lineal; si el núcleo precursor $^{226}_{88}$Ra estaba en reposo, el derivado $^{222}_{86}$Rn y la partícula α tienen momentos lineales de igual magnitud p, pero

Continúa

sentido opuesto. La energía cinética es $K = \frac{1}{2}mv^2 = p^2/2m$: como p es igual para las dos partículas, la energía cinética se divide en proporción inversa a sus masas. A la partícula α le corresponde el $222/(222 + 4)$ del total, o 4.78 MeV.

EVALUAR: Los experimentos muestran que el $^{226}_{88}$Ra experimenta un decaimiento alfa, y la energía de la partícula α observada es 4.78 MeV. Se puede comprobar los resultados verificando que la partícula alfa y el núcleo de Rn producidos en el decaimiento tengan momento lineal $p = mv$ de la misma magnitud. Se puede calcular la velocidad v de cada uno de los productos de decaimiento a partir de su energía cinética respectiva. Encontrará que la partícula alfa se mueve muy rápidamente a una velocidad de $0.0506c = 1.52 \times 10^7$ m/s; si se conserva el momento lineal, usted debería determinar que el núcleo de $^{222}_{86}$Rn se mueve a $\frac{4}{222}$ de la velocidad anterior. ¿Es así?

Decaimiento beta

Hay tres clases distintas y sencillas de *decaimiento beta: beta menos, beta más* y *captura de electrón*. Una **partícula beta menos** (β^-) es un electrón. No es evidente cómo es que un núcleo puede emitir un electrón, si en el núcleo no hay electrones. La emisión de una β^- implica la *transformación* de un neutrón en un protón, un electrón y una tercera partícula, llamada *antineutrino*. De hecho, si usted libera un neutrón de un núcleo, decaerá en un protón, un electrón y un antineutrino, en un tiempo promedio de aproximadamente 15 minutos.

Las partículas beta se pueden identificar, y es posible medir su rapidez empleando técnicas similares a los experimentos de Thomson que describimos en la sección 27.5. Las rapideces de las partículas beta llegan hasta a 0.9995 de la velocidad de la luz, por lo que su movimiento es muy relativista. Son emitidas con un espectro continuo de energías. Esto no sería posible si las únicas dos partículas fueran la β^- y el núcleo en retroceso, ya que en ese caso la conservación de la energía y del momento lineal indicarían una rapidez definida de la partícula β^-. Así que debe haber una *tercera* partícula involucrada. Debido a la conservación de la carga, esa partícula debe ser neutra, y de acuerdo con la conservación del momento angular, debe ser una con espín $\frac{1}{2}$.

Esta tercera partícula es un antineutrino, la *antipartícula* de un **neutrino**. El símbolo del neutrino es ν_e (la letra griega "nu"). Tanto el neutrino como el antineutrino tienen carga cero y masa cero (o muy pequeña) y, en consecuencia, producen muy pocos efectos observables al atravesar la materia. Su detección fue posible hasta 1953, cuando Frederick Reines y Clyde Cowan pudieron observar en forma directa al antineutrino. Ahora sabemos que hay al menos tres variedades de neutrinos, cada uno con su antineutrino correspondiente; uno se asocia con el decaimiento beta, y las otras dos se asocian con el decaimiento de dos partículas inestables, el muón y la partícula tau. Describiremos esas partículas con más detalle en el capítulo 44. El antineutrino que se emite en el decaimiento β^- se representa con $\overline{\nu}_e$. El proceso básico del decaimiento β^- es

$$\mathrm{n} \rightarrow \mathrm{p} + \beta^- + \overline{\nu}_e \qquad (43.13)$$

El decaimiento beta menos suele presentarse en nucleidos para los que la razón de neutrones a protones N/Z es muy grande para tener estabilidad. En el decaimiento β^-, N disminuye en uno, Z aumenta en uno y A no cambia. Se puede aplicar la conservación de la masa-energía para demostrar que

el decaimiento beta menos puede ocurrir siempre que la masa del átomo neutro original sea mayor que la del átomo final.

Ejemplo 43.6 Por qué el cobalto 60 es un emisor beta menos



El nucleido $^{60}_{27}$Co, es un núcleo impar-impar inestable, y se usa en aplicaciones médicas e industriales de radiación. Demuestre que es inestable en relación con el decaimiento β^-. Las masas atómicas que se necesitan son 59.933822 u para el $^{60}_{27}$Co y 59.930791 u para el $^{60}_{28}$Ni.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: El decaimiento beta menos es posible si la masa del átomo neutro original es mayor que la del átomo final. Primero debemos identificar el nucleido que resulta si el $^{60}_{27}$Co experimenta un decaimiento β^- y luego comparar su masa atómica neutra con la del $^{60}_{27}$Co.

EJECUTAR: En el decaimiento β^- del $^{60}_{27}$Co, Z aumenta uno, de 27 a 28, y A permanece en 60, por lo que el nucleido final es $^{60}_{28}$Ni. La masa atómica neutra del $^{60}_{27}$Co es mayor que la del $^{60}_{28}$Ni por 0.003031 u, por lo que el decaimiento β^- *puede* suceder.

EVALUAR: Con tres productos de decaimiento en el proceso β^- (el núcleo $^{60}_{28}$Ni, el electrón y el antineutrino), la energía se puede compartir de muchas maneras distintas, que sean compatibles con la conservación de la energía y el momento lineal. Es imposible predecir con precisión cómo se compartirá la energía en el decaimiento de determinado núcleo de $^{60}_{27}$Co. En contraste, en el decaimiento alfa solo hay dos productos de decaimiento, y sus energías y momentos lineales se determinan individualmente (véase el ejemplo 43.5).

Hemos observado que el decaimiento β^- sucede con nucleidos que tienen una razón N/Z, de neutrones a protones, muy grande. Los nucleidos en los que N/Z es muy *pequeña* para tener estabilidad pueden emitir un *positrón*, la antipartícula del electrón, que es idéntica al electrón pero con carga positiva. (Estudiaremos el positrón con más detalle en el capítulo 44). El proceso básico se llama *decaimiento beta más* (β^+), y es

$$p \rightarrow n + \beta^+ + \nu_e \qquad (43.14)$$

donde β^+ es un positrón, y ν_e es el neutrino electrónico.

El decaimiento beta más puede presentarse siempre que la masa del átomo neutro original sea al menos dos masas de electrón mayor que la del átomo final.

Se puede demostrar esto aplicando la conservación de la masa-energía.

El tercer tipo de decaimiento beta es la *captura de electrón*. Hay unos nucleidos para los que la emisión β^+ no es posible desde el punto de vista de la energía, pero en los que un electrón orbital (normalmente en la capa K) se puede combinar con un protón del núcleo, formando un neutrón y un neutrino. El neutrón permanece en el núcleo, y el neutrino se emite. El proceso básico es

$$p + \beta^- \rightarrow n + \nu_e \qquad (43.15)$$

Usted puede aplicar la conservación de la masa-energía para demostrar que

la captura del electrón puede presentarse siempre que la masa del átomo neutro original sea mayor que la del átomo final.

En todos los tipos de decaimiento beta, A permanece constante. Sin embargo, en el decaimiento beta más y en la captura de electrón, N aumenta en uno y Z disminuye en uno, y la razón neutrones/protones aumenta hacia un valor más estable. La reacción de la ecuación (43.15) ayuda también a explicar la formación de una estrella de neutrones, que se mencionó en el ejemplo 43.1.

CUIDADO **Decaimiento beta dentro y fuera de los núcleos** Las reacciones de decaimiento beta, representadas por las ecuaciones (43.13), (43.14) y (43.15), suceden *dentro* del núcleo. Aunque el decaimiento de un neutrón fuera del núcleo se efectúa por la reacción de la ecuación (43.13), la de la ecuación (43.14) está prohibida por la conservación de la masa-energía para un protón fuera del núcleo. La reacción de la ecuación (43.15) puede ocurrir fuera del núcleo solo si se agrega energía adicional, como en una colisión. |

Ejemplo 43.7 Por qué el cobalto 57 no es un emisor beta más



El nucleido $^{57}_{27}$Co es un núcleo inestable impar-par. Demuestre que este nucleido no puede experimentar un decaimiento β^+, pero *puede* decaer por captura de electrón. Las masas atómicas que se necesitan son 56.936296 u para el $^{57}_{27}$Co y 56.935399 u para el $^{57}_{26}$Fe.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: El decaimiento beta más es posible si la masa del átomo neutro original es mayor que la del átomo final más dos masas de electrón (0.001097 u). La captura de electrón es posible si la masa del átomo original es mayor que la del átomo final. Primero se debe identificar qué nucleido resulta si el $^{57}_{27}$Co experimenta decaimiento β^+ o captura de electrón y luego calcular la diferencia de masa correspondiente.

EJECUTAR: El nucleido original es $^{57}_{27}$Co. En el decaimiento β^+ y en la captura de electrón, Z disminuye en uno, de 27 a 26, y A queda en 57, de manera que el nucleido final es $^{57}_{26}$Fe. Su masa es menor que la del $^{57}_{27}$Co en 0.000897 u, un valor menor que 0.001097 u (dos masas de electrón), por lo que el decaimiento β^+ *no puede* ocurrir. Sin embargo, la masa del átomo original es mayor que la masa del átomo final, por lo que la captura de electrón *puede* ocurrir.

EVALUAR: En la captura de electrón solo hay dos productos de decaimiento: el núcleo final y el neutrino emitido. A diferencia del decaimiento β^- (ejemplo 43.6), pero igual que en el decaimiento alfa (ejemplo 43.5), los productos de decaimiento de una captura de electrón tienen energías y momentos lineales únicos. En la sección 43.4 veremos cómo relacionar la probabilidad de que la captura de electrón se presente durante la *vida media* de este nucleido.

Decaimiento gamma

La energía del movimiento interno en un núcleo está cuantizada. Un núcleo normal tiene un conjunto de niveles permitidos de energía, que incluyen un *estado base* o *fundamental* (estado de mínima energía) y varios *estados excitados*. Debido a la gran fuerza de las interacciones nucleares, las energías de excitación de los núcleos son, en forma característica, del orden de 1 MeV, en comparación con algunos eV de los niveles atómicos de energía. En las transformaciones físicas y químicas ordinarias el núcleo siempre permanece en su estado base. Cuando un núcleo se pone en un estado excitado, ya sea por bombardeo con partículas de alta energía o por una transformación radiactiva, puede decaer al estado base emitiendo uno o más fotones, llamados **rayos gamma** o *fotones de rayo gamma*, con energías típicas entre 10 keV y 5 MeV. A este proceso se le llama *decaimiento gamma* (γ). Por ejemplo, las partículas alfa emitidas por el ^{226}Ra tienen dos energías cinéticas posibles: 4.784 MeV o 4.602 MeV. Incluyendo la energía de retroceso del núcleo de ^{222}Rn resultante, esto corresponde a una energía total liberada de 4.871 o 4.685 MeV, respectivamente. Cuando se emite una partícula alfa con la menor energía, el núcleo de ^{222}Rn queda en un estado excitado. Entonces decae a su estado base, emitiendo un fotón de rayo gamma con energía

$$(4.871 - 4.685)\text{ MeV} = 0.186\text{ MeV}$$

Un fotón con esta energía se observa durante este decaimiento (figura 43.5*c*).

CUIDADO **Decaimiento γ comparado con los decaimientos α y β** Tanto en el decaimiento α como en el β, el valor Z de un núcleo cambia, y el núcleo de un elemento se transforma en el núcleo de un elemento diferente. En el decaimiento γ, el elemento *no* cambia; el núcleo solo pasa de un estado excitado a uno menos excitado.

Radiactividad natural

En la naturaleza existen muchos elementos radiactivos. Por ejemplo, usted es ligeramente radiactivo debido a los nucleidos inestables presentes en su organismo, como el carbono 14 y el potasio 40. El estudio de la radiactividad natural se inició en 1896, un año después de que Röntgen descubrió los rayos x. Henri Becquerel descubrió una radiación procedente de sales de uranio, que se parecía a los rayos x. Investigaciones intensivas en las dos décadas siguientes, a cargo de Marie y Pierre Curie, Ernest Rutherford y muchos otros, revelaron que las emisiones consisten en partículas con carga positiva y negativa, y en rayos neutros. Se les asignaron los nombres de *alfa*, *beta* y *gamma* por sus distintas características de penetración.

Al núcleo que decae se le llama *núcleo precursor* (*núcleo padre*), y al núcleo producido se le llama *núcleo derivado*. Cuando un núcleo radiactivo decae, es posible que el núcleo derivado sea inestable. En este caso se produce una *serie* de decaimientos sucesivos, hasta alcanzar una configuración estable. En la naturaleza se encuentran varias series de esas. El nucleido radiactivo más abundante en la Tierra es el isótopo del uranio ^{238}U, que experimenta una serie de 14 desintegraciones, incluyendo ocho emisiones α y seis emisiones β^-, y termina en un isótopo estable del plomo, ^{206}Pb (figura 43.6).

43.6 Los sismos se deben en parte al decaimiento radiactivo del ^{238}U en el interior de la Tierra. Los decaimientos liberan energía que contribuye a producir corrientes de convección en el interior. Esas corrientes provocan movimientos en la corteza terrestre, incluyendo las sacudidas fuertes y súbitas que llamamos sismos (como el que provocó este daño).

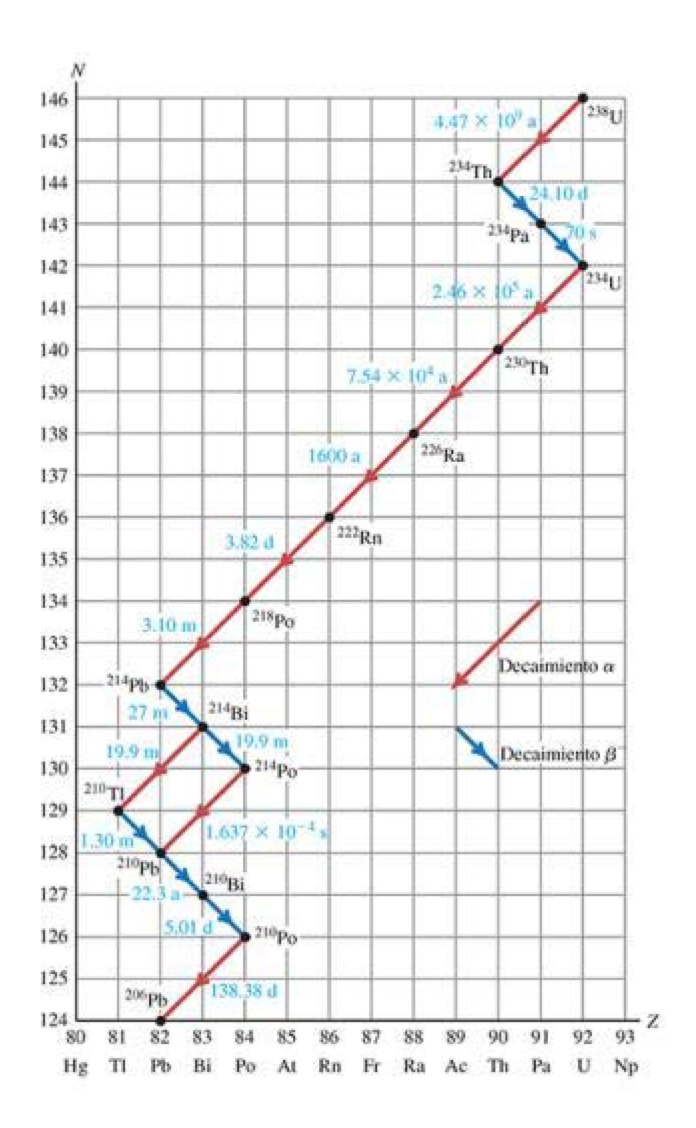


Una serie de desintegraciones radiactivas se puede representar en una gráfica de Segrè, como en la figura 43.7. El número de neutrones N se grafica verticalmente y el número atómico Z horizontalmente. En una emisión alfa, tanto N como Z disminuyen en dos. En una emisión β^-, N disminuye en uno y Z aumenta en uno. Las desintegraciones también se pueden representar en forma de ecuación; los dos primeros decaimientos en la serie se escriben como sigue:

$$^{238}\text{U} \rightarrow {}^{234}\text{Th} + \alpha$$
$$^{234}\text{Th} \rightarrow {}^{234}\text{Pa} + \beta^- + \bar{\nu}_e$$

o de forma más abreviada como

$$^{238}\text{U} \xrightarrow{\alpha} {}^{234}\text{Th}$$
$$^{234}\text{Th} \xrightarrow{\beta^-} {}^{234}\text{Pa}$$



43.7 Gráfica de Segrè que muestra la serie de desintegración del ^{238}U, que termina en el nucleido estable ^{206}Pb. Los tiempos son vidas medias (que se analizan en la siguiente sección) expresadas en años (a), días (d), horas (h), minutos (m) o segundos (s).

En el segundo proceso, el decaimiento beta produce el núcleo derivado ^{234}Pa en un estado excitado, desde donde decae al estado base emitiendo un fotón de rayo gamma. Un estado excitado se indica con un asterisco, por lo que la emisión γ se puede representar como sigue:

$$^{234}\mathrm{Pa}^* \rightarrow {}^{234}\mathrm{Pa} + \gamma$$

o bien,

$$^{234}\mathrm{Pa}^* \xrightarrow{\gamma} {}^{234}\mathrm{Pa}$$

Una característica importante de la serie de decaimiento del ^{238}U es la ramificación que se presenta en el ^{214}Bi. Este nucleido decae a ^{210}Pb por una emisión α y una β^-, lo cual puede suceder en cualquier orden. También se observa que en la serie hay isótopos inestables de varios elementos que también tienen isótopos estables, como el talio (Tl), plomo (Pb) y bismuto (Bi). Los isótopos inestables de estos elementos que hay en la serie del ^{238}U tienen todos demasiados neutrones para ser estables.

Se conocen muchas otras series de desintegración. Dos de ellas existen en la naturaleza: una comienza con el isótopo poco común ^{235}U y termina en ^{207}Pb; la otra comienza con el torio (^{232}Th) y termina en el ^{208}Pb.

Evalúe su comprensión de la sección 43.3 Un núcleo con número atómico Z y número de neutrones N experimenta dos procesos de decaimiento. El resultado es un núcleo con número atómico $Z - 3$ y número de neutrones $N - 1$. ¿Qué procesos de decaimiento tuvieron lugar? **i.** Dos decaimientos β^-; **ii.** dos decaimientos β^+; **iii.** dos decaimientos α; **iv.** un decaimiento α y un decaimiento β^-; **v.** un decaimiento α y un decaimiento β^+.



43.4 Actividad y vida media

Suponga que debe desechar un desperdicio radiactivo que contiene cierta cantidad de núcleos de un nucleido radiactivo determinado. Si no se produce más, esa cantidad disminuye de forma sencilla, a medida que los núcleos se desintegran. Esta disminución es un proceso estadístico; no hay forma de predecir cuándo se desintegrará determinado núcleo. Ningún cambio en el ambiente físico o químico, por ejemplo reacciones químicas, calentamiento o enfriamiento, afecta en forma considerable la razón de decaimiento. Esta razón varía en un margen extremadamente amplio, para diferentes nucleidos.

Razones de decaimiento radiactivo

Sea $N(t)$ el número (muy grande) de núcleos radiactivos en una muestra en el instante t, y sea $dN(t)$ el cambio (negativo) en ese número durante un corto intervalo de tiempo dt. [Usaremos $N(t)$ para evitar la confusión con el número de neutrones N]. La cantidad de decaimientos durante el intervalo dt es $-dN(t)$. La razón de cambio de $N(t)$ es el negativo de $dN(t)/dt$; entonces, $-dN(t)/dt$ se llama *razón de decaimiento*, o **actividad** de la muestra. Cuanto mayor sea la cantidad de núcleos en la muestra, más núcleos decaen durante cualquier intervalo de tiempo. Es decir, la actividad es directamente proporcional *a* $N(t)$; entonces es igual a una constante λ multiplicada por $N(t)$:

$$-\frac{dN(t)}{dt} = \lambda N(t) \qquad (43.16)$$

A la constante λ se le llama **constante de decaimiento**, y tiene distintos valores para nucleidos diferentes. Un valor grande de λ corresponde a un decaimiento rápido; y uno pequeño, a un decaimiento más lento. Al despejar λ de la ecuación (43.16) se ve que λ es el cociente entre la cantidad de decaimientos por unidad de tiempo y la cantidad de los núcleos radiactivos restantes; así, λ se puede interpretar como la *probabilidad por unidad de tiempo* de que cualquier núcleo en particular se desintegre.

Esta situación recuerda a la descarga de un capacitor, que estudiamos en la sección 26.4. La ecuación (43.16) tiene la misma forma que el negativo de la ecuación (26.15), sustituyendo q y $1/RC$ por $N(t)$ y λ. Luego, podemos hacer las mismas sustituciones que en la ecuación (26.16), con el número inicial de núcleos $N(0) = N_0$, para obtener la función exponencial:

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t} \qquad \text{(cantidad de núcleos restantes)} \qquad (43.17)$$

La figura 43.8 es una gráfica de esta función, donde se muestra el número de núcleos restantes $N(t)$ en función del tiempo.

La **vida media** $T_{1/2}$ es el tiempo necesario para que la cantidad de núcleos radiactivos disminuya hasta la mitad del número original N_0. Así, la mitad de los núcleos radiactivos que restan se desintegrará durante un segundo intervalo $T_{1/2}$, y así sucesivamente. Las cantidades restantes después de las vidas medias sucesivas son $N_0/2$, $N_0/4$, $N_0/8$, ...

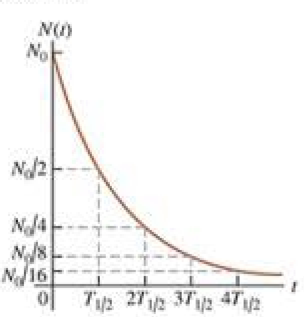
Para obtener la relación entre la vida media $T_{1/2}$ y la constante de decaimiento λ, se iguala $N(t)/N_0 = \frac{1}{2}$ y $t = T_{1/2}$ en la ecuación (43.17), para obtener

$$\tfrac{1}{2} = e^{-\lambda T_{1/2}}$$

Aplicamos logaritmos de ambos lados y despejamos $T_{1/2}$:

$$T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda} = \frac{0.693}{\lambda} \qquad (43.18)$$

43.8 Cantidad de núcleos en una muestra de un elemento radiactivo, en función del tiempo. La actividad de la muestra tiene una curva de decaimiento exponencial, con la misma forma.



El tiempo de vida media T_{media}, generalmente llamada *tiempo de vida* de un núcleo o de una partícula inestable, es proporcional a la vida media $T_{1/2}$:

$$T_{media} = \frac{1}{\lambda} = \frac{T_{1/2}}{\ln 2} = \frac{T_{1/2}}{0.693} \quad \text{(tiempo de vida media } T_{media}\text{, constante de decaimiento } \lambda \text{ y vida media } T_{1/2}) \tag{43.19}$$

En la física de partículas, la vida de una partícula inestable se describe en general por el tiempo de vida, y no por la vida media.

Debido a que la actividad $-dN(t)/dt$ en cualquier instante es igual a $\lambda N(t)$, la ecuación (43.17) indica que la actividad también depende del tiempo, en función de $e^{-\lambda t}$. Así, la gráfica de actividad en función del tiempo tiene la misma forma que la figura 43.8. Además, después de algunas vidas medias sucesivas, la actividad es la mitad, un cuarto, un octavo, etcétera, de la actividad original.

CUIDADO **Una vida media tal vez no es suficiente** A veces está implícito que una muestra radiactiva será segura después de haber transcurrido una vida media. Eso no es correcto. Si al principio su residuo radiactivo tiene diez veces la actividad necesaria para ser segura, no es segura después de una vida media, cuando todavía tiene cinco veces la cantidad de actividad. Aun después de tres vidas medias, todavía tiene 25% más actividad que la actividad segura. La cantidad de núcleos radiactivos y la actividad solo tienden a cero cuando t tiende a infinito.

Una unidad común de actividad es el **curie**, con el símbolo Ci, que se define como 3.70×10^{10} decaimientos por segundo. Es aproximadamente igual a la actividad de un gramo de radio. La unidad de actividad en el SI es el *becquerel*, que se abrevia con el símbolo Bq. Un becquerel es un decaimiento por segundo, por lo que

$$1 \text{ Ci} = 3.70 \times 10^{10} \text{ Bq} = 3.70 \times 10^{10} \text{ decaimientos/s}$$

Ejemplo 43.8 Actividad del ^{57}Co



El isótopo ^{57}Co decae al ^{57}Fe por captura de electrón, con una vida media de 272 días. El núcleo de ^{57}Fe se produce en un estado excitado y emite casi instantáneamente rayos gamma que se pueden detectar. *a*) Calcule el tiempo de vida y la constante de decaimiento del ^{57}Co. *b*) Si la actividad de la fuente de radiación que contiene ^{57}Co es ahora de 2.00 μCi, ¿cuántos núcleos de ^{57}Co contiene la fuente? *c*) ¿Cuál será la actividad después de un año?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Este problema utiliza las relaciones entre la constante de decaimiento λ, el tiempo de vida T_{media} y la actividad $-dN(t)/dt$. En el inciso *a*) usaremos la ecuación (43.19) para calcular λ y T_{media} a partir de $T_{1/2}$. En el inciso *b*) usaremos la ecuación (43.16) para calcular el número de núcleos $N(t)$ a partir de la actividad. Finalmente, en el inciso *c*) usaremos las ecuaciones (43.16) y (43.17) para calcular la actividad después de un año.

EJECUTAR: *a*) Es conveniente convertir la vida media a segundos:

$$T_{1/2} = (272 \text{ d})(86{,}400 \text{ s/d}) = 2.35 \times 10^{7} \text{ s}$$

Según la ecuación (43.19), la vida media y la constante de decaimiento son

$$T_{media} = \frac{T_{1/2}}{\ln 2} = \frac{2.35 \times 10^{7} \text{ s}}{0.693} = 3.39 \times 10^{7} \text{ s} = 392 \text{ días}$$

$$\lambda = \frac{1}{T_{media}} = 2.95 \times 10^{-8} \text{ s}^{-1}$$

b) La actividad $-dN(t)/dt$ está dada como 2.00 μCi, así que

$$-\frac{dN(t)}{dt} = 2.00\ \mu\text{Ci} = (2.00 \times 10^{-6})(3.70 \times 10^{10} \text{s}^{-1})$$
$$= 7.40 \times 10^{4} \text{ decaimientos/s}$$

Según la ecuación (43.16), esto es igual a $\lambda N(t)$, por lo que

$$N(t) = -\frac{dN(t)/dt}{\lambda} = \frac{7.40 \times 10^{4} \text{s}^{-1}}{2.95 \times 10^{-8} \text{s}^{-1}} = 2.51 \times 10^{12} \text{ núcleo}$$

Si siente usted que estamos siendo demasiado descuidados acerca de las "unidades" de decaimientos y núcleos, puede usar decaimientos/(núcleos·s) como unidad de λ.

c) De acuerdo con la ecuación (43.17), la cantidad $N(t)$ de núcleos restantes después de un año (3.156×10^{7} s) es

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t} = N_0 e^{-(2.95 \times 10^{-8} \text{s}^{-1})(3.156 \times 10^{7} \text{s})} = 0.394 N_0$$

La cantidad de núcleos ha disminuido hasta 0.394 de la cantidad original. La ecuación (43.16) indica que la actividad es proporcional a la cantidad de núcleos, por lo que la actividad ha disminuido por este mismo factor a $(0.394)(2.00\ \mu\text{Ci}) = 0.788\ \mu\text{Ci}$.

EVALUAR: La cantidad de núcleos que se calculó en el inciso *b*) equivale a 4.17×10^{-12} moles, con una masa de 2.38×10^{-10} g. Es una masa mucho menor de la que puede medir la balanza más sensible.

Después de una vida media de 272 días, la cantidad de núcleos de ^{57}Co ha disminuido a $N_0/2$; después de 2(272 d) = 544 d, ha disminuido a $N_0/2^2 = N_0/4$. Este resultado concuerda con la respuesta del inciso *c*), que dice que después de 365 d, el número de núcleos está entre $N_0/2$ y $N_0/4$.

Fechado radiactivo

Una aplicación interesante de la radiactividad es el fechado o la datación de muestras arqueológicas y geológicas, midiendo la concentración de isótopos radiactivos. La técnica más conocida es el *fechado con carbono*. El isótopo inestable ^{14}C se produce durante reacciones nucleares en la atmósfera, causadas por el bombardeo de rayos cósmicos, los cuales generan una pequeña proporción de ^{14}C en el CO_2 de la atmósfera. Las plantas que obtienen su carbono de esta fuente contienen la misma proporción de ^{14}C que la atmósfera. Cuando muere la planta, cesa de absorber carbono y su ^{14}C tiene un decaimiento β^- a ^{14}N, con una vida media de 5730 años. Al medir la proporción de ^{14}C en los restos, es posible determinar hace cuánto tiempo murió el organismo.

Una dificultad con el fechado mediante radiocarbono es que la concentración de ^{14}C en la atmósfera cambia durante largos intervalos de tiempo. Se pueden hacer correcciones con base en otros datos, como mediciones de los anillos en los árboles, que presentan ciclos anuales de crecimiento. Se usan técnicas radiactivas similares con otros isótopos para fechar muestras geológicas. Por ejemplo, algunas rocas contienen el isótopo inestable de potasio ^{40}K, que es un emisor beta y decae al nucleido estable ^{40}Ar, con una vida media de 2.4×10^8 años. La edad de la roca se determina comparando las concentraciones de ^{40}K y ^{40}Ar.

Ejemplo 43.9 Fechado con radiocarbono



Antes de 1900, la actividad del carbono atmosférico, por unidad de masa, debida a la presencia de ^{14}C, promediaba 0.255 Bq por gramo de carbono. *a*) ¿Qué fracción de los átomos de carbono eran de ^{14}C? *b*) Al analizar una muestra arqueológica que contiene 500 mg de carbono, usted observa 174 decaimientos en una hora. ¿Cuál es la edad de la muestra, suponiendo que su actividad por unidad de masa de carbono, al morir, era igual al valor promedio de la del aire?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: La idea clave es que la actividad actual de una muestra biológica que contiene ^{14}C está relacionada tanto con el tiempo transcurrido desde que dejó de tomar carbono atmosférico, como con su actividad en ese momento. Usaremos las ecuaciones (43.16) y (43.17) para obtener la edad t de la muestra. En el inciso *a*) determinamos la cantidad $N(t)$ de átomos de ^{14}C de la actividad $-dN(t)/dt$ usando la ecuación (43.16). Obtenemos el número total de átomos de carbono en 500 mg, usando la masa molar del carbono (12.011 g/mol, que aparece en el apéndice D), y usaremos el resultado para calcular la fracción de átomos de carbono que son ^{14}C. La actividad decae a la misma razón que el número de núcleos de ^{14}C; usamos esto, junto con la ecuación (43.17), para obtener la edad t de la muestra.

EJECUTAR: *a*) Para usar la ecuación (43.16) debemos calcular primero la constante de decaimiento λ, con la ecuación (43.18):

$$T_{1/2} = 5730 \text{ a} = (5730 \text{ a})(3.156 \times 10^7 \text{ s/a}) = 1.808 \times 10^{11} \text{ s}$$

$$\lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} = \frac{0.693}{1.808 \times 10^{11} \text{ s}} = 3.83 \times 10^{-12} \text{ s}^{-1}$$

Luego, de la ecuación (43.16),

$$N(t) = \frac{-dN/dt}{\lambda} = \frac{0.255 \text{ s}^{-1}}{3.83 \times 10^{-12} \text{ s}^{-1}} = 6.65 \times 10^{10} \text{ átomos}$$

La cantidad *total* de átomos de C en un gramo (1/12.011 mol) es $(1/12.011)(6.022 \times 10^{23}) = 5.01 \times 10^{22}$. El cociente entre átomos de ^{14}C y todos los átomos de C es

$$\frac{6.65 \times 10^{10}}{5.01 \times 10^{22}} = 1.33 \times 10^{-12}$$

Solo cuatro átomos de carbono de cada 3×10^{12} son de ^{14}C.

b) Suponiendo que la actividad por gramo de carbono en la muestra al morir ($t = 0$) era $0.255 \text{ Bq/g} = (0.255 \text{ s}^{-1} \cdot \text{g}^{-1})(3600 \text{ s/h}) = 918 \text{ h}^{-1} \cdot \text{g}^{-1}$, la actividad de 500 mg de carbono era entonces $(0.500 \text{ g})(918 \text{ h}^{-1} \cdot \text{g}^{-1}) = 459 \text{ h}^{-1}$. La actividad observada ahora, en el tiempo t, es de 174 h^{-1}. Como la actividad es proporcional al número de núcleos radiactivos, la razón de actividad $174/459 = 0.379$ es igual a la razón de los números $N(t)/N_0$.

Ahora despejaremos t de la ecuación (43.17), e insertaremos los valores de $N(t)/N_0$ y λ:

$$t = \frac{\ln(N(t)/N_0)}{-\lambda} = \frac{\ln 0.379}{-3.83 \times 10^{-12} \text{ s}^{-1}} = 2.53 \times 10^{11} \text{ s} = 8020 \text{ años}$$

EVALUAR: Después de 8020 años, la actividad del ^{14}C ha disminuido de 459 a 174 decaimientos por hora. El espécimen murió y cesó de absorber CO_2 del aire hace unos 8000 años.

Radiación en el hogar

Un riesgo serio para la salud en algunas áreas es la acumulación en las casas del ^{222}Rn, un gas inerte, incoloro, inodoro y radiactivo. Al examinar la cadena de desintegración del ^{238}U de la figura 43.7, vemos que la vida media del ^{222}Rn es de 3.82 días. Si es así, ¿por qué no salimos de la casa durante un rato y lo dejamos decaer y desaparecer? La respuesta es que el ^{222}Rn se *produce* en forma continua por el decaimiento del ^{226}Ra que existe en cantidades diminutas en las rocas y el suelo sobre los que se construyen las casas. Es un caso de equilibrio dinámico, donde la cantidad de producción

es igual a la cantidad de decaimiento. La razón por la que el ^{222}Rn constituye un mayor riesgo que los demás elementos de la serie de desintegración del ^{238}U es que se trata de un gas. Durante su corta vida media de 3.82 días puede migrar del suelo y penetrar en su casa. Si un núcleo de ^{222}Rn se desintegra en sus pulmones, emite una partícula α dañina, y es probable que su núcleo derivado, el ^{218}Po, que *no* es químicamente inerte, permanezca en sus pulmones hasta que se desintegre, emitiendo otra partícula α dañina, y así sucesivamente, hasta recorrer la serie radiactiva del ^{238}U.

¿Qué tan peligroso es el radón? Aunque los informes indican valores hasta de 3500 pCi/L, la actividad media por unidad de volumen en el interior de los hogares estadounidenses, debida al ^{222}Rn, es de 1.5 pCi/L (más de mil decaimientos cada segundo, en una habitación de tamaño promedio). Se ha estimado que *si* el ambiente que le rodea tiene este nivel de actividad, una exposición durante toda la vida reduciría su expectativa de vida en unos 40 días. Para comparar, fumar una cajetilla de cigarrillos al día reduce la expectativa de vida 6 años, y se estima que la emisión media de todas las plantas nucleares en el mundo reduce la expectativa de vida entre 0.01 y 5 días. Estas cifras incluyen las catástrofes como el desastre del reactor nuclear de Chernobyl en 1986, para el cual el efecto *local* sobre la expectativa de vida es mucho mayor.

Evalúe su comprensión de la sección 43.4 ¿Cuál muestra contiene mayor número de núcleos: una de 5.00 μCi del ^{240}Pu (vida media de 6560 años) o una muestra de 4.45 μCi del ^{243}Am (vida media de 7370 años)? **i.** La muestra de ^{240}Pu; **ii.** la muestra de ^{243}Am; **iii.** ambas tienen el mismo número de núcleos.



43.5 Efectos biológicos de la radiación

En el análisis anterior del radón se presentó la interacción de la radiación con organismos vivos, un tema de vital interés e importancia. En el término *radiación* se incluyen la radiactividad (alfa, beta, gamma y neutrones) y la radiación electromagnética, como los rayos x. Conforme esas partículas atraviesan la materia, pierden energía rompiendo enlaces moleculares y formando iones (de ahí el término *radiación ionizante*). Las partículas cargadas interactúan en forma directa con los electrones del material. Los rayos x y los rayos γ interactúan a través del efecto fotoeléctrico, en el que un electrón absorbe un fotón y sale despedido de su lugar, o por la dispersión de Compton (véase la sección 38.3). Los neutrones causan ionización en forma indirecta por choques con los núcleos o mediante la absorción en núcleos que produce el decaimiento posterior de los núcleos que resultan.

Estas interacciones son extremadamente complejas. Se sabe bien que demasiada exposición a la radiación, lo que incluye la luz solar, los rayos x y todas las radiaciones nucleares, puede destruir tejidos. En los casos benignos causa una quemadura, como las quemaduras comunes por la exposición a la luz solar. Con más exposición se pueden causar enfermedades muy graves o la muerte, a través de diversos mecanismos, como la destrucción masiva de las células tisulares, alteraciones del material genético y la destrucción de los componentes de la médula ósea que producen los glóbulos rojos.

Cálculo de dosis de radiación

La *dosimetría de radiación* es la descripción cuantitativa del efecto de la radiación sobre los tejidos vivos. La *dosis absorbida* de radiación se define como la energía absorbida por la unidad de masa del tejido. La unidad del SI de dosis absorbida es el joule por kilogramo, y se llama *gray* (Gy); 1 Gy = 1 J/kg. Otra unidad es el *rad*, que se define como 0.01 J/kg:

$$1 \text{ rad} = 0.01 \text{ J/kg} = 0.01 \text{ Gy}$$

Por sí misma, la dosis absorbida no es una medida adecuada de los efectos biológicos, porque energías iguales de distintas clases de radiación causan distintos grados de efecto biológico. Esta variación se describe con un factor numérico llamado **eficacia biológica relativa (EBR)**, que también se conoce como *factor de calidad* (FC), para cada radiación específica. Los rayos x de 200 keV de energía, por definición, tienen una

Tabla 43.3 Eficacia biológica relativa (EBR) de varias clases de radiación

Radiación	EBR (Sv/Gy o rem/rad)
Rayos x y rayos γ	1
Electrones	1.0-1.5
Neutrones lentos	3-5
Protones	10
Partículas α	20
Iones pesados	20

EBR igual a la unidad, y los efectos de otras radiaciones pueden compararse por vía experimental. La tabla 43.3 indica los valores aproximados de EBR para varias radiaciones. Todos estos valores dependen de alguna manera de la clase de tejido que absorbe la radiación, y de la energía de la radiación.

El efecto biológico se describe con el producto de la dosis absorbida y la EBR de la radiación; esta cantidad se llama *dosis biológicamente equivalente*, o simplemente dosis equivalente. La unidad del SI de dosis equivalente en humanos es el sievert (Sv):

$$\text{Dosis equivalente (Sv)} = \text{EBR} \times \text{Dosis absorbida (Gy)} \tag{43.20}$$

Una unidad más común, correspondiente al rad, es el rem (una abreviatura de *röntgen equivalente para el hombre*):

$$\text{Dosis equivalente (rem)} = \text{EBR} \times \text{Dosis absorbida (rad)} \tag{43.21}$$

Así, la unidad de EBR es 1 Sv/Gy o 1 rem/rad, y 1 rem = 0.01 Sv.



Ejemplo 43.10 Dosis en un examen médico con rayos x

Durante un examen de diagnóstico con rayos x, una porción de 1.2 kg de una pierna fracturada recibe una dosis equivalente de 0.40 mSv. *a*) ¿Cuál es la dosis equivalente en mrem? *b*) ¿Cuál es la dosis absorbida, en mrad y en mGy? *c*) Si la energía de los rayos x es de 50 keV, ¿cuántos fotones de rayos x se absorben?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Se nos pide relacionar la dosis equivalente (el efecto biológico de la radiación, medido en sieverts o en rems) con la dosis absorbida (la energía absorbida por la masa, medida en grays o rads). En el inciso *a*) usaremos el factor de conversión 1 rem = 0.01 Sv de la dosis equivalente. La tabla 43.3 muestra el EBR de los rayos x; usaremos este valor en el inciso *b*) para determinar la dosis absorbida usando las ecuaciones (43.20) y (43.21). Por último, en el inciso *c*) usaremos la masa y la definición de dosis absorbida para calcular la energía total absorbida y la cantidad total de fotones absorbidos.

EJECUTAR: *a*) La dosis equivalente en mrem es

$$\frac{0.40\ \text{mSv}}{0.01\ \text{Sv/rem}} = 40\ \text{mrem}$$

b) Para los rayos x, EBR = 1 rem/rad, o 1 Sv/Gy, por lo que la dosis absorbida es

$$\frac{40\ \text{mrem}}{1\ \text{rem/rad}} = 40\ \text{mrad}$$

$$\frac{0.40\ \text{mSv}}{1\ \text{Sv/Gy}} = 0.40\ \text{mGy} = 4.0 \times 10^{-4}\,\text{J/kg}$$

c) La energía total absorbida es

$$(4.0 \times 10^{-4}\,\text{J/kg})(1.2\ \text{kg}) = 4.8 \times 10^{-4}\,\text{J} = 3.0 \times 10^{15}\ \text{eV}$$

La cantidad de fotones de rayos x es

$$\frac{3.0 \times 10^{15}\ \text{eV}}{5.0 \times 10^{4}\,\text{eV/fotón}} = 6.0 \times 10^{10}\ \text{fotones}$$

EVALUAR: La dosis absorbida es relativamente grande, porque los rayos x tienen una EBR baja. Si la radiación ionizante hubiera sido un haz de partículas α, para el cual la EBR = 20, la dosis absorbida necesaria para una dosis equivalente de 0.40 mSv sería solo de 0.020 mGy, que corresponde a una energía total menor absorbida de 2.4×10^{-5} J.

Riesgos de la radiación

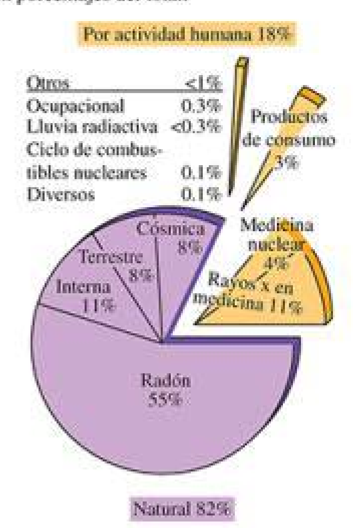
Presentaremos algunos números para tener una perspectiva. Para convertir de Sv a rem, solo se multiplica por 100. Una radiografía ordinaria del tórax entrega aproximadamente de 0.20 a 0.40 mSv a unos 5 kg de tejido. La exposición a la radiación de los rayos cósmicos y la radiactividad natural del suelo, materiales de construcción, etcétera, es del orden de 2 a 3 mSv por año, a nivel del mar, y el doble a una altura de 1500 m (5000 ft). Una dosis de cuerpo entero hasta de aproximadamente 0.20 Sv no causa efectos detectables de inmediato. Una exposición corta con dosis de 5 Sv o más suele causar la muerte en algunos días o semanas. Una dosis localizada de 100 Sv causa la destrucción completa de los tejidos expuestos.

A menudo se difunde información sobre los riesgos por exposición a la radiación, a largo plazo, como causa de diversos cánceres y defectos genéticos, y se ha debatido ampliamente el asunto de si hay algún nivel "seguro" de exposición a la radiación. Los reglamentos del gobierno de Estados Unidos se basan en una exposición *anual* máxima permitida, debida a todas las fuentes de 2 a 5 mSv por año, excepto las naturales. Los trabajadores con exposición a la radiación por causa de su ocupación pueden alcanzar 50 mSv por año. Estudios recientes sugieren que estos límites son demasiado

altos, y que las exposiciones, aunque sean extremadamente pequeñas, causan riesgos; pero es muy difícil reunir estadísticas confiables sobre los efectos de dosis bajas. Se ha aclarado que todo uso de rayos x para diagnóstico en medicina debe estar precedido por una estimación muy cuidadosa del riesgo en relación con el posible beneficio.

Otro asunto muy debatido es el de los riesgos de radiación de las centrales eléctricas nucleares. El nivel de radiación causado por estas *no* es despreciable. Sin embargo, para hacer una evaluación racional de los riesgos, debemos comparar esos niveles con las alternativas, como las centrales eléctricas alimentadas por carbón. Los riesgos a la salud por el humo del carbón son graves y están bien documentados, y se cree que la radiactividad natural en ese humo es unas 100 veces mayor que el de una central nuclear que funcione en forma correcta, de igual capacidad. Pero la comparación no es tan simple: también hay que considerar la posibilidad de un accidente nuclear y el grave problema de desechar de manera segura los residuos radiactivos de las plantas nucleares. Es claramente imposible eliminar *todos* los riesgos para la salud. La meta debería ser tratar de adoptar una actitud racional hacia el problema de *minimizar* el riesgo de todas las fuentes. La figura 43.9 muestra una estimación de exposición a la radiación de las diversas fuentes para la población en Estados Unidos. La radiación ionizante es una espada de dos filos: impone riesgos muy graves para la salud, pero también brinda muchos beneficios a la humanidad, incluyendo diagnósticos y tratamientos de enfermedades y una gran variedad de técnicas analíticas.

43.9 Contribución de las diversas fuentes a la exposición media total de radiación, de la población de Estados Unidos, expresada en porcentajes del total.



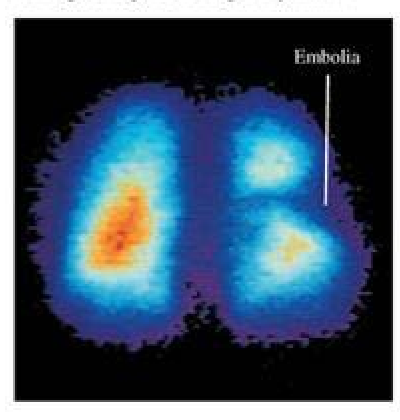
Usos benéficos de la radiación

La radiación se usa mucho en medicina, para destrucción selectiva intencional de tejidos, como tumores. Los riesgos son considerables, pero si la enfermedad resulta mortal sin tratamiento, todo riesgo es preferible. Los isótopos producidos en forma artificial se usan con frecuencia como fuentes de radiación. Esos isótopos tienen varias ventajas sobre los isótopos radiactivos naturales. Pueden tener vidas medias más cortas, y una correspondiente actividad mayor. Se pueden elegir isótopos que emitan la clase de radiación y de energía que se desee. Algunos isótopos artificiales se han sustituido por haces de fotones y electrones producidos en aceleradores lineales.

La *medicina nuclear* es un campo de aplicación en expansión. Los isótopos radiactivos tienen casi las mismas configuraciones electrónicas y el comportamiento químico de los isótopos estables del mismo elemento. Pero la ubicación y concentración de los isótopos radiactivos se puede detectar fácilmente con mediciones de la radiación que emiten. Un ejemplo conocido es el uso de yodo radiactivo en estudios de tiroides. Casi todo el yodo que se ingiere se elimina o se almacena en la tiroides, y las reacciones químicas en el organismo no discriminan entre el isótopo inestable ^{131}I y el estable ^{127}I. Una cantidad diminuta de ^{131}I se alimenta o inyecta en el paciente, y la rapidez con que se concentra en la tiroides es una medida de la función de esa glándula. La vida media es de 8.02 días, por lo que no hay riesgos duraderos de radiación. Al usar detectores de barrido más complicados también se puede obtener una imagen de la tiroides, que revela agrandamientos y otras anormalidades. Este procedimiento, es una clase de *autorradiografía*, comparable a fotografiar el filamento incandescente de una bombilla eléctrica usando la luz emitida por el mismo filamento. Si este proceso descubre nódulos cancerosos en la tiroides, se pueden destruir usando cantidades mucho mayores de ^{131}I.

Otro nucleido útil en la medicina nuclear es el tecnecio 99 (^{99}Tc), formado en un estado excitado por el decaimiento β^- del molibdeno (^{99}Mo). El tecnecio decae a su estado base emitiendo un fotón de rayo γ con 143 keV de energía. La vida media es de 6.01 horas, excepcionalmente larga para una emisión γ. (El estado base del ^{99}Tc también es inestable y su vida media es de 2.11×10^5 años; decae por emisión β^- al nucleido estable de rutenio ^{99}Ru). La química del tecnecio es tal que se puede fijar con facilidad a moléculas orgánicas que se absorben en diversos órganos del cuerpo. Una pequeña cantidad de esas moléculas portadoras del tecnecio se inyecta a un paciente, y para producir una imagen se usa un detector de barrido o *cámara gamma*; la imagen producida se llama *scintigrama* o *escintilograma*, y revela qué partes del cuerpo absorben esta molécula emisora γ. Esta técnica, en la cual el ^{99}Tc funciona como *trazador* radiactivo, desempeña un papel importante en la localización de cánceres, embolias y otras patologías (figura 43.10).

43.10 Este escintilograma a colores muestra dónde se absorbió una sustancia que contiene ^{99}Tc radiactivo, en los pulmones de un paciente. El color anaranjado en el pulmón de la izquierda indica una fuerte emisión de rayos γ del ^{99}Tc, lo que demuestra que la sustancia pudo pasar a este pulmón a través de la corriente sanguínea. El pulmón derecho muestra una emisión más débil, lo que indica la presencia de una embolia (un coágulo sanguíneo u otra obstrucción en una arteria) que restringe el flujo de la sangre al pulmón.



Las técnicas de trazado tienen muchas otras aplicaciones. El tritio (^3H), un isótopo radiactivo del hidrógeno, se usa para marcar moléculas en reacciones orgánicas complejas; las marcas radiactivas en moléculas de plaguicidas, por ejemplo, pueden usarse para rastrear su paso en las cadenas alimenticias. En el campo de la maquinaria se puede usar hierro radiactivo para estudiar el desgaste de los anillos de pistones. Los fabricantes de detergentes para lavandería han probado la eficacia de sus productos usando suciedad radiactiva.

También hay muchos efectos de la radiación que son útiles, como el fortalecimiento de polímeros por enlaces cruzados, esterilización de utensilios quirúrgicos, dispersión de electricidad estática indeseable en el aire, así como ionización intencional del aire en detectores de humo. También se están usando los rayos gamma para esterilizar y preservar algunos productos alimenticios.

Evalúe su comprensión de la sección 43.5 Las partículas alfa tienen una efectividad biológica relativa 20 veces mayor que los rayos x de 200 keV. ¿Qué es mejor para radiar el tejido profundo del cuerpo? **i.** Un haz de partículas alfa; **ii.** un haz de 200 keV de rayos x; **iii.** ambos son igualmente efectivos.

43.6 Reacciones nucleares

En las secciones anteriores estudiamos el decaimiento de núcleos inestables, y en especial la emisión espontánea de una partícula α o β seguida en ocasiones por una emisión γ. No se necesita nada para iniciar este decaimiento, y nada se puede hacer para controlarlo. En esta sección se examinan algunas *reacciones nucleares*, reordenamientos de componentes nucleares que resultan del bombardeo con una partícula, y no por un proceso natural espontáneo. En 1919 Rutherford sugirió que una partícula masiva con energía cinética suficiente podría penetrar en un núcleo. El resultado sería un nuevo núcleo con mayor número atómico y número de masa, o una desintegración del núcleo original. Rutherford bombardeó nitrógeno (^{14}N) con partículas α y obtuvo un núcleo de oxígeno (^{17}O) y un protón:

$$^{4}_{2}\mathrm{He} + ^{14}_{7}\mathrm{N} \rightarrow ^{17}_{8}\mathrm{O} + ^{1}_{1}\mathrm{H} \qquad (43.22)$$

Rutherford usó partículas alfa procedentes de fuentes radiactivas naturales. En el capítulo 44 describiremos algunos de los aceleradores de partículas que hoy se usan para iniciar las reacciones nucleares.

Las reacciones nucleares están sujetas a varias *leyes de conservación*. Los principios clásicos de conservación de carga, momento lineal, momento angular y energía (incluyendo energías en reposo) se satisfacen en todas las reacciones nucleares. Una ley adicional de conservación, que no estaba prevista por la física clásica, es la conservación de la cantidad total de nucleones. Los números de protones y neutrones no necesitan conservarse individualmente; hemos visto que en el decaimiento β los neutrones y los protones se transforman uno en el otro. Estudiaremos la base de la conservación del número nucleónico en el capítulo 44.

Cuando dos núcleos interactúan, la conservación de la carga establece que la suma de los números atómicos iniciales debe ser igual a la suma de los números atómicos finales. En virtud de la conservación del número nucleónico, la suma de los números de masa iniciales también debe ser igual a la suma de los números de masa finales. En general, las colisiones *no* son elásticas y, en consecuencia, la masa total inicial *no* es igual a la masa total final.

Energía de la reacción

La diferencia entre las masas antes y después de la reacción corresponde a la **energía de reacción**, de acuerdo con la relación entre masa y energía $E = mc^2$. Si las partículas iniciales A y B interactúan y producen las partículas finales C y D, la energía de reacción Q se define como

$$Q = (M_A + M_B - M_C - M_D)c^2 \qquad \text{(energía de reacción)} \qquad (43.23)$$

Para equilibrar los electrones se usan las masas atómicas neutras en la ecuación (43.23). Esto es, se usa la masa de $^{1}_{1}H$ como la de un protón, $^{2}_{1}H$ como la de un deuterón, $^{4}_{2}H$

como la de una partícula α, y así sucesivamente. Cuando Q es positiva, la masa total disminuye y la energía cinética total aumenta. A esa reacción se le llama *reacción exoérgica*. Cuando Q es negativa, la masa aumenta y la energía cinética disminuye; se trata de una *reacción endoérgica*. También se usan los términos *exotérmica* y *endotérmica*, que se toman prestados de la química. En una reacción endoérgica, la reacción no puede efectuarse a menos que la energía cinética en el marco de referencia del centro de masa sea cuando menos tan grande como $|Q|$. Esto es, hay una **energía de umbral**, que es la energía cinética mínima para que se lleve a cabo una reacción endoérgica.

Ejemplo 43.11 Reacciones exoérgica y endoérgica



a) Cuando un núcleo de litio 7 se bombardea con un protón, se producen dos partículas alfa (^{4}He). Calcule la energía de reacción. *b*) Calcule la energía de reacción para la reacción nuclear $^4_2\text{He} + {}^{14}_7\text{N} \rightarrow {}^{17}_8\text{O} + {}^1_1\text{H}$.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: La energía de reacción Q para cualquier reacción nuclear es igual a la diferencia entre la masa total inicial menos la masa total final, multiplicada por c^2, como en la ecuación (43.23). La tabla 43.2 proporciona las masas requeridas.

EJECUTAR: *a*) La reacción es $^1_1\text{H} + {}^7_3\text{Li} \rightarrow {}^4_2\text{He} + {}^4_2\text{He}$. Las masas inicial y final y sus respectivas sumas son:

A: $^1_1$H	1.007825 u	*C*: $^4_2$He	4.002603 u
B: $^7_3$Li	7.016004 u	*D*: $^4_2$He	4.002603 u
	8.023829 u		8.005206 u

La masa disminuye en 0.018623 u. Según la ecuación (43.23), la energía de reacción es

$$Q = (0.018623\ \text{u})(931.5\ \text{MeV/u}) = +17.35\ \text{MeV}$$

b) Las masas inicial y final son

A: $^4_2$He	4.002603 u	*C*: $^{17}_8$O	16.999132 u
B: $^{14}_7$N	14.003074 u	*D*: $^1_1$H	1.007825 u
	18.005677 u		18.006957 u

La masa aumenta en 0.001280 u, y la energía de reacción correspondiente es

$$Q = (-0.001280\ \text{u})(931.5\ \text{MeV/u}) = -1.192\ \text{MeV}$$

EVALUAR: La reacción en el inciso *a*) es *exoérgica*: la energía cinética final total de las dos partículas alfa separadas es 17.35 MeV mayor que la energía cinética inicial total del protón y del núcleo de litio. La reacción en el inciso *b*) es *endoérgica*: en el sistema del centro de masa (esto es, en un choque de frente con momento lineal total cero), la energía cinética inicial total mínima para que esta reacción ocurra es 1.192 MeV.

Normalmente, la reacción endoérgica del inciso *b*) del ejemplo 43.11 se produciría bombardeando núcleos estacionarios de ^{14}N con partículas alfa de un acelerador. En este caso, la energía cinética de una partícula alfa debe ser *mayor que* 1.192 MeV. Si toda la energía cinética de la partícula alfa solo se empleara para aumentar la energía en reposo, la energía cinética final sería cero, y no se conservaría el momento lineal. Cuando una partícula de masa m y energía cinética K choca con una partícula estacionaria de masa M, la energía cinética total K_{cm} en el sistema de coordenadas del centro de masa (es decir, la energía disponible para que las reacciones ocurran) es

$$K_{\text{cm}} = \frac{M}{M + m}K \qquad (43.24)$$

En esta ecuación se supone que las energías cinéticas de las partículas y los núcleos son mucho menores que sus energías en reposo. Dejamos al lector la deducción de la ecuación (43.24) (véase el problema 43.77). En este ejemplo, $K_{\text{cm}} = (14.00/18.01)K$, por lo que K debe ser al menos $(18.01/14.00) \times (1.192\ \text{MeV}) = 1.533\ \text{MeV}$.

Para que una partícula cargada, como un protón o una partícula α, penetre en el núcleo de otro átomo y provoque una reacción, en general debe tener una energía cinética inicial suficiente para superar la barrera de energía potencial debida a las fuerzas electrostáticas de repulsión. En la reacción del inciso *a*) del ejemplo 43.11, si consideramos que el protón y el núcleo de ^{7}Li son cargas con simetría esférica y radios dados por la ecuación (43.1), sus centros estarán a una distancia de 3.5×10^{-15} m cuando se

toquen. La energía potencial de repulsión del protón (carga $+e$) y del núcleo de ^{7}Li (carga $+3e$) a esta distancia de separación r es

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{(e)(3e)}{r} = (9.0 \times 10^{9}\ \text{N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2)\frac{(3)(1.6 \times 10^{-19}\ \text{C})^2}{3.5 \times 10^{-15}\ \text{m}}$$
$$= 2.0 \times 10^{-13}\ \text{J} = 1.2\ \text{MeV}$$

Aun cuando la reacción es exoérgica, el protón debe tener una energía cinética mínima aproximada de 1.2 MeV para que suceda la reacción, a menos que el protón por *tunelamiento* atraviese la barrera (véase la sección 40.4).

Absorción de neutrones

La absorción de *neutrones* por los núcleos es una clase importante de reacciones nucleares. Los núcleos pesados bombardeados por neutrones en una reacción nuclear pueden experimentar una serie de absorciones de neutrones, alternadas con decaimientos beta, en los que el número de masa A puede aumentar hasta 25. Algunos de los *elementos transuránicos*, que tienen Z mayor que 92, se producen de esta forma. Esos elementos no se han encontrado en la naturaleza. Se han identificado muchos elementos transuránicos, con Z hasta de 118.

La técnica analítica de *análisis por activación con neutrones* usa reacciones similares. Muchos nucleidos estables, al ser bombardeados por neutrones, absorben un neutrón y se vuelven inestables y entonces tienen un decaimiento β^-. Las energías de las emisiones β^- y de las γ asociadas dependen del nucleido inestable y constituyen un medio para identificarlo, a él y al nucleido estable original. De esta forma se pueden detectar cantidades muy pequeñas de elementos para ser detectadas con análisis químicos convencionales.

Evalúe su comprensión de la sección 43.6 La reacción descrita en el inciso *a*) del ejemplo 43.11 es exoérgica. ¿Podría ocurrir en forma natural cuando una muestra de litio sólido se coloca en un matraz con hidrógeno gaseoso? |



PhET: Nuclear Fission

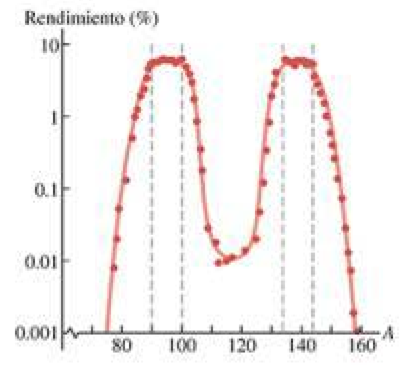
43.7 Fisión nuclear

La **fisión nuclear** es un proceso de decaimiento en el que un núcleo inestable se divide en dos fragmentos de masas comparables. La fisión nuclear fue descubierta en 1938, gracias a los experimentos de Otto Hahn y Fritz Strassman en Alemania. Al continuar los trabajos anteriores de Fermi, bombardearon uranio ($Z = 92$) con neutrones. La radiación resultante no coincidía con la de algún nucleido radiactivo conocido. Animados por su colega Lise Meitner, usaron análisis químicos meticulosos para llegar a la asombrosa pero inevitable conclusión de que habían encontrado un isótopo radiactivo del bario ($Z = 56$). Después, también se encontró kriptón radiactivo ($Z = 36$). Lise Meitner y Otto Frisch interpretaron estos resultados, en forma correcta, como la demostración de que los núcleos de uranio se estaban dividiendo en dos fragmentos masivos, llamados *fragmentos de fisión*. Dos o tres neutrones libres aparecen, normalmente, junto con los fragmentos de fisión, y solo en ocasiones aparece un nucleido ligero, como el ^{3}H.

Tanto el isótopo común ^{238}U (99.3%) como el isótopo poco común ^{235}U (0.7%) (así como algunos otros nucleidos) se pueden dividir con facilidad por bombardeo con neutrones: el ^{235}U con neutrones lentos (con energía cinética menor que 1 eV), pero el ^{238}U solo con neutrones rápidos con una energía mínima aproximada de 1 MeV. La fisión resultante de la absorción de neutrones se llama *fisión inducida*. Algunos nucleidos también pueden experimentar *fisión espontánea* sin absorción inicial de neutrones, lo cual es bastante raro. Cuando el ^{235}U absorbe un neutrón, el nucleido que resulta, ^{236}U*, está en un estado altamente excitado y se divide en dos fragmentos, casi en forma instantánea. En sentido estricto, es el ^{236}U* y no el ^{235}U el que experimenta la fisión, pero se acostumbra hablar de la fisión del ^{235}U.

Más de 100 nucleidos distintos, que representan a más de 20 elementos diferentes, se han encontrado entre los productos de fisión. La figura 43.11 muestra la distribución de números de masa de los fragmentos de la fisión del ^{235}U. La mayoría de los fragmentos tienen números de masa de 90 a 100 y de 135 a 145; la fisión en dos fragmentos de masa casi igual es poco probable.

43.11 Distribución de masa de los fragmentos de fisión del ^{236}U* (un estado excitado del ^{236}U), que se produce cuando el ^{235}U absorbe un neutrón. La escala vertical es logarítmica.



Reacciones de fisión

El lector debería comprobar las dos siguientes reacciones de fisión típicas, para verificar que se conserve el número nucleónico y la carga:

$$^{235}_{92}\text{U} + {}^{1}_{0}\text{n} \rightarrow {}^{236}_{92}\text{U}^* \rightarrow {}^{144}_{56}\text{Ba} + {}^{89}_{36}\text{Kr} + 3{}^{1}_{0}\text{n}$$

$$^{235}_{92}\text{U} + {}^{1}_{0}\text{n} \rightarrow {}^{236}_{92}\text{U}^* \rightarrow {}^{140}_{54}\text{Xe} + {}^{94}_{38}\text{Sr} + 2{}^{1}_{0}\text{n}$$

La energía cinética total de los fragmentos de la fisión es enorme, unos 200 MeV (en comparación con las energías típicas α y β de unos cuantos MeV). La razón es que los nucleidos en el extremo superior del espectro de masas (cercanos a $A = 240$) están menos fuertemente enlazados que los cercanos a la mitad (A de 90 a 145). Observando la figura 43.2 vemos que la energía de enlace promedio por nucleón es aproximadamente 7.6 MeV cuando $A = 240$, pero alrededor de 8.5 MeV cuando $A = 120$. En consecuencia, una estimación aproximada del *aumento* esperado en la energía de enlace durante la fisión es de 8.5 MeV − 7.6 MeV = 0.9 MeV por nucleón, o un total de (235)(0.9 MeV) ≈ 200 MeV.

CUIDADO **Energía de enlace y energía en reposo** Tal vez parezca que tener un aumento en la energía de enlace y también en la energía cinética durante una reacción de fisión sea una violación de la conservación de la energía. Pero en relación con la energía total en reposo E_0 de los nucleones separados, la energía en reposo del núcleo es E_0 *menos* E_B. Así, un *aumento* de la energía de enlace, corresponde a una *disminución* de la energía en reposo, ya que esta última se convierte en la energía cinética de los fragmentos de la fisión. **|**

Los fragmentos de la fisión siempre tienen demasiados neutrones para ser estables. En la sección 43.3 indicamos que el cociente entre neutrones y protones (N/Z) de los nucleidos estables es aproximadamente 1 en los nucleidos ligeros, pero casi 1.6 en los nucleidos más pesados, debido a la influencia creciente de la repulsión eléctrica de los protones. El valor N/Z para los nucleidos estables cuando $A = 100$ es aproximadamente 1.3, y cuando $A = 150$ es 1.4. Los fragmentos tienen más o menos la misma N/Z que el ^{235}U, de aproximadamente 1.55. Normalmente responden a este exceso de neutrones experimentando una serie de decaimientos β^- (cada uno de los cuales aumenta Z en 1 y disminuye N en 1) hasta que se llega a un valor estable de N/Z. Un ejemplo característico es

$$^{140}_{54}\text{Xe} \xrightarrow{\beta^-} {}^{140}_{55}\text{Cs} \xrightarrow{\beta^-} {}^{140}_{56}\text{Ba} \xrightarrow{\beta^-} {}^{140}_{57}\text{La} \xrightarrow{\beta^-} {}^{140}_{58}\text{Ce}$$

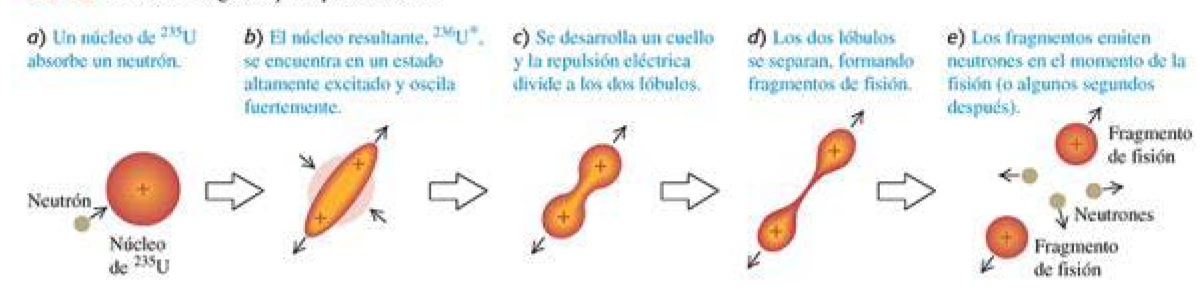
El nucleido ^{140}Ce es estable. Esta serie de decaimientos β^- produce, en promedio, unos 15 MeV de energía cinética adicional. El exceso de neutrones de los fragmentos de fisión también explica por qué se liberan dos o tres neutrones durante la fisión.

Parece que la fisión establece un límite superior en la producción de núcleos transuránicos, mencionados en la sección 43.6, que sean relativamente estables. Hay razones teóricas para esperar que los núcleos cercanos a $Z = 114$, $N = 184$ o 196 sean estables con respecto a la fisión espontánea. En el modelo de capas (sección 43.2) estos números corresponden a las capas y subcapas llenas en la estructura de niveles nucleares de energía. Esos *núcleos superpesados* todavía seguirían siendo inestables con respecto a la emisión alfa. En 2009 se confirmó que existen por lo menos cuatro isótopos con $Z = 114$, el más longevo de los cuales tiene una vida media debida al decaimiento α de aproximadamente 2.6 s.

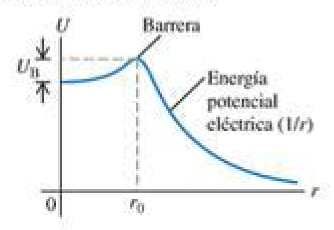
Modelo de la gota líquida

Se puede comprender la fisión en forma cualitativa con base en el modelo de gota líquida para el núcleo (véase la sección 43.2). El proceso se muestra en la figura 43.12, en términos de una gota líquida con carga eléctrica. Aunque no se debe tomar estos esquemas en forma demasiado literal, pueden ayudar a desarrollar la intuición acerca de la fisión. Un núcleo de ^{235}U absorbe un neutrón (figura 43.12*a*) y se transforma en un núcleo de ^{236}U* con exceso de energía (figura 43.12*b*). Este exceso de energía causa oscilaciones violentas, durante las que se forma un cuello entre dos lóbulos (figura 43.12*c*). La repulsión eléctrica de estos dos lóbulos estira más el cuello (figura 43.12*d*) y al final se forman dos gotas más pequeñas (figura 43.12*e*) que se separan con rapidez.

43.12 Modelo de la gota líquida para la fisión.



43.13 Función hipotética de energía potencial para dos fragmentos de fisión en un núcleo fisionable. A distancias r fuera del alcance de la fuerza nuclear, la energía potencial varía aproximadamente como $1/r$. La fisión se produce si hay una energía de excitación mayor que U_B o una probabilidad apreciable de tunelamiento a través de la barrera de energía potencial.



Esta imagen cualitativa ha evolucionado hacia una teoría más cuantitativa, para explicar por qué algunos núcleos sufren la fisión y otros no. La figura 43.13 muestra una función hipotética de energía potencial para dos fragmentos posibles de fisión. Si la absorción de neutrones causa una energía de excitación mayor que la altura de la barrera de energía U_B, la fisión sucede de inmediato. Aun cuando no haya la energía suficiente para atravesar la barrera, la fisión se puede efectuar por *tunelamiento* mecánico-cuántico, como se describió en la sección 40.4. En principio, muchos núcleos estables se pueden fisionar por tunelamiento. Pero la probabilidad depende, fundamentalmente, de la altura y el ancho de la barrera. Para la mayoría de los núcleos este proceso es tan improbable que no se observa.

Reacciones en cadena

La fisión de un núcleo de uranio, producida por bombardeo de neutrones, libera otros neutrones que pueden iniciar más fisiones, sugiriendo la posibilidad de una **reacción en cadena** (figura 43.14). Es posible hacer que la reacción en cadena ocurra lentamente y en forma controlada en un reactor nuclear, o en forma explosiva y sin control en una bomba. La liberación de energía en una reacción nuclear en cadena es enorme, mucho mayor que en cualquier reacción química. (En cierto sentido, el *fuego* es una reacción química en cadena). Por ejemplo, cuando el uranio se "quema" y forma dióxido de uranio en la reacción química:

$$U + O_2 \rightarrow UO_2$$

el calor de combustión aproximado es de 4500 J/g. Expresado como energía por átomo, esto es unos 11 eV por átomo. En contraste, la fisión libera unos 200 MeV por átomo, unos 20 millones de veces más energía.

Reactores nucleares

Un *reactor nuclear* es un sistema en el que se usa una reacción nuclear en cadena controlada para liberar energía. En una central nuclear, esta energía se usa para generar vapor, el cual hace trabajar una turbina, que a la vez hace girar un generador eléctrico.

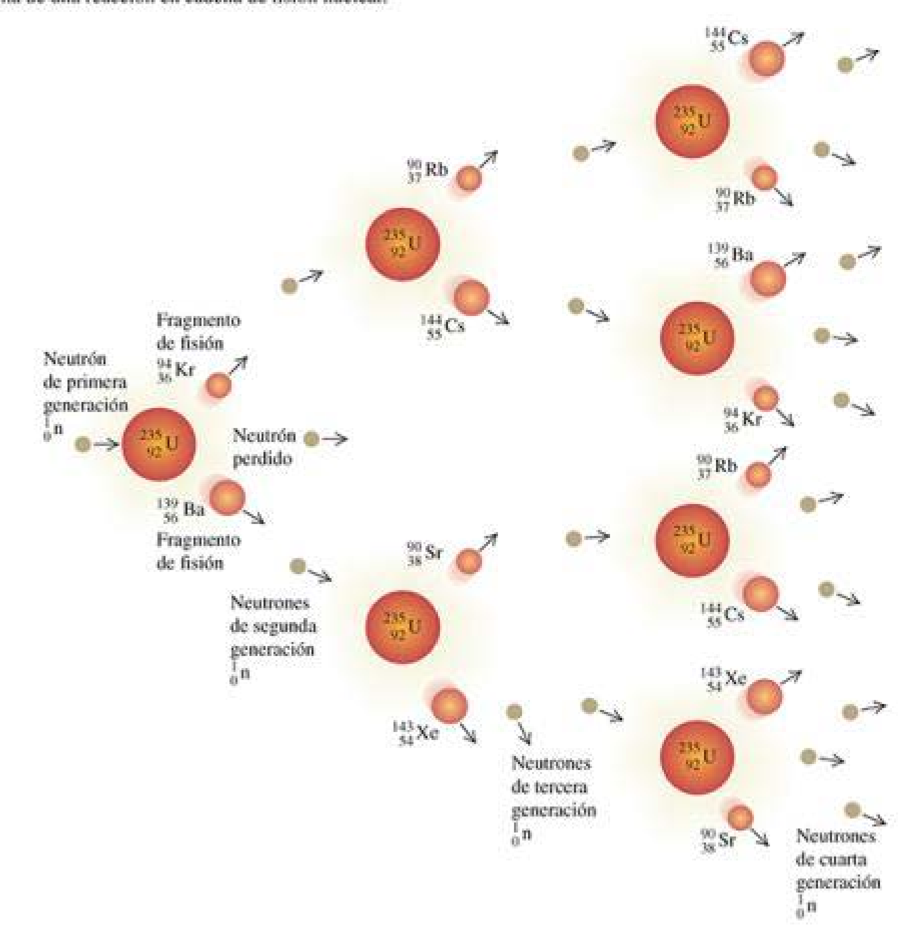
En promedio, cada fisión de un núcleo de ^{235}U produce unos 2.5 neutrones libres, por lo que se necesita el 40% de esos neutrones para mantener una reacción en cadena. Es mucho más probable que un núcleo de ^{235}U absorba un neutrón de baja energía (menor que 1 eV) que uno de los neutrones de mayor energía (1 MeV, más o menos) que se liberan durante la fisión. En un reactor nuclear, los neutrones de mayor energía son desacelerados por choques con núcleos del material circundante, llamado *moderador*, por lo que es mucho más probable que sigan causando fisiones. En las centrales eléctricas nucleares, el moderador generalmente es agua y a veces grafito. La *velocidad* de la reacción se controla introduciendo o sacando *varillas de control*, hechas de elementos como boro o cadmio, cuyos núcleos *absorben* neutrones sin experimentar reacciones adicionales. El isótopo ^{238}U también puede absorber neutrones, transformándose en $^{239}U^*$, pero no con una probabilidad suficientemente alta para sostener por sí mismo una reacción en cadena. Así, el uranio que se usa en los reactores se "enriquece" con frecuencia aumentando la proporción del ^{235}U con respecto al valor natural del 0.7%, típicamente alrededor del 3%, mediante el proceso de separación de isótopos.

Aplicación Fabricación de isótopos radiactivos para medicina

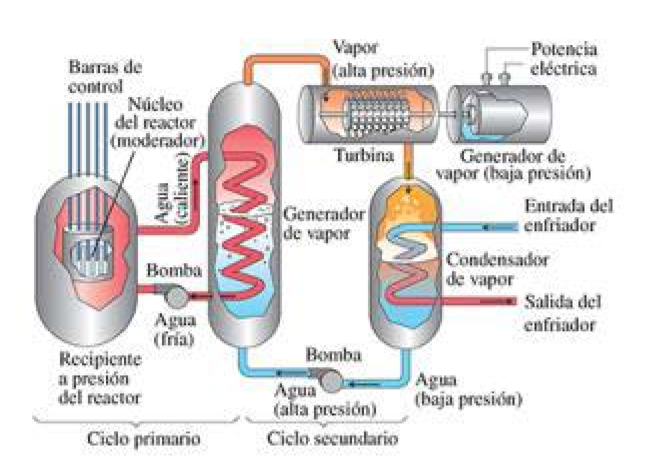
Los fragmentos que resultan de la fisión nuclear normalmente son inestables, es decir, isótopos ricos en neutrones. Algunos de estos son útiles en diagnóstico y radioterapias médicas para el cáncer (véase la sección 43.5). Esta fotografía muestra un reactor nuclear para producir estos isótopos. El combustible de uranio se conserva en un tanque grande de agua para enfriamiento. Algunos de los fragmentos de la fisión ricos en uranio experimentan decaimiento beta y emiten electrones que se mueven más rápido que la luz en el agua (aproximadamente 0.75*c*). Al igual que un avión que produce un intenso estampido sónico cuando vuela más rápido que el sonido (véase la sección 16.9 vol. 1), estos electrones ultrarrápidos producen un "estampido de luz" llamado *radiación de Čerenkov*, la cual tiene un característico color azul.



43.14 Esquema de una reacción en cadena de fisión nuclear.



La aplicación más conocida de los reactores nucleares es la generación de energía eléctrica. Como se dijo antes, la energía de fisión aparece como energía cinética de los fragmentos de la fisión, y su resultado inmediato es aumentar la energía interna de los elementos del combustible y del moderador que los rodea. Este aumento de energía cinética se transfiere en forma de calor, para generar vapor que impulsa turbinas, las cuales, a la vez, hacen girar los generadores eléctricos. La figura 43.15 es un diagrama de una central nuclear. Los fragmentos energéticos de la fisión calientan



43.15 Diagrama de una central eléctrica nuclear.

el agua que rodea al núcleo del reactor. El generador de vapor es un intercambiador de calor que toma el calor de esta agua altamente radiactiva y genera vapor no radiactivo para hacer funcionar las turbinas.

Una planta nuclear típica tiene una capacidad de generación eléctrica de 1000 MW (o 10^9W). Las turbinas son máquinas térmicas y están sujetas a las limitaciones de eficiencia que impone la segunda ley de la termodinámica, descrita en el capítulo 20 (vol 1). En las plantas nucleares modernas, la eficiencia general aproximada es de un tercio, por lo que se deben generar 3000 MW de potencia térmica mediante la reacción de fisión para generar 1000 MW de potencia eléctrica.



Ejemplo 43.12 Consumo de uranio en un reactor nuclear

¿Qué masa de ^{235}U se debe fisionar cada día para dar 3000 MW de potencia térmica?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: La fisión del ^{235}U libera más o menos 200 MeV por átomo. Usaremos esto, junto con la masa del átomo de ^{235}U, para determinar la cantidad necesaria de uranio.

EJECUTAR: Cada segundo se necesitan 3000 MJ o 3000×10^6 J. Cada fisión produce 200 MeV, que son

$$(200\ \text{MeV/fisión})(1.6 \times 10^{-13}\ \text{J/MeV}) = 3.2 \times 10^{-11}\ \text{J/fisión}$$

La cantidad de fisiones necesarias cada segundo es

$$\frac{3000 \times 10^6\ \text{J}}{3.2 \times 10^{-11}\ \text{J/fisión}} = 9.4 \times 10^{19}\ \text{fisiones}$$

Cada átomo de ^{235}U tiene una masa de $(235\ \text{u})(1.66 \times 10^{-27}\ \text{kg/u}) = 3.9 \times 10^{-25}$ kg, por lo que la masa de ^{235}U que experimenta fisión cada segundo es

$$(9.4 \times 10^{19})(3.9 \times 10^{-25}\ \text{kg}) = 3.7 \times 10^{-5}\ \text{kg} = 37\ \mu\text{g}$$

En un día (86,400 s), el consumo total de ^{235}U es

$$(3.7 \times 10^{-5}\ \text{kg/s})(86{,}400\ \text{s}) = 3.2\ \text{kg}$$

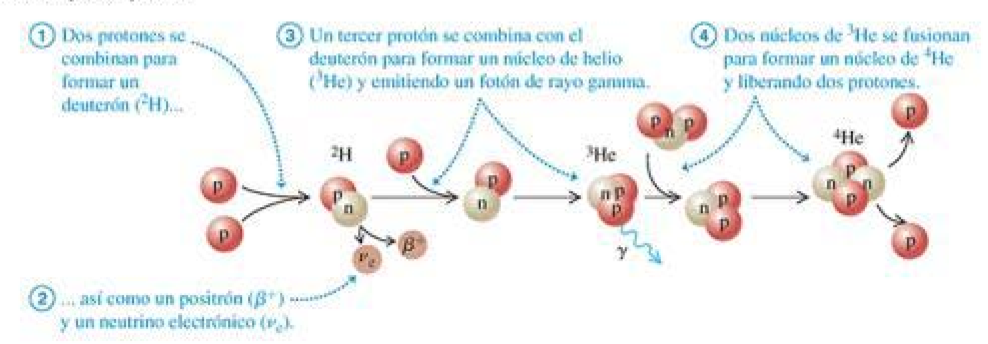
EVALUAR: Como comparación, una central eléctrica de 1000 MW alimentada con carbón quema 10,600 toneladas (unos diez millones de kg) de carbón ¡por día!

Ya mencionamos que se liberan unos 15 MeV de energía en la fisión de un núcleo de ^{235}U, debido a los decaimientos β^- de los fragmentos de la fisión. Este hecho tiene un grave problema con respecto al control y la seguridad de los reactores. Aun cuando se haya detenido por completo la reacción en cadena, por inserción de varillas de control en el núcleo, los decaimientos β^-, que no se pueden detener, continúan desprendiendo calor. Para un reactor de 3000 MW esta potencia calorífica es muy grande, inicialmente de unos 200 MW. En el caso de una pérdida total del agua de enfriamiento, esta potencia es más que suficiente para provocar una fusión catastrófica del núcleo del reactor, y la posible ruptura del recipiente de contención. La dificultad de alcanzar un "paro frío" después de un accidente en la planta nuclear de Three Mile Island, en Pensilvania, en marzo de 1979, fue causada por el continuo desprendimiento de calor debido a los decaimientos β^-.

La catástrofe del 26 de abril de 1986 en el reactor número 4 de Chernobyl, en Ucrania, se debió a una combinación de un diseño inherentemente inestable y varios errores humanos cometidos durante una prueba del sistema de enfriamiento de emergencia del núcleo. Se retiraron demasiadas varillas de control para compensar una disminución de potencia causada por acumulación de absorbentes de neutrones, como el ^{135}Xe. El nivel de potencia subió del 1% normal a 100 veces lo normal en cuatro segundos; una explosión de vapor rompió los tubos en el sistema de enfriamiento del núcleo e hizo volar la pesada cubierta de concreto fuera del reactor. El moderador de grafito se encendió y se quemó durante varios días, y el núcleo se fundió. Se estima que la actividad total del material radiactivo liberado a la atmósfera fue de unos 10^8 Ci.

Evalúe su comprensión de la sección 43.7 La fisión del ^{235}U se puede iniciar por absorción de un neutrón lento en un núcleo. ¿Se podría usar un *protón* lento para iniciar la fisión del ^{235}U? |

43.16 La cadena protón-protón.



43.8 Fusión nuclear



ActivPhysics 19.3: Fusion

En una reacción de **fusión nuclear**, dos o más núcleos pequeños y ligeros se unen o fusionan para formar un núcleo mayor. Las reacciones de fusión liberan energía por la misma razón que las reacciones de fisión: la energía de enlace por nucleón, después de la reacción, es mayor que antes. Al examinar la figura 43.2, se ve que la energía de enlace por nucleón aumenta en función de A, hasta más o menos $A = 60$, por lo que es probable que la fusión de dos núcleos ligeros para formar un núcleo con A menor que 60 sea una reacción exoérgica. En comparación con la fisión, estamos moviéndonos hacia el máximo de esta curva, desde el lado opuesto. Otra forma de expresar las relaciones de energía es que la masa total de los productos es menor que la de las partículas iniciales.

Veamos tres ejemplos de reacciones de fusión que liberan energía, escritas en términos de átomos neutros:

$$^1_1\text{H} + {}^1_1\text{H} \rightarrow {}^2_1\text{H} + \beta^+ + \nu_e$$
$$^2_1\text{H} + {}^1_1\text{H} \rightarrow {}^3_2\text{He} + \gamma$$
$$^3_2\text{He} + {}^3_2\text{He} \rightarrow {}^4_2\text{He} + {}^1_1\text{H} + {}^1_1\text{H}$$

En la primera reacción se combinan dos protones para formar un deuterón (^{2}H) con la emisión de un positrón (β^+) y un neutrino electrónico. En la segunda se combinan un protón y un deuterón para formar el núcleo del isótopo ligero del helio, ^{3}He, con la emisión de un rayo gamma. Ahora se requiere repetir las dos primeras reacciones anteriores, para obtener los dos núcleos de ^{3}He que se fusionan en la tercera reacción para formar una partícula alfa (^{4}He) y dos protones. En conjunto, las reacciones forman el proceso llamado *cadena protón-protón* (figura 43.16).

El efecto neto de la cadena es la conversión de cuatro protones en una partícula α, dos positrones, dos neutrinos electrónicos y dos fotones γ. Podemos calcular la liberación de energía en esta parte del proceso: la masa de una partícula α más dos positrones es la masa del ^{4}He neutro; los neutrinos tienen masa cero (o muy pequeña) y los gamma tienen masa cero.

Masa de cuatro protones	4.029106 u
Masa de ^{4}He	4.002603 u
Diferencia de masa y energía liberada	0.026503 u y 24.69 MeV

Los dos positrones que se producen durante el primer paso de la cadena protón-protón chocan con dos electrones; se produce la aniquilación mutua de las cuatro partículas y su energía de reposo se convierte en 4(0.511 MeV) = 2.044 MeV de radiación gamma. Así, la energía total liberada es (24.69 + 2.044) MeV = 26.73 MeV. Esta cadena protón-protón sucede en el interior del Sol y otras estrellas (figura 43.17). Cada gramo de la masa del Sol contiene más o menos 4.5×10^{23} protones. Si todos ellos se combinaran para formar helio, la energía liberada sería de unos 130,000 kWh. Si el Sol continuara irradiando a su rapidez actual, tardaría unos 75×10^9 años para agotar sus protones. Como veremos más adelante, las reacciones de fusión solo pueden efectuarse a temperaturas extremadamente altas; en el Sol, esas temperaturas solo se

43.17 La energía liberada como luz estelar proviene de reacciones de fusión en las profundidades del interior de una estrella. Cuando se forma una estrella, y durante la mayor parte de su vida, convierte el hidrógeno de su núcleo en helio. A medida que la estrella envejece, la temperatura del núcleo puede elevarse lo suficiente para que se efectúen otras reacciones de fusión, que convierten al helio en carbono, oxígeno y otros elementos.



encuentran en el interior, a gran profundidad. Por consiguiente, el Sol no puede fusionar *todos* sus protones y solo lo puede hacer durante unos 10×10^9 años en total. La edad actual del Sistema Solar (incluyendo el Sol) es de 4.54×10^9 años, por lo que el Sol está más o menos a la mitad de su disponibilidad de protones.

Ejemplo 43.13 Una reacción de fusión



Dos deuterones se fusionan para formar un *tritón* (un núcleo de tritio, o ^{3}H) y un protón. ¿Cuánta energía se libera?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Esta es una reacción nuclear de la clase descrita en la sección 43.6. Con la ecuación (43.23) calcularemos la energía liberada.

EJECUTAR: Al sumar un electrón a cada partícula, se obtiene un átomo neutro en cada caso; sus masas están descritas en la tabla 43.2. Al sustituirlas en la ecuación (43.23) se obtiene

$$Q = [2(2.014102\text{ u}) - 3.016049\text{ u} - 1.007825\text{ u}] \times (931.5\text{ MeV/u}) = 4.03\text{ MeV}$$

EVALUAR: En consecuencia, en la reacción se liberan 4.03 MeV; el tritón y el protón juntos tienen 4.03 MeV más energía cinética de la que tenían juntos los dos deuterones.

Obtención de la fusión

Para que dos núcleos se fusionen, deben acercarse a una distancia menor del alcance de la fuerza nuclear, generalmente del orden de 2×10^{-15} m. Para hacerlo, deben superar la repulsión eléctrica de sus cargas positivas. Para dos protones a esta distancia, la energía potencial correspondiente es más o menos 1.2×10^{-13} J, o 0.7 MeV; esto representa la energía *cinética* inicial total que deben tener los núcleos que se fusionan; por ejemplo, de 0.6×10^{-13} J cada uno si el choque es de frente.

Los átomos solo tienen esta energía a temperaturas extremadamente altas. El análisis de la sección 18.3 (vol. 1) mostraba que la energía cinética media de traslación de una molécula de gas a la temperatura T es $\frac{3}{2}kT$, donde k es la constante de Boltzmann. La temperatura a la cual esto es igual a $E = 0.6 \times 10^{-13}$ J se calcula con la ecuación

$$E = \tfrac{3}{2}kT$$

$$T = \frac{2E}{3k} = \frac{2(0.6 \times 10^{-13}\text{ J})}{3(1.38 \times 10^{-23}\text{ J/K})} = 3 \times 10^9\text{ K}$$

Las reacciones de fusión son posibles a menores temperaturas, porque la función de distribución de Maxwell-Boltzmann (sección 18.5 vol. 1) indica que existe una pequeña fracción de protones con energías cinéticas mucho mayores que el valor promedio. La reacción protón-protón se efectúa "solo" a 1.5×10^7 K en el centro del Sol, lo que la hace un proceso de probabilidad extremadamente baja; pero es la causa de que se espere que el Sol dure tanto. A estas temperaturas, las reacciones de fusión se llaman reacciones *termonucleares.*

Se están haciendo esfuerzos intensivos para obtener reacciones controladas de fusión, que potencialmente representan una fuente nueva y enorme de energía (véase la figura 24.11). A las temperaturas mencionadas, los átomos ligeros están totalmente ionizados, y el estado resultante de la materia se llama *plasma.* En un tipo de experimento que se basa en el *confinamiento magnético*, un plasma se calienta a una temperatura extremadamente alta mediante una descarga eléctrica, mientras se confina con campos magnéticos de la forma adecuada. En otro arreglo experimental, usando *confinamiento inercial*, pastillas del material que se va a fusionar se calientan con un rayo láser de gran intensidad (véase la figura 43.18). Algunas de las reacciones que se estudian son

43.18 Esta cámara de tiro al blanco en el National Ignition Facility de California, tiene aberturas para 192 poderosos haces de rayos láser. Los láseres proporcionan 5×10^{14} W de potencia por unos cuantos nanosegundos a una pastilla milimétrica de deuterio y tritio en el centro de la cámara, iniciando así una fusión termonuclear.



$$^2_1\text{H} + {}^2_1\text{H} \rightarrow {}^3_1\text{H} + {}^1_1\text{H} + 4.0\text{ MeV} \qquad (1)$$

$$^3_1\text{H} + {}^2_1\text{H} \rightarrow {}^4_2\text{He} + {}^1_0\text{n} + 17.6\text{ MeV} \qquad (2)$$

$$^2_1\text{H} + {}^2_1\text{H} \rightarrow {}^3_2\text{He} + {}^1_0\text{n} + 3.3\text{ MeV} \qquad (3)$$

$$^3_2\text{He} + {}^2_1\text{H} \rightarrow {}^4_2\text{He} + {}^1_1\text{H} + 18.3\text{ MeV} \qquad (4)$$

Ya describimos la primera reacción en el ejemplo 43.13; dos deuterones se fusionan para formar un tritón y un protón. En la segunda reacción un tritón se combina con otro deuterón para formar una partícula alfa y un neutrón. El resultado de ambas reacciones juntas es la conversión de tres deuterones en una partícula alfa, un protón y un neutrón, con la liberación de 21.6 MeV de energía. Las reacciones (3) y (4) juntas obtienen la misma conversión. En un plasma que contiene deuterones, los dos pares de reacciones se efectúan casi con igual probabilidad. Hasta ahora nadie ha tenido éxito en producir esas reacciones en condiciones controladas, en forma tal que se obtenga un exceso neto de energía útil.

También se estudian métodos para lograr la fusión, que no necesiten altas temperaturas; se llaman *fusión fría* o *fusión en frío.* Un esquema que funciona usa un ion de molécula de hidrógeno, bastante extraño. El ion normal H consiste en dos protones enlazados por un electrón compartido; la distancia nuclear es de 0.1 nm, aproximadamente. Si los protones se sustituyen por un deuterón (^2H) y un tritón (^3H), y el electrón por un *muón,* que tiene 208 veces la masa del electrón, se reduce la distancia en un factor de 208. La probabilidad se vuelve apreciable para que los dos núcleos tunelicen a través de la delgada barrera de energía potencial de repulsión y se fusionen en la reacción (2) de arriba. La posibilidad de llevar a cabo este proceso, llamado *fusión catalizada por muones*, y obtener una fuente práctica de energía, todavía está lejana.

Evalúe su comprensión de la sección 43.8 ¿*Todas* las reacciones de fusión son exoérgicas?

RESUMEN



Propiedades nucleares: Un núcleo está formado por A nucleones (Z protones y N neutrones). Todos los núcleos tienen aproximadamente la misma densidad. El radio de un núcleo de número de masa A se determina aproximadamente con la ecuación (43.1). Una sola especie nuclear con Z y N dados se llama nucleido. Los isótopos son nucleidos del mismo elemento (con igual Z) que tienen distintos números de neutrones. Las masas nucleares se miden en unidades de masa atómica. Los nucleones tienen momento angular y momento magnético. (Véase los ejemplos 43.1 y 43.2).

$$R = R_0 A^{1/3} \quad (R_0 = 1.2 \times 10^{-15}\ \text{m}) \tag{43.1}$$

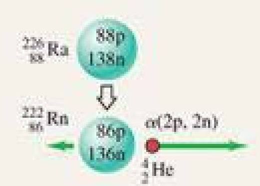
Enlace y estructura nuclear: La masa de un núcleo siempre es menor que la masa de los protones y los neutrones que contiene. La diferencia de masas, multiplicada por c^2, determina la energía de enlace E_B. La energía de enlace para un nucleido dado se determina por la fuerza nuclear, que es de corto alcance y favorece a pares de partículas, y por la repulsión eléctrica entre protones. Un núcleo es inestable si A o Z son demasiado grandes, o si el cociente N/Z no es el adecuado. Dos modelos muy usados para el núcleo son el de la gota líquida y el de capas; este último es análogo a la aproximación de campo central de la estructura atómica. (Véase los ejemplos 43.3 y 43.4).

$$E_B = (ZM_H + Nm_n - {}^A_Z M)c^2 \tag{43.10}$$

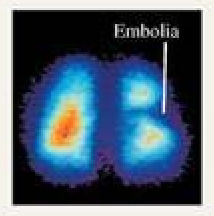
Decaimiento radiactivo: Los nucleidos inestables suelen emitir una partícula alfa (un núcleo de He) o una partícula beta (un electrón) en el proceso de transformarse en otro nucleido, a veces seguido de un fotón de rayo gamma. La rapidez de decaimiento de un núcleo inestable se describe por la constante de decaimiento λ, la vida media $T_{1/2}$ o el tiempo de vida T_{media}. Si la cantidad de núcleos en el instante $t = 0$ es N_0, y no se producen más, la cantidad en el instante t se determina con la ecuación (43.17). (Véase los ejemplos 43.5 a 43.9).

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t} \tag{43.17}$$

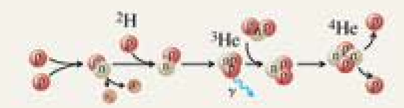
$$T_{media} = \frac{1}{\lambda} = \frac{T_{1/2}}{\ln 2} = \frac{T_{1/2}}{0.693} \tag{43.19}$$



Efectos biológicos de la radiación: El efecto biológico de cualquier radiación depende del producto de la energía absorbida por unidad de masa y la eficacia biológica relativa (EBR), que es distinta para diferentes radiaciones. (Véase el ejemplo 43.10).



Reacciones nucleares: En una reacción nuclear, dos núcleos o partículas chocan y producen dos nuevos núcleos o partículas. Las reacciones pueden ser exoérgicas o endoérgicas. Se cumplen varias leyes de conservación, incluyendo las de carga, energía, momento lineal, momento angular y número nucleónico. Se libera energía por la fisión de un núcleo pesado en dos más ligeros, que siempre son núcleos inestables. También se libera energía por la fusión de dos núcleos ligeros para formar uno más pesado. (Véase los ejemplos 43.11 a 43.13).





PROBLEMA PRÁCTICO **Saturación de producción del ^{128}I**

En un experimento, el isótopo de iodo ^{128}I se produce por irradiación de una muestra de ^{127}I con un haz de neutrones, que forma 1.5×10^6 núcleos de ^{128}I por segundo. Al principio no hay núcleos de ^{128}I. Un núcleo de ^{128}I decae por emisión β^- con una vida media de 25.0 minutos. *a*) ¿Hacia qué nucleido decae el ^{128}I? *b*) ¿Puede este nucleido decaer de regreso al ^{128}I por una emisión β^+? ¿Por qué? *c*) ¿Cuál es la cantidad máxima de átomos de ^{128}I que se pueden formar en la muestra después de irradiarla durante largo tiempo? ¿Cuál es la actividad máxima que se puede producir? (A este caso de estado estable se le llama *saturación*). *d*) Obtenga una expresión para la cantidad de átomos ^{128}I presentes en la muestra en función del tiempo.

GUÍA DE SOLUCIÓN

Véase el área de estudio MasteringPhysics® para consultar una solución tutorial en video.



IDENTIFICAR y PLANTEAR

1. ¿Qué pasa con los valores de *Z*, *N* y *A* en el decaimiento β^-? ¿Qué debe cumplirse para que el decaimiento β^- sea posible? ¿Y para el decaimiento β^+?
2. Será necesario escribir una ecuación para la razón de cambio dN/dt de la cantidad *N* de átomos de ^{128}I en la muestra, tomando en cuenta tanto la creación del ^{128}I por irradiación con neutrones como el decaimiento de cualquier ^{128}I presente. En estado estable, ¿cómo se comparan las razones de estos dos procesos?
3. Liste las cantidades desconocidas de cada inciso del problema e identifique las incógnitas.

EJECUTAR

4. Calcule los valores de *Z* y *N* del nucleido producido por el decaimiento del ^{128}I. ¿Qué elemento es este?
5. Determine si el nucleido puede decaer de regreso al ^{128}I.
6. Revise la ecuación de dN/dt. ¿Cuál es el valor de dN/dt en estado estable? Use este para obtener los valores de estado estable de *N* y de la actividad.
7. Resuelva la función $N(t)$ en la ecuación dN/dt. (*Sugerencia:* Véase la sección 26.4).

EVALUAR

8. El resultado del paso 6 indica el valor de *N* después de un tiempo largo (es decir, para valores grandes de *t*). ¿Esto concuerda con el resultado del paso 7? ¿Qué se entiende por "tiempo largo" en estas condiciones?

Problemas

Para tareas asignadas por el profesor, visite www.masteringphysics.com



•, ••, •••: Problemas de dificultad creciente. **PA**: Problemas acumulativos que incorporan material de capítulos anteriores. **CALC**: Problemas que requieren cálculo. **BIO**: Problemas de ciencias biológicas.

PREGUNTAS PARA ANÁLISIS

P43.1 **BIO** Los neutrones poseen momento dipolar magnético, y pueden experimentar giros de espín absorbiendo radiación electromagnética. Entonces, ¿por qué se usan protones y no neutrones en IRM de los tejidos corporales? (Véase la figura 43.1).

P43.2 En la ecuación (43.11), conforme el número total de nucleones se hace más grande, la importancia del segundo término de la ecuación disminuye en relación con la del primer término. ¿Tiene esto significado físico? Explique.

P43.3 ¿Por qué las masas de todos los núcleos no son múltiplos enteros de la masa de un solo nucleón?

P43.4 A partir del valor del número de masa *A*, ¿puede usted decir si se usa un valor positivo, un valor negativo, o cero, en el quinto término de la ecuación (43.11)? Explique por qué.

P43.5 ¿Cuáles son los seis elementos conocidos para los que *Z* es un número mágico? Analice qué propiedades tienen estos elementos como consecuencia de sus valores especiales de *Z*.

P43.6 La energía de enlace por nucleón, para la mayoría de los nucleidos, no varía mucho (véase la figura 43.2). ¿Hay una consistencia similar en la energía *atómica* de los átomos, considerando la "energía por electrón"? ¿Por qué?

P43.7 Los núcleos pesados inestables normalmente se desintegran emitiendo una partícula α o β. ¿Por qué normalmente no emiten un solo protón o neutrón?

P43.8 Los dos únicos nucleidos estables que tienen más protones que neutrones son el ^1_1H y el ^3_2He. ¿Por qué es tan inusual que $Z > N$?

P43.9 Como el plomo es un elemento estable, ¿por qué la serie radiactiva del ^{238}U de la figura 43.7 no se detiene en el plomo ^{214}Pb?

P43.10 En la cadena radiactiva del ^{238}U de la figura 43.7, algunos nucleidos de la serie existen en la naturaleza con mucha mayor abundancia que otros, aun cuando el núcleo de ^{238}U pasa por cada uno de los pasos de la cadena antes de transformarse finalmente en ^{206}Pb. ¿Por qué los nucleidos intermedios no existen con la misma abundancia?

P43.11 En comparación con las partículas α con la misma energía, las partículas β pueden atravesar la materia con mucha mayor facilidad. ¿Por qué?

P43.12 Si $^A_Z\mathrm{El}_i$ representa el nucleido inicial, ¿cuál es el proceso o procesos de decaimiento si el nucleido final es *a*) $^{A}_{Z+1}\mathrm{El}_f$; *b*) $^{A-4}_{Z-2}\mathrm{El}_f$; *c*) $^{A}_{Z-1}\mathrm{El}_f$?

P43.13 En una ecuación de decaimiento nuclear, ¿por qué se puede representar un electrón como $^{0}_{-1}\beta^-$? ¿Cuáles son las representaciones equivalentes de un positrón, un neutrino y un antineutrino?

P43.14 ¿Por qué el decaimiento alfa, beta o gamma de un núcleo inestable no se ve afectado por el estado *químico* del átomo, por ejemplo, por la naturaleza de la molécula o del sólido en que está enlazado? Sin embargo, la situación química del átomo sí puede tener un efecto sobre la vida media en la captura de electrón. ¿Por qué?

P43.15 En el proceso de *conversión interna*, un núcleo decae de un estado excitado a un estado base cediendo la energía de excitación directamente a un electrón del átomo, en lugar de emitir un fotón de rayo gamma. ¿Por qué este proceso también puede producir fotones de rayos x?

P43.16 En el ejemplo 43.9 (sección 43.4), la actividad del carbono atmosférico *antes* de 1900 fue el dato que se proporcionó. Describa por qué tal vez esta actividad haya cambiado desde 1900.

P43.17 BIO Un problema en el fechado con radiocarbono de muestras biológicas, especialmente en las muy antiguas, es que fácilmente pueden contaminarse con material biológico moderno durante el proceso de medición. ¿Qué efecto tendría tal contaminación sobre la edad estimada? ¿Por qué tal contaminación es un problema más serio en el caso de las muestras de material más antiguo que en el de las muestras de material más reciente?

P43.18 El isótopo más común del radio en la Tierra es el ^{226}Ra, con vida media de casi 1600 años. Si la Tierra se formó mucho antes de hace 10^9 años, ¿por qué ahora queda radio?

P43.19 Las reacciones de fisión solo se efectúan con núcleos de grandes números nucleónicos, mientras que las reacciones exoérgicas de fusión solo se efectúan con núcleos de pequeño número nucleónico. ¿Por qué sucede así?

P43.20 Cuando un núcleo grande se divide durante la fisión nuclear, los núcleos derivados de la fisión se separan con enorme energía cinética. ¿Por qué?

P43.21 Conforme las estrellas envejecen, consumen su provisión de hidrógeno y finalmente comienzan a producir energía mediante una reacción que implica la fusión de tres núcleos de helio para formar un núcleo de carbono. ¿Esperaría usted que el interior de estas estrellas viejas fuera más caliente o más frío que el interior de estrellas más jóvenes? Explique.

EJERCICIOS

Sección 43.1 Propiedades de los núcleos

43.1 • ¿Cuántos protones y cuántos neutrones hay en un núcleo del isótopo más común del *a*) silicio, $^{28}_{14}$Si; *b*) rubidio, $^{85}_{37}$Rb; *c*) talio, $^{205}_{81}$Tl?

43.2 •• PA Se colocan átomos de hidrógeno en un campo magnético externo de 1.65 T de magnitud. *a*) Los *protones* pueden hacer transiciones entre estados donde la componente del espín nuclear sea paralela o antiparalela al campo, absorbiendo o emitiendo un fotón. ¿Cuál estado es el de menor energía, el que tiene su componente de espín nuclear paralela o antiparalela al campo? ¿Cuáles son la frecuencia y la longitud de onda del fotón? ¿En qué región del espectro electromagnético se encuentra? *b*) Los *electrones* pueden hacer transiciones entre estados donde la componente del espín electrónico sea paralela o antiparalela al campo, absorbiendo o emitiendo un fotón. ¿Qué estado tiene menor energía, el de componente de espín electrónico paralela o antiparalela al campo? ¿Cuáles son la frecuencia y la longitud de onda del fotón? ¿En qué región del espectro electromagnético se encuentra?

43.3 • Se colocan átomos de hidrógeno en un campo magnético externo. Los protones pueden hacer transiciones entre los estados en los que la componente de espín nuclear sea paralela o antiparalela al campo, absorbiendo o emitiendo un fotón. ¿Qué magnitud de campo magnético se requiere para inducir esta transición por fotones con una frecuencia de 22.7 MHz?

43.4 •• Se colocan neutrones en un campo magnético de 2.30 T de magnitud. *a*) ¿Cuál es la diferencia de energía entre los estados con componentes de momento angular de espín nuclear paralelas y antiparalelas al campo? ¿Qué estado tiene menor energía, el de componente de espín paralela al campo, o el de componente de espín antiparalela al campo? ¿Cómo se comparan sus resultados con los estados de energía de un protón en el mismo campo (véase el ejemplo 43.2)? *b*) Los neutrones pueden hacer transiciones de uno a otro de estos estados, emitiendo o absorbiendo un fotón de energía igual a la diferencia de energía entre los dos estados. Calcule la frecuencia y la longitud de onda de ese fotón.

Sección 43.2 Enlace nuclear y estructura nuclear

43.5 • El isótopo más común del boro es el $^{11}_{5}$B. *a*) Determine la energía total de enlace del $^{11}_{5}$B con la tabla 43.2, sección 43.1. *b*) Calcule esta energía de enlace con la ecuación (43.11). (¿Por qué el quinto término es cero?). Compárela con el resultado que obtuvo en el inciso *a*). ¿Cuál es la diferencia porcentual? Compare la exactitud de la ecuación (43.11) para el $^{11}_{5}$B con su exactitud para el $^{62}_{28}$Ni (véase el ejemplo 43.4).

43.6 • El isótopo más común del uranio es $^{238}_{92}$U, cuya masa atómica es 238.050783 u. Calcule *a*) el defecto de masa; *b*) la energía de enlace (en MeV); *c*) la energía de enlace por nucleón.

43.7 • PA ¿Cuál es la longitud de onda máxima de un rayo γ que pueda romper un deuterón en un protón y un neutrón? (Este proceso se llama fotodesintegración).

43.8 • Calcule *a*) la energía total de enlace y *b*) la energía de enlace por nucleón del ^{12}C. *c*) ¿Qué porcentaje de la masa en reposo de este núcleo es su energía total de enlace?

43.9 • PA Un fotón con una longitud de onda de 3.50×10^{-13} m choca con un deuterón, dividiéndolo en un protón y un neutrón. *a*) Calcule la energía cinética liberada en esta interacción. *b*) Suponiendo que las dos partículas comparten equitativamente la energía y considerando que sus masas son 1.00 u, calcule su rapidez después de la fotodesintegración.

43.10 • Calcule el defecto de masa, la energía total de enlace (en MeV) y la energía de enlace por nucleón de *a*) el núcleo de nitrógeno $^{14}_{7}$N, y *b*) el núcleo de helio, $^{4}_{2}$He. *c*) ¿Cómo se comparan las energías de enlace por nucleón de estos dos núcleos?

43.11 • Use la ecuación (43.11) para calcular la energía de enlace por nucleón de los núcleos $^{86}_{36}$Kr y $^{180}_{73}$Ta. ¿Los resultados confirman lo que se muestra en la figura 43.2: que para *A* mayor que 62 la energía de enlace por nucleón decrece conforme *A* se incrementa?

Sección 43.3 Estabilidad nuclear y radiactividad

43.12 • ¿Es el decaimiento $n \rightarrow p + \beta^- + \overline{\nu}_e$ energéticamente posible? Si no, explique por qué. Si tal decaimiento es posible, calcule la energía total liberada. *b*) ¿El decaimiento $p \rightarrow n + \beta^+ + \nu_e$ es energéticamente posible? Si no, explique por qué. Si tal decaimiento es posible, calcule la energía total liberada.

43.13 • ¿Qué nucleido se produce en las siguientes desintegraciones radiactivas? *a*) Decaimiento α del $^{239}_{94}$Pu; *b*) decaimiento β^- del $^{24}_{11}$Na; *c*) decaimiento β^+ del $^{15}_{8}$O.

43.14 •• PA El ^{238}U decae espontáneamente por emisión α a ^{234}Th. Calcule *a*) la energía total liberada por este proceso y *b*) la velocidad de retroceso del núcleo de ^{234}Th. Las masas atómicas son 238.050788 u para el ^{238}U y 234.043601 u para el ^{234}Th.

43.15 •• La masa atómica del ^{14}C es 14.003242 u. Demuestre que el decaimiento β^- del ^{14}C es energéticamente posible y calcule la energía liberada en la desintegración.

43.16 • ¿Qué partícula (α, electrón o positrón) se emite en los siguientes decaimientos radiactivos? *a*) $^{27}_{14}$Si $\rightarrow$ $^{27}_{13}$Al; *b*) $^{238}_{92}$U $\rightarrow$ $^{234}_{90}$Th; *c*) $^{74}_{33}$As $\rightarrow$ $^{74}_{34}$Se.

43.17 •• *a*) Calcule la energía liberada por el decaimiento del $^{57}_{27}$Co por captura de electrón (véase el ejemplo 43.7). *b*) Una cantidad mínima de esta energía se queda con el átomo resultante de $^{57}_{26}$Fe en forma de energía cinética. Aproximadamente el 90% de las veces, el núcleo de $^{57}_{26}$Fe emite dos fotones de rayo gamma sucesivos después del proceso de captura de electrón, y sus energías son 0.122 MeV y 0.014 MeV, respectivamente, en el decaimiento a su estado base. ¿Cuál es la energía del neutrino emitido en este caso?

43.18 • El tritio ($^{3}_{1}$H) es un isótopo inestable del hidrógeno; su masa, incluyendo un electrón es 3.016049 u. *a*) Demuestre que el tritio debe ser inestable con respecto al decaimiento beta porque los productos del decaimiento ($^{3}_{2}$He más un electrón emitido) tienen menos masa total que el tritio. *b*) Determine la energía cinética total (en MeV) de los productos del decaimiento, tomando en cuenta las masas correctas del electrón.

Sección 43.4 Actividad y vida media

43.19 • Si una muestra de 6.13 g de un isótopo, que tiene un número de masa de 124, decae a una rapidez de 0.350 Ci, ¿cuál es su vida media?

43.20 • BIO Los isótopos radiactivos que se usan en la terapia contra el cáncer tienen una "vida útil", igual que los productos farmacéuticos que se usan en quimioterapia. Justo después de haberse producido en un reactor nuclear, la actividad de una muestra de ^{60}Co es de 5000 Ci. Cuando su actividad cae por debajo de 3500 Ci se considera una fuente muy débil para usarla en el tratamiento. Usted trabaja en el departamento de radiología de un gran hospital. Una de esas fuentes de ^{60}Co en su inventario fue fabricada el 6 de octubre de 2004. Hoy es 6 de abril de 2007. ¿Todavía se puede usar esa fuente? La vida media del ^{60}Co es de 5.271 años.

43.21 •• El isótopo común del uranio, ^{238}U, tiene una vida media de 4.47×10^9 años, decayendo a ^{234}Th por emisión alfa. *a*) ¿Cuál es la constante de decaimiento? *b*) ¿Qué masa de uranio se requiere para una actividad de 1.00 curie? *c*) ¿Cuántas partículas alfa se emiten por segundo por 10.0 g de uranio?

43.22 •• BIO **Tratamiento de radiación para el cáncer de próstata.** En muchos casos, el cáncer de próstata se trata implantando de 60 a 100 pequeñas semillas de material radiactivo en el tumor. La energía liberada por las desintegraciones mata el tumor. Un isótopo que se usa (existen otros) es el paladio (^{103}Pd), con una vida media de 17 días. Si un grano típico contiene 0.250 g de ^{103}Pd, *a*) ¿cuál es la rapidez inicial de actividad en Bq?, y *b*) ¿cuál es la rapidez 68 días después?

43.23 •• Una muestra de 12.0 g de carbono procedente de materia viviente se desintegra a una rapidez de 180.0 decaimientos por minuto, debido al ^{14}C radiactivo que contiene. ¿Cuál será la rapidez de decaimiento de esta muestra en *a*) 1000 años y *b*) 50,000 años?

43.24 •• BIO **Trazadores radiactivos.** Los isótopos radiactivos a menudo se introducen en el cuerpo a través del torrente sanguíneo. Su difusión dentro del cuerpo puede monitorearse detectando la aparición de radiación en diferentes órganos. El ^{131}I, un emisor β^- con vida media de 8.0 días, es uno de esos trazadores. Suponga que un científico introduce una muestra con una actividad de 375 Bq y observa su difusión en los órganos. *a*) Suponiendo que toda la muestra llegó a la glándula tiroides, ¿cuál será la rapidez de decaimiento en esa glándula 24 días (aproximadamente tres semanas y media) después? *b*) Si se mide la rapidez de decaimiento en la tiroides 24 días después y resulta que es de 17.0 Bq, ¿qué porcentaje del trazador llegó a esa glándula? *c*) ¿Qué isótopo permanece después de que el I-131 decae?

43.25 •• El isótopo inestable ^{40}K se usa para fechar muestras de roca. Su vida media es 1.28×10^9 años. *a*) ¿Cuántos decaimientos por segundo hay en una muestra que contiene 1.63×10^{-6} g de K^{40}? *b*) ¿Cuál es la actividad de la muestra, en curies?

43.26 • Como médico, se le consulta acerca de un derrame en un laboratorio de radioquímica. El isótopo derramado fue ^{131}Ba con una actividad de 500 μCi, cuya vida media es de 12 días. *a*) ¿Qué masa de ^{131}Ba se derramó? *b*) Su recomendación es salir del laboratorio hasta que el nivel de radiación baje a 1.00 μCi. ¿Cuánto tiempo deberá estar cerrado el laboratorio?

43.27 • Las mediciones de cierto isótopo indican que la rapidez de decaimiento disminuye de 8318 decaimientos/min a 3091 decaimientos/min en 4.00 días. ¿Cuál es la vida media de este isótopo?

43.28 • El isótopo ^{226}Ra experimenta decaimiento α con una vida media de 1620 años. ¿Cuál es la actividad de 1.00 g de ^{226}Ra? Exprese su respuesta en Bq y en Ci.

43.29 • El nucleido radiactivo ^{199}Pt tiene una vida media de 30.8 minutos. Se prepara una muestra con una actividad inicial de 7.56×10^{11} Bq. *a*) ¿Cuántos núcleos de ^{199}Pt hay en un principio en la muestra? *b*) ¿Cuántos hay después de 30.8 minutos? ¿Cuál es la actividad en ese momento? *c*) Repita el inciso *b*) cuando el tiempo es 92.4 minutos después de preparar la muestra.

43.30 •• **Fechado con radiocarbono.** Una muestra de madera procedente de un sitio arqueológico contiene 500 g de carbono que produce 3070 decaimientos por minuto. ¿Cuál es la edad de la muestra?

Sección 43.5 Efectos biológicos de la radiación

43.31 •• BIO *a*) Si una radiografía torácica genera 0.25 mSv en 5.0 kg de tejido, ¿cuántos joules *totales* de energía recibe este tejido? *b*) La radiación natural y los rayos cósmicos producen aproximadamente 0.10 mSv por año a nivel del mar. Suponiendo una EBR de 1, ¿de cuántos rem y rad es esta dosis y cuántos joules de energía recibe una persona de 75 kg al año? *c*) ¿Cuántas radiografías de tórax como las del inciso *a*) entregarían la misma cantidad *total* de energía a una persona de 75 kg como la que recibe de la radiación natural en un año al nivel del mar, como se describe en el inciso *b*)?

43.32 •• BIO Una persona expuesta a neutrones rápidos recibe una dosis de radiación de 200 rem en parte de su mano, que afecta 25 g de tejido. La EBR de esos neutrones es 10. *a*) ¿Cuántos rad recibió? *b*) ¿Cuántos joules de energía recibió esa persona? *c*) Suponga que la persona recibiera la misma dosis en rad, pero de partículas beta con una EBR de 1.0, en lugar de neutrones. ¿Cuántos rem habría recibido?

43.33 •• BIO Un químico nuclear recibe una dosis accidental de radiación de 5.0 Gy, de neutrones lentos (EBR = 4.0). ¿Cuánto recibió en rad, rem y J/kg?

43.34 • BIO **¿Escanear o no escanear?** Se ha convertido en una práctica común para algunas personas someterse a escaneos anuales de todo el cuerpo (escaneos TC, anteriormente conocidos como CAT) usando rayos x, solo para saber si se detecta algo sospechoso. Muchos médicos han cuestionado recientemente la pertinencia de esos estudios, en parte por la radiación que implican. Comúnmente, uno de esos escaneos imparte una dosis de 12 mSv, aplicados a *todo el cuerpo*. En contraste, una radiografía torácica administra 0.20 mSv a solo 5.0 kg de tejido. ¿Cuántas radiografías torácicas entregarían la misma cantidad *total* de energía al cuerpo de una persona de 75 kg que un escaneo de todo el cuerpo?

43.35 • BIO **Irradiación de alimentos.** Los alimentos a menudo son irradiados ya sea con rayos x o con haces de electrones para ayudar a prevenir la descomposición. Una dosis baja de 5 a 75 kilorrads (krad) ayuda a reducir y a exterminar los parásitos inactivos; una dosis media de 100 a 400 krad extermina microorganismos y agentes patógenos como el que transmite la salmonelosis; y una dosis alta de 2300 a 5700 krad esteriliza los alimentos de manera que puedan almacenarse sin refrigeración. *a*) Una dosis de 175 krad extermina microorganismos patógenos en el pescado. Si se utilizan rayos x, ¿cuál sería la dosis en Gy, Sv y rem, y cuánta energía absorbería una porción de 220 g de pescado? (Véase la tabla 43.3). *b*) Repita el inciso *a*) si se utilizan electrones con EBR de 1.50 en vez de rayos x.

43.36 • BIO En un accidente industrial, una persona de 65 kg recibe una dosis equivalente letal de cuerpo entero, de 5.4 Sv, por rayos x. *a*) ¿Cuál es la dosis equivalente en rem? *b*) ¿Cuál es la dosis absorbida en rad? *c*) ¿Cuál es la energía total absorbida por el cuerpo de esa persona? ¿Cómo se compara esta cantidad de energía con la necesaria para elevar en 0.010C° la temperatura de 65 kg de agua?

43.37 •• BIO Una persona de 67 kg ingiere por accidente 0.35 Ci de tritio. *a*) Suponga que el tritio se reparte uniformemente por el organismo, y que cada decaimiento produce en promedio la absorción de 5.0 keV de energía de los electrones emitidos en el decaimiento. La vida media del tritio es de 12.3 años, y la EBR de los electrones es 1.0. Calcule la dosis absorbida en rad, y la dosis equivalente en rem, durante una semana. *b*) El decaimiento β^- del tritio libera más de 5.0 keV de energía. ¿Por qué la energía absorbida promedio es menor que la energía liberada en el decaimiento?

43.38 •• PA BIO En un examen de diagnóstico con rayos x, 5.00×10^{10} fotones son absorbidos por un tejido con masa igual a 0.600 kg. La longitud de onda de los rayos x es de 0.0200 nm. *a*) ¿Cuál es la energía total absorbida por este tejido? *b*) ¿Cuál es la dosis equivalente en rema?

Secciones 43.6 Reacciones nucleares; 43.7 Fisión nuclear y 43.8 Fusión nuclear

43.39 • Considere la reacción nuclear

$$^{2}_{1}\text{H} + ^{14}_{7}\text{N} \rightarrow \text{X} + ^{10}_{5}\text{B}$$

donde X es un nucleido. *a)* ¿Cuáles son los valores de *Z* y *A* para el nucleido X? *b)* Calcule la energía de reacción *Q* (en MeV). *c)* Si el núcleo de $^{2}_{1}$H incide sobre un núcleo estacionario de $^{14}_{7}$N, ¿qué energía cinética mínima debe tener para que se efectúe la reacción?

43.40 • **Energía de la fusión nuclear.** Calcule la energía liberada en la reacción de fusión

$$^{3}_{2}\text{He} + ^{2}_{1}\text{H} \rightarrow ^{4}_{2}\text{He} + ^{1}_{1}\text{H}$$

43.41 • Considere la reacción nuclear

$$^{2}_{1}\text{H} + ^{9}_{4}\text{Be} \rightarrow \text{X} + ^{4}_{2}\text{He}$$

donde X es un nucleido. *a)* ¿Cuáles son los valores de *Z* y *A* para el nucleido X? *b)* ¿Cuánta energía se libera? *c)* Estime la energía de umbral para esta reacción.

43.42 • Estados Unidos consume 1.0×10^{20} J de energía eléctrica por año. Si toda esta energía proviene de la fisión de ^{235}U, que libera 200 MeV por evento de fisión, *a)* ¿cuántos kilogramos de ^{235}U se utilizarían al año? y *b)* ¿cuántos kilogramos de uranio tendrían que extraerse al año para suministrar esa cantidad de ^{235}U? (Recuerde que solo el 0.70% del uranio natural es ^{235}U).

43.43 •• Al principio de la sección 43.7 se presenta la ecuación de un proceso de fisión donde un neutrón colisiona con ^{235}U y experimenta fisión produciendo ^{144}Ba, ^{89}Kr y tres neutrones. Las masas medidas de estos isótopos son 235.043930 u (^{235}U), 143.922953 u (^{144}Ba), 88.917630 u (^{89}Kr) y 1.0086649 u (neutrón). *a)* Calcule la energía (en MeV) liberada por cada reacción de fisión. *b)* Calcule la energía liberada por gramo de ^{235}U, en MeV/g.

43.44 •• Considere la reacción nuclear

$$^{28}_{14}\text{Si} + \gamma \rightarrow ^{24}_{12}\text{Mg} + \text{X}$$

donde X es un nucleido. *a)* ¿Cuáles son *A* y *Z* del nucleido X? *b)* Sin tener en cuenta los efectos del retroceso, ¿qué energía mínima debe tener el fotón para que suceda esta reacción? La masa de un átomo de $^{28}_{14}$Si es 27.976927 u, y la de un átomo de $^{24}_{12}$Mg es 23.985042 u.

43.45 • La segunda reacción en la cadena protón-protón (véase la figura 43.16) produce un núcleo $^{3}_{2}$He. El núcleo de $^{3}_{2}$He producido así se puede combinar con un núcleo de $^{4}_{2}$He:

$$^{3}_{2}\text{He} + ^{4}_{2}\text{He} \rightarrow ^{7}_{4}\text{Be} + \gamma$$

Calcule la energía liberada en este proceso. (Esta energía se comparte entre la del fotón y la energía cinética de retroceso del núcleo de berilio). La masa de un átomo de $^{7}_{4}$Be es 7.016929 u.

43.46 • Considere la reacción nuclear

$$^{4}_{2}\text{He} + ^{7}_{3}\text{Li} \rightarrow \text{X} + ^{1}_{0}\text{n}$$

donde X es un nucleido. *a)* ¿Cuáles son *Z* y *A* del nucleido X? *b)* ¿Se absorbe o se libera energía? ¿Cuánta?

43.47 •• PA En una muestra de 100.0 cm^3 de agua, el 0.015% corresponde a moléculas de D_2O. Calcule la energía en joules que se liberaría si todos los núcleos de deuterio de la muestra experimentan la reacción de fusión del ejemplo 43.13.

PROBLEMAS

43.48 • **Comparación de energía liberada por gramo de combustible.** *a)* Cuando la gasolina se quema, libera 1.3×10^8 J de energía por galón (3.788 L). Dado que la densidad de la gasolina es 737 kg/m^3, exprese la cantidad de energía liberada en J/g de combustible. *b)* Durante la fisión, cuando un neutrón es absorbido por un núcleo de ^{235}U, aproximadamente 200 MeV de energía se liberan por cada núcleo que experimenta fisión. Exprese esta cantidad en J/g de combustible. *c)* En la cadena protón-protón que tiene lugar en las estrellas como nuestro Sol, la reacción total de fusión puede resumirse como seis protones que se fusionan para formar un núcleo de ^{4}He dejando dos protones sobrantes y liberando 26.7 MeV de energía. El combustible está constituido por los seis protones. Exprese la energía producida aquí en unidades de J/g de combustible. Observe la enorme diferencia entre las dos formas de energía, nuclear por un lado, y la energía química de la gasolina, por el otro. *d)* Nuestro Sol produce energía a una rapidez de 3.86×10^{26} W. Si su masa de 1.99×10^{30} kg fuera por completo gasolina, ¿cuánto tiempo pasaría antes de consumirse todo el combustible? (*Nota histórica:* Antes del descubrimiento de la fusión nuclear y las vastas cantidades de energía que libera, los científicos estaban confundidos. Sabían que la Tierra tenía por lo menos varios millones de años, pero no podían explicar cómo el Sol podía sobrevivir ese tiempo si su energía provenía de la combustión química).

43.49 •• Use la conservación de la masa-energía para demostrar que la energía liberada en el decaimiento alfa es positiva siempre que la masa del átomo neutro original es mayor que la suma de las masas del átomo neutro final y el átomo neutro de ^{4}He. (*Sugerencia:* Haga que el núcleo precursor tenga un número atómico *Z* y un número nucleónico *A*. Escriba primero la reacción en términos de los núcleos y las partículas que intervienen, y después agregue *Z* masas de electrón en ambos lados de la reacción, y asígnelas donde sea necesario para obtener átomos neutros).

43.50 •• Use la conservación de la masa-energía para demostrar que la energía liberada en el decaimiento β^- es positiva siempre que la masa atómica neutra del átomo original sea mayor que la del átomo final. (Véase la sugerencia en el problema 43.49).

43.51 •• Aplique la conservación de la masa-energía para demostrar que la energía liberada en el decaimiento β^+ es positiva siempre que la masa atómica neutra del átomo original es cuando menos dos masas de electrón mayor que la del átomo final. (Véase la sugerencia en el problema 43.49).

43.52 •• *a)* Calcule la energía mínima requerida para remover un protón del núcleo de $^{12}_{6}$C. Esto se conoce como energía de remoción del protón. (*Sugerencia:* Calcule la diferencia entre la masa del núcleo de $^{12}_{6}$C y la masa del protón más la masa del núcleo formado cuando se remueve un protón del $^{12}_{6}$C.)*b)* ¿Cómo se compara la energía de remoción del protón del $^{12}_{6}$C con la energía de enlace por nucleón del $^{12}_{6}$C, calculada usando la ecuación (43.10)?

43.53 •• *a)* Calcule la energía mínima requerida para remover un neutrón del núcleo de $^{17}_{8}$O. Esto se conoce como energía de remoción del neutrón. (Véase el problema 43.52). *b)* ¿Cómo se compara la energía de remoción del neutrón del $^{17}_{8}$O con la energía de enlace por nucleón del $^{17}_{8}$O, calculada usando la ecuación (43.10)?

43.54 •• La masa atómica del $^{14}_{6}$C neutro es de 14.003242 u. Calcule la energía de remoción del protón y la energía de remoción del neutrón del $^{15}_{7}$N. (Véase los problemas 43.52 y 43.53). ¿Cuál es la diferencia porcentual entre estas dos energías, y cuál es más grande?

43.55 • BIO **Lluvia radiactiva.** Uno de los problemas de las pruebas de armas nucleares en el aire (o lo que es peor, ¡el *uso* de tales armas!) es el riesgo de lluvia radiactiva. Uno de los nucleidos más problemáticos de esta lluvia es el estroncio 90 (^{90}Sr), el cual se descompone por decaimiento β^- con una vida media de 28 años. Químicamente, es similar al calcio y, por lo tanto, se puede alojar en los huesos y dientes, donde, debido a su vida media tan larga, permanece por años como una fuente interna de radiación. *a)* ¿Cuál es el núcleo derivado del decaimiento del ^{90}Sr? *b)* ¿Qué porcentaje de la cantidad original de ^{90}Sr permanece después de 56 años? *c)* ¿Cuánto tiempo tendría que esperar para que la cantidad original se reduzca al 6.25% de su valor inicial?

43.56 •• **PA** El torio $^{230}_{90}Th$ decae al radio $^{226}_{88}Ra$ por emisión α. Las masas de los átomos neutros son 230.033127 u del $^{230}_{90}Th$ y 226.025403 u del $^{226}_{88}Ra$. Si el núcleo precursor del torio está en reposo, ¿cuál es la energía cinética de la partícula α emitida? (Asegúrese de tener en cuenta el retroceso del núcleo derivado).

43.57 •• La masa atómica del $^{25}_{12}Mg$ es de 24.985837 u, y la del $^{25}_{13}Al$ es de 24.990429 u. *a*) ¿Cuál de esos núcleos decae en el otro? *b*) ¿Qué clase de decaimiento sucederá? Explique cómo lo determinó. *c*) ¿Cuánta energía (en MeV) se desprende en el decaimiento?

43.58 •• El isótopo de polonio $^{210}_{84}Po$ tiene masa atómica 209.982857 u. Otras masas atómicas son $^{206}_{82}Pb$, 205.974449 u; $^{209}_{83}Bi$, 208.980383 u; $^{210}_{83}Bi$, 209.984105 u; $^{209}_{84}Po$, 208.982416 u y $^{210}_{85}At$, 209.987131 u. *a*) Demuestre que el decaimiento alfa del $^{210}_{84}Po$ es energéticamente posible, y determine la energía de la partícula α emitida. *b*) ¿Es energéticamente estable el $^{210}_{84}Po$ con respecto a la emisión de un protón? ¿Por qué? *c*) ¿Es energéticamente estable el $^{210}_{84}Po$ con respecto a la emisión de un neutrón? ¿Por qué? *d*) ¿Es energéticamente estable el $^{210}_{84}Po$ con respecto al decaimiento β^-? ¿Por qué? *e*) ¿Es energéticamente estable el $^{210}_{84}Po$ con respecto al decaimiento β^+? ¿Por qué?

43.59 •• **BIO** **¡Radiación de nosotros mismos!** El radiocarbono en nuestros cuerpos es una de las fuentes naturales de radiación. Veamos qué tan grande es la dosis que recibimos. El ^{14}C decae por emisión β^-, y el 18% de la masa de nuestro cuerpo es carbono. *a*) Elabore el esquema de decaimiento del carbono 14 e indique el producto final. (También se produce un neutrino). *b*) Si se ignoran los efectos del neutrino, ¿cuánta energía cinética (en MeV) se libera por decaimiento? La masa atómica del ^{14}C es 14.003242 u. *c*) ¿Cuántos gramos de carbono hay en una persona de 75 kg? ¿Cuántos decaimientos por segundo produce este carbono? (*Sugerencia:* Use los datos del ejemplo 43.9). *d*) Suponiendo que toda la energía liberada en estos decaimientos es absorbida por el cuerpo, ¿cuántos MeV/s y J/s libera el ^{14}C en el cuerpo de esa persona? *e*) Consulte la tabla 43.3 y utilice la EBR adecuada más grande para las partículas implicadas. ¿Qué dosis de radiación entrega esa persona a sí misma cada año, en Gy, rad, Sv y rem?

43.60 •• **BIO** **Terapia de radiación con piones.** Un pión neutro (π^0) tiene una masa de 264 veces la masa del electrón y decae con un tiempo de vida de 8.4×10^{-17} s a dos fotones. Esos piones se utilizan en el tratamiento con radiación de algunos tipos de cáncer. *a*) Calcule la energía y la longitud de onda de esos fotones. ¿En qué parte del espectro electromagnético se encuentran? ¿Cuál es la EBR de esos fotones? *b*) Si usted desea impartir una dosis de 200 rem (como es común) en un solo tratamiento a 25 g de un tejido tumoral, ¿cuántos mesones π^0 se necesitan?

43.61 • El oro, $^{198}_{79}Au$, experimenta decaimiento β^- y pasa a un estado excitado de $^{198}_{80}Hg$. Si el estado excitado decae por emisión de un fotón γ con 0.412 MeV de energía, ¿cuál es la energía cinética máxima del electrón emitido en la desintegración? Este máximo se presenta cuando el antineutrino tiene una energía despreciable. (La energía de retroceso del núcleo de $^{198}_{80}Hg$ se puede ignorar. Las masas de los átomos neutros en sus estados base son 197.968225 u en el caso del $^{198}_{79}Au$, y 197.966752 u para el $^{198}_{80}Hg$).

43.62 •• Calcule el defecto de masa en el decaimiento β^+ del $^{11}_{6}C$. ¿Es energéticamente posible este decaimiento? ¿Por qué? La masa atómica del $^{11}_{6}C$ es 11.011434 u.

43.63 •• Calcule el defecto de masa para el decaimiento β^+ del $^{13}_{7}N$. ¿Es energéticamente posible este decaimiento? ¿Por qué? La masa atómica del $^{13}_{7}N$ es 13.005739 u.

43.64 •• En la siguiente tabla se presentan los resultados de mediciones de la actividad de una muestra radiactiva. *a*) Calcule la vida media. *b*) ¿Cuántos núcleos radiactivos había en la muestra cuando $t = 0$? *c*) ¿Cuántos había después de 7.0 h?

Tiempo (h)	Decaimientos/s
0	20,000
0.5	14,800
1.0	11,000
1.5	8,130
2.0	6,020
2.5	4,460
3.0	3,300
4.0	1,810
5.0	1,000
6.0	550
7.0	300

43.65 •• **BIO** Una persona ingiere cierta cantidad de una fuente radiactiva con un tiempo de vida muy larga y 0.63 μCi de actividad. El material radiactivo se aloja en los pulmones donde todas las partículas α de 4.0 MeV emitidas son absorbidas por un tejido de 0.50 kg de masa. Calcule la dosis absorbida y la dosis equivalente de un año.

43.66 •• **Medición de vidas medias muy largas.** Algunos radioisótopos como el samario (^{149}Sm) y el gadolinio (^{152}Gd) tienen vidas medias que son mucho más largas que la edad del Universo, de manera que no es posible medir sus vidas medias observando cómo disminuye su rapidez de decaimiento. Por fortuna, existe otra forma de calcular la vida media, usando la ecuación (43.16). Suponga que una muestra de 12.0 g de ^{149}Sm decae a una rapidez de 2.65 Bq. Calcule la vida media de la muestra en años. (*Sugerencia:* Pregúntese cuántos núcleos hay en una muestra de 12.0 g).

43.67 • **Somos polvo de estrellas.** En 1952 se descubrieron las líneas espectrales del elemento tecnecio-99 (^{99}Tc) en una estrella gigante roja. Las gigantes rojas son estrellas muy antiguas, a menudo de 10 mil millones de años de antigüedad, y se encuentran en el final de sus vidas. El tecnecio *no* tiene isótopos estables, y la vida media del ^{99}Tc es de 200,000 años. *a*) ¿Cuántas vidas medias ha estado el ^{99}Tc en la gigante roja si la edad de esta es de 10 mil millones de años? *b*) ¿Qué fracción del ^{99}Tc original quedaría al final de ese tiempo? Este descubrimiento fue sumamente importante porque brindó evidencia convincente para la teoría (ahora reconocida como verdadera) de que la mayoría de los átomos más pesados que el hidrógeno y el helio se crearon en el interior de las estrellas por fusión termonuclear y otros procesos nucleares. Si el ^{99}Tc hubiera sido parte de la estrella desde que esta nació, la cantidad restante después de 10 mil millones de años sería tan minúscula que no sería detectable. Este conocimiento condujo más tarde al astrónomo Carl Sagan a afirmar que "somos polvo de estrellas".

43.68 • **BIO** Una persona de 70.0 kg experimenta una exposición de cuerpo entero a radiación α de 4.77 MeV. Absorbe un total de 6.25×10^{12} partículas α. *a*) ¿Cuál es la dosis absorbida, en rad? *b*) ¿Cuál es la dosis equivalente en rem? *c*) Si la fuente es 0.0320 g de ^{226}Ra (vida media de 1600 años) en alguna parte del organismo, ¿cuál es la actividad de esta fuente? *d*) Si se absorben todas las partículas alfa producidas, ¿qué tiempo se requiere para absorber esa dosis?

43.69 •• Las mediciones indican que el 27.83% de todos los átomos de rubidio que hay ahora en la Tierra son del isótopo radiactivo ^{87}Rb. El resto son del isótopo estable ^{85}Rb. La vida media del ^{87}Rb es de 4.75×10^{10} años. Suponiendo que no se hayan formado átomos de rubidio desde entonces, ¿qué porcentaje de átomos de rubidio eran ^{87}Rb cuando se formó nuestro Sistema Solar hace 4.6×10^9 años?

43.70 •• Un núcleo de $^{186}_{76}Os$ en reposo decae por emisión de una partícula α de 2.76 MeV. Calcule la masa atómica del nucleido derivado producido por este decaimiento, suponiendo que se produce en su estado base. La masa atómica del $^{186}_{76}Os$ es 185.953838 u.

43.71 •• BIO Una fuente de ^{60}Co con actividad de 2.6×10^{-4} Ci está incrustada en un tumor de 0.200 kg de masa. La fuente emite fotones γ con energía promedio de 1.25 MeV. La mitad de los fotones se absorbe en el tumor, y la mitad escapa. *a)* ¿Qué energía absorbe el tumor, por segundo? *b)* ¿Qué dosis absorbida (en rad) se absorbe por segundo? *c)* ¿Qué dosis equivalente (en rem) se absorbe por segundo, si la EBR es 0.70 para esos rayos γ? *d)* ¿Qué tiempo de exposición se requiere para que la dosis equivalente sea de 200 rem?

43.72 • El núcleo $^{15}_{8}O$ tiene una vida media de 122.2 s; el $^{19}_{8}O$ tiene una vida media de 26.9 s. Si en determinado momento una muestra contiene cantidades iguales de $^{15}_{8}O$ y $^{19}_{8}O$, ¿cuál es la razón entre $^{15}_{8}O$ y $^{19}_{8}O$ *a)* después de 4.0 minutos y *b)* después de 15.0 minutos?

43.73 • Un fragmento de hueso se encontró en una cueva que se cree estuvo habitada por los primeros humanos, y contiene 0.29 veces el ^{14}C de una cantidad igual de carbono en la atmósfera cuando murió el organismo poseedor del hueso. (Véase el ejemplo 43.9, sección 43.4). Calcule la edad aproximada del fragmento.

43.74 •• **Un trazador oceanográfico.** Las pruebas con armas nucleares en las décadas de 1950 y 1960 liberaron cantidades significativas de tritio radiactivo ($^{3}_{1}H$, vida media de 12.3 años) en la atmósfera. Los átomos de tritio se unieron rápidamente a moléculas de agua que se condensaron en el aire, la mayor parte de las cuales terminaron en el océano. Para esta agua unida al tritio que se hunde bajo la superficie, la cantidad de tiempo durante el cual ha estado aislada de la superficie puede calcularse midiendo el cociente entre el producto de decaimiento, $^{3}_{2}He$, y el tritio restante en el agua. Por ejemplo, si la razón entre el $^{3}_{2}He$ y el $^{3}_{1}H$ en una muestra de agua es 1:1, el agua ha estado debajo de la superficie durante una vida media, o aproximadamente 12 años. Este método ofrece a los oceanógrafos una forma práctica de trazar los movimientos de las corrientes debajo de la superficie en regiones del océano. Suponga que en una muestra particular de agua, la razón entre el $^{3}_{2}He$ y el $^{3}_{1}H$ es de 4.3 a 1.0. ¿Hace cuántos años que esta agua se hundió debajo de la superficie?

43.75 •• Considere la reacción de fusión $^{2}_{1}H + ^{2}_{1}H \rightarrow ^{3}_{2}He + ^{1}_{0}n$. *a)* Estime la barrera de energía calculando la energía potencial electrostática de repulsión de los dos núcleos $^{2}_{1}H$ cuando se tocan. *b)* Calcule la energía liberada en esta reacción, en MeV y en joules. *c)* Calcule la energía liberada *por mol* de deuterio, recordando que el gas es diatómico, y compárela con el calor de combustión del hidrógeno, que es alrededor de 2.9×10^{5} J/mol.

43.76 •• BIO En el desastre del reactor de Chernobyl, en 1986, en la Unión Soviética (hoy Ucrania), aproximadamente $\frac{1}{8}$ del ^{137}Cs presente en el reactor escapó. El isótopo ^{137}Cs tiene una vida media por decaimiento β de 30.07 años, y decae emitiendo un total de 1.17 MeV de energía por desintegración. De esa energía, 0.51 MeV van con el electrón emitido, y los 0.66 MeV restantes con un rayo γ. El ^{137}Cs radiactivo es absorbido por las plantas, que son ingeridas por el ganado y por los humanos. ¿Cuántos átomos de ^{137}Cs se necesitarían para que en cada kilogramo de tejido corporal haya una dosis equivalente de 3.5 Sv durante una semana? Suponga que toda la energía del decaimiento se queda en ese 1.0 kg de tejido, y que la EBR de los electrones es 1.5.

43.77 •• PA *a)* Demuestre que cuando una partícula con masa m y energía cinética K choca con una partícula estacionaria de masa M, la energía cinética total K_{cm} en el sistema de coordenadas del centro de masa (la energía disponible para causar reacciones) es

$$K_{cm} = \frac{M}{M + m}K$$

Suponga que las energías cinéticas de las partículas y los núcleos son mucho menores que sus energías en reposo. *b)* Si K_{th} es la energía cinética mínima, o de umbral [th corresponde a las iniciales de ***th**reshold* (umbral) en inglés], para que ocurra una reacción endoérgica en el caso del inciso *a)*, demuestre que

$$K_{th} = -\frac{M + m}{M}Q$$

43.78 • Calcule la energía liberada en la reacción de fisión $^{235}_{92}U + ^{1}_{0}n \rightarrow ^{140}_{54}Xe + ^{94}_{38}Sr + 2^{1}_{0}n$. Puede ignorar la energía cinética inicial del neutrón absorbido. Las masas atómicas son: $^{235}_{92}U$, 235.043923 u; $^{140}_{54}Xe$, 139.921636 u, y $^{94}_{38}Sr$, 93.915360 u.

PROBLEMAS DE DESAFÍO

43.79 ••• A continuación se presentan los resultados de mediciones de actividad para una muestra constituida por varios elementos radiactivos. *a)* ¿Cuántos nucleidos distintos hay en la mezcla? *b)* ¿Cuáles son sus vidas medias? *c)* ¿Cuántos núcleos de cada tipo hay inicialmente en la muestra? *d)* ¿Cuántos de cada tipo hay cuando $t = 5.0$ h?

Tiempo (h)	Decaimientos/s
0	7500
0.5	4120
1.0	2570
1.5	1790
2.0	1350
2.5	1070
3.0	872
4.0	596
5.0	414
6.0	288
7.0	201
8.0	140
9.0	98
10.0	68
12.0	33

43.80 ••• **Radiactividad industrial.** Los radioisótopos se usan en diversas técnicas de manufactura y prueba. Se pueden hacer mediciones de desgaste con el siguiente método. Se produce un motor de automóvil usando anillos de pistón con una masa total de 100 g, que contiene 9.4 μCi de ^{59}Fe, cuya vida media es de 45 días. El motor de prueba trabaja durante 1000 horas, después de lo cual se vacía su aceite y se mide la actividad de este. Si la actividad del aceite del motor es de 84 decaimientos/s, ¿cuánta masa se desprendió de los anillos de pistón, por hora de funcionamiento?

Respuestas

Pregunta inicial del capítulo 

Cuando muere un organismo, cesa de absorber carbono del CO_2 atmosférico. Parte de este carbono es el ^{14}C radiactivo, que decae con una vida media de 5730 años. Al medir la proporción de ^{14}C que queda en el espécimen, los científicos pueden determinar hace cuánto tiempo murió el organismo (véase la sección 43.4).

Preguntas de las secciones Evalúe su comprensión

43.1 Respuestas: *a)* iii, *b)* v. El radio R es proporcional a la raíz cúbica del número de masa A, mientras que el volumen es proporcional a R^3 y, por consiguiente, a $(A^{1/3})^3 = A$. Por eso, para duplicar el volumen se requiere aumentar el número de masa en un factor de 2, mientras que para duplicar el radio se debe aumentar tanto el volumen como el número de masa en un factor de $2^3 = 8$.

43.2 Respuesta: ii, iii, iv, v, i. Se pueden encontrar las respuestas observando la figura 43.2. La energía de enlace por nucleón es la menor para los núcleos muy ligeros como el $^{4}_{2}$He, es máxima alrededor de $A = 60$, y luego disminuye conforme A aumenta.

43.3 Respuesta: v. Se pierden dos protones y dos neutrones en un decaimiento α, de manera que Z y N disminuyen, cada uno, en 2. Un decaimiento β^+ transforma un protón en un neutrón, de manera que Z disminuye en 1 y N aumenta en 1. El resultado neto es que Z disminuye en 3 y N disminuye en 1.

43.4 Respuesta: iii. La actividad $-dN(t)/dt$ de una muestra es el producto de la cantidad de núcleos en la muestra, $N(t)$, por la constante de decaimiento $\lambda = (\ln 2)/T_{1/2}$. Por consiguiente, $N(t) = (-dN(t)/dt)T_{1/2}/(\ln 2)$. Tomando el cociente entre esta ecuación para el ^{240}Pu y esta misma ecuación para el ^{243}Am, se simplifican los factores de ln 2 y se obtiene

$$\frac{N_{\text{Pu}}}{N_{\text{Am}}} = \frac{(-dN_{\text{Pu}}/dt)T_{1/2\text{-Pu}}}{(-dN_{\text{Am}}/dt)T_{1/2\text{-Am}}} = \frac{(5.00\ \mu\text{Ci})(6560\ \text{años})}{(4.45\ \mu\text{Ci})(7370\ \text{años})} = 1.00$$

Las dos muestras contienen cantidades *iguales* de núcleos. La muestra de ^{243}Am tiene mayor vida media y, en consecuencia, menor rapidez de desintegración, por lo que tiene menor actividad que la muestra de ^{240}Pu.

43.5 Respuesta: ii. En la sección 43.3 vimos que las partículas alfa solo pueden recorrer una distancia muy corta antes de detenerse. En contraste, los fotones de rayos x son muy penetrantes, por lo que pueden atravesar el cuerpo.

43.6 Respuesta: no La reacción $^{1}_{1}\text{H} + ^{7}_{3}\text{Li} \rightarrow ^{4}_{2}\text{He} + ^{4}_{2}\text{He}$ es una reacción *nuclear*, que solo se puede efectuar si un protón (núcleo de hidrógeno) se pone en contacto con un núcleo de litio. Si el hidrógeno está en forma atómica, la interacción entre su nube electrónica y la del átomo de litio evita que los dos núcleos se acerquen. Aun si se usan protones aislados, deben dispararse hacia los átomos de litio con la energía cinética suficiente para superar la repulsión eléctrica entre los protones y los núcleos de litio. Decir que la reacción es exoérgica indica que se libera más energía por la reacción que la que se tuvo que suministrar para que sucediera la reacción.

43.7 Respuesta: no Como el neutrón no tiene carga eléctrica, no experimenta repulsión eléctrica de un núcleo de ^{235}U. Por consiguiente, un neutrón en movimiento lento puede acercarse y entrar a un núcleo de ^{235}U, suministrando la excitación necesaria para iniciar la fisión. En contraste, un *protón* de movimiento lento (carga $+e$) experimenta una repulsión eléctrica intensa desde el núcleo de ^{235}U (carga $+92e$). Nunca se acerca al núcleo y no puede iniciar la fisión.

43.8 Respuesta: no Las reacciones de fusión entre núcleos suficientemente ligeros son exoérgicas, porque la energía de enlace por nucleón, E_B/A, aumenta. Sin embargo, si los núcleos son demasiado masivos, E_B/A disminuye y la fusión es *endoérgica* (es decir, toma energía en vez de liberarla). Por ejemplo, imagine que se fusionan dos núcleos de $A = 100$ para formar un solo núcleo con $A = 200$. En la figura 43.2 se ve que E_B/A es más de 8.5 MeV para los núcleos con $A = 100$, pero es menor que 8 MeV para el núcleo con $A = 200$. Es posible esa reacción de fusión, pero requiere una adición apreciable de energía.

Problema práctico

Respuestas: ***a)*** ^{128}Xe

b) no; la emisión β^+ sería endoérgica

c) 3.25×10^9 átomos, 1.50×10^6 Bq

d) $N(t) = (3.25 \times 10^9\ \text{átomos})(1 - e^{-(4.62\times10^{-4}\ \text{s}^{-1})t})$

44 FÍSICA DE PARTÍCULAS Y COSMOLOGÍA



? Estas imágenes se hicieron combinando ondas electromagnéticas con longitudes de onda en el infrarrojo y en rayos x para producir esta vista de la dinámica del centro de nuestra galaxia, la Vía Láctea. La imagen muestra átomos en diferentes estados: átomos aislados en brillantes nubes difusas de gas (en azul), y grupos de átomos y moléculas inmensas en nubes de polvo frías (en rojo) y en acumulaciones densas que llamamos estrellas. ¿Qué fracción de la masa y la energía en el Universo está compuesta de materia "normal", es decir, de átomos y sus constituyentes?

OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

Al estudiar este capítulo, usted aprenderá:

- Las principales clases de partículas subatómicas fundamentales y cómo se descubrieron.
- De qué manera los físicos usan aceleradores y detectores para demostrar las propiedades de las partículas subatómicas.
- Las cuatro formas en que las partículas subatómicas interactúan entre sí.
- Cómo la estructura de los protones, neutrones y otras partículas puede explicarse en términos de quarks.
- De qué manera los físicos prueban los límites del modelo estándar de partículas e interacciones.
- La evidencia de que el Universo se encuentra en expansión y de que esta se está acelerando.
- La historia de los primeros 380,000 años después de la gran explosión.

¿De qué está hecho el mundo? ¿Cuáles son los constituyentes fundamentales de la materia? Los filósofos y los científicos se lo han preguntado cuando menos durante 2500 años. Y todavía no sabemos lo que pudiera considerarse una respuesta definitiva; sin embargo, ya hemos recorrido un largo trecho, como veremos en este capítulo.

El título de este capítulo, "Física de partículas y cosmología", le parecerá algo extraño. Las partículas fundamentales son los objetos *más pequeños* en el Universo, y la cosmología describe la estructura *más grande* que existe: el Universo mismo. No obstante, en este capítulo veremos que la física, en la escala microscópica, desempeña un papel esencial en la determinación de la naturaleza del Universo en la escala máxima.

Veremos que las partículas fundamentales no son entidades permanentes, ya que pueden crearse y destruirse. El desarrollo de aceleradores de alta energía para partículas, y los detectores correspondientes, han desempeñado un papel esencial en nuestra incipiente comprensión de las partículas. Es posible clasificar las partículas y sus interacciones en varias formas, en términos de las leyes de conservación y las simetrías, algunas de las cuales son absolutas, en tanto otras de ellas solo rigen en ciertas clases de interacciones. Terminaremos describiendo lo que sabemos actualmente de la naturaleza y la evolución del Universo como un todo.

44.1 Partículas fundamentales y su historia

La idea de que el mundo está formado por partículas fundamentales tiene una larga historia. Aproximadamente en el año 400 a. C., los filósofos griegos Demócrito y Leucipo sugirieron que la materia estaba hecha de partículas indivisibles a las que llamaron *átomos*, una palabra derivada de *a-* (no) y *tomos* (cortado o dividido). Esta idea quedó latente hasta 1804, aproximadamente, cuando el científico inglés John Dalton (1766-1844), a

quien con frecuencia se le reconoce como padre de la química moderna, descubrió que se podían explicar muchos fenómenos químicos, si a los átomos de cada elemento se les consideraba como los bloques constituyentes básicos e indivisibles de la materia.

El electrón y el protón

Hacia finales del siglo XIX, se aclaró que los átomos *no* son indivisibles. La existencia de espectros atómicos característicos parecía indicar que los átomos tenían estructura interna, y el descubrimiento del *electrón* cargado negativamente en 1897, por J. J. Thomson, demostró que los átomos se podían desintegrar en partículas cargadas. Rutherford en sus experimentos entre 1910 y 1911 (vea la sección 39.2) descubrió que en un átomo reside un pequeño y denso núcleo cargado positivamente. En 1919, Rutherford hizo un descubrimiento adicional: cuando las partículas alfa son disparadas en nitrógeno, uno de los productos es gas hidrógeno. Llegó a la conclusión de que el núcleo de hidrógeno es un componente de los núcleos de átomos más pesados tales como el nitrógeno, y que una colisión con una partícula alfa que se mueve rápidamente puede desprender uno de estos núcleos de hidrógeno. Así, el núcleo de hidrógeno es una partícula elemental, a la que Rutherford dio el nombre de *protón*. La década siguiente vio el florecimiento de la mecánica cuántica, incluyendo la ecuación de Schrödinger. Los físicos ya estaban en camino de entender los principios en los que se basa la estructura atómica.

El fotón

En 1905 Einstein explicó el efecto fotoeléctrico al suponer que la energía de las ondas electromagnéticas está cuantizada; es decir, que viene en pequeños paquetes llamados *fotones* de energía $E = hf$. Los átomos y los núcleos pueden emitir (crear) y absorber (destruir) fotones (véase la sección 38.1). Considerados como partículas, los fotones tienen carga cero y masa en reposo cero. (Observe que en este capítulo todas las descripciones de la masa de una partícula se referirán a su masa en reposo). En la física de partículas, un fotón se representa con el símbolo γ, la letra griega gamma.

El neutrón

En 1930 los físicos alemanes Walther Bothe y Herbert Becker observaron que cuando se bombardeaba el berilio, el boro o el litio, con partículas α procedentes del polonio radiactivo, el material objetivo emitía una radiación con mucho mayor poder de penetración que las partículas alfa originales. En 1932 los experimentos del físico inglés James Chadwick demostraron que las partículas emitidas eran eléctricamente neutras, y que su masa era aproximadamente igual a la del protón. Chadwick bautizó con el nombre de *neutrones* a esas partículas (símbolo n o ${}^{1}_{0}\mathrm{n}$). Una reacción característica, del tipo estudiado por Bothe y Becker con un blanco de berilio, es

$$ {}^{4}_{2}\mathrm{He} + {}^{9}_{4}\mathrm{Be} \rightarrow {}^{12}_{6}\mathrm{C} + {}^{1}_{0}\mathrm{n} \tag{44.1} $$

Las partículas elementales suelen detectarse por sus efectos electromagnéticos; por ejemplo, por la ionización que causan cuando pasan a través de la materia. (Este es el principio de la cámara de niebla, que se describe a continuación). Fue difícil detectar los neutrones en forma directa, porque no tienen carga; por lo tanto, producen poca ionización cuando atraviesan la materia, y no son desviados por campos eléctricos o magnéticos. Sin embargo, los neutrones se pueden desacelerar por dispersión debida a los núcleos atómicos y es posible penetrar en alguno de ellos. Así, los neutrones lentos pueden detectarse mediante una reacción nuclear donde se absorbe un neutrón y se emite una partícula alfa. Por ejemplo,

$$ {}^{1}_{0}\mathrm{n} + {}^{10}_{5}\mathrm{B} \rightarrow {}^{7}_{3}\mathrm{Li} + {}^{4}_{2}\mathrm{He} \tag{44.2} $$

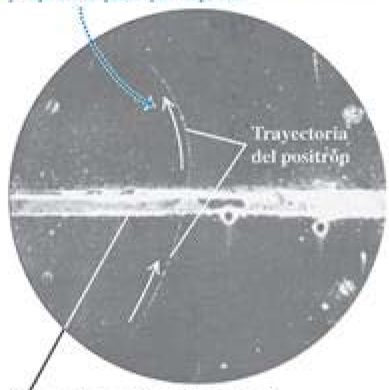
Es fácil detectar la partícula alfa expulsada porque tiene carga. Experimentos posteriores demostraron que los neutrones, como los protones y los electrones, son partículas con espín (momento angular intrínseco) $\frac{1}{2}$ (véase la sección 43.1).

El descubrimiento del neutrón aclaró un misterio acerca de la composición del núcleo. Antes de 1930, se creía que la masa de un núcleo solo se debía a los protones, aunque nadie comprendía por qué la relación de carga a masa no era igual para todos

44.1 Fotografía de la traza dejada, en una cámara de niebla, por el primer positrón que se haya identificado. La fotografía fue tomada por Carl D. Anderson, en 1932.

El positrón sigue una trayectoria curva debida a la presencia de un campo magnético.

La trayectoria está mucho más curva debajo de la placa de plomo, lo cual demuestra que el positrón viajaba hacia arriba y perdió energía y rapidez al pasar por la placa.



Placa de plomo (6 mm de espesor)

los nucleidos. Pronto se aclaró que todos los nucleidos (excepto el $^1_1$H) contienen tanto protones como neutrones. De hecho, el protón, el neutrón y el electrón son los bloques constituyentes de los átomos. Se pensó que ese sería el fin de la historia; sin embargo, apenas era el principio. No son las únicas partículas y pueden hacer más que formar átomos.

El positrón

En 1932 el físico estadounidense Carl D. Anderson descubrió el electrón positivo, o positrón, cuando investigaba las partículas que bombardean la Tierra desde el espacio. La figura 44.1 muestra una fotografía histórica, tomada con una *cámara de niebla*, un instrumento con el que se visualizan las trayectorias de las partículas cargadas. La cámara contenía un vapor sobrenfriado; los iones formados al paso de las partículas cargadas al atravesar el vapor sirven como centros de agrupamiento y se forman gotitas de líquido alrededor de ellas, dejando una trayectoria visible.

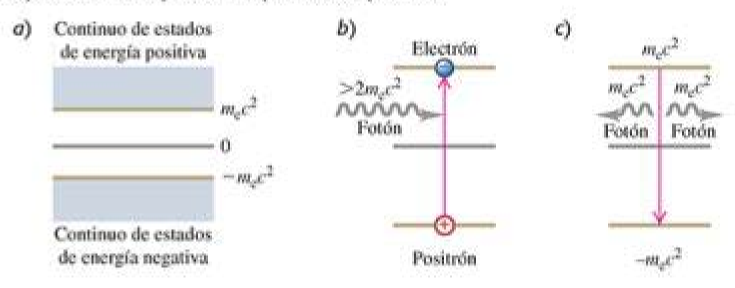
La cámara de niebla de la figura 44.1 está en un campo magnético que entra al plano de la fotografía. La partícula ha atravesado una placa de plomo delgada (que se extiende de izquierda a derecha en la figura) dentro de la cámara. La curvatura de la trayectoria es mayor arriba de la placa que abajo de ella, lo cual demuestra que la rapidez es menor arriba que abajo. Por consiguiente, la partícula debería moverse hacia arriba; no podía ganar energía al atravesar el plomo. El grosor y la curvatura de la huella parecían indicar que su masa y la magnitud de la carga eran iguales a las del electrón. Sin embargo, las direcciones del campo magnético y de la velocidad, en la ecuación de la fuerza magnética $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$ demostraban que la partícula tenía carga *positiva*. Anderson designó a esta partícula con el nombre de *positrón*.

Para los teóricos, la aparición del positrón fue un descubrimiento más que importante. En 1928 el físico inglés Paul Dirac había desarrollado una generalización relativista de la ecuación de Schrödinger para el electrón. En la sección 41.5 describimos cómo la generalización de Dirac ayudó a explicar el momento magnético debido al espín del electrón.

Una de las propiedades intrigantes de la ecuación de Dirac era que, para un electrón *libre*, predecía no solo un continuo de estados de energía mayores que su energía en reposo m_ec^2, como era de esperarse, sino también un continuo de estados de energía *negativa menor que* $-m_ec^2$ (figura 44.2*a*). Esto constituía un problema. ¿Qué iba a evitar que un electrón emitiera un fotón de energía $2m_ec^2$ o mayor, y saltara de un estado positivo a uno negativo? No estaba claro lo que significaban esos estados de energía negativa, y no había una forma evidente de eliminarlos. La interpretación ingeniosa de Dirac fue que todos los estados de energía negativa estaban llenos con electrones, y que estos, por alguna razón, eran inobservables. El principio de exclusión (véase la sección 41.6) prohibiría entonces una transición a un estado que ya estaba ocupado.

Un hueco en un estado de energía negativa actuaría como una carga positiva, igual que un hueco en la banda de valencia de un semiconductor (véase la sección 42.6) actúa como una carga positiva. Al principio, Dirac trató de argumentar que esos huecos

44.2 *a*) Estados de energía de un electrón libre, predichos por la ecuación de Dirac. *b*) Subir un electrón desde un estado $E < 0$ a uno $E > 0$ corresponde a la producción de un par electrón-positrón. *c*) Un electrón que baja de un estado $E > 0$ a un estado $E < 0$ vacío (hueco) corresponde a una aniquilación de par electrón-positrón.



eran protones. Pero después del descubrimiento de Anderson, se aclaró que los huecos se observaban físicamente como *positrones*. Además, la representación de estados de energía de Dirac ofrece un mecanismo para crear positrones. Cuando un electrón de un estado de energía negativa absorbe un fotón de energía mayor que $2m_ec^2$, pasa a un estado positivo (figura 44.2*b*), en el cual se vuelve observable. El lugar vacío que deja se observa como positrón; el resultado es la creación de un par electrón-positrón. Asimismo, cuando un electrón en un estado de energía positiva cae en el hueco, desaparecen tanto el electrón como el hueco (esto es, el positrón) y se emiten fotones (figura 44.2*c*). Así, la teoría de Dirac conduce en forma natural a la conclusión de que, al igual que los fotones, *los electrones pueden crearse y destruirse*. Mientras que los fotones pueden crearse y destruirse en forma independiente, los electrones se producen o destruyen solo en forma de pares electrón-positrón, o en asociación con otras partículas. (La creación o destrucción de un solo electrón significaría crear o destruir una cantidad de carga $-e$, lo que violaría la conservación de la carga eléctrica).

En 1949 el físico estadounidense Richard Feynman demostró que un positrón se puede describir matemáticamente como un electrón que se mueve hacia atrás en el tiempo. La reformulación que hizo de la teoría de Dirac eliminó los difíciles cálculos que implicaban al mar infinito de estados de energía negativa, y colocó los electrones y positrones sobre la misma base. Pero permanece la creación y la destrucción de los pares electrón-positrón. La teoría de Dirac constituye el inicio de un marco teórico para la creación y la destrucción de todas las partículas fundamentales.

Los experimentos y la teoría nos indican que las masas del positrón y del electrón son idénticas, y que sus cargas tienen igual magnitud, pero signo contrario. El momento angular intrínseco o espín del positrón $\vec{S}$ y el momento magnético $\vec{\mu}$ son paralelos; y para el electrón, son opuestos. Sin embargo, $\vec{S}$ y $\vec{\mu}$ tienen la misma magnitud para ambas partículas, porque tienen el mismo espín. Utilizaremos el término **antipartícula** para indicar una partícula que se relaciona con otra, de la misma forma que el positrón con el electrón. Cada partícula tiene una antipartícula correspondiente. Para algunos tipos de partículas (necesariamente todas neutras), la partícula y la antipartícula son idénticas, y se puede decir que son sus propias antipartículas. El fotón es un ejemplo, no hay forma de distinguir un fotón de un antifotón. Usaremos los símbolos normales e^- para el electrón y e^+ para el positrón; mientras que el término genérico electrón incluirá con frecuencia tanto a los electrones como a los positrones. Otras antipartículas a menudo se indican con una raya sobre el símbolo de la partícula; por ejemplo, un antiprotón es $\overline{p}$. Más adelante veremos otros ejemplos de antipartículas.

Los positrones no se encuentran en la materia ordinaria. Se producen pares electrón-positrón durante los choques de partículas cargadas de alta energía, o de rayos γ contra la materia, un ejemplo del proceso llamado *producción de pares* e^+e^- (figura 44.3). Se conserva la carga eléctrica, y debe haber la energía E suficiente para tomar de ella la energía en reposo $2m_ec^2$ de las dos partículas. La energía mínima para producir un par electrón-positrón es

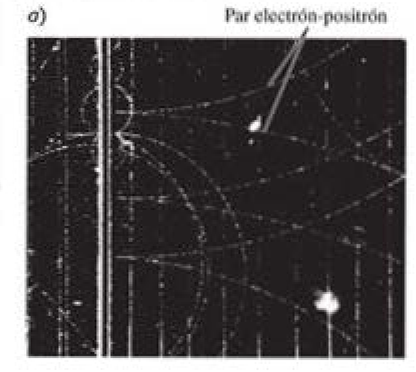
$$E_{\text{mín}} = 2m_ec^2 = 2(9.109 \times 10^{-31}\ \text{kg})(2.998 \times 10^8\ \text{m/s})^2$$
$$= 1.637 \times 10^{-13}\ \text{J} = 1.022\ \text{MeV}$$

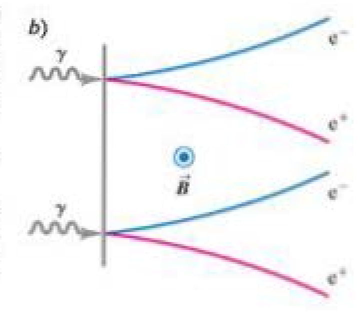
El proceso inverso, la *aniquilación del par* e^+e^-, se produce cuando chocan un positrón y un electrón (véase el ejemplo 38.6 en la sección 38.3). Ambas partículas desaparecen y pueden aparecer dos (o a veces tres) fotones con una energía total mínima $2m_ec^2 = 1.022$ MeV. El decaimiento a un *solo* fotón es imposible, porque ese proceso no conservaría tanto la energía como el momento lineal.

También se producen positrones en el decaimiento de algunos núcleos inestables, donde se llaman beta más (β^+). Se analizó el decaimiento β^+ en la sección 43.3.

Con frecuencia conviene representar las masas de partículas en términos de la energía equivalente en reposo, usando $m = E/c^2$. Entonces, las unidades normales de masa están en MeV/c^2; por ejemplo, $m = 0.511$ MeV/c^2 para un electrón o un positrón. A menudo utilizaremos estas unidades en este capítulo.

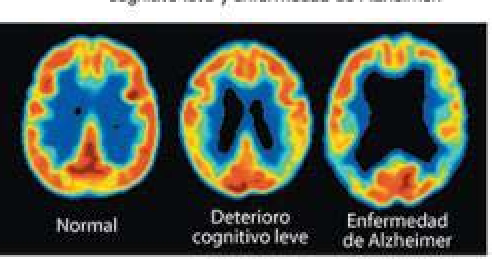
44.3 *a*) Fotografía de las trayectorias dejadas por pares electrón-positrón en una cámara de burbujas, que fueron producidas al chocar fotones de 300 MeV con una lámina de plomo. Un campo magnético dirigido fuera del plano de la fotografía hizo que las trayectorias de electrones y positrones se curvaran en direcciones opuestas. *b*) Diagrama que muestra el proceso de producción de pares para dos de esos fotones.





Aplicación Aniquilación de pares en el diagnóstico médico

Una técnica llamada tomografía por emisión de positrones (PET) se utiliza para identificar las primeras etapas de la enfermedad de Alzheimer. Al paciente se le administra un componente de la glucosa llamado FDG, en el que uno de los átomos de oxígeno es sustituido por ^{18}F radiactivo. El FDG se acumula en las zonas activas del cerebro, donde el metabolismo de la glucosa es alto. El ^{18}F experimenta decaimiento β^+ (por emisión de positrones) con una vida media de 110 minutos, y el positrón emitido inmediatamente se aniquila con un electrón atómico para producir dos fotones de rayos gamma. Un escáner detecta los dos fotones, después calcula dónde tuvo lugar la aniquilación y, por consiguiente, identifica el sitio de acumulación del FDG. Estas imágenes PET que muestran áreas de emisión más fuerte y, por lo tanto, áreas con mayor metabolismo de glucosa, las cuales se muestran en rojo, revelan cambios en el cerebro de los pacientes con deterioro cognitivo leve y enfermedad de Alzheimer.

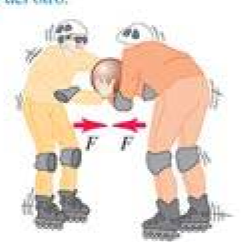


44.4 Una analogía de cómo las partículas actúan como mediadores de fuerza.

a) Dos patinadores ejercen fuerzas de repulsión mutuas lanzándose una pelota de ida y vuelta entre sí.



b) Dos patinadores ejercen fuerzas de atracción entre sí cuando uno trata de quitar la pelota de las manos del otro.



Partículas como mediadores de fuerza

En física clásica se describe la interacción de partículas cargadas en términos de fuerzas eléctricas y magnéticas. En mecánica cuántica esta interacción se describe en términos de emisión y absorción de fotones. Dos electrones se repelen entre sí cuando uno emite un fotón y el otro lo absorbe, del mismo modo que dos patinadores pueden empujarse uno al otro al arrojarse de ida y vuelta una pelota muy masiva entre ambos (figura 44.4*a*). Para un electrón y un protón, en los que las cargas son opuestas y la fuerza es de atracción, imaginamos que los patinadores intentan arrebatarse de las manos la pelota (figura 44.4*b*). La interacción electromagnética entre dos partículas cargadas es *mediada* o transmitida por fotones.

Si las interacciones entre partículas cargadas están mediadas por fotones, ¿de dónde proviene la energía para crear los fotones? Recuerde, de nuestra descripción del principio de incertidumbre (véase las secciones 38.4 y 39.6), que un estado que existe durante un corto tiempo Δt tiene una incertidumbre ΔE en su energía, tal que

$$\Delta E\,\Delta t \geq \frac{\hbar}{2} \qquad (44.3)$$

Esta incertidumbre permite la creación de un fotón con energía ΔE, siempre y cuando no dure más que el tiempo Δt definido por la ecuación (44.3). Un fotón que puede existir durante corto tiempo, debido a esta incertidumbre de energía, se llama *fotón virtual*. Es como si hubiera un banco de energía; uno podrá pedir prestada energía siempre y cuando pague dentro del límite de tiempo. De acuerdo con la ecuación (44.3), cuanto más se pida prestado, más pronto habrá que pagar.

Mesones

¿Hay alguna partícula intermediaria de la fuerza *nuclear*? A mediados de la década de 1930, parecía que la fuerza nuclear entre dos nucleones (neutrones o protones) se podía describir con una energía potencial $U(r)$ de la forma general

$$U(r) = -f^2\left(\frac{e^{-r/r_0}}{r}\right) \quad \text{(energía potencial nuclear)} \qquad (44.4)$$

La constante f caracteriza la fuerza de la interacción, y r_0 describe su alcance. La figura 44.5 muestra una gráfica del valor absoluto de esta función, y la compara con la función f^2/r, la cual sería análoga a la interacción *eléctrica* de dos protones:

$$U(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^2}{r} \quad \text{(energía potencial eléctrica)} \qquad (44.5)$$

En 1935 el físico japonés Hideki Yukawa sugirió que una partícula hipotética, a la que llamó **mesón**, podría actuar como mediador de la fuerza nuclear. Demostró que el alcance de la fuerza se relaciona con la masa de la partícula. El argumento de Yukawa era que la partícula debe vivir durante un tiempo Δt suficiente para recorrer una distancia comparable con el alcance de la fuerza nuclear. Se conocía ese alcance, por los tamaños de los núcleos y otras informaciones, y debía ser aproximadamente 1.5×10^{-15} m = 1.5 fm. Si suponemos que la rapidez de la partícula es comparable con c y que se mueve una distancia de la mitad de su alcance, su vida media Δt debería ser aproximadamente de

$$\Delta t = \frac{r_0}{2c} = \frac{1.5 \times 10^{-15}\text{ m}}{2(3.0 \times 10^8\text{ m/s})} = 2.5 \times 10^{-24}\text{ s}$$

De acuerdo con la ecuación (44.3), la incertidumbre mínima necesaria ΔE en la energía es

$$\Delta E = \frac{\hbar}{2\Delta t} = \frac{1.05 \times 10^{-34}\text{ J}\cdot\text{s}}{2(2.5 \times 10^{-24}\text{ s})} = 2.1 \times 10^{-11}\text{ J} = 130\text{ MeV}$$

La masa equivalente Δm de esta energía es

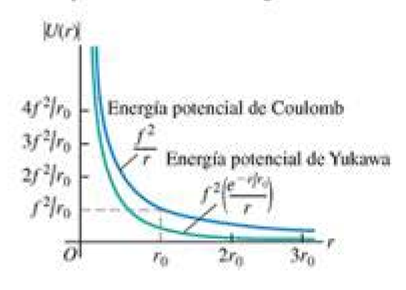
$$\Delta m = \frac{\Delta E}{c^2} = \frac{2.1 \times 10^{-11}\ \text{J}}{(3.00 \times 10^8\ \text{m/s})^2} = 2.3 \times 10^{-28}\ \text{kg} = 130\ \text{MeV}/c^2$$

Es aproximadamente 250 veces la masa del electrón, y Yukawa postuló que una partícula con esta masa es la mediadora de la fuerza nuclear.

Un año después, Carl Anderson y su colega Seth Neddermeyer descubrieron, en la radiación cósmica, dos nuevas partículas, que ahora se llaman **muones.** La μ^- tiene la carga igual a la del electrón, y su antipartícula, la μ^+, tiene una carga positiva de igual magnitud. Las dos partículas tienen la misma masa, la cual es 207 veces la masa del electrón. No obstante, pronto se aclaró que los muones *no* eran las partículas de Yukawa, porque solo interaccionaban débilmente con los núcleos.

En 1947 se descubrió una familia de tres partículas llamadas *mesones* π o **piones**. Sus cargas son: $+e$, $-e$ y cero, y sus masas aproximadas son 270 veces la masa del electrón. Los piones interaccionan fuertemente con los núcleos y *son* las partículas predichas por Yukawa. Hay otros mesones más pesados, los ω y los ρ, que en forma evidente también funcionan como mediadores de la fuerza nuclear con alcance más corto. La complejidad de esta explicación sugiere que tiene bases más sencillas; implican a los quarks y los gluones que describiremos en la sección 44.4. Antes de seguir estudiando los mesones, describiremos algunos aceleradores y detectores de partículas, para saber cómo se crean y se observan en forma controlada los mesones y otras partículas.

44.5 Gráfica de la magnitud de la función de energía potencial de Yukawa para las fuerzas nucleares, $|U(r)| = f^2 e^{-r/r_0}/r$. También se muestra la función $U(r) = f^2/r$, que es proporcional a la energía potencial de la ley de Coulomb. Las dos funciones son similares cuando r es pequeña, pero la energía potencial de Yukawa desciende más rápidamente cuando r es grande.



Evalúe su comprensión de la sección 44.1 Cada una de las siguientes partículas puede intercambiarse entre dos protones, dos neutrones, o un neutrón y un protón como parte de la fuerza nuclear. Ordene de mayor a menor las partículas, según el alcance de interacción que median. **i.** El mesón π^+ (pi más) de masa 140 MeV/c^2; **ii.** el mesón ρ^+ (rho más) de masa 776 MeV/c^2; **iii.** el mesón η^0 (eta cero) de masa 548 MeV/c^2; **iv.** el mesón ω^0 (omega cero) de masa 783 MeV/c^2. ❙

MP

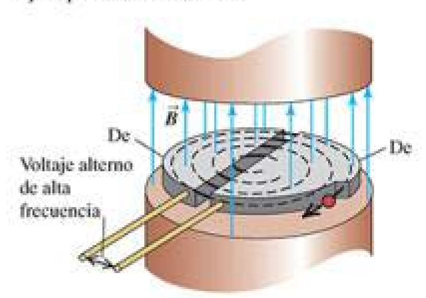
44.2 Aceleradores y detectores de partículas

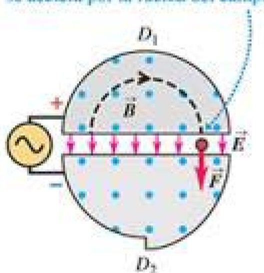
En sus experimentos, los primeros físicos nucleares usaban partículas alfa y beta procedentes de elementos radiactivos naturales; sin embargo, la energía estaba restringida a algunos MeV, disponibles en tales decaimientos aleatorios. Los aceleradores de partículas actuales producen haces de partículas controlados con precisión, desde electrones y positrones hasta iones pesados, con una gran variedad de energías. Esos haces tienen tres usos principales. Primero, las partículas de alta energía pueden chocar para producir nuevas partículas, así como el choque de un electrón con un positrón produce fotones. En segundo lugar, una partícula de alta energía tiene una longitud de onda de De Broglie corta, por lo que puede explorar la estructura interna, de pequeña escala, de otras partículas, de la misma manera que los microscopios electrónicos (véase la sección 39.1) tienen mejor resolución que los microscopios ópticos. En tercer lugar, se utilizan para producir reacciones nucleares con aplicaciones científicas o médicas.

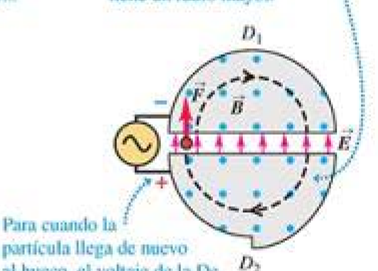
Aceleradores lineales

Los aceleradores de partículas usan campos eléctricos y magnéticos para acelerar y guiar haces de partículas cargadas. Un *acelerador lineal* (linac) acelera las partículas en una línea recta. Los primeros ejemplos de linacs fueron los tubos de rayos catódicos de J. J. Thomson. Los aceleradores lineales (linacs) más avanzados usan una serie de electrodos con intervalos, para dar una serie de impulsos al haz de partículas. Actualmente, la mayoría de los aceleradores lineales de alta energía usan una onda electromagnética viajera; las partículas cargadas viajan en la onda, más o menos del mismo modo que un surfista se desplaza en una ola de mar. En la actualidad, el acelerador lineal de mayor energía de todo el mundo se encuentra en el Laboratorio del Acelerador Nacional SLAC, donde los electrones y los positrones se aceleran a 50 GeV en un tubo de 3 km de longitud. A esta energía, sus longitudes de onda de De Broglie son 0.025 fm, mucho menores que el tamaño de un protón o un neutrón.

44.6 Diagrama y funcionamiento de un ciclotrón.







El ciclotrón

Muchos aceleradores usan imanes para que las partículas cargadas se muevan en trayectorias circulares. El primero de ellos fue el *ciclotrón*, inventado en 1931 por E. O. Lawrence y M. Stanley Livingston, en la Universidad de California (figura 44.6*a*). Las partículas con masa m y carga q se mueven dentro de una cámara de vacío en un campo magnético uniforme $\vec{B}$ que es perpendicular al plano de sus trayectorias. En la sección 27.4 demostramos que en ese campo, una partícula con rapidez v describe una trayectoria circular de radio r dado por

$$r = \frac{mv}{|q|B} \tag{44.6}$$

y su rapidez angular (frecuencia angular) ω es

$$\omega = \frac{v}{r} = \frac{|q|B}{m} \tag{44.7}$$

Una diferencia de potencial alternativa se aplica entre los dos electrodos huecos D_1 y D_2 (llamados *des*, de la letra D) y creando un campo eléctrico en el espacio que hay entre ellos. La polaridad de la diferencia de potencial y del campo eléctrico se cambian exactamente dos veces cada revolución (figuras 44.6*b* y 44.6*c*), de tal modo que las partículas tengan un impulso cada vez que crucen el hueco. Los impulsos aumentan su rapidez y su energía cinética, impulsándolos por trayectorias de radios mayores. La rapidez máxima $v_{\text{máx}}$ y la energía cinética máxima $K_{\text{máx}}$ están determinadas por el radio R de la mayor trayectoria posible. Al despejar v de la ecuación (44.6), se encuentra que $v = |q|Br/m$ y $v_{\text{máx}} = |q|Br/m$. Suponiendo que las rapideces no son relativistas, se obtiene

$$K_{\text{máx}} = \tfrac{1}{2}mv_{\text{máx}}{}^2 = \frac{q^2B^2R^2}{2m} \tag{44.8}$$



Ejemplo 44.1 Frecuencia y energía en un ciclotrón para protones

Un ciclotrón construido durante la década de 1930 tiene una trayectoria de radio máximo de 0.500 m, y un campo magnético de 1.50 T de magnitud. Si se usa para acelerar protones, *a*) calcule la frecuencia del voltaje alterno aplicado a las des; *b*) calcule la energía máxima de la partícula.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: La frecuencia f del voltaje del ciclotrón debe ser igual a la frecuencia del movimiento orbital del protón. La ecuación (44.7) da la frecuencia *angular* ω del movimiento orbital del protón; encontramos f usando $f = \omega/2\pi$. La energía cinética máxima $K_{\text{máx}}$ de los protones se obtiene con la ecuación (44.8), cuando el radio de su órbita es igual al radio de las des.

EJECUTAR: *a*) Para los protones, $q = 1.60 \times 10^{-19}$ C y $m = 1.67 \times 10^{-27}$ kg. De la ecuación (44.7), vemos que,

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{|q|B}{2\pi m} = \frac{(1.60 \times 10^{-19}\ \text{C})(1.50\ \text{T})}{2\pi(1.67 \times 10^{-27}\ \text{kg})}$$
$$= 2.3 \times 10^7\ \text{Hz} = 23\ \text{MHz}$$

b) De acuerdo con la ecuación (44.8), la energía cinética máxima es

$$K_{\text{máx}} = \frac{(1.60 \times 10^{-19}\,\text{C})^2(1.50\,\text{T})^2(0.50\,\text{m})^2}{2(1.67 \times 10^{-27}\,\text{kg})}$$

$$= 4.3 \times 10^{-12}\,\text{J} = 2.7 \times 10^{7}\,\text{eV} = 27\,\text{MeV}$$

La energía cinética del protón es mucho mayor que las energías disponibles en las fuentes de radiactividad natural.

EVALUAR: De acuerdo con la ecuación (44.6) o la (44.7), la rapidez del protón es $v = 7.2 \times 10^7$ m/s, que es un 25% de la rapidez de la luz. A esas rapideces comienzan a importar los efectos relativistas. Ya que en nuestros cálculos no los tuvimos en cuenta, el resultado anterior de f y $K_{\text{máx}}$ tiene un error de unos cuantos puntos porcentuales; esta es la razón por la que solo conservamos dos cifras significativas.

La energía máxima que se puede alcanzar con un ciclotrón está limitada por los efectos relativistas. La versión relativista de la ecuación (44.7) es

$$\omega = \frac{|q|B}{m}\sqrt{1 - v^2/c^2}$$

A medida que aceleran las partículas, su frecuencia angular ω *decrece* y su movimiento sale de fase con respecto al voltaje alterno en la de. En el *sincrociclotrón*, las partículas son aceleradas a impulsos. Para cada impulso, la frecuencia del voltaje alterno disminuye a medida que las partículas aceleran, manteniendo la relación correcta de fase con el movimiento de las partículas.

Otra limitación del ciclotrón es la dificultad de construir grandes electroimanes. El sincrociclotrón más grande que se haya construido tiene una cámara de vacío de unos 8 m de diámetro, que acelera los protones a energías de unos 600 MeV.

El sincrotrón

Para alcanzar mayores energías hay otro aparato, llamado *sincrotrón*, que es más práctico. Las partículas se mueven en una cámara de vacío con la forma de una rosca o dona delgada, llamada *anillo de aceleración*. El haz de partículas se desvía para seguir al anillo, con una serie de electroimanes colocados en torno a este. Al acelerar las partículas, el campo magnético aumenta de tal manera que las partículas vuelven a recorrer una y otra vez la misma trayectoria. El Gran Colisionador de Hadrones (GCH) cerca de Ginebra, Suiza, es en la actualidad el acelerador de mayor energía en el mundo (figura 44.7). Está diseñado para acelerar protones hasta una energía máxima de 7 TeV, o 7×10^{12} eV. (Como veremos en la sección 44.3, los *hadrones* son una clase de partículas elementales que incluyen a los protones y los neutrones).

Como indicamos en la sección 32.1, las cargas electromagnéticas aceleradas irradian energía. En un acelerador en el que las partículas se mueven en trayectorias curvas, esta radiación con frecuencia se llama *radiación sincrotrónica*. Los aceleradores de alta energía se construyen normalmente bajo tierra para brindar protección contra esta radiación. Desde el punto de vista del acelerador, la radiación del sincrotrón es indeseable, ya que la energía dada a una partícula acelerada se irradia de inmediato hacia afuera. Se puede minimizar haciendo más grande el radio acelerador r, de modo que la aceleración centrípeta v^2/r sea pequeña. En el aspecto positivo, la radiación sincrotrónica se utiliza como fuente de ondas electromagnéticas bien controladas de alta frecuencia.

Energía disponible

Cuando un haz de partículas de alta energía choca contra un blanco estacionario, no está *disponible* toda la energía cinética de las partículas incidentes, para formar nuevos estados de partícula. Como se debe conservar el momento lineal, las partículas que surgen de la colisión deben tener cierto movimiento neto y, por lo tanto, cierta energía cinética. La descripción que aparece después del ejemplo 43.11 (sección 43.6) presenta un ejemplo no relativista de este principio. La energía máxima disponible es la energía cinética, en el marco de referencia en el cual el momento lineal total es cero. A este lo llamamos *sistema del centro de momento lineal*; es la generalización relativista del sistema del centro de masa que analizamos en la sección 8.5 (capítulo 8 del volumen 1). En este sistema, la energía cinética total después del choque puede ser cero, por lo que la cantidad máxima de energía cinética inicial está disponible para provocar la reacción que se estudia.

44.7 *a*) Gran Colisionador de Hadrones (GCH) de la Organización Europea para la Investigación Nuclear (CERN). El anillo subterráneo de aceleración (que se muestra por el círculo rojo) está a 100 m bajo tierra y mide 8.5 km de diámetro, tan grande que se extiende en la frontera entre Suiza y Francia. (Observe los Alpes al fondo). Cuando se aceleran a 7 TeV, los protones viajan alrededor del anillo más de 11,000 veces por segundo. *b*) Una ingeniera que trabaja en uno de los 9593 electroimanes superconductores que hay alrededor del anillo del GCH.

a)



b)



Considere el *sistema del laboratorio*, en el que una partícula blanco de masa M está inicialmente en reposo, y es bombardeada por una partícula de masa m y energía total (incluyendo la energía en reposo) E_m. Es posible demostrar que la energía total disponible E_a en el sistema del centro de momento lineal (incluyendo las energías en reposo de todas las partículas) está dada por

$$E_a^2 = 2Mc^2E_m + (Mc^2)^2 + (mc^2)^2 \qquad \text{(energía disponible)} \qquad (44.9)$$

Cuando las masas de las partículas blanco y proyectil son iguales, esto se simplifica a

$$E_a^2 = 2mc^2(E_m + mc^2) \qquad \text{(energía disponible, masas iguales)} \qquad (44.10)$$

Si, además, E_m es mucho mayor que mc^2, podemos despreciar el segundo término entre paréntesis en la ecuación (44.10). Entonces, E_a es

$$E_a = \sqrt{2mc^2E_m} \qquad \text{(energía disponible, masas iguales, } E_m \gg mc^2\text{)} \qquad (44.11)$$

La raíz cuadrada en la ecuación (44.11) es un resultado decepcionante para un acelerador diseñador: al duplicar la energía E_m de la partícula incidente, la energía disponible E_a aumenta por solo un factor de $\sqrt{2} = 1.414$. Los ejemplos 44.2 y 44.3 estudian las limitaciones de tener como blanco a una partícula estacionaria.

Ejemplo 44.2 Energía de umbral para producir piones



Un protón (energía en reposo 938 MeV), con energía cinética K, choca contra otro protón en reposo. Después del choque, aún se tiene a ambos protones pero, además, se produce un pión neutro (π^0, energía en reposo 135 MeV). ¿Cuál es la energía de umbral (el valor mínimo de K) necesaria para este proceso?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: El estado final incluye los dos protones originales (masa m) y el pión (masa m_π). La energía de umbral corresponde al caso de energía mínima, en el cual las tres partículas están en reposo en el sistema del centro de momento lineal. La energía total disponible E_a en este sistema debe ser al menos su energía total en reposo, $2mc^2 + m_\pi c^2$. Usaremos esto en la ecuación (44.10), y despejaremos la energía total E_m del protón incidente; la energía cinética K (nuestra incógnita) es entonces E_m menos la energía del protón en reposo, mc^2.

EJECUTAR: Sustituimos $E_a = 2mc^2 + m_\pi c^2$ en la ecuación (44.10), simplificamos y despejamos E_m:

$$4m^2c^4 + 4mm_\pi c^4 + m_\pi^2 c^4 = 2mc^2E_m + 2(mc^2)^2$$

$$E_m = mc^2 + m_\pi c^2\left(2 + \frac{m_\pi}{2m}\right) = mc^2 + K$$

$$K = m_\pi c^2\left(2 + \frac{m_\pi}{2m}\right)$$

Vemos que la energía cinética K del protón disparado debe ser algo mayor que el doble de la energía en reposo del pión $m_\pi c^2$. Con $mc^2 =$ 938 MeV y $m_\pi c^2 = 135$ MeV tenemos $m_\pi/2m = 0.072$, y

$$K = (135\ \text{MeV})(2 + 0.072) = 280\ \text{MeV}$$

EVALUAR: Compare este resultado con el del ejemplo 37.11 (sección 37.8), donde solo se necesitaban 67.5 MeV de energía cinética de cada protón, en un choque de frente para producir un pión. En el siguiente apartado describiremos las ventajas de esos choques.

Ejemplo 44.3 Aumento de la energía disponible



El acelerador del Fermilab en Illinois se diseñó originalmente para una energía de haz para protones de 800 GeV en un blanco estacionario. *a*) Calcule la energía disponible E_a en un choque protón-protón. *b*) Si aumenta la energía del haz de protones a 980 GeV, ¿cuál será la energía disponible?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Nuestra incógnita es la energía disponible E_a en una colisión con blanco estacionario entre partículas idénticas. En los incisos *a*) y *b*), la energía E_m del haz es mucho mayor que la energía en reposo del protón, $mc^2 = 938\ \text{MeV} = 0.938\ \text{GeV}$, por lo que resulta conveniente usar la ecuación (44.11).

EJECUTAR: *a*) Para $E_m = 800$ GeV, la ecuación (44.11) da

$$E_a = \sqrt{2(0.938\ \text{GeV})(800\ \text{GeV})} = 38.7\ \text{GeV}$$

b) Para $E_m = 980$ GeV,

$$E_a = \sqrt{2(0.938\ \text{GeV})(980\ \text{GeV})} = 42.9\ \text{GeV}$$

EVALUAR: Con un blanco de protón estacionario, al aumentar 180 GeV la energía del haz de protones, ¡la energía disponible solo aumenta 4.2 GeV! Esto demuestra una gran limitación de los experimentos en los que una de las partículas que chocan está inicialmente en reposo. A continuación describiremos la forma en que los físicos logran superar esta limitación.

Haces colisionantes

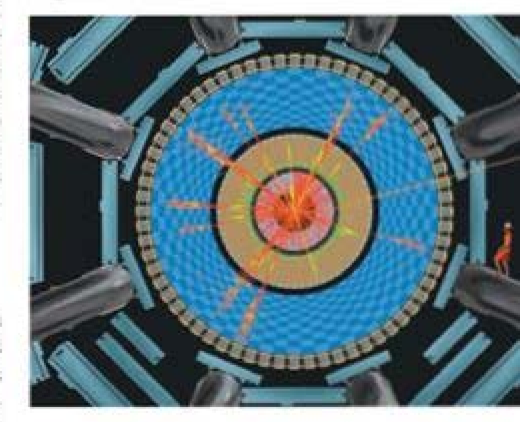
La limitación ilustrada por el ejemplo 44.3 se contrarresta en experimentos de *haces colisionantes*. En estos experimentos, no hay blanco estacionario; en cambio, se enfocan haces de partículas que se mueven en direcciones opuestas, con precisión, para que choquen entre sí y se pueda considerar que los choques son de frente. En general, las dos partículas que chocan tienen momentos lineales de igual magnitud y dirección opuesta, por lo que el momento lineal total es cero. En consecuencia, el sistema del laboratorio también es el sistema de centro de momento lineal, y se maximiza la cantidad disponible de energía.

Los haces colisionantes de máxima energía disponibles en la actualidad son los del Gran Colisionador de Hadrones (véase la figura 44.7). En operación, 2808 pulsos de protones de 7 TeV circulan alrededor del anillo, la mitad en una dirección y la otra mitad en la dirección opuesta. Cada pulso contiene aproximadamente 10^{11} protones. Se dirigen imanes hacia los pulsos que se mueven en la dirección opuesta para colisionar en puntos de interacción. La energía disponible E_a en las colisiones de frente resultantes es la energía *total* de las dos partículas que colisionan: $E_a = 2 \times 7$ TeV = 14 TeV. (En sentido estricto, E_a es 14 TeV menor que la energía en reposo de los dos protones en colisión. Pero esta energía en reposo es solo $2mc^2 = 2(938 \text{ MeV}) = 1.876 \times 10^{-3}$ TeV, que es tan pequeña en comparación con los 14 TeV, que resulta despreciable). Los físicos esperan que la gran energía disponible en el Gran Colisionador de Hadrones haga posible la producción de partículas como nunca se ha visto antes.

Detectores

Por lo general, no es posible ver o sentir las partículas subatómicas o los fotones individuales. Entonces, ¿cómo se miden sus propiedades? Se ha diseñado una gran variedad de dispositivos. Muchos detectores aprovechan la ionización causada por las partículas cargadas cuando atraviesan un gas, un líquido o un sólido. Los iones que quedan a lo largo de la trayectoria de una partícula funcionan como centros de agrupamiento de gotitas de líquido en el vapor sobresaturado dentro de una cámara de niebla (figura 44.1), o causan la formación de pequeños volúmenes de vapor dentro del líquido sobrecalentado de una cámara de burbujas (figura 44.3*a*). En un sólido semiconductor, la ionización puede adoptar la forma de pares electrón-hueco. En la sección 42.7 describimos su detección. Las *cámaras de alambres* contienen conjuntos de alambres muy cercanos entre sí que detectan los iones. La información sobre la carga reunida y el tiempo, para cada alambre, se procesa con computadoras, para reconstruir las trayectorias de las partículas. Los detectores del Gran Colisionador de Hadrones utilizan una serie de dispositivos para seguir las trayectorias de partículas producidas por las colisiones entre protones (figura 44.8). El solenoide gigante en la foto de inicio del capítulo 28 se encuentra en el corazón de uno de estos conjuntos de detectores. El intenso campo magnético del solenoide ayuda a identificar las partículas producidas recientemente, que se curvan en diferentes direcciones y rutas a lo largo de trayectorias de diferentes radios en función de su carga y energía.

44.8 Esta imagen generada con computadora muestra el resultado de la colisión simulada entre dos protones (que no se muestran) en una de las regiones de interacción en el Gran Colisionador de Hadrones. La vista es a lo largo del tubo del haz. Las pistas de diferente color muestran tipos diferentes de partículas que surgen de la colisión. Una variedad de diferentes detectores rodean la región de colisión. (Observe el dibujo de una mujer con un vestido rojo, que se muestra para ver la escala).



Experimentos con rayos cósmicos

Grandes cantidades de unas partículas llamadas *rayos cósmicos* bombardean la Tierra en forma continua, desde fuentes dentro y más allá de nuestra galaxia. Esas partículas consisten principalmente en neutrinos, protones y los núcleos más pesados, con energías que van desde menos de 1 MeV hasta más de 10^{20} eV. La atmósfera y el campo magnético terrestres nos protegen contra gran parte de esa radiación. Sin embargo, eso quiere decir que los experimentos con rayos cósmicos se hacen con frecuencia fuera o arriba de la atmósfera o de la mayor parte de ella, mediante cohetes o globos estratosféricos.

En contraste, los detectores de neutrinos se colocan bajo la superficie terrestre, en túneles o minas, o se sumergen en el mar a gran profundidad. Esto se hace para eliminar todos los demás tipos de partículas, para que solo los neutrinos, que interactúan débilmente con la materia, lleguen al detector. Se necesitaría un blindaje de plomo de un año luz de espesor para absorber una cantidad apreciable de un haz de neutrinos. Así, los detectores de neutrinos consisten en gigantescas cantidades de materia: el detector Super-Kamiokande busca destellos de luz producidos cuando un neutrino interactúa en un tanque que contiene 5×10^7 kg de agua (véase la sección 44.5).

Los rayos cósmicos fueron importantes en los albores de la física de partículas, y su estudio actual nos brinda información importante acerca del resto del Universo. Aunque los rayos cósmicos brindan una fuente de partículas de alta energía que no depende de los aceleradores costosos, la mayoría de los físicos de partículas usan aceleradores, porque las partículas de rayos cósmicos de alta energía que necesitan son muy pocas y demasiado aleatorias.

Evalúe su comprensión de la sección 44.2 En un experimento de colisión de haces, un electrón de 90 GeV choca de frente contra un positrón de 90 GeV. El electrón y el positrón se aniquilan entre sí y forman un solo fotón virtual, que después se transforma en otras partículas. ¿Ese fotón virtual obedece la misma relación $E = pc$ que los fotones reales? ❙

44.3 Partículas e interacciones

Hemos mencionado el conjunto de partículas subatómicas que se conocían en 1947: fotones, electrones, positrones, protones, neutrones, muones y piones. Desde entonces, se han descubierto literalmente cientos de partículas adicionales, en experimentos con aceleradores. La gran mayoría de las partículas conocidas son inestables y decaen en forma espontánea, formando otras partículas. Las partículas de todas clases, sean estables o inestables, se pueden crear o destruir en interacciones. Cada interacción implica el intercambio de partículas virtuales, que solo existen con la energía prestada que permite el principio de incertidumbre.

Aunque el mundo de las partículas subatómicas y sus interacciones es complejo, algunos resultados clave imponen orden y sencillez en el aparente caos. Una simplificación clave es que solo hay cuatro clases de interacciones fundamentales, y cada una está mediada o transmitida por el intercambio de ciertas partículas virtuales características. Además, no todas las partículas responden a las cuatro clases de interacción. En esta sección examinaremos con más detalle las interacciones fundamentales, y veremos la forma en que los físicos clasifican las partículas de acuerdo con la forma en la que interactúan.

Cuatro fuerzas y sus partículas mediadoras

En la sección 5.5 (vol. 1) describimos por primera vez las cuatro clases fundamentales de fuer-zas, o interacciones (figura 44.9). Son, en orden de intensidad decreciente, las siguientes:

1. La interacción fuerte
2. La interacción electromagnética
3. La interacción débil
4. La interacción gravitacional

44.9 Los lazos que nos unen se originan en las interacciones fundamentales de la naturaleza. Los núcleos dentro de nuestros cuerpos se mantienen juntos por la interacción fuerte. La interacción electromagnética une núcleos y electrones para formar átomos, une átomos para formar moléculas, y une moléculas para formarnos.



Las interacciones *electromagnética* y *gravitacional* se conocían ya desde la física clásica. Ambas se caracterizan por una dependencia $1/r^2$ con respecto a la distancia. En este esquema, las partículas mediadoras en ambas interacciones tienen masa cero y son estables, como las partículas ordinarias. La partícula mediadora de la interacción electromagnética es el conocido fotón, que tiene espín 1. (Eso quiere decir que su número cuántico espín es $s = 1$, por lo que la magnitud de su espín es $S = \sqrt{s(s+1)}\hbar = \sqrt{2}\hbar$). La partícula para la fuerza gravitacional es el *gravitón* con espín 2 ($s = 2$, $S = \sqrt{s(s+1)}\hbar = \sqrt{6}\hbar$). Todavía no se ha observado experimentalmente el gravitón, ya que la fuerza gravitacional es mucho más débil que la fuerza electromagnética. Por ejemplo, la atracción gravitacional entre dos protones es menor que su repulsión eléctrica en un factor aproximado de 10^{36}. La fuerza gravitacional es de importancia primaria en la estructura de las estrellas, y en el comportamiento del Universo a grandes escalas, pero no se cree que desempeñe un papel importante en las interacciones entre partículas con las energías disponibles en la actualidad.

Las otras dos fuerzas son menos conocidas. Una, la que se conoce como *interacción fuerte*, es la que causa la fuerza nuclear y también la producción de piones y otras partículas en los choques de alta energía. En el nivel más fundamental, la partícula mediadora para la interacción fuerte se llama *gluón*. Sin embargo, la fuerza entre los nucleones se describe con facilidad en términos de mesones como partículas mediadoras. En la sección 44.4 describiremos al gluón sin masa y con espín 1.

MasteringPHYSICS

ActivPhysics 19.5: Particle Physics

La ecuación (44.4) es una función posible de energía potencial para la fuerza nuclear. La intensidad de la interacción se describe con la constante f^2, cuya unidad es energía multiplicada por distancia. Una base de comparación mejor con otras fuerzas es la relación adimensional $f^2/\hbar c$, llamada *constante de acoplamiento* para la interacción. (Le invitamos a que verifique que esta relación es un número puro, es decir, debe tener el mismo valor en todos los sistemas de unidades). El comportamiento observado de las fuerzas nucleares parece indicar que $f^2/\hbar c \approx 1$. La constante de acoplamiento adimensional para las interacciones *electromagnéticas* es

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^2}{\hbar c} = 7.297 \times 10^{-3} = \frac{1}{137.0} \tag{44.12}$$

Así, la interacción fuerte es aproximadamente 100 veces más fuerte que la interacción electromagnética y, sin embargo, se desvanece en función de la distancia con más rapidez que $1/r^2$.

La cuarta interacción se llama interacción *débil*. Es responsable del decaimiento beta, como es la conversión de un neutrón en un protón, un electrón y un antineutrino. También es responsable del decaimiento de muchas partículas inestables (piones en muones, muones en electrones, etcétera). Sus partículas mediadoras son W^+, W^- y Z^0 de corta vida. En 1983 se confirmó la existencia de esas partículas con experimentos en el CERN, por los que Carlo Rubbia y Simon van der Meer obtuvieron el Premio Nobel en 1984. Las $W^{\pm}$ y Z^0 tienen espín 1, como el fotón y el gluón, pero sí tienen masa. De hecho, tienen masas enormes, 80.4 GeV$/c^2$ para las W y 91.2 GeV$/c^2$ para la Z^0. Con partículas mediadoras tan masivas, la interacción débil tiene un alcance mucho menor que la interacción fuerte. También hace honor a su nombre, porque es más débil que la interacción fuerte en un factor aproximado de 10^9.

En la tabla 44.1 se comparan las propiedades principales de estas cuatro interacciones fundamentales.

Más partículas

En la sección 44.1 mencionamos los descubrimientos de los muones en 1937 y los piones en 1947. Las cargas eléctricas de los muones y los piones cargados tienen la misma magnitud e que la carga del electrón. El muón positivo μ^+ es la antipartícula del muón negativo μ^-. Cada uno tiene espín $\frac{1}{2}$, como el del electrón, y una masa aproximada de $207m_e = 106$ MeV$/c^2$. Los muones son inestables; cada uno decae, con una vida media de 2.2×10^{-6} s, en un electrón del mismo signo, un neutrino y un antineutrino.

Hay tres tipos de piones, todos con espín 0; *no* tienen momento angular intrínseco o espín. El π^+ y el π^- tienen masas de $273m_e = 140$ MeV$/c^2$. Son inestables; cada $\pi^{\pm}$ decae, con una vida media de 2.6×10^{-8} s, en un muón del mismo signo junto con un neutrino, el π^+, y un antineutrino, el π^-. El π^0 es algo menos masivo, $264m_e =$ 135 MeV$/c^2$ y decae con una vida media de 8.4×10^{-17} s en dos fotones. Los π^+ y π^- son antipartículas entre sí, mientras que el π^0 es su propia antipartícula. (Esto es, no hay diferencia entre partícula y antipartícula para el π^0).

La existencia del *antiprotón* $\overline{p}$ ya se sospechaba desde el descubrimiento del positrón. El $\overline{p}$ se descubrió en 1955, cuando se crearon pares protón-antiprotón ($p\overline{p}$) usando un haz de protones de 6 GeV del bevatrón de la Universidad de California, en Berkeley.

Tabla 44.1 Cuatro interacciones fundamentales

Interacción	Intensidad relativa	Alcance	Partícula mediadora			
			Nombre	Masa	Carga	Espín
Fuerte	1	Corto (~1 fm)	Gluón	0	0	1
Electromagnética	$\frac{1}{137}$	Largo ($1/r^2$)	Fotón	0	0	1
Débil	10^{-9}	Corto (~0.001 fm)	$W^{\pm}$, Z^0	80.4, 91.2 GeV$/c^2$	$\pm e$, 0	1
Gravitacional	10^{-38}	Largo ($1/r^2$)	Gravitón	0	0	2

El *antineutrón* $\overline{\mathrm{n}}$ fue observado más tarde. Después de 1960, a medida que se desarrollaban aceleradores con mayores energías y detectores más complejos, se identificó una verdadera familia de nuevas partículas inestables. Para describirlas y clasificarlas se necesita una pequeña lista de términos nuevos.

Al principio, las partículas se clasificaban en tres categorías según su masa: **1.** leptones ("los ligeros", como los electrones); **2.** mesones ("los intermedios", como los piones), y **3.** los bariones ("los pesados", como los nucleones y las partículas más masivas). No obstante, este esquema se ha reemplazado por uno más útil, en el que las partículas se clasifican en función de sus *interacciones*. Por ejemplo, los *hadrones* (que incluyen mesones y bariones) tienen interacciones fuertes, y los *leptones* no.

En la descripción que sigue también haremos la distinción entre **fermiones**, los cuales tienen espín semientero, y los **bosones**, que tienen espín cero o entero. Los fermiones obedecen al principio de exclusión, en el que se basa la función de distribución de Fermi-Dirac (véase la sección 42.5). Los bosones no obedecen el principio de exclusión y tienen una función de distribución distinta, la distribución Bose-Einstein.

Leptones

Los **leptones**, que no tienen interacciones fuertes, comprenden seis partículas: el electrón (e^-) y su neutrino (ν_e), el muón (μ^-) y su neutrino (ν_μ) y la partícula tau (τ^-) y su neutrino (ν_τ). Cada una de las seis partículas tiene una antipartícula distinta. Todos los leptones tienen espín $\frac{1}{2}$ y por ello son fermiones. La familia de leptones se muestra en la tabla 44.2. Los tau tienen masa $3478m_e = 1777\ \mathrm{MeV}/c^2$. Los tau y los muones son inestables; un τ^- decae en un μ^- más un neutrino tau y un antineutrino de muón, o un electrón más un neutrino de tau y un antineutrino electrónico. Un μ^- decae en un electrón más un neutrino de muón y un antineutrino de electrón. Tienen vidas medias relativamente largas, porque sus decaimientos están mediados por la interacción débil. A pesar de su carga cero, un neutrino es distinto de un antineutrino. El espín de un neutrino tiene un componente que es opuesto a su momento lineal, mientras que para un antineutrino ese componente es paralelo a su momento lineal. Como los neutrinos son tan elusivos, los físicos solo han podido establecer límites superiores para las masas en reposo de ν_e, ν_μ y ν_τ. Hasta fecha reciente se creía que las masas en reposo de los neutrinos en realidad eran cero; hoy se cuenta con bastante evidencia de que tienen masas pequeñas, pero distintas de cero. Después regresaremos a este punto y sus implicaciones.

Los leptones obedecen un *principio de conservación*. En correspondencia con los tres pares de leptones, hay tres números leptónicos: L_e, L_μ y L_τ. Al electrón e^- y al neutrino electrónico ν_e se les asigna $L_e = 1$, y a sus antipartículas e^+ y $\overline{\nu}_e$ se les asigna $L_e = -1$. Las asignaciones correspondientes de L_μ y L_τ se hacen a las partículas μ y τ, y a sus neutrinos. **En todas las interacciones se conserva cada número leptónico por separado.** Por ejemplo, en el decaimiento del μ^-, los números leptónicos son

$$\begin{array}{ccccccc} \mu^- & \rightarrow & e^- & + & \overline{\nu}_e & + & \nu_\mu \\ L_\mu = 1 & & L_e = 1 & & L_e = -1 & & L_\mu = 1 \end{array}$$

Estos principios de conservación no tienen contraparte en la física clásica.

Tabla 44.2 Los seis leptones

Nombre de la partícula	Símbolo	Anti-partícula	Masa (MeV/c^2)	L_e	L_μ	L_τ	Vida media (s)	Modos principales de decaimiento
Electrón	e^-	e^+	0.511	+1	0	0	Estable	
Neutrino electrónico	ν_e	$\overline{\nu}_e$	$<3 \times 10^{-6}$	+1	0	0	Estable	
Muón	μ^-	μ^+	105.7	0	+1	0	2.20×10^{-6}	$e^- \overline{\nu}_e \nu_\mu$
Neutrino muónico	ν_μ	$\overline{\nu}_\mu$	<0.19	0	+1	0	Estable	
Tau	τ^-	τ^+	1777	0	0	+1	2.9×10^{-13}	$\mu^- \overline{\nu}_\mu \nu_\tau$
Neutrino tauónico	ν_τ	$\overline{\nu}_\tau$	<18.2	0	0	+1	Estable	o $e^- \overline{\nu}_e \nu_\tau$



Ejemplo 44.4 Conservación del número leptónico

Compruebe la conservación de los números leptónicos para los siguientes esquemas de decaimiento:

a) $\mu^+ \rightarrow e^+ + \nu_e + \overline{\nu}_\mu$

b) $\pi^- \rightarrow \mu^- + \overline{\nu}_\mu$

c) $\pi^0 \rightarrow \mu^- + e^+ + \nu_e$

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Para que se conserve el número leptónico, se requiere que L_e, L_μ y L_τ (dadas en la tabla 44.2), por separado, sumen lo mismo antes del decaimiento y después de este.

EJECUTAR: Tabulamos L_e y L_μ para cada esquema de decaimiento. Una antipartícula tiene el número leptón opuesto de su partícula correspondiente que aparece en la tabla 44.2. En ninguno de los esquemas hay partículas τ ni neutrinos τ, por lo que $L_\tau = 0$ antes y después de cada decaimiento; en consecuencia, se conserva L_τ.

a) $\mu^+ \rightarrow e^+ + \nu_e + \overline{\nu}_\mu$

L_e: $0 = -1 + 1 + 0$

L_μ: $-1 = 0 + 0 + (-1)$

b) $\pi^- \rightarrow \mu^- + \overline{\nu}_\mu$

L_e: $0 = 0 + 0$

L_μ: $0 = 1 + (-1)$

c) $\pi^0 \rightarrow \mu^- + e^+ + \nu_e$

L_e: $0 = 0 + (-1) + 1$

L_μ: $0 \neq 1 + 0 + 0$

EVALUAR: Los decaimientos *a)* y *b)* son consistentes con la conservación del número leptónico y se observan en la naturaleza. El decaimiento *c)*, que viola la conservación de L_μ, *nunca* se ha observado. Los físicos usaron estos resultados experimentales y otros para deducir el principio de que deben conservarse por separado los tres números leptónicos.

Hadrones

Los **hadrones**, partículas que interactúan fuertemente, son una familia más compleja que los leptones. Cada hadrón tiene una antipartícula, que con frecuencia se indica con la raya superior, como el antiprotón $\overline{p}$. Hay dos subclases de hadrones: los *mesones* y los *bariones*. La tabla 44.3 muestra algunos de los muchos hadrones que se conocen en la actualidad. (Después explicaremos lo que quiere decir *extrañeza* y *contenido de quarks* en esta sección y en la siguiente).

Entre los mesones están los piones que ya hemos mencionado, los mesones K o *kaones*, los mesones η y otros más que describiremos después. Los mesones tienen espín 0 o 1 y, en consecuencia, todos son bosones. No hay mesones estables; todos pueden decaer en partículas menos masivas, y lo hacen obedeciendo todas las leyes de conservación.

Tabla 44.3 Algunos hadrones y sus propiedades

Partícula	Masa (MeV/c^2)	Proporción de carga, Q/e	Espín	Número bariónico, B	Extrañeza, S	Vida media promedio (s)	Modos típicos de decaimiento	Contenido de quarks
Mesones								
π^0	135.0	0	0	0	0	8.4×10^{-17}	$\gamma\gamma$	$u\overline{u}$, $d\overline{d}$
π^+	139.6	+1	0	0	0	2.60×10^{-8}	$\mu^+\nu_\mu$	$u\overline{d}$
π^-	139.6	−1	0	0	0	2.60×10^{-8}	$\mu^-\overline{\nu}_\mu$	$\overline{u}d$
K^+	493.7	+1	0	0	+1	1.24×10^{-8}	$\mu^+\nu_\mu$	$u\overline{s}$
K^-	493.7	−1	0	0	−1	1.24×10^{-8}	$\mu^-\overline{\nu}_\mu$	$\overline{u}s$
η^0	547.3	0	0	0	0	$\approx 10^{-18}$	$\gamma\gamma$	$u\overline{u}$, $d\overline{d}$, $s\overline{s}$
Bariones								
p	938.3	+1	$\frac{1}{2}$	1	0	Estable	—	*uud*
n	939.6	0	$\frac{1}{2}$	1	0	886	$pe^-\overline{\nu}_e$	*udd*
Λ^0	1116	0	$\frac{1}{2}$	1	−1	2.63×10^{-10}	$p\pi^-$ o $n\pi^0$	*uds*
Σ^+	1189	+1	$\frac{1}{2}$	1	−1	8.02×10^{-11}	$p\pi^0$ o $n\pi^+$	*uus*
Σ^0	1193	0	$\frac{1}{2}$	1	−1	7.4×10^{-20}	$\Lambda^0\gamma$	*uds*
Σ^-	1197	−1	$\frac{1}{2}$	1	−1	1.48×10^{-10}	$n\pi^-$	*dds*
Ξ^0	1315	0	$\frac{1}{2}$	1	−2	2.90×10^{-10}	$\Lambda^0\pi^0$	*uss*
Ξ^-	1321	−1	$\frac{1}{2}$	1	−2	1.64×10^{-10}	$\Lambda^0\pi^-$	*dss*
Δ^{++}	1232	+2	$\frac{3}{2}$	1	0	$\approx 10^{-23}$	$p\pi^+$	*uuu*
Ω^-	1672	−1	$\frac{3}{2}$	1	−3	8.2×10^{-11}	Λ^0K^-	*sss*
Λ_c^+	2285	+1	$\frac{1}{2}$	1	0	2.0×10^{-13}	$pK^-\pi^+$	*udc*

Los **bariones** incluyen los nucleones y varias partículas llamadas *hiperones*, como la Λ, Σ, Ξ y Ω. Estas se asemejan a los nucleones, pero son más masivas. Los bariones tienen espín semientero y, por lo tanto, todos son fermiones. El único barión estable es el protón; un neutrón libre decae en un protón, y los hiperones decaen en otros hiperones o en nucleones, por diversos procesos. Los bariones obedecen el principio de *conservación del número bariónico*, análogo a la conservación del número leptónico, de nuevo sin contraparte en la física clásica. Se asigna un número bariónico $B = 1$ a cada barión (p, n, Λ, Σ, etcétera) y $B = -1$ a cada antibarión ($\overline{\text{p}}$, $\overline{\text{n}}$, $\overline{\Lambda}$, $\overline{\Sigma}$, etcétera).

En todas las interacciones se conserva el número bariónico total.

Este principio es la razón por la que se conserva el número de masa A en todas las reacciones nucleares que estudiamos en el capítulo 43.

Ejemplo 44.5 Conservación del número bariónico



¿Cuál de las siguientes reacciones obedece el principio de conservación de bariones?

a) $\text{n} + \text{p} \rightarrow \text{n} + \text{p} + \text{p} + \overline{\text{p}}$

b) $\text{n} + \text{p} \rightarrow \text{n} + \text{p} + \overline{\text{n}}$

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Este ejemplo se parece al ejemplo 44.4. Comparamos el número bariónico total antes del proceso con el número bariónico total después de cada reacción, utilizando los datos de la tabla 44.3.

EJECUTAR: Tabulamos el número de bariones; observe que un barión tiene B = 1 y un antibarión tiene B = -1:

a) $\text{n} + \text{p} \rightarrow \text{n} + \text{p} + \text{p} + \overline{\text{p}}$: $1 + 1 = 1 + 1 + 1 + (-1)$

b) $\text{n} + \text{p} \rightarrow \text{n} + \text{p} + \overline{\text{n}}$: $1 + 1 \neq 1 + 1 + (-1)$

EVALUAR: La reacción *a*) es consistente con la conservación del número de bariones. Puede efectuarse siempre que haya energía suficiente en el choque n + p. La reacción *b*), que viola el principio de conservación, nunca se ha observado.

Ejemplo 44.6 Creación de antiprotones



¿Cuál es la mínima energía del protón requerida para producir un antiprotón en una colisión con un protón estacionario?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: La reacción debe satisfacer la conservación del número bariónico, de la carga y de la energía. Como los protones del blanco y del haz tienen masa igual, y el blanco está en reposo, determinamos la energía mínima E_m del protón que incide, usando la ecuación (44.10).

EJECUTAR: La conservación de la carga y la conservación del número bariónico prohíben la creación de un antiprotón por sí mismo; debe crearse como parte de un par protón-antiprotón. La reacción adecuada es:

$$\text{p} + \text{p} \rightarrow \text{p} + \text{p} + \text{p} + \overline{\text{p}}$$

Para que esta reacción se efectúe, la energía mínima disponible E_a en la ecuación (44.10) es la energía final en reposo, $4mc^2$ de los tres protones y del antiprotón. Con la ecuación (44.10) se obtiene

$$(4mc^2)^2 = 2mc^2(E_m + mc^2)$$
$$E_m = 7mc^2$$

EVALUAR: La energía E_m de la partícula proyectil incluye la energía en reposo mc^2, por lo que su energía *cinética* mínima debe ser $6mc^2 = 6(938\text{ MeV}) = 5.63\text{ GeV}$.

La búsqueda del antiprotón fue una de las razones principales de la construcción del bevatrón en la Universidad de California, en Berkeley, con haz de energía de 6 GeV. La búsqueda tuvo éxito; en 1955, Emilio Segrè y Owen Chamberlain fueron galardonados con el Premio Nobel por su descubrimiento.

Extrañeza

Los mesones K y los hiperones Λ y Σ se descubrieron durante los últimos años de la década de 1950. Por su extraño comportamiento, se les llamó *partículas extrañas*. Se produjeron en choques de alta energía, como $\pi^- + \text{p}$, y un mesón K y un hiperón siempre se producían *juntos*. La frecuencia relativamente alta de producción de esas partículas parecía indicar que se trataba de un proceso de interacción *fuerte*; sin embargo, sus vidas medias relativamente largas parecían indicar que su decaimiento era un proceso de interacción *débil*. La K^0 parecía tener *dos* vidas medias, una de unos 9×10^{-11} s y la otra unas 600 veces mayor. ¿Eran los mesones K hadrones fuertemente interactuantes, o no lo eran?

La búsqueda de la respuesta condujo a los físicos a introducir una cantidad nueva llamada **extrañeza**. A los hiperones Λ^0 y $\Sigma^{\pm,0}$ se les asignó un número cuántico extrañeza $S = -1$, y a los mesones asociados K^0 y K^+ se les asignó $S = +1$. Las antipartículas correspondientes tenían extrañeza opuesta, $S = +1$ para $\overline{\Lambda}^0$ y $\overline{\Sigma}^{\pm,0}$ y $S = -1$ para $\overline{K}^0$ y K^-. Entonces, la extrañeza se conservaba en procesos de producción como

$$p + \pi^- \rightarrow \Sigma^- + K^+$$

$$p + \pi^- \rightarrow \Lambda^0 + K^0$$

El proceso

$$p + \pi^- \rightarrow p + K^-$$

no conserva la extrañeza y no sucede.

Cuando las partículas extrañas decaen individualmente, en general la extrañeza *no* se conserva. Entre los procesos característicos están

$$\Sigma^+ \rightarrow n + \pi^+$$

$$\Lambda^0 \rightarrow p + \pi^-$$

$$K^- \rightarrow \pi^+ + \pi^- + \pi^-$$

En cada uno de estos decaimientos, la extrañeza inicial es 1 o −1, y el valor final es cero. Todas las observaciones de esas partículas coinciden en la conclusión de que *la extrañeza se conserva en interacciones fuertes, pero puede cambiar en cero o una unidad en interacciones débiles*. No hay contraparte en la física clásica del número cuántico extrañeza.

CUIDADO **Extrañeza contra espín** Tenga precaución de no confundir el símbolo S de extrañeza con el símbolo idéntico de espín (momento angular intrínseco).

Leyes de conservación

El decaimiento de las partículas extrañas es nuestro primer ejemplo de una *ley de conservación condicional*, aquella que se obedece en algunas interacciones y en otras no. Por el contario, algunas leyes de conservación se obedecen en *todas* las interacciones. Entre ellas están las conocidas leyes de conservación de energía, momento lineal, momento angular y carga eléctrica. Se llaman *leyes de conservación absolutas*. También se conserva el número bariónico y los tres números leptónicos en todas las interacciones. La extrañeza se conserva en las interacciones fuerte y electromagnética, pero *no* en todas las interacciones débiles.

Hay otras dos cantidades, que se conservan en algunas interacciones, pero no en todas, y son útiles para clasificar las partículas y sus interacciones. Una es el *isoespín*, una cantidad con la que se describe la independencia entre las interacciones fuertes y la carga. La otra es la *paridad*, que describe el comportamiento comparativo de dos sistemas que son imágenes especulares entre sí. El isoespín se conserva en las interacciones fuertes, que son independientes de la carga, pero no en las interacciones electromagnéticas o débiles. (La interacción electromagnética, desde luego, no es independiente de la carga). La paridad se conserva en las interacciones fuertes y electromagnéticas, pero *no* en las débiles. Los físicos chino-estadounidenses T.D. Lee y C.N. Yang recibieron el Premio Nobel en 1957 por establecer las bases teóricas de la no conservación de la paridad en las interacciones débiles.

Esta descripción demuestra que las leyes de conservación son otra base para clasificar las partículas y sus interacciones. Cada ley de conservación se asocia también con una propiedad de *simetría* del sistema. Un ejemplo familiar es el momento angular. Si un sistema está en un ambiente que tiene simetría esférica, no podrá actuar sobre él una torca, porque la dirección de ese par violaría la simetría. En ese sistema, se *conserva* el momento angular total. Cuando se viola una ley de conservación se describe con frecuencia como *interacción de ruptura de simetría*.

Evalúe su comprensión de la sección 44.3 De acuerdo con la conservación de la energía, una partícula de masa m y energía en reposo mc^2 puede decaer solo si los productos del decaimiento tienen una masa total menor que m. (La energía restante se transforma en la energía cinética de los productos del decaimiento). Entonces, ¿un protón puede decaer en mesones menos masivos? ❙

44.4 Los quarks y el camino óctuple

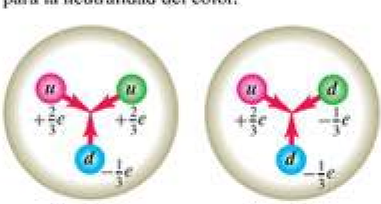
Los leptones forman un paquete bastante pulcro: tres partículas y tres neutrinos, cada uno con su antipartícula y una ley de conservación que relaciona sus números. Los físicos creen que los leptones son genuinamente partículas fundamentales. En comparación, la familia de los hadrones es un desorden. La tabla 44.3 solo contiene una muestra de los más de 100 hadrones descubiertos desde 1960, y se ha aclarado que esas partículas *no* representan el nivel fundamental de la estructura de la materia.

Nuestro conocimiento actual de la estructura de los hadrones se basa en una propuesta que realizaron por primera vez en 1964 el físico estadounidense Murray Gell-Mann y colaboradores. En esta propuesta los hadrones no son partículas fundamentales, sino estructuras compuestas cuyos componentes son fermiones de espín $\frac{1}{2}$ llamados **quarks**. (Esta palabra se encuentra en la frase "¡Tres quarks para Muster Mark!" de *Finnegans Wake*, por James Joyce). Cada barión está formado por tres quarks (qqq), cada antibarión por tres antiquarks ($\overline{qqq}$) y cada mesón por un par quark-antiquark ($q\overline{q}$). La tabla 44.3 de la sección anterior muestra el contenido de quarks de muchos hadrones. No parecen ser necesarias otras composiciones. En este esquema se requiere que los quarks tengan cargas eléctricas de magnitudes $\frac{1}{3}$ y $\frac{2}{3}$ de la carga electrónica e; antes se creía que era la unidad mínima de carga. Además, cada quark tiene un valor fraccionario $\frac{1}{3}$ de su número bariónico B, y cada antiquark tiene un número bariónico de $-\frac{1}{3}$. En un mesón se combinan un quark y un antiquark con número bariónico neto 0 y pueden tener componentes de espín paralelos, para formar un mesón de espín 1, o antiparalelos para formar un mesón de espín 0. De igual modo, los tres quarks en un barión se combinan con un número bariónico neto de 1 y pueden formar un barión con espín $\frac{1}{2}$ o un barión con espín $\frac{3}{2}$.

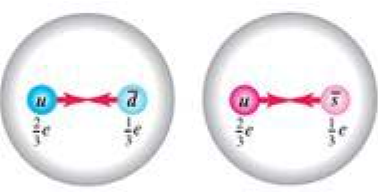
Los tres quarks originales

En 1964 la primera teoría de los quarks incluía tres tipos de quarks, llamados *sabores*, nombrados como u (por la inicial de *up*, arriba), d (por la inicial de *down*, abajo) y s (por la inicial de *strange*, extraño). Sus propiedades principales se muestran en la tabla 44.4. Los antiquarks correspondientes $\overline{u}$, $\overline{d}$ y $\overline{s}$ tienen valores contrarios de Q, B y S. Los protones, los neutrones, los mesones π y K, y varios hiperones, se pueden formar con esos tres quarks. Por ejemplo, el contenido de quarks del protón es uud. Al consultar la tabla 44.4, se observa que los valores de Q/e suman 1, y los valores del número bariónico B también suman 1, como era de esperarse. El neutrón es udd con $Q = 0$ y $B = 1$. El mesón π^+ es $u\overline{d}$, con $Q/e = 1$ y $B = 0$ y el mesón K^+ es $u\overline{s}$. Al comprobar los valores de S para el contenido de quarks se ve que el protón, el neutrón y π^+ tienen extrañeza 0 y que el K^+ tiene extrañeza 1, que coincide con la tabla 44.3. El antiprotón es $\overline{p} = \overline{u}\overline{u}\overline{d}$, el pión negativo es $\pi^- = \overline{u}d$, y así sucesivamente. El contenido de quarks también permite explicar las propiedades dinámicas de los hadrones, como sus estados excitados y momentos magnéticos. La figura 44.10 muestra el contenido de quarks de dos bariones y dos mesones.

44.10 Contenido de quarks de cuatro hadrones distintos. No se muestran las diversas combinaciones de color necesarias para la neutralidad del color.



Protón (p) Neutrón (n)



Pión positivo (π^+) Kaón positivo (K^+)

Tabla 44.4 Propiedades de los tres quarks originales

Símbolo	Q/e	Espín	Número bariónico, B	Extrañeza, S	Encanto, C	Profundidad, B'	Elevación, T
u	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	0	0	0	0
d	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	0	0	0	0
s	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	-1	0	0	0



Ejemplo 44.7 Determinación del contenido de quarks de los bariones

Considerando que los bariones solo contienen: u, d, s, $\bar{u}$, $\bar{d}$ y/o $\bar{s}$ determine el contenido de quarks para *a*) Σ^+ y *b*) $\overline{\Lambda^0}$. Ambas partículas Σ^+ y Λ^0 (la antipartícula de $\overline{\Lambda^0}$) son bariones con extrañeza $S = -1$.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Utilizaremos la idea de que la carga total de cada barión es la suma de las cargas de los quarks individuales, y lo mismo sucede para el número bariónico y la extrañeza. Usaremos las propiedades de los quarks que aparecen en la tabla 44.4.

EJECUTAR: Los bariones contienen tres quarks; si $S = -1$, un quark, y solo *uno* de los tres, debe ser un quark s, que tiene $S = -1$ y $Q/e = -\frac{1}{3}$.

a) La Σ^+ tiene $Q/e = +1$, por lo que los otros dos quarks deben ser u ambos (cada uno de los cuales tiene $Q/e = +\frac{2}{3}$). Por consiguiente, el contenido de quarks de Σ^+ es ***uus***.

b) Primero se determina el contenido de quarks de Λ^0. Para que la carga total sea cero, los otros dos quarks deben ser u ($Q/e = +\frac{2}{3}$) y d($Q/e = -\frac{1}{3}$), por lo que el contenido de quarks de la Λ^0 es ***uds***. La $\overline{\Lambda^0}$ es la antipartícula de la Λ^0, y entonces su contenido de quarks es $\bar{u}\,\bar{d}\,\bar{s}$.

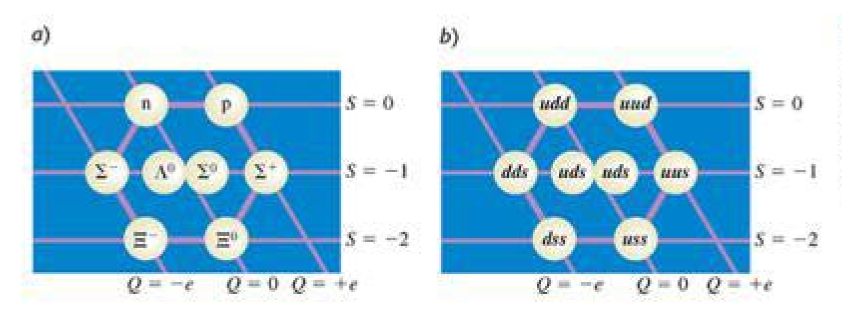
EVALUAR: Aunque Λ^0 y $\overline{\Lambda^0}$ son eléctricamente neutras, y ambas tienen la misma masa, son partículas distintas: Λ^0 tiene $B = 1$ y $S = -1$, mientras que $\overline{\Lambda^0}$ tiene $B = -1$ y $S = 1$.

Motivación del modelo de quarks

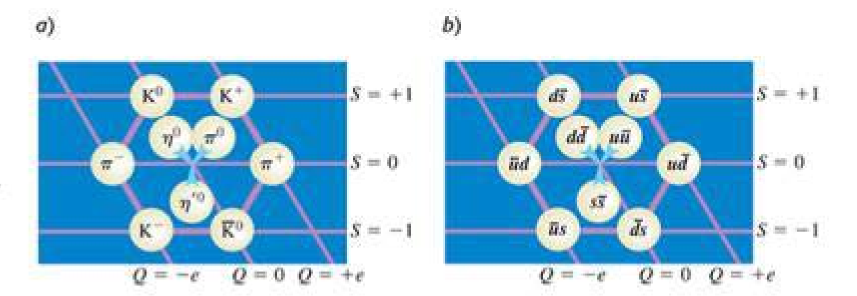
¿Qué hizo que los físicos sospecharan que los hadrones estaban formados por algo más pequeño? El momento magnético del neutrón (véase la sección 43.1) fue una de las primeras razones. En la sección 27.7 vimos que un momento magnético se debe a una corriente circulante (un movimiento de la carga eléctrica). Pero el neutrón *no* tiene carga o, para ser más exactos, no tiene carga *total*. Podría estar formado por partículas menores cuyas cargas sumen cero. El movimiento cuántico de esas partículas dentro del neutrón le comunicaría así su sorprendente momento magnético distinto de cero. Para verificar esta hipótesis "viendo" el interior de un neutrón, necesitamos un sensor cuya longitud de onda sea mucho menor que el tamaño de un neutrón, que es más o menos de un femtómetro. Este sensor no debería afectarse por la interacción fuerte, para que no interactúe con el neutrón en su totalidad, sino que penetre en él e interactúe de forma electromagnética con esas supuestas partículas cargadas más pequeñas. Un sensor con esas propiedades es un electrón, con energía superior a 10 GeV. En experimentos hechos en el SLAC, esos electrones fueron dispersados por neutrones y protones, y contribuyeron a demostrar que los nucleones en realidad están formados por partículas puntuales de carga fraccionaria y espín $\frac{1}{2}$.

El camino óctuple

Las consideraciones de simetría desempeñan un papel muy prominente en la teoría de partículas. Veamos dos ejemplos. Considere los ocho bariones con espín $\frac{1}{2}$ que hemos mencionado: el p y n conocidos, las extrañas Λ^0, Σ^+, Σ^0 y Σ^-, y las doblemente extrañas Ξ^0 y Ξ^-. Para cada una, graficamos el valor de la extrañeza S en función del valor de la carga Q en la figura 44.11. El resultado es una figura hexagonal. Una gráfica similar para los nueve mesones de espín 0 (la tabla 44.3 menciona seis de ellos, y otros tres no están ahí) se muestra en la figura 44.12; ¡las partículas quedan exactamente en la misma figura hexagonal! En cada gráfica, todas las partículas tienen masas dentro de aproximadamente $\pm 200\ \text{MeV}/c^2$, o el valor de la mediana de la masa de esa gráfica, y las variaciones se deben a diferencias en las masas de los quarks y en las energías potenciales internas.



44.11 *a*) Gráfica de valores de S y Q para bariones de espín $\frac{1}{2}$ que muestra el patrón de simetría del camino óctuple. *b*) Contenido de quarks de cada barión con espín $\frac{1}{2}$. Los contenidos de quarks de Σ^0 y Λ^0 son iguales; la Σ^0 es un estado excitado de la Λ^0 y puede decaer en ella emitiendo fotones.

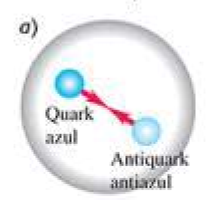


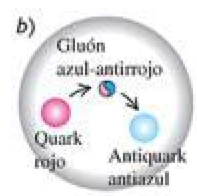
44.12 *a*) Gráfica de valores de S y Q para nueve mesones con espín 0, que muestra el patrón de simetría del camino óctuple. Cada partícula está en el lado opuesto del hexágono con respecto a su antipartícula; cada una de las tres partículas en el centro es su propia antipartícula. *b*) Contenido de quark de cada mesón de espín 0. Las partículas en el centro son distintas mezclas de los tres pares quark-antiquark que se muestran.

Las simetrías pueden conducir a estos patrones y a otros semejantes, que reciben el nombre colectivo de **camino óctuple**. En 1961 las descubrieron en forma independiente Murray Gell-Mann y Yu'val Ne'eman. (El nombre es una referencia un tanto irreverente al Noble Sendero Óctuple, un conjunto de principios de la vida correcta en el budismo). Un patrón similar para los bariones de espín $\frac{3}{2}$ contiene *diez* partículas, arregladas en un patrón triangular como los pinos en una mesa de boliche. Cuando se descubrió esta pauta, faltaba una de las partículas. De cualquier modo, Gell-Mann le asignó un nombre (Ω^-), y predijo las propiedades que debería tener; también describió los experimentos con los que se debería buscar. Tres años después, se encontró la partícula durante experimentos realizados en el Laboratorio Nacional de Brookhaven, lo cual fue un éxito espectacular de la teoría de Gell-Mann. Toda la serie de eventos recuerda la forma en la que Mendeleev usó los huecos de la tabla periódica de los elementos para predecir las propiedades de los elementos no descubiertos y para guiar a los químicos en la búsqueda de ellos.

¿Qué es lo que une a los quarks entre sí? Las interacciones de atracción entre los quarks están mediadas por bosones sin masa y con espín 1, llamados **gluones** en forma muy similar a como los fotones son mediadores de la interacción electromagnética, o a como los piones median la fuerza nucleón-nucleón, en la vieja teoría de Yukawa.

44.13 *a*) Un pión que contiene un quark azul y un antiquark antiazul. *b*) El quark azul emite un gluón azul-antirrojo, y se cambia a un quark rojo. *c*) El gluón es absorbido por el antiquark antiazul, que se transforma en un antiquark antirrojo. Ahora, el pión consiste en un par quark-antiquark con colores rojo-antirrojo. El estado cuántico real del pión es una superposición igual de pares rojo-antirrojo, verde-antiverde y azul-antiazul.







Color

Los quarks que tienen espín $\frac{1}{2}$, son fermiones y, como tales, están sujetos al principio de exclusión. Parecería que con ello se prohíbe a un barión que tenga dos o tres quarks con el mismo sabor y el mismo componente de espín. Para evitar tal dificultad, se supone que cada quark se presenta en tres variedades, caprichosamente llamadas *colores*, cuyos nombres frecuentes son rojo, verde y azul. El principio de exclusión se aplica por separado a cada color. Un barión siempre contiene un quark rojo, uno verde y uno azul, por lo que el barión mismo no tiene color neto. Cada gluón tiene una combinación de color-anticolor (por ejemplo, azul-antirrojo) que le permite transmitir color al intercambiarlo, y se conserva el color durante la emisión y absorción de un gluón por un quark. El proceso de intercambio de gluón cambia los colores de los quarks de tal manera que siempre hay un quark de cada color en cada barión. El color de un quark individual cambia continuamente mientras se intercambian los gluones.

Procesos similares ocurren en los mesones; un ejemplo de ellos son los piones. Los pares quark-antiquark de los mesones tienen color y anticolor que se cancelan (por ejemplo, azul y antiazul), por lo que los mesones no tienen color neto. Suponga que, al principio, un pión está formado por un quark azul y un antiquark antiazul. El quark azul puede transformarse en quark rojo emitiendo un gluón virtual azul-antirrojo. Entonces, el gluón se absorbe en el antiquark antiazul y lo convierte en un antiquark antirrojo (figura 44.13). En cada emisión y absorción se conserva el color, pero un par azul-antiazul se transformó en un par rojo-antirrojo. Esos cambios suceden en forma continua, por lo que hay que imaginarse que un pión es una superposición de tres estados cuánticos: azul-antiazul, verde-antiverde y rojo-antirrojo. En mayor escala, la interacción fuerte entre los nucleones se describió en la sección 44.3, como debida al intercambio de mesones virtuales. En términos de quarks y gluones, esos mesones virtuales mediadores son sistemas quark-antiquark ligados por el intercambio de gluones.

La teoría de las interacciones fuertes se llama *cromodinámica cuántica* (QCD, por las siglas de *quantum chromodynamics*). Hasta ahora, nadie ha podido aislar un quark individual para estudiarlo, y de hecho la cromodinámica cuántica predice que los quarks están ligados de tal forma que es imposible obtener un quark libre. Un conjunto impresionante de pruebas experimentales respalda lo correcto del modelo de quarks en los hadrones y la idea de que la cromodinámica cuántica es la clave para comprender las interacciones fuertes.

Tres quarks más

Antes de descubrir las partículas tau, se conocían cuatro leptones. Este hecho, junto con algunas velocidades de decaimiento intrigantes, condujo a especular que podría haber un cuarto sabor de quark. A este quark se le representa por ***c*** (por la inicial de *charmed*, el quark encantado); tiene $Q/e = \frac{2}{3}$, $B = \frac{1}{3}$, $S = 0$, y un número cuántico nuevo, el **encanto** $C = +1$. Esto se confirmó en 1974, por la observación de un mesón, tanto en el SLAC como en el Brookhaven National Laboratory, que hoy se llama ψ, con masa de 3097 MeV/c^2. Se observó que este mesón tiene varios modos de decaimiento; decae en e^+e^-, $\mu^+\mu^-$ o en hadrones. Se encontró que su vida media promedio es aproximadamente de 10^{-20} s. Estos resultados son consistentes con que ψ sea un sistema $c\bar{c}$ de espín 1. Casi inmediatamente después de esto, se observaron mesones similares de mayor masa y se identificaron como estados excitados del sistema $c\bar{c}$. Pocos años después, también se observaron mesones individuales con número cuántico encanto total distinto de cero. Esos mesones, D^0 ($c\bar{u}$) y D^+($c\bar{d}$), y sus estados excitados hoy están firmemente establecidos y también se ha observado un barión encantado, Λ_c^+ (udc).

En 1977 en Brookhaven se descubrió un mesón de masa 9460 MeV/c^2, llamado épsilon (Υ). Como tenía propiedades similares a ψ, se creyó que en realidad ese mesón era el sistema enlazado de un quark nuevo, ***b*** (el quark *fondo*), y su antiquark, $\bar{b}$. El quark fondo tiene el valor 1 de un nuevo número cuántico B' (no confundirlo con el número bariónico B), llamado *profundidad*. Los estados excitados del Υ que se observaron pronto fueron los mesones B^+ ($\bar{b}u$) y B^0 ($\bar{b}d$).

Con cinco sabores de quark (***u***, ***d***, ***s***, ***c*** y ***b***) y seis sabores de leptones (e, μ, τ, ν_e, ν_μ y ν_τ) surge una atractiva conjetura de que la naturaleza es simétrica en sus bloques de construcción y que, por consiguiente, debería haber un *sexto* quark. Este quark, llamado ***t*** (cima) tendría $Q/e = \frac{2}{3}$, $B = \frac{1}{3}$, y un nuevo número cuántico, $T = 1$. En 1995 los investigadores que usaron dos detectores distintos en el tevatrón del Fermilab anunciaron el descubrimiento del quark cima. Los científicos hicieron colisionar protones de 0.9 TeV contra antiprotones de 0.9 TeV, pero aun con la energía disponible de 1.8 TeV, y se detectó un par cima-anticima ($t\bar{t}$) ¡en menos de dos de cada 10^{11} colisiones! La tabla 44.5 es una lista de algunas propiedades de los seis quarks. Cada uno tiene su antiquark correspondiente con valores opuestos de Q, B, S, C, B' y T.

Tabla 44.5 Propiedades de los seis quarks

Símbolo	Q/e	Espín	Número bariónico, B	Extrañeza, S	Encanto, C	Profundidad, B'	Elevación, T
u	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	0	0	0	0
d	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	0	0	0	0
s	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	-1	0	0	0
c	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	0	$+1$	0	0
b	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	0	0	$+1$	0
t	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	0	0	0	$+1$

Evalúe su comprensión de la sección 44.4 ¿Es posible tener un barión con carga $Q = +e$ y extrañeza $S = -2$? ¿Por qué? ❙

44.5 El modelo estándar y más allá

Las partículas e interacciones que hemos descrito en este capítulo dan una imagen detallada de los bloques constituyentes fundamentales de la naturaleza. Hay bastante confianza en que esta imagen es básicamente correcta, como para llamarla **modelo estándar**.

El modelo estándar comprende tres familias de partículas: **1.** los seis leptones, que no tienen interacciones fuertes; **2.** los seis quarks, con los que se forman todos los hadrones, y **3.** las partículas intermediarias en las diversas interacciones. Esos mediadores son los gluones para la interacción fuerte entre los quarks, fotones para la interacción electromagnética, las partículas $W^{\pm}$ y Z^0 para la interacción débil, y el gravitón para la interacción gravitacional.

Unificación electrodébil

Desde hace mucho tiempo, los físicos teóricos han soñado en combinar todas las interacciones de la naturaleza en una sola teoría unificada. Como primer paso, Einstein dedicó gran parte de su vida tratando de desarrollar una teoría de campo que unificara la gravitación y el electromagnetismo, aunque solo logró un éxito parcial.

Entre 1961 y 1967, Sheldon Glashow, Abdus Salam y Steven Weinberg desarrollaron una teoría que unifica las fuerzas débil y electromagnética. Un resultado de su **teoría electrodébil** es la predicción de las partículas mediadoras de la fuerza débil, los bosones Z^0 y $W^{\pm}$, incluyendo sus masas. La idea básica es que la diferencia de masas entre los fotones (masa cero) y los bosones débiles ($\approx$100 GeV/c^2) hace que las interacciones electromagnéticas y débiles se comporten en forma muy distinta a energías bajas. Sin embargo, a energías suficientemente altas (bastante mayores que 100 GeV), desaparece la distinción, y las dos se funden en una sola interacción. Esta predicción se verificó en 1983 con experimentos de colisiones protón-antiprotón en el CERN. Se encontraron los bosones débiles, de nuevo con ayuda de la descripción teórica elaborada, y sus masas que se observaron, concordaron con las predicciones de la teoría electrodébil, una bella convergencia de teoría y experimentos. La teoría electrodébil y la cromodinámica cuántica forman la columna vertebral del modelo estándar. En 1979 Glashow, Salam y Weinberg recibieron el Premio Nobel.

Una dificultad más de la teoría electrodébil es que los fotones no tienen masa, pero los bosones débiles son muy masivos. Para explicar la simetría rota entre estos mediadores de interacción, se propuso una partícula llamada bosón de Higgs. Se esperaba que su masa fuera menor que 1 TeV/c^2, pero para producirla en el laboratorio se necesitaría mucho mayor energía disponible. La búsqueda de la partícula (o partículas) de Higgs será parte de la misión del Gran Colisionador de Hadrones en el CERN.

Teorías de la gran unificación

Quizá con energías suficientemente grandes, la interacción fuerte y la interacción electrodébil tengan una convergencia similar a la que hay entre las interacciones electromagnéticas y débiles. Si es así, se pueden unificar para elaborar una teoría detallada de las interacciones fuertes, débiles y electromagnéticas. Esos esquemas, llamados **teorías de la gran unificación** o teorías TGU (o GUT, por las siglas de *grand unified theories*) se basan mucho en consideraciones de simetría, y todavía son especulativas.

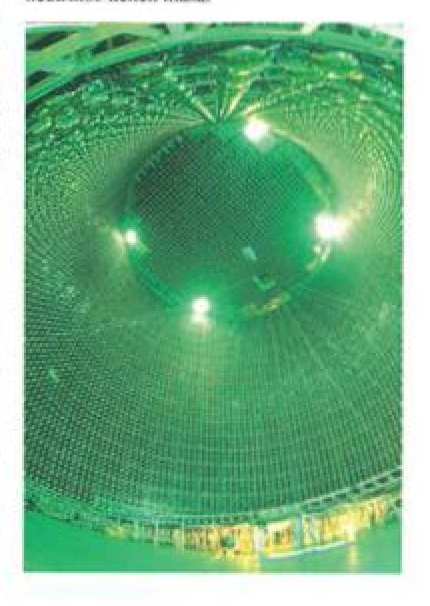
Una propiedad interesante de algunas teorías de gran unificación es que predicen el decaimiento del protón (violando la conservación del número bariónico), con una vida media (promedio) estimada de más de 10^{28} años. (En comparación, se estima que la edad del Universo es del orden de 1.37×10^{10} años). Con un vida media de 10^{28} años, se esperaría que seis toneladas métricas de protones tuvieran solo un decaimiento por día, por lo que se deben examinar cantidades gigantescas de material. Algunos de los detectores de neutrinos que mencionamos en la sección 44.2 originalmente buscaron, sin éxito, pruebas del decaimiento de los protones. No obstante, el trabajo experimental prosigue y las estimaciones actuales establecen que la vida media del protón es de más de 10^{33} años. También, algunas TGU predicen la existencia de monopolos magnéticos, que ya se mencionaron en el capítulo 27. Hasta el presente, no hay pruebas experimentales de que existan los monopolos magnéticos, pero la búsqueda continúa.

En el modelo estándar, los neutrinos tienen masa cero. Los valores distintos de cero son controversiales, porque los experimentos para determinar las masas de neutrinos son difíciles, tanto de efectuar como de analizar. En la mayoría de las TGU, los neutrinos *deben* tener masas distintas de cero. Si los neutrinos sí tienen masa, pueden existir transiciones llamadas *oscilaciones de neutrino*, en las que un tipo de neutrino (ν_e, ν_μ o ν_τ) se convierte en otro tipo. En 1998 los investigadores que usaban el detector

de neutrinos Super-Kamiokande en Japón (figura 44.14) informaron sobre el descubrimiento de oscilaciones entre neutrinos muónicos y neutrinos tauónicos. Mediciones posteriores en el Observatorio de Neutrinos de Sudbury, en Canadá, confirmaron la existencia de oscilaciones de neutrinos. Este descubrimiento es la primera evidencia de una nueva física, más allá de la predicha por el modelo estándar.

El descubrimiento de oscilaciones de neutrinos aclaró un antiguo misterio acerca del Sol. Desde la década de 1960, los físicos han estado usando detectores sensibles para buscar neutrinos electrónicos producidos por las reacciones de fusión nuclear en el núcleo solar (véase la sección 43.8). Sin embargo, el flujo observado de neutrinos solares solo tiene la tercera parte de su valor predicho. La solución de este misterio se logró en 2002, gracias a los físicos que laboraban en el Observatorio de Neutrinos en Sudbury, el cual es capaz de detectar neutrinos de los tres sabores. Los resultados demostraron que el flujo combinado de los neutrinos solares de *todos* los sabores es igual a la predicción teórica del flujo de los neutrinos *electrónicos*. La explicación es que en realidad el Sol produce neutrinos electrónicos, con la rapidez que indica la teoría; pero dos tercios de esos neutrinos electrónicos se transforman en neutrinos muónicos o tauónicos durante su vuelo desde el centro del Sol al detector en la Tierra.

44.14 Esta fotografía muestra el detector de neutrinos Super-Kamiokande en Japón. Cuando se encuentra en operación, el detector está lleno con 5×10^7 kg de agua. Un neutrino que pasa por el detector produce un tenue destello de luz, el cual se detecta mediante los 13,000 tubos fotomultiplicadores que revisten las paredes del detector. Los datos que arroja este aparato fueron los primeros en indicar que los neutrinos tienen masa.



Teorías supersimétricas y teorías de todo

El sueño final de los teóricos es unificar las cuatro interacciones fundamentales, agregando la gravitación a las interacciones fuerte y electrodébil, que se incluyen en las teorías de la gran unificación (TGU). Esa teoría unificada recibe el pretencioso nombre de teoría de todo (TOE, por las siglas de *theory of everything*). Sucede que un ingrediente esencial de esas teorías es un continuo de espacio-tiempo con más de cuatro dimensiones. Las dimensiones adicionales están "enrolladas" en estructuras extremadamente diminutas, que generalmente no percibimos. De acuerdo con la escala de esas estructuras, es posible que los aceleradores de partículas de la siguiente generación revelen la presencia de dimensiones adicionales.

Otro ingrediente de muchas teorías es la *supersimetría*, que asigna a cada bosón y cada fermión un "compañero supersimétrico" de la otra clase de espín. Por ejemplo, el compañero supersimétrico propuesto para el electrón de espín $\frac{1}{2}$ es una partícula de espín 0 llamada *selectrón*, y el del fotón de espín 1 es un *fotino* de espín $\frac{1}{2}$. Hasta ahora no se han descubierto las partículas que son los compañeros supersimétricos, quizá porque son demasiado masivas para producirse en los aceleradores de la presente generación. Dentro de pocos años, nuevos datos del Gran Colisionador de Hadrones, y otros aceleradores propuestos, nos ayudarán a determinar si esas intrigantes teorías tienen méritos.

Evalúe su comprensión de la sección 44.5 Un aspecto del modelo estándar es que un quark d puede transformarse en un quark u, un electrón y un antineutrino, por medio de la interacción débil. Si esto sucede a un quark d dentro de un neutrón, ¿qué clase de partícula permanece adelante además del electrón y el antineutrino? **i.** Un protón; **ii.** una Σ^-; **iii.** una Σ^+; **iv.** una Λ^0 o una Σ^0; **v.** cualquiera de estas. ❙



44.6 El Universo en expansión

En las últimas dos secciones de este capítulo exploraremos en forma breve las relaciones entre la historia antigua del Universo y las interacciones de las partículas fundamentales. Es notable que haya relaciones tan estrechas entre la física a la mínima escala, que hemos explorado experimentalmente (el alcance de la interacción débil, del orden de 10^{-18} m) y la física a la máxima escala (el Universo mismo, del orden de al menos 10^{26} m).

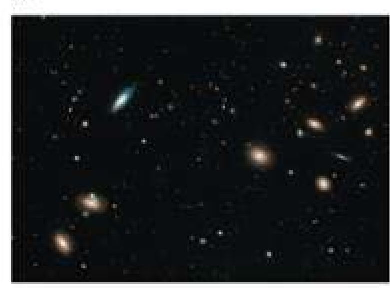
Las interacciones gravitacionales desempeñan un papel esencial en el comportamiento del Universo en gran escala. Uno de los grandes méritos de la mecánica newtoniana, incluyendo la ley de la gravitación, fue que se logró entender el movimiento de los planetas en el Sistema Solar. Las pruebas astronómicas indican que las inter-

44.15 *a*) La galaxia M101 es la versión más grande de la galaxia de la Vía Láctea, que es parte de nuestro Sistema Solar. Al igual que todas las galaxias, la M101 se mantiene unida por la atracción gravitacional mutua de sus estrellas, gas, polvo y otras materias, todo lo cual gira alrededor del centro de masa de la galaxia. La M101 está a 25 millones de años luz de distancia. *b*) Esta imagen muestra parte del cúmulo de Coma, un grupo inmenso de más de 1000 galaxias que se encuentra a 300 millones de años luz de nosotros. Las galaxias dentro del cúmulo están en movimiento. Las fuerzas gravitacionales entre los miembros de las galaxias evitan que se escapen.

a)



b)



acciones gravitacionales también se dan en grandes sistemas astronómicos, como las galaxias y los cúmulos de galaxias (figura 44.15).

Hasta principios del siglo XX, se supuso que el Universo era *estático*; que las estrellas podían moverse unas con respecto a otras, pero no se pensaba que hubiera una expansión o contracción general. Pero las estrellas tienen atracciones gravitacionales. Si al principio estuviera todo quieto en el Universo, ¿por qué la gravedad no simplemente unificó lo existente en un gran todo? Newton mismo reconoció la seriedad de esta molesta pregunta.

En 1912 Vesto Slipher inició mediciones en el Observatorio Lowell en Arizona. Edwin Hubble, en la década de 1920, se encargó de continuar esas mediciones con ayuda de Milton Humason en Mount Wilson, California. Todo indicaba que el Universo *no* era estático. Los movimientos de las galaxias pueden medirse en relación con la Tierra, observando los desplazamientos en las longitudes de onda de sus espectros. Para las galaxias lejanas, esos desplazamientos siempre son hacia longitudes de onda mayores, por lo que parecen estarse alejando de nosotros y entre sí. Los astrónomos supusieron primero que eran corrimientos Doppler, y usaron una relación entre la longitud de onda λ_0 de la luz, medida hoy de una fuente que se aleja a la rapidez v, y la longitud de onda λ_S, a partir del sistema de referencia en reposo, de donde se emitió. Podemos deducir esta relación invirtiendo la ecuación (37.25) para el efecto Doppler, haciendo los cambios de subíndices y usando $\lambda = c/f$; el resultado es

$$\lambda_0 = \lambda_S\sqrt{\frac{c+v}{c-v}} \tag{44.13}$$

Las longitudes de onda desde fuentes que retroceden siempre están desplazadas hacia las longitudes de onda mayores; este aumento de λ se llama **corrimiento al rojo**. De la ecuación (44.13) se puede despejar v. El resultado es

$$v = \frac{(\lambda_0/\lambda_S)^2 - 1}{(\lambda_0/\lambda_S)^2 + 1}c \tag{44.14}$$

CUIDADO **Corrimiento al rojo, no corrimiento Doppler** Las ecuaciones (44.13) y (44.14) son de la teoría *especial* de la relatividad y se refieren al efecto Doppler. Como veremos, el corrimiento al rojo desde galaxias *lejanas* se debe a un efecto que explica la teoría *general* de la relatividad, y *no* es un corrimiento Doppler. Sin embargo, a medida que la relación v/c y el cambio fraccionario de la longitud de onda $(\lambda_0 - \lambda_S)/\lambda_S$ se hacen pequeños, las ecuaciones de la teoría general tienden a las ecuaciones (44.13) y (44.14), las cuales resultan útiles en este caso. ❙



Ejemplo 44.8 Rapidez de recesión de una galaxia

Las líneas espectrales de varios elementos se detectan en la luz de una galaxia en la constelación Osa Mayor. Una línea ultravioleta del calcio simplemente ionizado ($\lambda_S = 393$ nm) se observa con una longitud de onda $\lambda_0 = 414$ nm, con corrimiento al rojo en la parte visible del espectro. ¿Con qué rapidez se aleja esta galaxia de la Tierra?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Este ejemplo utiliza la relación entre corrimiento al rojo y rapidez de recesión para una galaxia distante. Podemos usar las longitudes de onda λ_S con la que se emite la luz, y λ_0 con la que la detectamos en la Tierra en la ecuación (44.14), para determinar la rapidez de recesión v de la galaxia, siempre que el corrimiento fraccionario de la longitud de onda no sea muy grande.

EJECUTAR: El corrimiento al rojo es $\lambda_0/\lambda_S = (414 \text{ nm})/(393 \text{ nm}) = 1.053$. Solo es un aumento de 5.3%, por lo que se puede usar la ecuación (44.14) con exactitud razonable:

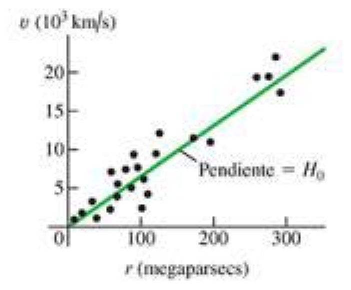
$$v = \frac{(1.053)^2 - 1}{(1.053)^2 + 1}c = 0.0516c = 1.55 \times 10^7 \text{ m/s}$$

EVALUAR: La galaxia se aleja de la Tierra a 5.16% de la rapidez de la luz. Más que hacer este cálculo, con frecuencia los astrónomos citan la rapidez de retroceso en función del *corrimiento al rojo*, que se define como $z = (\lambda_0 - \lambda_S)/\lambda_S = (\lambda_0/\lambda_S) - 1$. Esta galaxia tiene un corrimiento al rojo $z = 0.053$.

La ley de Hubble

El análisis de los corrimientos al rojo para muchas galaxias lejanas condujo a Edwin Hubble a una notable conclusión: la rapidez de retroceso v de una galaxia es proporcional a su distancia r de nosotros (figura 44.16). Esta relación se llama actualmente **ley de Hubble**, cuyo enunciado simbólico es,

$$v = H_0 r \qquad (44.15)$$



44.16 Gráfica de la velocidad con respecto a la distancia de recesión de varias galaxias. La línea recta de mejor ajuste corresponde a la ley de Hubble. La pendiente de la recta es la constante de Hubble, H_0.

donde H_0 es una cantidad experimental conocida como *constante de Hubble*, ya que en determinado momento es constante en todo el espacio. La determinación de H_0 ha sido un objetivo clave del telescopio espacial Hubble, capaz de medir distancias a galaxias con exactitud sin precedente. El mejor valor actual es $2.3 \times 10^{-18}\ \text{s}^{-1}$, con una incertidumbre del 5%.

Las distancias astronómicas se miden con frecuencia en *parsecs* (pc); un parsec es la distancia a la cual dos objetos a 1.50×10^{11} m de distancia (la distancia promedio de la Tierra al Sol) entre sí se ven separados por un arco segundo ($1/3600°$). Una distancia de 1 pc es igual a 3.26 *años luz* (al), donde 1 al $= 9.46 \times 10^{12}$ km es la distancia que recorre la luz en un año. La constante de Hubble se suele expresar en las unidades mezcladas (km/s)/Mpc, kilómetros por segundo por megaparsec, donde 1 Mpc $= 10^6$ pc:

$$H_0 = (2.3 \times 10^{-18}\ \text{s}^{-1})\left(\frac{9.46 \times 10^{12}\ \text{km}}{1\ \text{al}}\right)\left(\frac{3.26\ \text{al}}{1\ \text{pc}}\right)\left(\frac{10^6\ \text{pc}}{1\ \text{Mpc}}\right) = 71\,\frac{\text{km/s}}{\text{Mpc}}$$

Ejemplo 44.9 Determinación de la distancia con la ley de Hubble

Calcule la distancia de la Tierra a la galaxia Osa Mayor descrita en el ejemplo 44.8, con la ley de Hubble.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: La ley de Hubble relaciona el corrimiento al rojo de una galaxia distante con su distancia r a la Tierra. Despejaremos la distancia r de la ecuación (44.15), y después sustituiremos el valor de la rapidez de recesión v del ejemplo 44.8.

EJECUTAR: Usando $H_0 = 71$ (km/s)/Mpc $= 7.1 \times 10^4$ (m/s)/Mpc,

$$r = \frac{v}{H_0} = \frac{1.55 \times 10^7 \text{m/s}}{7.1 \times 10^4 (\text{m/s})/\text{Mpc}} = 220\ \text{Mpc}$$
$$= 2.2 \times 10^8\ \text{pc} = 7.1 \times 10^8\ \text{al} = 6.7 \times 10^{24}\ \text{m}$$

EVALUAR: Una distancia de 220 millones de parsecs (710 millones de años luz) es verdaderamente inmensa, y muchas galaxias están mucho más alejadas. Para apreciar la inmensidad de esta distancia relativamente pequeña, considere que nuestra nave espacial no tripulada, la más rápida, ha recorrido más o menos 0.001 años luz desde nuestro planeta.

Otro aspecto de las observaciones de Hubble fue que *en todas direcciones*, las galaxias lejanas parecían estarse alejando de nosotros. No hay razón particular para pensar que nuestra galaxia está en el centro exacto del Universo. Si viviéramos en alguna otra galaxia, cualquier otra galaxia lejana aún parecería estarse alejando. Esto es, en determinado momento, *el Universo se ve más o menos igual, independientemente de dónde nos ubiquemos*. A esta importante idea se le llama **principio cosmológico**. Hay fluctuaciones locales de densidad pero, en promedio, el Universo se ve igual desde todos los lugares. Entonces, la constante de Hubble es constante en el espacio, aunque no necesariamente es constante en el tiempo, y las leyes de la física son iguales en cualquier lugar.

La gran explosión

La ley de Hubble parece indicar que en cierto momento del pasado, toda la materia del Universo estaba mucho más concentrada de lo que hoy está. Luego, estalló en una inmensa explosión llamada **gran explosión** (o **Big Bang**), dando a toda la materia más o menos las velocidades que hoy observamos. ¿Cuándo sucedió eso? De acuerdo

con la ley de Hubble, la materia a una distancia r de nosotros está viajando a una rapidez $v = H_0 r$. El tiempo t que necesita para recorrer la distancia r es

$$t = \frac{r}{v} = \frac{r}{H_0 r} = \frac{1}{H_0} = 4.3 \times 10^{17}\ \text{s} = 1.4 \times 10^{10}\ \text{años}$$

Según esta hipótesis, la gran explosión sucedió hace unos 14 mil millones de años. Se supone que todas las rapideces son *constantes* después de la gran explosión; esto es, no se tienen en cuenta cambios en la razón de expansión debido a la atracción gravitacional o a otros efectos. Más adelante regresaremos a este punto. Sin embargo, por ahora notaremos que la edad de la Tierra, determinada por el fechado radiactivo (véase la sección 43.4) es de 4.54 miles de millones (4.54×10^9) años. ¡Es reconfortante saber que nuestra sencilla hipótesis nos diga que el Universo es más viejo que la Tierra!

Espacio en expansión

La teoría general de la relatividad adopta una perspectiva radicalmente distinta de la expansión que acabamos de describir. De acuerdo con esta teoría, la mayor longitud de onda *no* se debe a un corrimiento Doppler cuando el Universo se expande y penetra en un hueco antes vacío. Más bien, el aumento se debe a la *expansión misma del espacio* y de todo en el espacio intergaláctico, incluyendo las longitudes de onda de la luz que llegan a nosotros desde fuentes lejanas. No es fácil captar este concepto, y si no lo ha visto usted antes, quizá le parecerá como algo engañoso.

44.17 Un globo que se infla es una analogía para en Universo en expansión.

a) Los puntos (que representan galaxias) en la superficie de un globo esférico se identifican por sus coordenadas de latitud y longitud.



b) El radio R del globo ha aumentado. Las coordenadas de los puntos son las mismas, pero la distancia entre ellos ha aumentado.



Veamos una analogía que ayudará a desarrollar cierta intuición sobre este punto. Considere que todos somos bichos que nos arrastramos sobre una superficie horizontal. No podemos dejar la superficie y podemos ver en cualquier dirección sobre la superficie, pero no hacia arriba ni hacia abajo. Entonces estamos viviendo en un mundo bidimensional; algunos han llamado *planilandia* a este mundo. Si la superficie es plana, podemos ubicar nuestra posición con dos coordenadas cartesianas (x, y). Si el plano se extiende indefinidamente en las direcciones x y y, decimos que nuestro espacio tiene una extensión *infinita*, o que *no está acotado*. No importa lo lejos que vayamos, nunca habrá un borde ni una frontera.

Un hábitat alterno para nosotros sería la superficie de una esfera de radio R. El espacio seguiría pareciendo infinito, en el sentido de que podríamos arrastrarnos eternamente sin llegar nunca a un borde o a una frontera. Sin embargo, en este caso el espacio es *finito* o *acotado*. Para describir la ubicación de un punto en este espacio, podríamos seguir usando dos coordenadas: latitud y longitud, o las coordenadas esféricas θ y ϕ, que se ven en la figura 41.5.

Ahora supongamos que la superficie esférica es la de un globo (figura 44.17). Al inflarlo cada vez más, el radio R aumenta, las coordenadas de un punto no cambian y, sin embargo, la distancia entre dos puntos cualesquiera se hace más y más grande. Además, a medida que R aumenta, la *rapidez de cambio* de la distancia entre dos puntos (su rapidez de recesión) es proporcional a su alejamiento. *La rapidez de recesión es proporcional a la distancia*, al igual que en la ley de Hubble. Por ejemplo, la distancia de Pittsburgh a Miami es el doble de la de Pittsburgh a Boston. Si la Tierra comenzara a hincharse, Miami se alejaría de Pittsburgh al doble de velocidad que Boston.

Vemos que aunque la cantidad R no es alguna de las dos coordenadas que definen la posición de un punto en la superficie del globo, desempeña un papel esencial en cualquier descripción de la distancia. Es el radio de curvatura de nuestro espacio de dos dimensiones, y también es un *factor de escala* variable que cambia a medida que se expande ese Universo bidimensional.

No es tan fácil generalizar esta imagen a tres dimensiones. Debemos imaginar nuestro espacio tridimensional como incrustado en un espacio con cuatro o más dimensiones, así como visualizamos planilandia bidimensionalmente incrustada en un espacio cartesiano tridimensional. Nuestro espacio real es tridimensional, *no es cartesiano*; para describir sus características en cualquier región pequeña se necesita al menos un parámetro adicional, la curvatura del espacio, que es análoga al radio de la esfera. En cierto sentido, este factor de escala, al que continuaremos llamando R, describe el *tamaño* del Universo, igual que el radio de la esfera describía el tamaño del

Universo bidimensional esférico. Después regresaremos a la cuestión de que si el Universo está acotado o no.

Cualquier longitud que se mida en el espacio intergaláctico es proporcional a R, por lo que aumenta la longitud de onda de la luz que llega a nosotros desde una galaxia distante, junto con todas las demás dimensiones, a medida que se expande el Universo. Esto es,

$$\frac{\lambda_0}{\lambda} = \frac{R_0}{R} \tag{44.16}$$

Los subíndices cero indican los valores de la longitud de onda y el factor de escala *ahora*, de igual manera que H_0 es el valor actual de la constante de Hubble. Las cantidades λ y R sin subíndices son los valores en *cualquier* momento: pasado, presente o futuro. En el caso descrito en el ejemplo 44.8, $\lambda_0 = 414$ nm y $\lambda = \lambda_S = 393$ nm, por lo que la ecuación (44.16) da como resultado $R_0/R = 1.053$. Esto es, el factor de escala *hoy* (R_0) es 5.3% mayor de lo que era hace 710 millones de años, cuando esa galaxia de la Osa Mayor emitió la luz. Este aumento de longitud de onda en el tiempo, cuando aumenta el factor de escala en nuestro Universo en expansión, se llama *corrimiento al rojo cosmológico*. Cuanto más alejado está un objeto, más tardará la luz en llegar a nosotros y el cambio de R y λ será mayor. La relación de longitudes de onda máxima medida hasta hoy, para las galaxias, es de aproximadamente 7, lo cual indica que el volumen del espacio mismo es unas $7^3 \approx 340$ veces mayor que cuando se emitió la luz. *No* trate de sustituir $\lambda_0/\lambda_S = 7$ en la ecuación (44.14) para determinar la rapidez de retroceso; esa ecuación solo es exacta para pequeños corrimientos al rojo cosmológico y $v \ll c$. El valor real de v depende de la densidad del Universo, del valor de H_0 y de la historia de la expansión del Universo.

Le sorprenderá al lector lo siguiente: si la distancia a nosotros, según la ley de Hubble, es suficientemente grande, ¡la rapidez de retroceso será mayor que la rapidez de la luz! Eso *no* viola la teoría especial de la relatividad, porque la rapidez de retroceso *no* es causada por el movimiento del objeto astronómico en relación con algunas coordenadas en su región del espacio. Más bien, puede ser que $v > c$ cuando dos conjuntos de coordenadas se alejan lo suficientemente rápido a medida que se expande el espacio mismo. En otras palabras, hay objetos cuyas coordenadas se han estado alejando de nuestras coordenadas tan rápido que la luz de ellos no ha tenido tiempo suficiente, en toda la historia del Universo, para llegar a nosotros. Lo que vemos solo es el Universo *observable*; no tenemos pruebas directas de lo que queda más allá de su horizonte.

CUIDADO **El Universo no se expande hacia el vacío** El globo que se muestra en la figura 44.17 se expande hacia el espacio vacío que lo rodea. Es una concepción falsa muy frecuente considerar al Universo de la misma forma que una colección de galaxias grande pero finita, que se expande hacia espacio que no está ocupado. ¡La realidad es muy diferente! Toda la evidencia acumulada indica que nuestro Universo es *infinito*: no tiene fronteras ni límites, por lo que no hay nada "afuera" de él ni "se expande hacia" algo. La expansión del Universo simplemente significa que está aumentando el factor de escala del Universo. Una buena analogía bidimensional es pensar que el Universo es como una hoja elástica plana e infinitamente grande, que se estira y se expande mucho, similar a la superficie del globo de la figura 44.17. En cierto sentido, ¡el Universo infinito simplemente se está volviendo más infinito!

Densidad crítica

Hemos mencionado que la ley de la gravitación no es congruente con un Universo estático. Necesitamos buscar el papel de la gravedad en un Universo en *expansión*. Las atracciones gravitacionales deberían desacelerar la expansión inicial, pero, ¿cuánto? Si esas atracciones son suficientemente intensas, el Universo debería expandirse cada vez con más lentitud, en cierto momento detenerse y después comenzar a contraerse, quizás otra vez todo, en lo que se ha llamado la gran implosión (o *Big Crunch*). Por otro lado, si las fuerzas gravitacionales son mucho más débiles, solo desaceleran un poco la expansión, y el Universo debería continuar expandiéndose eternamente.

El caso se parece al problema de la rapidez de escape de un proyectil disparado desde la Tierra. En el ejemplo 13.5 (sección 13.3 del volumen 1) estudiamos este problema; ahora sería una ocasión excelente para repasar la explicación. La energía total

$E = K + U$, cuando un proyectil de masa m y rapidez v está a una distancia r del centro de la Tierra (masa m_E), es

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{Gmm_E}{r}$$

Si E es positiva, el proyectil tiene suficiente energía cinética para alejarse infinitamente de la Tierra ($r \rightarrow \infty$) y tener algo de energía cinética sobrante o residual. Si E es negativa, la energía cinética $K = \frac{1}{2}mv^2$ se vuelve cero, y el proyectil se detiene cuando $r = -Gmm_E/E$. En ese caso, no es posible un valor mayor de r y el proyectil no puede escapar de la gravedad terrestre.

Podemos hacer un análisis parecido para el Universo. El hecho de que este continúe expandiéndose en forma indefinida debería depender de la *densidad* media de la materia. Si esta es relativamente densa, habrá una gran cantidad de atracción gravitacional para desacelerar y, en cierto momento, detener la expansión, y hacer que el Universo se vuelva a contraer. Si no es así, la expansión debería continuar en forma indefinida. Podemos deducir una ecuación para determinar la *densidad crítica* ρ_c necesaria para detener apenas la expansión.

Veamos un cálculo basado en la mecánica newtoniana; no es correcto desde el punto de vista relativista, pero ilustra la idea. Considere una gran esfera de radio R que contiene muchas galaxias (figura 44.18), con masa total M. Suponga que nuestra propia galaxia tiene masa m y está ubicada en la superficie de esa esfera. De acuerdo con el principio cosmológico, la distribución promedio de la materia dentro de la esfera es uniforme. La fuerza gravitacional total sobre nuestra galaxia no es otra que la fuerza debida a la masa M dentro de la esfera. La fuerza sobre nuestra galaxia y la energía potencial U debidas a esta distribución con simetría esférica son iguales que si m y M fueran puntos, por lo que $U = -GmM/R$, como en la sección 13.3 (vol. 1). La fuerza neta de toda la distribución uniforme de la masa *fuera* de la esfera es cero, por lo que no la tomaremos en cuenta.

44.18 Una esfera imaginaria de galaxias. La fuerza neta gravitacional ejercida sobre nuestra galaxia (en la superficie de la esfera) por las otras galaxias es la misma que si toda su masa estuviera concentrada en el centro de la esfera. (Ya que el Universo es infinito, también hay una infinidad de galaxias fuera de esta esfera).



La energía total E (cinética más potencial) de nuestra galaxia es

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GmM}{R} \tag{44.17}$$

Si E es *positiva*, nuestra galaxia tendrá energía suficiente para escapar de la atracción gravitacional de la masa M en el interior de la esfera; en este caso, el Universo estaría eternamente en expansión. Si E es negativa, nuestra galaxia no podría escapar, y el Universo al final se debería contraer. El paso entre esos dos casos sucede cuando $E = 0$, por lo que

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{GmM}{R} \tag{44.18}$$

La masa M total dentro de la esfera es el volumen $4\pi R^3/3$ por la densidad ρ_c:

$$M = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_c$$

Supondremos que la rapidez v de nuestra galaxia, en relación con el centro de la esfera, se determina con la ley de Hubble: $v = H_0 R$. Se sustituyen esas ecuaciones de m y v en la ecuación (44.18), y se obtiene

$$\frac{1}{2}m(H_0 R)^2 = \frac{Gm}{R}\left(\frac{4}{3}\pi R^3 \rho_c\right) \quad \text{o}$$

$$\rho_c = \frac{3H_0^2}{8\pi G} \quad \text{(densidad crítica del Universo)} \tag{44.19}$$

Esta es la *densidad crítica*. Si la densidad media es menor que ρ_c, el Universo continuará expandiéndose en forma indefinida; si es mayor, terminará por detenerse y comenzar a contraerse.

Sustituyendo los datos numéricos en la ecuación (44.19) se encuentra

$$\rho_c = \frac{3(2.3 \times 10^{-18}\ \text{s}^{-1})^2}{8\pi(6.67 \times 10^{-11}\ \text{N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2)} = 9.5 \times 10^{-27}\ \text{kg/m}^3$$

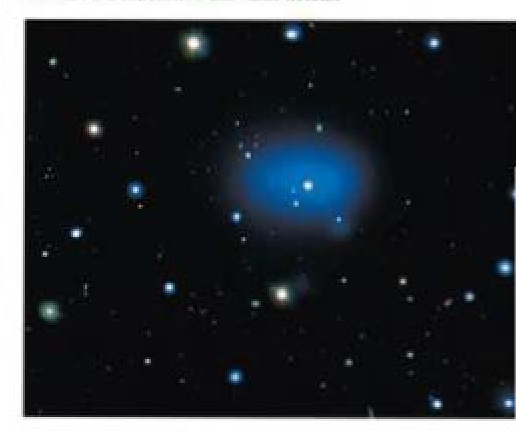
La masa de un átomo de hidrógeno es 1.67×10^{-27} kg, por lo que esta densidad equivale a unos seis átomos de hidrógeno por metro cúbico.

Materia oscura, energía oscura y el Universo acelerado

Los astrónomos han hecho extensos estudios de la densidad media de la materia en el Universo. Una forma de hacerlo es contar la cantidad de galaxias en una porción del cielo. Con base en la masa de una estrella media y la cantidad de estrellas en una galaxia media, este sistema da una estimación de la densidad promedio de la materia luminosa en el Universo, esto es, materia que emite radiación electromagnética. (El lector es materia *luminosa*, porque emite radiación infrarroja como consecuencia de su temperatura; véase las secciones 17.7 (vol. 1) y 39.5). También es necesario tener en cuenta otra materia luminosa en una galaxia, incluyendo el tenue gas y polvo que hay entre las estrellas.

Otra técnica consiste en estudiar los movimientos de galaxias dentro de cúmulos de galaxias (figura 44.19; véase también la figura 44.15*b*). Los movimientos son tan lentos que en realidad no vemos que las galaxias cambien posiciones dentro de un cúmulo. Sin embargo, las observaciones indican que las distintas galaxias dentro de un cúmulo tienen corrimientos al rojo un poco distintos, lo cual indica que se mueven en relación con el centro de masa del cúmulo. Las rapideces de esos movimientos se relacionan con la fuerza gravitacional que ejercen los demás miembros del cúmulo sobre cada galaxia, la cual, a la vez, depende de la masa total del cúmulo. Al medir esas rapideces, los astrónomos pueden determinar la densidad media de *todos* los tipos de materia dentro del cúmulo, aunque la materia emita radiación electromagnética o no.

44.19 Las manchas brillantes de esta imagen no son estrellas, sino galaxias completas. Forman parte de un cúmulo de galaxias a unos 10.2 miles de millones de años luz (3,130 millones de pc o 3130 Mpc) de distancia. (La luz azul es emisión de rayos x del gas caliente dentro del cúmulo). Cuando las galaxias emitieron la luz con la que se obtuvo esta imagen, el factor de escala del Universo era aproximadamente el 35% del que es actualmente. En comparación, vemos el relativamente cercano cúmulo de Coma (véase la figura 44.15*b*), que estaba a 300 millones de años, cuando el factor de escala era del 98% del valor actual.



Las observaciones que usan estas y otras técnicas demuestran que la densidad media de *toda* la materia en el Universo es el 27.4% de la densidad crítica, pero que la densidad media de la materia *luminosa* solo es el 4.6% de la densidad crítica. En otras palabras, la mayor parte de la materia en el Universo no es luminosa, pues no emite radiación electromagnética de ninguna clase. En la actualidad, la naturaleza de esta materia oscura es un notable misterio. Algunos candidatos propuestos como **materia oscura** son las WIMP (*weakly interacting massive particles*, esto es, partículas masivas débilmente interactuantes, que son partículas subatómicas hipotéticas mucho más masivas que las que se producen en los experimentos en los aceleradores) y los MACHO (*massive compact halo objects* u objetos masivos de halo compacto, que incluyen objetos como agujeros negros que podrían formar "halos" en torno a galaxias). Sea cual fuere la naturaleza real de la materia oscura, esta es la forma más predominante de materia en el Universo. Por cada kilogramo de materia ordinaria que ha sido el tema de la mayoría de este libro (incluyendo electrones, protones, átomos, moléculas, bloques en planos inclinados, planetas y estrellas), hay *cinco* kilogramos de materia oscura.

Como la densidad promedio de la materia en el Universo es menor que la densidad crítica, parecería justo llegar a la conclusión de que el Universo seguirá expandiéndose eternamente, y que la atracción gravitacional entre la materia en distintas partes del Universo debería desacelerar la expansión (aunque no lo suficiente como para detenerla). Una forma de probar esta predicción consiste en examinar los corrimientos al rojo de objetos extremadamente lejanos. Cuando los astrónomos ven una galaxia a 10^9 años luz de distancia, la luz que reciben ha estado viajando durante 10^9 años, por lo que ven 10^9 años en el pasado. Si la expansión del Universo se ha desacelerado, debe haber sido más rápida en el pasado. Así, se esperaría que las galaxias muy lejanas tengan corrimientos al rojo *mayores* que los que predice la ley de Hubble, ecuación (44.15).

Solo hasta la década de 1990 fue posible medir con exactitud tanto las distancias como los corrimientos al rojo de galaxias extremadamente lejanas. Los resultados son muy sorprendentes: ¡Las galaxias muy lejanas tienen en realidad *menores* corrimientos al rojo que los que predice la ley de Hubble! La implicación es que la expansión del Universo era más lenta en el pasado que ahora, así que ha estado *acelerándose*, más que desacelerándose.

Si la atracción gravitacional debería desacelerar la expansión, ¿por qué entonces se está acelerando? La explicación que acepta la mayoría de los astrónomos y los físicos es que, en el espacio, está difundida una clase de energía que no tiene efecto gravitacional y que no emite radiación electromagnética, sino que, más bien, funciona

Aplicación Un fósil antiguo y uno reciente
Este fósil trilobite es un ejemplo de un grupo de artrópodos marinos que prosperaron en los océanos de la Tierra desde hace 540 hasta 250 millones de años. (En comparación, los primeros dinosaurios no aparecieron sino hasta hace 230 millones de años). Desde nuestra perspectiva, esto hace que los trilobites sean casi indescifrablemente antiguos. Pero en comparación con el tiempo que ha transcurrido desde la gran explosión, hace 13,700 millones de años, incluso los trilobites son un fenómeno muy reciente: aparecieron cuando el Universo tenía ya el 96% de su edad actual.



como una clase de "antigravedad" que produce una *repulsión* universal. Esta energía invisible e inmaterial se llama **energía oscura**. Como lo indica su nombre, la naturaleza de la energía oscura se entiende poco, aunque en la actualidad es tema de profundas investigaciones.

Las observaciones indican que la densidad de la *energía* oscura (medida, digamos, en joules por metro cúbico) es 72.6% de la densidad crítica multiplicada por c^2; esto es, es igual a $0.726\rho_c c^2$. Como se describió, la densidad promedio de la materia de todas clases es 27.4% de la densidad crítica. De acuerdo con la relación $E = mc^2$ de Einstein, la densidad media de *energía* de materia en el Universo es, entonces, $0.274\rho_c c^2$. Como la densidad de energía de la energía oscura es casi tres veces mayor que la de la materia, la expansión del Universo continuará acelerándose. Esta expansión nunca se detendrá y el Universo nunca se contraerá.

Si consideramos la energía de todas clases, la densidad media de energía del Universo es igual a $0.726\rho_c c^2 + 0.274\rho_c c^2 = 1.00\rho_c c^2$. De ella, el 72.6% es la misteriosa energía oscura, el 22.8% es la no menos misteriosa materia oscura, y solo el 4.6% corresponde a la bien comprendida materia ordinaria. ¡Qué poco conocemos el contenido de nuestro Universo! Cuando consideramos la densidad de materia en el Universo (que tiende a frenar la expansión del espacio) y la densidad de la energía oscura (que tiende a acelerar la expansión), la edad del Universo resulta ser de 13,700 millones (1.37×10^{10}) de años.

¿Cuál es la importancia del resultado que, dentro de nuestros errores de observación, la densidad media de la energía en el Universo sea igual a $\rho_c c^2$? Nos dice que el Universo es apenas infinito y no acotado. Si la densidad media de energía fuera un poco mayor que $\rho_c c^2$, el Universo sería finito, como la superficie del globo que muestra la figura 44.17. En el momento de escribir esto, el error de observación, en la densidad media de la energía todavía es suficientemente grande (aproximadamente 1%) como para no estar bien seguros de que el Universo sea ilimitado. La mejoría de esas mediciones será una importante tarea de los físicos y astrónomos en los años por venir.

Evalúe su comprensión de la sección 44.6 ¿Es correcto decir que el cuerpo de usted está hecho de materia "ordinaria"? |

44.7 El principio del tiempo

¡Qué título tan extraño tiene la última sección de este libro! En términos generales describiremos algunas de las teorías actuales acerca de la historia temprana del Universo, y su relación con las interacciones entre partículas fundamentales. Veremos que en el primer segundo tuvo lugar una cantidad asombrosa de acontecimientos. Se dejarán sin atar muchos cabos sueltos y muchas preguntas se quedarán sin respuesta. Esta es, después de todo, una de las fronteras de la física teórica.

Temperaturas

El Universo inicial era extremadamente denso y caliente, y las energías medias de sus partículas eran intensamente grandes, todas de muchos órdenes de magnitud mayores que cualquier cosa que exista en el Universo actual. Se puede comparar la energía E de una partícula con la temperatura absoluta T usando el principio de equipartición (véase la sección 18.4):

$$E = \frac{3}{2}kT \qquad (44.20)$$

En esta ecuación k es la constante de Boltzmann, que con frecuencia representaremos en eV/K:

$$k = 8.617 \times 10^{-5}\ \text{eV/K}$$

Entonces, se puede reemplazar la ecuación (44.20) por $E \approx (10^{-4}\ \text{eV/K})T = (10^{-13}\ \text{GeV/K})T$ cuando tratamos órdenes de magnitud.



Ejemplo 44.10 Temperatura y energía

a) ¿Cuál es la energía cinética media, en electrón volts, de las partículas a temperatura ambiente (T = 290 K) y en la superficie del Sol (T = 5800 K)? *b*) ¿Qué temperatura aproximada corresponde a la energía de ionización del átomo de hidrógeno, a la energía en reposo del electrón y a la energía en reposo del protón?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: En este ejemplo se nos pide utilizar el principio de equipartición. Usaremos la ecuación (44.20) en cada parte, para determinar las incógnitas E y T.

EJECUTAR: *a*) A temperatura ambiente, de acuerdo con la ecuación (44.20):

$$E = \tfrac{3}{2}kT = \tfrac{3}{2}(8.617 \times 10^{-5}\ \text{eV/K})(290\ \text{K}) = 0.0375\ \text{eV}$$

La temperatura de la superficie del Sol es mayor, por un factor de (5800 K)/(290 K) = 20, y la energía cinética promedio ahí es 20(0.0375 eV) = 0.75 eV.

b) La energía de ionización del hidrógeno es 13.6 eV. Si usamos la aproximación $E \approx (10^{-4}\ \text{eV/K})T$, tenemos

$$T \approx \frac{E}{10^{-4}\ \text{eV/K}} = \frac{13.6\ \text{eV}}{10^{-4}\ \text{eV/K}} \approx 10^5\ \text{K}$$

Al repetir el cálculo para las energías en reposo del electrón (E = 0.511 MeV) y el protón (E = 938 MeV), se obtienen temperaturas de 10^{10} K y 10^{13} K, respectivamente.

EVALUAR: En el interior del Sol hay temperaturas mayores que 10^5 K, de manera que allá la mayor parte del hidrógeno está ionizado. Las temperaturas de 10^{10} K o 10^{13} K no se encuentran en el Sistema Solar; como veremos después, al principio, las temperaturas eran así de elevadas en el Universo.

Desacoplamiento de interacciones

La expansión del Universo se ha caracterizado por un aumento continuo del factor de escala R, del que se puede pensar que en forma burda caracteriza el *tamaño* del Universo, y por una disminución correspondiente en la densidad promedio. Conforme aumentó la energía potencial gravitacional durante la expansión, hubo *disminuciones* correspondientes en la temperatura y en la energía cinética media de las partículas. A medida que esto sucedía, las interacciones básicas se desacoplaron en forma progresiva.

Para entender los desacoplamientos, recuerde que la unificación de las interacciones electromagnética y débil se presenta a energías suficientemente grandes como para que las diferencias de masa entre los diversos bosones con espín 1, que median las interacciones, se consideren insignificantes en comparación. La interacción electromagnética está definida por el fotón sin masa, y la interacción débil está definida por los bosones débiles $W^{\pm}$ y Z^0, cuyas masas son del orden de 100 GeV/c^2. A energías mucho *menores* que 100 GeV, las dos interacciones parecen muy diferentes, pero a energías mucho *mayores* que 100 GeV forman parte de una sola interacción.

Las teorías de la gran unificación (TGU) establecen un comportamiento parecido para la interacción fuerte. Se unifica con la interacción electrodébil a energías del orden de 10^{14} GeV, y a menores energías, las dos parecen muy distintas. Las TGU todavía son muy especulativas, ya que no hay forma de efectuar experimentos controlados con energías de esta magnitud, que son mayores en un factor de 10^{11} en comparación con las energías disponibles en cualquiera de los aceleradores actuales.

Por último, a energías suficientemente grandes, y distancias cortas, se supone que la gravitación se unifica con las otras tres interacciones. Se cree que la distancia a la que esto ocurre es del orden de 10^{-35} m. Esta distancia, llamada *longitud de Planck* l_P, se determina por la rapidez de la luz c y las constantes fundamentales de la mecánica cuántica y la gravitación, h y G, respectivamente. La longitud de Planck l_P se define como

$$l_P = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}} = 1.616 \times 10^{-35}\ \text{m} \qquad (44.21)$$

El lector debería verificar que esta combinación de constantes sí tiene unidades de longitud. El *tiempo de Planck*, $t_P = l_P/c$, es el tiempo que necesita la luz para recorrer la distancia l_P:

$$t_P = \frac{l_P}{c} = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^5}} = 0.539 \times 10^{-43}\ \text{s} \qquad (44.22)$$

Si mentalmente retrocedemos en el tiempo, debemos detenernos al llegar a $t = 10^{-43}$ s, porque no contamos con una teoría adecuada que unifique las cuatro interacciones. Así que hasta ahora no tenemos forma de conocer cómo se comportaba el Universo cuando el tiempo era menor que el tiempo de Planck, o cuando su tamaño era menor que la longitud de Planck.

El modelo estándar de la historia del Universo

La siguiente descripción se llama *modelo estándar* de la historia del Universo. Quizás el título suene algo optimista, pero indica que hay áreas apreciables de la teoría que se basan en fundamentos experimentales, y que tienen una aceptación bastante general. La figura de las páginas 1512 y 1513 es una descripción gráfica de esa historia, con los tamaños, las energías de partícula y las temperaturas características de diferentes tiempos. Si usted consulta a menudo esta figura, le ayudará a entender la siguiente descripción.

En este modelo estándar, la temperatura del Universo en el momento $t = 10^{-43}$ s (el tiempo de Planck) era de unos 10^{32} K, y la energía media por partícula era, aproximadamente,

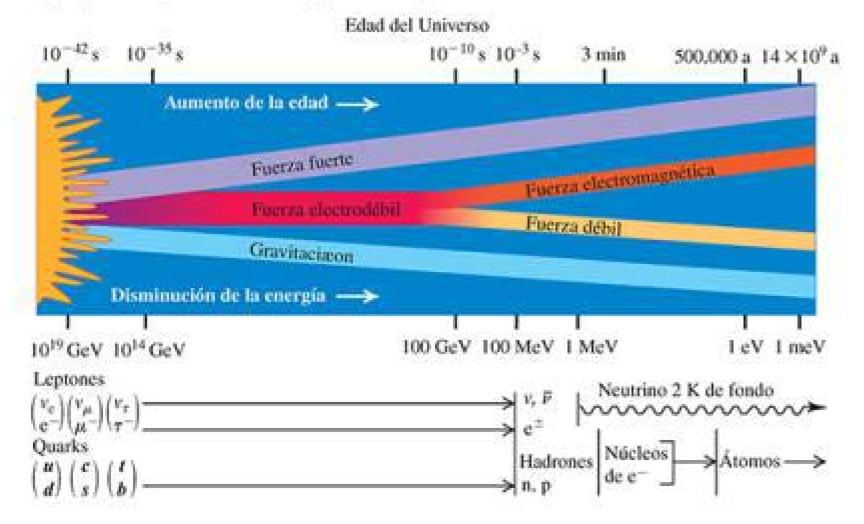
$$E \approx (10^{-13}\ \text{GeV/K})(10^{32}\ \text{K}) = 10^{19}\ \text{GeV}$$

En una teoría totalmente unificada, esta fue más o menos la energía; y para valores menores la gravedad, se comienza a comportar como una interacción separada. Este momento marcó la transición entre cualquier teoría de todo propuesta y el periodo TGU (de gran unificación).

Durante el periodo TGU, más o menos de $t = 10^{-43}$ a 10^{-35} s, las fuerzas fuerte y electrodébil todavía estaban unificadas, y el Universo consistía en una sopa de quarks y leptones transformándose entre sí, con tanta libertad que no había distinción entre las dos familias de partículas. Otras partículas, mucho más masivas, podrían también haberse formado y destruido libremente. Una característica importante de las TGU es que a energías suficientemente grandes, no se conserva el número bariónico. (Ya mencionamos antes el decaimiento propuesto del protón, que todavía no se ha observado). Así, al final del periodo TGU, las cantidades de quarks y antiquarks pudieron haber sido distintas. Este aspecto tiene implicaciones importantes. Al terminar esta sección regresaremos a él.

Cuando $t = 10^{-35}$ s, la temperatura había disminuido a unos 10^{27} K y la energía media a unos 10^{14} GeV. A esta energía, la fuerza fuerte se separó de la fuerza electrodébil (figura 44.20), y los números bariónico y leptónico comenzaron a conservarse por separado. Esta separación de la fuerza fuerte fue análoga a un cambio de fase, como la ebullición de un líquido, con un calor de vaporización asociado. Considere que se parece a la ebullición de un núcleo pesado, separando las partículas más allá del corto

44.20 Esquema que muestra los tiempos y las energías en los que se estima que las diversas interacciones se desacoplaron. La escala de energía es hacia atrás, ya que la energía media disminuyó a medida que aumentó la edad del Universo.



alcance de la fuerza nuclear. Como consecuencia, el Universo experimenta una expansión muy rápida (mucho más rápida que la razón de expansión actual) llamada *inflación cósmica*. En uno de los modelos, el factor de escala R aumentó en un factor de 10^{50} en 10^{-32} s.

Cuando $t = 10^{-32}$ s, el Universo era una mezcla de quarks, leptones y los bosones mediadores (gluones, fotones y los bosones débiles $W^{\pm}$ y Z^0). Continuó expandiéndose y enfriándose desde el periodo inflacionario hasta $t = 10^{-6}$ s, cuando la temperatura aproximada era unos de 10^{13} K y las energías normales eran de 1 GeV (comparables a la energía en reposo de un nucleón; véase el ejemplo 44.11). En ese momento, los quarks comenzaron a unirse entre sí para formar nucleones y antinucleones. Aún había fotones con energía suficiente para producir pares nucleón-antinucleón y, así, equilibrar el proceso de aniquilación nucleón-antinucleón. Sin embargo, más o menos cuando $t = 10^{-2}$ s, la mayoría de las energías de los fotones disminuyeron mucho con respecto a la energía de umbral para la producción de esos pares. Hubo un pequeño exceso de nucleones con respecto a los antinucleones, y la consecuencia fue que casi todos los antinucleones y la mayoría de los nucleones se aniquilaron entre sí. Un equilibrio similar se estableció después, entre la producción de pares electrón-positrón a partir de fotones y la aniquilación de tales pares. Cuando $t = 14$ s, la energía media bajó hasta más o menos 1 MeV, menor que la energía de umbral para la producción de pares e^+e^-. Al cesar la producción de pares, casi todos los positrones restantes fueron aniquilados, dejando al Universo con mucho más protones y electrones que sus antipartículas.

Hasta aproximadamente cuando $t = 1$ s, los neutrones y neutrinos se podían producir en la reacción endotérmica

$$e^- + p \rightarrow n + \nu_e$$

Después de ese momento, la mayoría de los electrones ya no tenían energía suficiente para esta reacción. También disminuyó la energía media de los neutrinos y, a medida que se expandía el Universo, cesaron las reacciones de equilibrio que implicaban *absorción* de neutrinos (las cuales sucedían con probabilidades decrecientes). En ese momento, de hecho, el flujo de neutrinos y antineutrinos por el Universo se desacopló del resto del mismo Universo. Debido a las probabilidades extraordinariamente bajas de absorción de neutrinos, la mayor parte de ese flujo todavía existe, aunque enfriado mucho por la expansión. El modelo estándar del Universo predice una temperatura actual de esos neutrinos de 2 K, aproximadamente, pero todavía nadie ha podido efectuar un experimento que compruebe tal predicción.

Nucleosíntesis

Más o menos en $t = 1$ s, la proporción de protones a neutrones quedó determinada por el factor de la distribución de Boltzmann, $e^{-\Delta E/kT}$, donde ΔE es la diferencia entre las energías en reposo de neutrones y protones, $\Delta E = 1.294$ MeV. A una temperatura aproximada de 10^{10} K, este factor de distribución da como resultado unas 4.5 veces más protones que neutrones. Sin embargo, como hemos dicho, los neutrones libres (con una vida media de 887 s) decaen espontáneamente a protones. Este decaimiento causó un aumento de la relación protones a neutrones hasta cuando $t = 225$ s. En ese momento, la temperatura promedio era de unos 10^9 K y la energía media era bastante menor que 2 MeV.

Esta distribución de energía fue crítica porque la energía de enlace del *deuterón* (un neutrón y un protón unidos) es de 2.22 MeV (véase la sección 43.2). Un neutrón unido en un deuterón no decae espontáneamente. A medida que disminuía la energía promedio, se pudieron combinar un protón y un neutrón para formar un deuterón, y hubo cada vez menos fotones con 2.22 MeV o más energía, para separar de nuevo los deuterones. En consecuencia, la combinación de protones y neutrones para formar deuterones detuvo el decaimiento de los neutrones libres.

La formación de deuterones, iniciada más o menos cuando $t = 225$ s, marcó el principio de la formación de núcleos o *nucleosíntesis*. En ese momento había más o menos siete protones por cada neutrón. El deuterón (^{2}H) puede absorber un neutrón y formar un tritón (^{3}H), o absorber un protón y formar ^{3}He. Entonces, el ^{3}H puede absorber un protón y el ^{3}He también puede absorber un neutrón y, en cada caso, se produce ^{4}He (la partícula alfa). Es posible también que se formen unos pocos núcleos

EDAD DE QUARKS Y GLUONES (periodo TGU)
Concentración densa de materia y antimateria; gravedad, una fuerza separada; más quarks que antiquarks. Periodo inflacionario (10^{-35} s): expansión rápida, la intensidad fuerte se separa de la fuerza electrodébil.

EDAD DE LEPTONES
Leptones diferentes de quarks; los bosones $W^{\pm}$ y Z^0 median la fuerza débil (10^{-12} s).

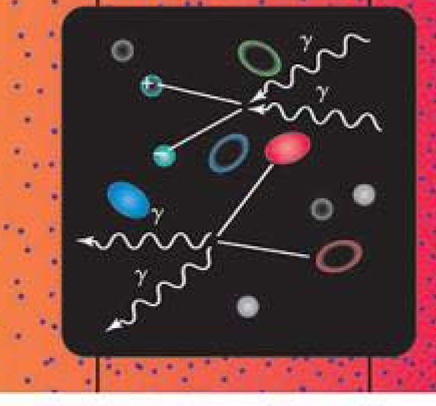
EDAD DE NUCLEONES Y ANTINUCLEONES
Los quarks se combinan para formar nucleones y antinucleones; energía demasiado baja para producir pares nucleón-antinucleón a los 10^{-2} s.

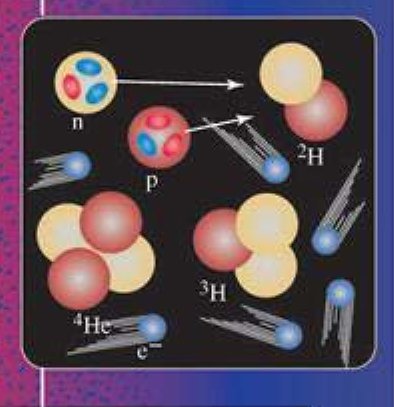
EDAD DE LA NUCLEOSÍNTESIS
Deuterones estables; materia 74% H, 25% He, 1% núcleos más pesados.

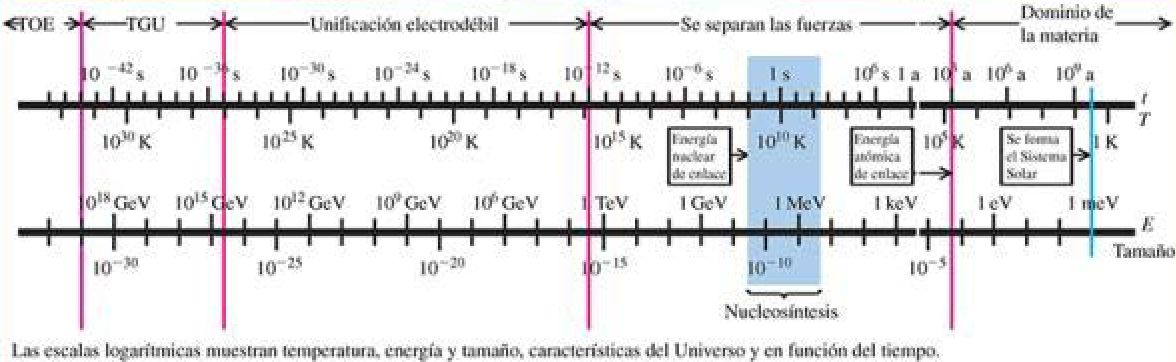
BIG BANG 10^{-43} s 10^{-32} s 10^{-6} s 225 s 10 s

Neutrino
Quarks
Antiquarks
Antineutrino









Las escalas logarítmicas muestran temperatura, energía y tamaño, características del Universo y en función del tiempo.

Una breve historia del Universo

EDAD DE LOS IONES
Gas en expansión y enfriamiento de H y He ionizados.

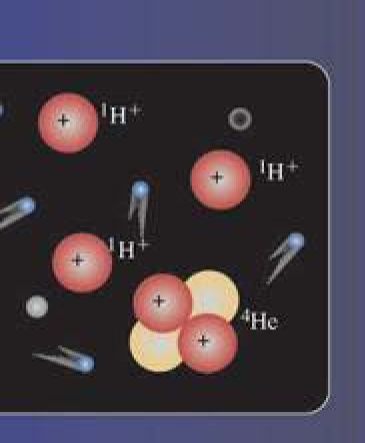
EDAD DE LOS ÁTOMOS
Se forman átomos neutros; el Universo se vuelvse transparente a la mayor parte de la luz.

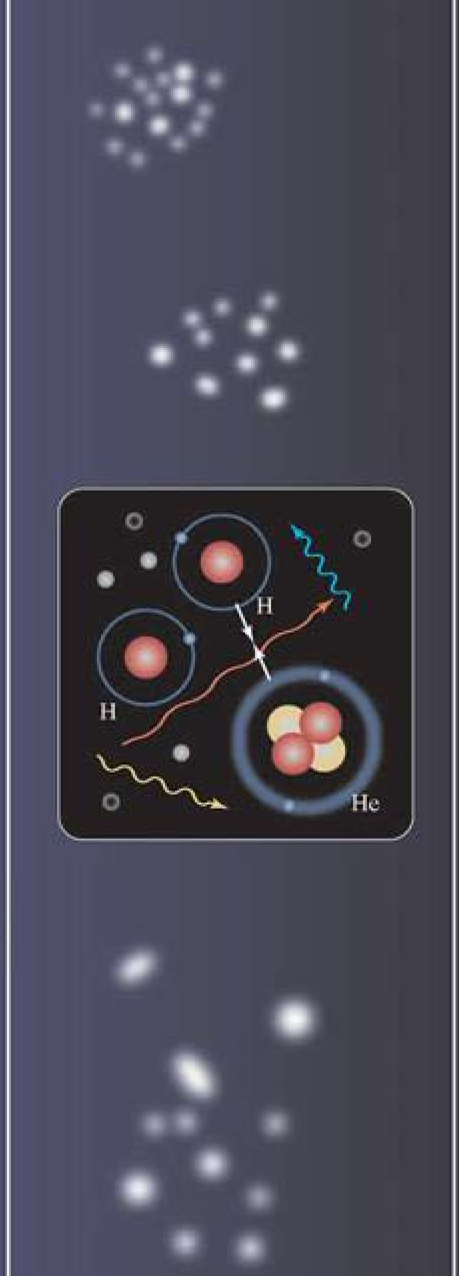
EDAD DE ESTRELLAS Y GALAXIAS
Comienza la fusión termonuclear en las estrellas, formándose así núcleos más pesados.

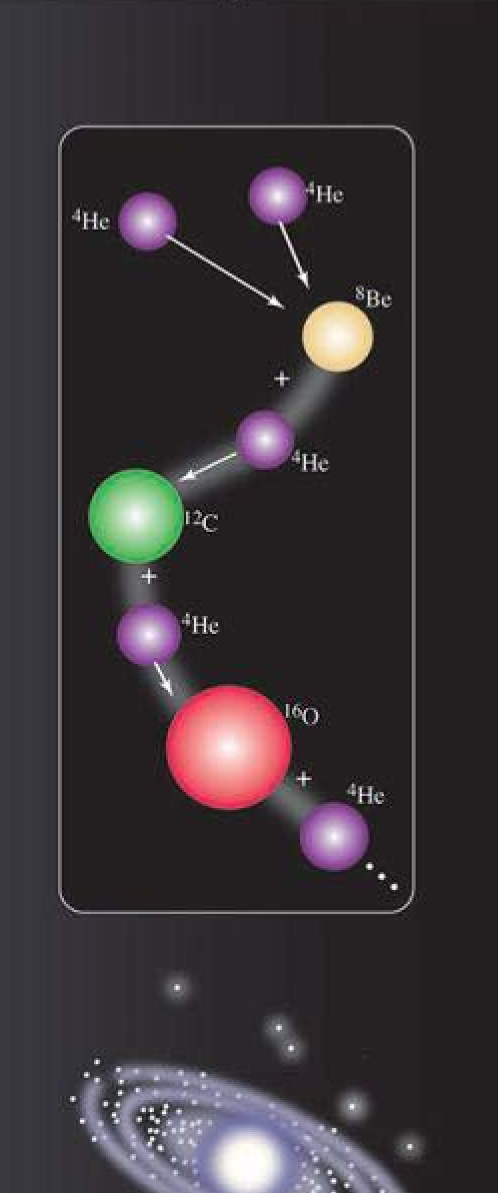
10^{13} s

10^{15} s

AHORA







de ^{7}Li por fusión de los núcleos ^{3}H y ^{4}He. De acuerdo con la teoría, en esencia todo el ^{1}H y todo el ^{4}He en el Universo actual se formaron en esos momentos. Pero después, la formación de núcleos casi llegó a detenerse. La razón es que *ningún* nucleido con número de masa $A = 5$ tiene una vida media mayor que 10^{-21} s. Simplemente, las partículas alfa no absorben en forma permanente neutrones y protones. El nucleido ^{8}Be que se forma por fusión de dos núcleos de ^{4}He es inestable, y su vida media es extremadamente corta, de unos 7×10^{-17} s. Observe que en ese momento, la energía media todavía era demasiado grande como para que los electrones se enlazaran a los núcleos; todavía no había átomos.



Ejemplo conceptual 44.11 La abundancia relativa del hidrógeno y el helio en el Universo

Casi todos los protones y los neutrones, en la relación de siete a uno cuando $t = 225$ s, formaron ^{4}He o permanecieron como ^{1}H. Después de ese tiempo, ¿cuál fue la abundancia relativa, en masa, de ^{1}H y ^{4}He?

SOLUCIÓN

El núcleo ^{4}He contiene dos protones y dos neutrones. Por cada dos neutrones presentes en $t = 225$ s, había 14 protones. Los dos neutrones y dos de los 14 protones forman un núcleo de ^{4}He, dejando 12 protones (núcleos de ^{1}H). Entonces, en ese momento había 12 núcleos de ^{1}H por cada núcleo de ^{4}He. Las masas del ^{1}H y del ^{4}He son, aproximadamente, 1 u y 4 u, respectivamente, por lo que había 12 u de ^{1}H por cada 4 u de ^{4}He. Por consiguiente, la abundancia relativa, por masa, era de 75% de ^{1}H y 25% de ^{4}He. Este resultado concuerda muy bien con estimaciones de la proporción actual H-He en el Universo, lo que es una confirmación importante de esta parte de la teoría.

No se efectuó más nucleosíntesis, sino hasta mucho después, cuando el tiempo era $t = 10^{13}$ s (unos 380,000 años). En ese momento, la temperatura aproximada era de unos 3000 K y la energía media era de unos cuantos décimos de electrón volts. Como las energías de ionización de los átomos de hidrógeno y helio son de 13.6 y 24.5 eV, respectivamente, casi todo el hidrógeno y el helio eran eléctricamente neutros (no ionizados). Anuladas las repulsiones eléctricas de los núcleos, la atracción gravitacional pudo unir en forma gradual los átomos neutros, para formar nubes de gas y finalmente estrellas. Entonces las reacciones termonucleares en las estrellas han producido todos los núcleos más masivos. En la sección 43.8 describimos un ciclo de reacciones termonucleares en el que el ^{1}H se transforma en ^{4}He.

Para estrellas cuya masa es 40% de la masa del Sol o mayor, conforme se consume el hidrógeno, el núcleo de la estrella comienza a contraerse ya que la presión gravitacional hacia el interior supera la presión del gas hacia el exterior y la presión de radiación. La energía potencial gravitacional disminuye a medida que el núcleo se contrae, por lo que la energía cinética de los núcleos aumenta en el centro. Por último, la temperatura del núcleo se vuelve lo suficientemente alta como para comenzar otro proceso, la *fusión del helio*. Primero, dos núcleos de ^{4}He se funden para formar ^{8}Be que es muy inestable. Pero debido a que el núcleo de una estrella es muy denso y las colisiones entre núcleos son tan frecuentes, hay una probabilidad distinta de cero de que un tercer núcleo de ^{4}He se fusione con el núcleo de ^{8}Be antes de que pueda decaer. El resultado es el nucleido estable ^{12}C. Esto se denomina *proceso triple alfa*, ya que tres núcleos de ^{4}He (es decir, partículas alfa) se fusionan para formar un núcleo de carbono. Después, fusiones sucesivas con ^{4}He forman ^{16}O, ^{20}Ne y ^{24}Mg. Todas esas reacciones son exotérmicas. Liberan energía y calientan la estrella, y el ^{12}C y el ^{16}O se pueden fundir y formar elementos cada vez con mayor número atómico.

Para los nucleidos que se pueden formar de esa manera, la energía de enlace por nucleón es máxima cuando el número de masa es $A = 56$, con el nucleido ^{56}Fe, por lo que las reacciones exotérmicas de fusión se detienen con el Fe. Pero otras capturas del neutrón, seguidas por decaimientos beta, pueden continuar la síntesis de núcleos más masivos. Si la estrella tiene la masa suficiente, al final explotará como una *supernova*, enviando al espacio los elementos pesados que se produjeron en los procesos anteriores (figura 44.21; véase también la figura 37.7). En el espacio, los desechos y demás materia interestelar se agrupan de forma gravitacional para formar una nueva generación de estrellas y planetas. Nuestro Sol es una estrella de "segunda generación", como esas. Esto quiere decir que los planetas del Sol, y todo lo que hay en ellos (incluyendo a usted) contiene materia que hace mucho tiempo explotó en el espacio como supernova.

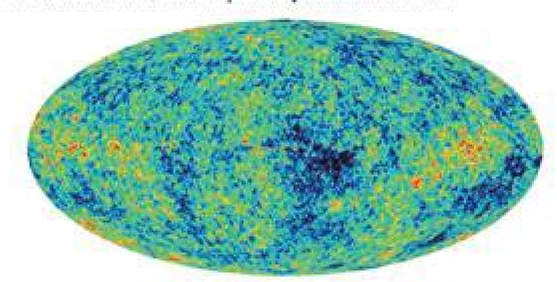
44.21 En la constelación del Cisne, la Nebulosa del Velo es un residuo de una explosión de supernova ocurrida hace más de 20,000 años. El gas es expulsado de la supernova y todavía se mueve con mucha rapidez. Las colisiones entre este gas en rápido movimiento y el material tenue del espacio interestelar excitan el gas y lo hacen brillar. Esta parte de la nebulosa tiene una longitud aproximada de 40 años luz (12 pc).



Radiación de fondo

En 1965 Arno Penzias y Robert Wilson, al trabajar en la división de comunicaciones satelitales de Bell Telephone Laboratories en Nueva Jersey, dirigieron hacia el firmamento una antena de microondas y localizaron una señal de fondo que aparentemente no tenía una dirección preferida. (Esta señal produce aproximadamente el 1% de la "estática" que usted observa en una pantalla de TV cuando la sintoniza en un canal sin señal). Investigaciones posteriores demostraron que la radiación que se recibe tiene un espectro de frecuencia que se ajusta a la ley de radiación de cuerpo negro de Planck, ecuación (39.24) (véase la sección 39.5). La longitud de onda de intensidad máxima es de 1.063 mm (en la región de microondas del espectro), con una temperatura absoluta correspondiente $T = 2.725$ K. Penzias y Wilson llamaron a los físicos de la cercana Universidad de Princeton, quienes habían iniciado el diseño de una antena para buscar la radiación residual de la evolución inicial del Universo. Ya mencionamos que los átomos neutros se formaron más o menos cuando $t = 380{,}000$ años, cuando la temperatura era de 3000 K. Con mucho menos partículas cargadas presentes que antes, el Universo se volvió transparente en ese momento a la radiación electromagnética de longitud de onda larga. La radiación de cuerpo negro de 3000 K sobrevivió, por consiguiente, enfriándose hasta su temperatura actual de 2.725 K conforme el Universo se expandió. La *radiación cósmica de fondo* está entre las confirmaciones experimentales más concluyentes de la teoría de la gran explosión. La figura 44.22 muestra un mapa moderno de esa radiación cósmica de fondo.

44.22 Este mapa en falsos colores muestra la radiación de microondas que se formó como un óvalo en todo el cielo. Cuando esta radiación fue emitida 380,000 años después de la gran explosión, las regiones mostradas en azul eran un poco más frías y más densas que sus alrededores; dentro de esas regiones se formaron las galaxias, incluyendo la Vía Láctea, de la cual son parte nuestro Sistema Solar, nuestro planeta y nosotros mismos.



Ejemplo 44.12 Expansión del Universo



Aproximadamente, ¿en qué factor se ha expandido el Universo desde que $t = 380{,}000$ años?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Usaremos la idea de que cuando se expandió el Universo, todas las longitudes de onda intergalácticas se expandieron con él. La ley de desplazamiento de Wien, ecuación (39.21), relaciona el máximo de longitud de onda λ_m de la radiación del cuerpo negro con la temperatura. Dadas las temperaturas de la radiación cósmica de fondo hoy (2.725 K) y cuando $t = 380{,}000$ años (3000 K), es posible determinar el factor por el cual han cambiado las longitudes de onda y, en consecuencia, determinar el factor por el cual se ha expandido el Universo.

EJECUTAR: Se reescribe la ecuación (39.21) como

$$\lambda_m = \frac{2.90 \times 10^{-3}\ \text{m} \cdot \text{K}}{T}$$

Por lo tanto, la longitud de onda máxima λ_m es inversamente proporcional a T. Conforme se expande el Universo, todas las longitudes de onda intergalácticas (incluyendo λ_m) aumentan en proporción con el factor de escala R. La temperatura disminuyó en un factor de $(3000\ \text{K})/(2.725\ \text{K}) \approx 1100$, así que λ_m y el factor de escala deben haber *aumentado* en ese factor. Por lo tanto, entre $t = 380{,}000$ años y el presente, el Universo se expandió en un factor de más o menos 1100.

EVALUAR: Nuestros resultados indican que desde que $t = 380{,}000$ años, todo *volumen* intergaláctico ha aumentado en un factor de $(1100)^3 = 1.3 \times 10^9$. También indican que cuando la radiación cósmica fue emitida, la longitud de onda de su máximo de intensidad era $\frac{1}{1100}$ del valor actual de 1.063 mm o 967 nm. Está en la región infrarroja del espectro.

Materia y antimateria

Una de las propiedades más notables de nuestro Universo es la asimetría entre materia y antimateria. Se pensaría que el Universo debería tener igual cantidad de protones que de antiprotones, y de electrones que de positrones; sin embargo, parece que ese no es el caso. Las teorías del Universo primitivo deben explicar este desequilibrio.

Hemos mencionado que la mayoría de las teorías de gran unificación incluyen la violación del número bariónico a energías en las que convergen las interacciones fuerte y electrodébil. Si la simetría partícula-antipartícula también se viola, contaremos con un mecanismo para hacer más quarks que antiquarks, más leptones que antileptones, y al final, más materia que antimateria. Un problema grave es que cualquier asimetría que se creara en esta forma durante la era de gran unificación, se borraría por la interacción electrodébil después de terminar esa era. En ese caso, debe haber algún mecanismo que produzca asimetría partícula-antipartícula en un momento *posterior*. El problema de la asimetría de materia-antimateria todavía está bastante abierto.

Hay muchas preguntas sin respuesta aún en la intersección de la física de partículas y la cosmología. ¿La densidad de energía del Universo es igual a $\rho_c c^2$, o hay diferencias pequeñas, pero importantes? ¿Qué es la energía oscura? ¿La densidad de la energía oscura ha permanecido constante en la historia del Universo o ha cambiado? ¿Qué es la materia oscura? ¿Qué sucedió durante los primeros 10^{-43} s después de la gran explosión? ¿Podemos tener pruebas de que las interacciones fuerte y electrodébil experimentan una gran unificación a altas energías? La búsqueda de respuestas para estas y muchas otras preguntas acerca de nuestro mundo físico continúa siendo una de las aventuras más estimulantes para la mente humana.

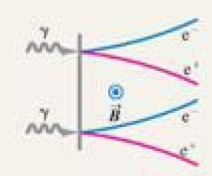
Evalúe su comprensión de la sección 44.7 ¿Con un telescopio de suficiente potencia, ¿podríamos detectar fotones antes de $t = 380{,}000$ años? ❙

CAPÍTULO 44 RESUMEN



Partículas fundamentales: Cada partícula tiene una antipartícula; algunas partículas son sus propias antipartículas. Las partículas pueden crearse y destruirse, algunas de ellas (incluyendo electrones y positrones) solo en pares, o en conjunto con otras partículas y antipartículas.

Las partículas sirven como mediadoras de las interacciones fundamentales. El fotón es el mediador de la interacción electromagnética. Yukawa propuso la existencia de mesones para mediar la interacción nuclear. Las partículas mediadoras que solo pueden existir a causa del principio de incertidumbre para la energía se llaman partículas virtuales.



Aceleradores y detectores de partículas: Los ciclotrones, sincrotrones y aceleradores lineales se usan para acelerar partículas cargadas hasta altas energías, con la finalidad de realizar experimentos con interacciones entre partículas. Solo parte de la energía del haz está disponible para causar reacciones con blancos en reposo. Este problema se evita en experimentos con haces colisionantes. (Véase los ejemplos 44.1 a 44.3).



Partículas e interacciones: En la naturaleza hay cuatro interacciones fundamentales: las interacciones fuerte, electromagnética, débil y gravitacional. Las partículas se pueden describir en términos de sus interacciones y cantidades que se conservan en todas o en algunas de las interacciones.

Los fermiones tienen espines semienteros; los bosones tienen espines enteros. Los leptones, que son fermiones, no tienen interacciones fuertes. A las partículas que tienen interacciones fuertes se les llama hadrones e incluyen los mesones, que siempre son bosones, y los bariones, que siempre son fermiones. Hay leyes de conservación de tres números leptónicos distintos, y para el número bariónico. Los números cuánticos adicionales, incluyendo la extrañeza y el encanto, se conservan en algunas interacciones pero no en otras. (Véase los ejemplos 44.4 a 44.6).

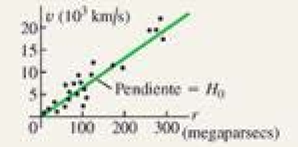
Quarks: Los hadrones están formados por quarks. Se cree que hay seis tipos de quarks. La interacción entre los quarks está mediada por gluones. Los quarks y los gluones tienen una propiedad adicional llamada color. (Véase el ejemplo 44.7).



La simetría y unificación de las interacciones: Las consideraciones de simetría desempeñan un papel central en todas las teorías de partículas fundamentales. Las interacciones electromagnética y débil se unifican a altas temperaturas en la interacción electrodébil. En las teorías de gran unificación también la interacción fuerte se unifica con esas interacciones, pero a energías mucho mayores.



La expansión del Universo y su composición: La ley de Hubble indica que las galaxias se están alejando entre sí y que el Universo se está expandiendo. De acuerdo con las observaciones, la rapidez de expansión se está acelerando debido a la presencia de energía oscura, que forma hasta el 72.6% de la energía del Universo. Solo el 4.6% de la energía en el Universo está en forma de materia ordinaria; el 22.8% restante es materia oscura, cuya naturaleza se entiende poco. (Véase los ejemplos 44.8 y 44.9).



La historia del Universo: En el modelo estándar del Universo, una gran explosión originó las primeras partículas fundamentales, que al final se unieron en los átomos más ligeros, a medida que el Universo se expandió y enfrió. La radiación cósmica de fondo es una reliquia del momento en el que se formaron esos átomos. Los elementos más pesados se formaron mucho tiempo después, mediante reacciones de fusión en el interior de las estrellas. (Véase los ejemplos 44.10 a 44.12).





PROBLEMA PRÁCTICO Hiperones, piones y un Universo en expansión

Un hiperón en reposo Λ^0 decae en un neutrón y en un π^0. *a*) Determine las energías cinéticas de los productos del decaimiento. *b*) ¿Qué fracción de la energía cinética total se saca de cada partícula? *c*) Un físico detecta en la Tierra uno de los dos fotones que se emiten en el decaimiento de un π^0. El π^0 estaba en reposo en el cúmulo que se muestra en la figura 44.19 antes de que éste decayera. ¿Cuál es la energía del fotón que se detecta en la Tierra?

GUÍA DE SOLUCIÓN

Véase el área de estudio MasteringPhysics® para consultar una solución con Video Tutor.



IDENTIFICAR y PLANTEAR

1. ¿Qué cantidades se conservan en el decaimiento del Λ^0? ¿Y en el decaimiento del π^0?
2. El Universo se expandió durante el tiempo que el fotón viajó a la Tierra. ¿Cómo afecta esto a la longitud de onda y a la energía del fotón que detecta el físico?
3. Liste las cantidades desconocidas de cada inciso del problema e identifique las incógnitas.
4. Seleccione las ecuaciones que le permitirán despejar a las incógnitas.

EJECUTAR

5. Escriba las ecuaciones de conservación del decaimiento del Λ^0. [*Sugerencia:* Es útil escribir la energía E de una partícula en términos de su momento lineal p y de su masa m usando $E = (p^2c^2 + m^2c^4)^{1/2}$].
6. Despeje la energía de las ecuaciones de conservación de uno de los productos de decaimiento. [*Sugerencia:* Reorganice la ecuación de conservación de la energía de modo que uno de los términos $(p^2c^2 + m^2c^4)^{1/2}$ sea un lado de la ecuación. Después eleve al cuadrado ambos lados]. Después utilice $K = E - mc^2$.
7. Encuentre la fracción de la energía cinética total que corresponde al neutrón y al pión.
8. Escriba las ecuaciones de conservación para el decaimiento del π^0 en reposo y encuentre la energía de cada fotón emitido. ¿Por qué factor cambia la longitud de onda de este fotón conforme viaja desde el cúmulo de galaxias a la Tierra? ¿Por qué factor cambia la *energía* del fotón? (*Sugerencia:* Véase la figura 44.19).

EVALUAR

9. ¿Cuál de los productos del decaimiento del Λ^0 debería tener la mayor energía cinética? ¿El fotón proveniente del decaimiento del π^0 detectado tiene mayor o menor energía que cuando se emitió?

Problemas

Para tareas asignadas por el profesor, visite www.masteringphysics.com



•, ••, •••: Problemas de dificultad creciente. **PA**: Problemas acumulativos que incorporan material de capítulos anteriores. **CALC**: Problemas que requieren cálculo. **BIO**: Problemas de ciencias biológicas.

PREGUNTAS PARA ANÁLISIS

P44.1 ¿Es posible que algunas partes del Universo contengan antimateria, cuyos átomos tengan núcleos formados por antiprotones y antineutrones rodeados por positrones? ¿Cómo podríamos detectar actualmente esta antimateria sin en realidad estar allá? ¿Podemos detectar esos antiátomos identificando la luz que emiten, si está formada por antifotones? Explique por qué. ¿Qué problemas se presentarían en realidad *si fuéramos* allá?

P44.2 Según el principio de incertidumbre de Heinsenberg, ¿es posible crear pares partícula-antipartícula que existan durante periodos extremadamente cortos antes de aniquilarse? ¿Esto significa que el espacio vacío en realidad está vacío?

P44.3 Cuando los piones y los muones se descubrieron durante las décadas de 1930 y 1940, había confusión acerca de sus identidades. ¿Cuáles son las semejanzas y las diferencias más importantes?

P44.4 La fuerza gravitacional entre dos electrones es más débil que la fuerza eléctrica por un factor del orden de 10^{-40}. Sin embargo, las interacciones gravitacionales de la materia se observaron, se analizaron y se comprendieron mucho antes que las interacciones eléctricas. ¿Por qué?

P44.5 Cuando un π^0 decae en dos fotones, ¿qué sucede con los quarks que lo formaban?

P44.6 ¿Por qué un electrón no puede decaer en dos fotones? ¿Y en dos neutrinos?

P44.7 Según el modelo estándar de las partículas fundamentales, ¿cuáles son las semejanzas entre bariones y leptones? ¿Cuáles son las diferencias más importantes?

P44.8 De acuerdo con el modelo estándar de las partículas fundamentales, ¿cuáles son las semejanzas entre quarks y leptones? ¿Cuáles son las diferencias más importantes?

P44.9 ¿Cuáles son las principales ventajas de los aceleradores de haces colisionantes, en comparación con los de blancos estacionarios? ¿Cuáles son las desventajas más importantes?

P44.10 ¿El Universo tiene un centro? Explique su respuesta.

P44.11 ¿Tiene sentido preguntarse: "Si el Universo está en expansión, ¿hacia dónde se expande?".

P44.12 Suponga que el Universo tiene un borde. Si usted se coloca en ese borde, en un experimento mental, explique por qué esta hipótesis viola el principio cosmológico.

P44.13 Explique por qué el principio cosmológico indica que H_0 tiene el mismo valor en cualquier punto del espacio, pero no requiere que sea constante en el tiempo.

EJERCICIOS

Sección 44.1 Partículas fundamentales y su historia

44.1 • Un pión neutro en reposo decae en dos fotones. Calcule la energía, frecuencia y longitud de onda aproximadas de cada fotón. ¿En qué parte del espectro electromagnético está cada fotón? (Use la masa del pión expresada en función de la masa del electrón en la sección 44.1).

44.2 •• **PA** Dos fotones de igual energía chocan de frente y se aniquilan entre sí, produciendo un par $\mu^+\mu^-$. La masa de cada muón se expresa en términos de la masa del electrón en la sección 44.1. *a*) Calcule la longitud de onda máxima que deben tener los fotones para que esto suceda. Si los fotones tienen esa longitud de onda, describa el movimiento del μ^+ y el μ^- inmediatamente después de que se producen. *b*) Si la longitud de onda de cada fotón es la mitad del valor calculado en el inciso, *a*) ¿cuál es la rapidez de cada muón después de que se separan? Use las expresiones relativistas correctas para el momento lineal y para la energía.

44.3 •• Un pión positivo en reposo decae formando un muón positivo y un neutrino. *a*) Aproximadamente, ¿cuánta energía se desprende en el decaimiento? (Suponga que el neutrino tiene masa cero en reposo. Use las masas del muón y el pión que se dan en la sección 44.1). *b*) ¿Por qué un muón positivo no puede decaer y formar un pión positivo?

44.4 • Un protón y un antiprotón se aniquilan y producen dos fotones. Calcule la energía, frecuencia y longitud de onda de cada fotón *a*) si el p y el $\overline{\text{p}}$ están inicialmente en reposo, y *b*) si el p y el $\overline{\text{p}}$ chocan de frente, cada uno con una energía cinética inicial de 830 MeV.

44.5 •• **PA** Para la reacción nuclear dada en la ecuación (44.2), suponga que la energía cinética inicial y el momento lineal de las partículas que reaccionan son despreciables. Calcule la rapidez de la partícula α inmediatamente después de que sale de la región de la reacción.

44.6 • Calcule el alcance de la fuerza mediada por un mesón ω^0 que tiene una masa de 783 MeV/c^2.

44.7 • La nave espacial *Enterprise*, que vemos en el cine y la televisión, está impulsada por la combinación controlada de materia y antimateria. Si todo el abastecimiento de combustible de 400 kg de antimateria del *Enterprise* se combina con materia, ¿cuánta energía se libera? ¿Cómo se compara esto con el consumo de energía anual de Estados Unidos, que es aproximadamente de 1.0×10^{20} J?

Sección 44.2 Aceleradores y detectores de partículas

44.8 • Un electrón con una energía total de 20.0 GeV choca contra un positrón estacionario. *a*) ¿Cuál es la energía disponible? *b*) Si el electrón y el positrón se aceleran en un colisionador, ¿qué energía total corresponde a la misma energía disponible del inciso *a*)?

44.9 • Los deuterones en un ciclotrón describen un círculo de 32.0 cm de radio, justo antes de salir de las des. La frecuencia del voltaje alterno aplicado es de 9.00 MHz. Calcule *a*) el campo magnético y *b*) la energía cinética y la rapidez de los deuterones al salir.

44.10 • El campo magnético de un ciclotrón que acelera protones es 1.30 T. *a*) ¿Cuántas veces por segundo debería invertirse el potencial entre las des? (Esto es el doble de la frecuencia con la que los protones se mueven a lo largo de la circunferencia). *b*) El radio máximo del ciclotrón es 0.250 m. ¿Cuál es la rapidez máxima del protón? *c*) ¿A través de qué diferencia de potencial debe acelerarse el protón desde el reposo, para comunicarle la misma rapidez que la calculada en el inciso *b*)?

44.11 • *a*) Un haz de partículas alfa de alta energía choca contra un blanco estacionario de helio gaseoso. ¿Cuál debe ser la energía total de un haz, si la energía disponible en la colisión es de 16.0 GeV? *b*) En cambio, ¿cuál debe ser la energía de cada haz para producir la misma energía disponible en un experimento con haces colisionantes?

44.12 •• *a*) ¿Cuál es la rapidez de un protón cuya energía total es 1000 GeV? *b*) ¿Cuál es la frecuencia angular ω de un protón con la rapidez calculada en el inciso *a*), en un campo magnético de 4.00 T? Use la ecuación no relativista (44.7) y también la ecuación relativista correcta, y compare los resultados.

44.13 • En el ejemplo 44.3, demostramos que un haz de protones con una energía de 800 GeV produce una energía disponible de 38.7 GeV para choques contra un blanco de protones estacionario. *a*) Se le pide que diseñe una actualización del acelerador, en la que se duplique la energía total disponible en choques con blanco estacionario. ¿Qué energía de haz se requiere? *b*) En un experimento de haces colisionantes, ¿qué energía total se necesita en cada haz para que la energía disponible sea de 2(38.7 GeV) = 77.4 GeV?

44.14 •• Calcule la energía de haz mínima en un colisionador protón-protón para iniciar la reacción $\text{p} + \text{p} \rightarrow \text{p} + \text{p} + \eta^0$. La energía en reposo de η^0 es 547.3 MeV (véase la tabla 44.3).

Sección 44.3 Partículas e interacciones

44.15 • Un mesón K^+ en reposo decae en dos mesones π. *a*) ¿Cuáles son las combinaciones permitidas que tienen como productos del decaimiento a π^0, π^+ y π^-? *b*) Encuentre la energía cinética total de los mesones π.

44.16 • ¿Cuánta energía se libera cuando un muón μ^- en reposo decae en un electrón y dos neutrinos? Desprecie las pequeñas masas de los neutrinos.

44.17 • ¿Cuál es la masa (en kg) de la Z^0? ¿Cuál es la relación de la masa de la Z^0 con la masa del protón?

44.18 • La tabla 44.3 muestra que una Σ^0 decae en una Λ^0 y un fotón. *a*) Calcule la energía del fotón emitido en este decaimiento, si la Λ^0 está en reposo. *b*) ¿Cuál es la magnitud del momento lineal del fotón? ¿Es razonable no tener en cuenta el momento lineal ni la energía cinética finales de la Λ^0? Explique por qué.

44.19 • Si una Σ^+ en reposo decae en un protón y un π^0, ¿cuál es la energía cinética total de los productos de decaimiento?

44.20 • El descubrimiento de la partícula Ω^- ayudó a confirmar el camino óctuple de Gell-Mann. Si una Ω^- decae en una Λ^0 y K^-, ¿cuál será la energía cinética total de los productos del decaimiento?

44.21 • ¿En cuáles de los siguientes decaimientos se conservan los tres números leptónicos? Para cada caso, explique su razonamiento. *a*) $\mu^- \rightarrow e^- + \nu_e + \overline{\nu}_\mu$; *b*) $\tau^- \rightarrow e^- + \overline{\nu}_e + \nu_\tau$; *c*) $\pi^+ \rightarrow e^+ + \gamma$; *d*) $\text{n} \rightarrow \text{p} + e^- + \overline{\nu}_e$.

44.22 • ¿En cuál de las siguientes reacciones o decaimientos se conserva el número bariónico? Para cada caso, explique su razonamiento? *a*) $\text{p} + \text{p} \rightarrow \text{p} + e^+$; *b*) $\text{p} + \text{n} \rightarrow 2e^+ + e^-$; *c*) $\text{p} \rightarrow \text{n} + e^- + \overline{\nu}_e$; *d*) $\text{p} + \overline{\text{p}} \rightarrow 2\gamma$.

44.23 • ¿En cuál de las siguientes reacciones o decaimientos se conserva la extrañeza? Para cada caso, explique su razonamiento. *a*) $\text{K}^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu$; *b*) $\text{n} + \text{K}^+ \rightarrow \text{p} + \pi^0$; *c*) $\text{K}^+ + \text{K}^- \rightarrow \pi^0 + \pi^0$; *d*) $\text{p} + \text{K}^- \rightarrow \Lambda^0 + \pi^0$.

44.24 •• **PA** *a*) Demuestre que la constante de acoplamiento para la interacción electromagnética, $e^2/4\pi\epsilon_0\hbar c$, es adimensional y tiene el valor numérico 1/137.0. *b*) Demuestre que en el modelo de Bohr, la rapidez orbital de un electrón en la órbita $n = 1$ es igual a c por la constante de acoplamiento, $e^2/4\pi\epsilon_0\hbar c$.

44.25 • Demuestre que la constante de acoplamiento de la fuerza nuclear, $f^2/\hbar c$, es adimensional.

Sección 44.4 Los quarks y el camino óctuple

44.26 • Nueve de los bariones con espín $\frac{3}{2}$ son cuatro partículas Δ, cada una con 1232 MeV/c^2 de masa, extrañeza 0 y cargas $+2e$, $+e$, 0 y $-e$; tres partículas Σ^*, cada una con 1385 MeV/c^2 de masa, extrañeza -1 y cargas $+e$, 0 y $-e$; y dos partículas Ξ^*, cada una con 1530 MeV/c^2 de masa, extrañeza -2 y cargas 0 y $-e$. *a*) Dibuje esas partículas en una gráfica de S en función de Q. Deduzca los valores de Q y S del décimo barión con espín $\frac{3}{2}$, la partícula Ω^- e indíquela en su diagrama. También, identifique las partículas con sus masas. La masa de la Ω^- es 1672 MeV/c^2. ¿Es consistente este valor con su diagrama? *b*) Deduzca las combinaciones de los tres quarks (de ***d***, ***u*** y ***s***) que conforman cada una de estas diez partículas. Vuelva a trazar la gráfica de S en función de Q del inciso *a*), con cada partícula identificada por su contenido de quarks. ¿Qué regularidades observa?

44.27 • Determine la carga eléctrica, el número bariónico, así como los números cuánticos de extrañeza y encanto, para las siguientes combinaciones de quarks *a*) ***uds***; *b*) $\boldsymbol{c\overline{u}}$; *c*) ***ddd***, y *d*) $\boldsymbol{d\overline{c}}$. Explique su razonamiento.

44.28 •• Determine la carga eléctrica, el número bariónico, así como los números cuánticos de extrañeza y encanto, para las siguientes combinaciones de quarks: *a*) ***uus***, *b*) $\boldsymbol{c\overline{s}}$, *c*) $\boldsymbol{\overline{ddu}}$ y *d*) $\boldsymbol{\overline{c}b}$.

44.29 • La fuerza débil puede cambiar el sabor del quark en una interacción. Explique cómo cambia en un decaimiento β^+ el sabor del quark. Si un protón experimenta decaimiento β^+, determine la reacción de decaimiento.

44.30 • ¿Cuál es la energía cinética total de decaimiento cuando una partícula épsilon en reposo decae a $\tau^+ + \tau^-$?

44.31 • El contenido de quarks del neutrón es ***udd***. *a*) ¿Cuál es el contenido de quarks del antineutrón? Explique su razonamiento. *b*) ¿El

neutrón es su propia antipartícula? ¿Por qué? *c*) El contenido de quarks de la ϕ es $c\bar{c}$. ¿La ϕ es su propia antipartícula? Explique por qué.

44.32 • Puesto que cada partícula solo contiene combinaciones de u, d, s, $\bar{u}$, $\bar{d}$ y $\bar{s}$ use el método del ejemplo 44.7 para deducir el contenido de quarks de *a*) una partícula de carga $+e$, número bariónico 0 y extrañeza +1; *b*) una partícula con carga $+e$, número bariónico −1 y extrañeza +1, y *c*) una partícula con carga 0, número bariónico +1 y extrañeza −2.

Sección 44.6 El Universo en expansión

44.33 • El espectro del átomo de sodio se detecta en la luz de una galaxia lejana. *a*) Si la línea de 590.0 nm presenta corrimiento al rojo hasta 658.5 nm, ¿a qué rapidez se aleja esa galaxia de la Tierra? *b*) Use la ley de Hubble para calcular la distancia de la Tierra a la galaxia.

44.34 • **Parámetro de corrimiento al rojo.** La definición del parámetro z de corrimiento al rojo se presenta en el ejemplo 44.8. *a*) Demuestre que la ecuación (44.13) puede escribirse en la forma $1 + z = ([1 + \beta]/[1 - \beta])^{1/2}$, donde $\beta = v/c$. *b*) El parámetro de corrimiento al rojo observado en una galaxia es $z = 0.500$. Calcule la rapidez de la galaxia en relación con la Tierra, si el corrimiento se debe al efecto Doppler. *c*) Use la ley de Hubble para calcular la distancia de esta galaxia a la Tierra.

44.35 • Una galaxia en la constelación de Piscis está a 5210 Mal (millones de años luz) de la Tierra. *a*) Use la ley de Hubble para calcular la rapidez con que esa galaxia se está alejando de la Tierra. *b*) ¿Qué relación de corrimiento al rojo, λ_0/λ_S, se espera en la luz de esa galaxia?

44.36 •• *a*) De acuerdo con la ley de Hubble, ¿cuál es la distancia r hasta las galaxias que se alejan de nosotros con una rapidez c? *b*) Explique por qué la distancia calculada en el inciso *a*) es el tamaño de nuestro Universo observable (sin tomar en cuenta desaceleración alguna en la expansión del Universo debida a la atracción gravitacional o a la energía oscura).

44.37 •• La densidad crítica del Universo es de 9.5×10^{-27} kg/m^3. *a*) Suponiendo que todo el Universo fuera de hidrógeno, exprese la densidad crítica en el número de átomos de H por metro cúbico. *b*) Si la densidad del Universo fuera igual a la densidad crítica, ¿cuántos átomos en promedio esperaría usted encontrar en un recinto de dimensiones $4 \times 7 \times 3$ m? *c*) Compare su respuesta del inciso *b*) con el número de átomos que encontraría en el mismo recinto en las condiciones normales de la Tierra.

Sección 44.7 El principio del tiempo

44.38 • *a*) Demuestre que la ecuación de la longitud de Planck, $\sqrt{\hbar G/c^3}$, tiene dimensiones de longitud. *b*) Evalúe el valor numérico de $\sqrt{\hbar G/c^3}$, y compruebe el valor dado en la ecuación (44.21).

44.39 • Calcule la energía liberada en cada una de las siguientes reacciones: *a*) $p + {}^2H \rightarrow {}^3He$; *b*) $n + {}^3He \rightarrow {}^4He$.

44.40 • Calcule la energía (en MeV) liberada en el proceso triple alfa $3\,{}^4He \rightarrow {}^{12}C$.

44.41 • Calcule la energía de desintegración Q (en MeV) (también se conoce como valor Q) para la reacción $e^- + p \rightarrow n + \nu_e$. ¿Esta reacción es endotérmica o exotérmica?

44.42 • Calcule la energía de desintegración Q (en MeV) para la reacción de nucleosíntesis.

$${}^{12}_{6}C + {}^{4}_{2}He \rightarrow {}^{16}_{8}O$$

¿Esta reacción es endotérmica o exotérmica?

44.43 • PA En la radiación de cuerpo negro, de 2.728 K, la longitud de onda que corresponde al máximo es de 1.062 mm. ¿Cuál es la longitud de onda que corresponde al máximo en t = 700,000 años, cuando la temperatura era de 3000 K?

PROBLEMAS

44.44 • PA Un átomo de positronio se compone de un electrón y un positrón. En el modelo de Bohr, las dos partículas orbitan alrededor de su centro común de masas. En el modelo de Bohr, ¿cuál es la energía de ionización de un átomo de positronio cuando se encuentra en su estado base?

44.45 • En el LHC, cada protón se acelerará hasta tener una energía cinética de 7.0 TeV. *a*) En los haces colisionantes, ¿cuál es la energía disponible E_a en una colisión? *b*) En un experimento con blanco fijo, en el que un haz de protones incide sobre un blanco de protones estacionarios, ¿cuál debe ser la energía total (en TeV) de las partículas del haz, para producir la misma energía disponible que en el inciso *a*)?

44.46 •• Un protón y un antiprotón chocan de frente con energías cinéticas iguales. Se producen dos rayos γ con longitudes de onda de 0.780 fm. Calcule la energía cinética del protón incidente.

44.47 •• PA BIO **Radioterapia con mesones π^-.** En la terapia de radiación para ciertos tipos de cáncer se utilizan haces de mesones π^-. La energía proviene del decaimiento completo de los mesones π^- en partículas estables. *a*) Escriba el decaimiento completo de un mesón π^- en partículas estables. ¿Cuáles son estas partículas? *b*) ¿Cuánta energía se libera del decaimiento completo de un único mesón π^- en partículas estables? (Desprecie las masas muy pequeñas de los neutrinos). *c*) ¿Cuántos mesones π^- decaen para dar una dosis de 50.0 Gy a 10.0 g de tejidos? *d*) ¿Cuál sería la dosis equivalente en el inciso *c*) en Sv y en rem? Consulte la tabla 43.3 y utilice la mayor eficacia biológica relativa (EBR) adecuada para las partículas que participan en este decaimiento.

44.48 •• Calcule la energía cinética de umbral para la reacción $\pi^- + p \rightarrow \Sigma^0 + K^0$ si un haz de π^- incide en un blanco de protones estacionarios. La K^0 tiene una masa de 497.7 MeV/c^2.

44.49 •• Calcule la energía cinética de umbral para la reacción $p + p \rightarrow p + p + K^+ + K^-$ si un haz de protones incide en un blanco de protones estacionarios.

44.50 •• Un mesón η^0 en reposo decae en tres mesones π. *a*) ¿Cuáles son las combinaciones permitidas de π^0, π^+ y π^- como productos de decaimiento? *b*) Calcule la energía cinética total de los mesones π.

44.51 • A cada una de las siguientes reacciones le falta una sola partícula. Calcule número bariónico, carga, extrañeza y los tres números leptónicos (cuando sea necesario) de la partícula que falta y, a partir de ello, identifíquela. *a*) $p + p \rightarrow p + \Lambda^0 + ?$; *b*) $K^- + n \rightarrow \Lambda^0 + ?$; *c*) $p + \bar{p} \rightarrow n + ?$; *d*) $\bar{\nu}_\mu + p \rightarrow n + ?$

44.52 • Estime el ancho de energía (incertidumbre en la energía) de la ϕ, si su vida media es de 7.6×10^{-21} s. ¿Qué fracción de su energía en reposo es esta incertidumbre?

44.53 • El mesón ϕ tiene 1019.4 MeV/c^2 de masa, y un ancho de energía medido de 4.4 MeV/c^2. Aplique el principio de incertidumbre y estime la vida media del mesón ϕ.

44.54 •• Un mesón ϕ (véase el problema 44.53) en reposo decae a través de $\phi \rightarrow K^+ + K^-$. Su extrañeza es 0. *a*) Calcule la energía cinética del mesón K^+. (Suponga que los dos productos de decaimiento comparten por igual la energía cinética, porque sus masas son iguales). *b*) Sugiera una razón por la que no se observa el decaimiento $\phi \rightarrow K^+ + K^- + \pi^0$. *c*) Sugiera razones por las que no se hayan observado los decaimientos: $\phi \rightarrow K^+ + \pi^-$ y $\phi \rightarrow K^+ + \mu^-$.

44.55 •• PA BIO Un decaimiento posible es $p^+ \rightarrow e^+ + \pi^0$, que viola la conservación tanto del número bariónico como del número leptónico, así que se espera que la vida media del protón sea muy larga. Suponga que la vida media del protón fuera de 1.0×10^{18} años. *a*) Calcule la energía depositada, por kilogramo de tejido corporal (en rad), debida al decaimiento de los protones de su organismo, en un año. Modele su organismo como formado totalmente por agua. Solo los dos protones en los átomos de hidrógeno de cada molécula de H_2O decaerían en la manera indicada; ¿Ve usted por qué? Suponga que la π^0 decae en dos rayos γ, que el positrón se aniquila con un electrón, y que toda la energía producida en el decaimiento primario y de esos decaimientos secundarios permanece en su organismo. *b*) Calcule la dosis equivalente (en rem) suponiendo una EBR de 1.0 para todos los productos de la radiación, y compárela con el 0.1 rem que se debe al fondo natural, y con el límite de 5.0 rem para trabajadores industriales. Con base

en su cálculo, ¿la vida media del protón puede ser tan corta como 1.0×10^{18} años?

44.56 ••• PA Una partícula Ξ^- en reposo decae en una Λ^0 y una π^-. *a*) Calcule la energía cinética total de los productos de decaimiento. *b*) ¿Qué fracción de la energía se queda en cada partícula? (Para simplificar, use ecuaciones relativistas para el momento lineal y la energía cinética).

44.57 •• CALC Considere el modelo de globo esférico para un Universo bidimensional en expansión (véase la figura 44.17 en la sección 44.6). La distancia mínima entre dos puntos en la superficie, medida a lo largo de la superficie, es la longitud del arco r, donde $r = R\theta$. A medida que se infla el globo, aumenta su radio R, pero el ángulo θ entre los dos puntos permanece constante. *a*) Explique por qué en cualquier momento, $(dR/dt)/R$ es el mismo para todos los puntos en el globo. *b*) Demuestre que $v = dr/dt$ es directamente proporcional a r en cualquier momento. *c*) De acuerdo con su respuesta en el inciso *b*), ¿cuál es la expresión de la constante de Hubble H_0 en función de R y de dR/dt? *d*) La ecuación de H_0 que dedujo usted en el inciso *c*) es constante en el espacio. ¿Cómo debería depender R del tiempo, para que H_0 sea constante en el tiempo? *e*) ¿Es congruente su respuesta en el inciso *d*) con la atracción gravitacional de la materia en el Universo?

44.58 ••• CALC Suponga que todas las condiciones son las mismas que en el problema 44.57, excepto que $v = dr/dt$ es constante para determinada θ, y que H_0 no es constante en el tiempo. En ese caso, demuestre que la constante de Hubble es $H_0 = 1/t$ y, en consecuencia, que el valor actual es $1/T$, donde T es la edad del Universo.

44.59 •• Tirón cósmico. Las densidades de la materia ordinaria y de materia oscura han disminuido conforme se ha expandido el Universo, ya que la misma cantidad de masa ocupa un volumen cada vez mayor. No obstante las observaciones sugieren que la densidad de la energía oscura se ha mantenido constante a lo largo de toda la historia del Universo. *a*) Explique por qué la expansión del Universo en realidad se desaceleró en sus inicios, pero en la actualidad se está acelerando. "Tirón" es el término para un cambio en la aceleración, por lo que el cambio en la expansión cósmica de ralentizar a acelerar se llama *tirón cósmico*. *b*) Los cálculos indican que el cambio en la aceleración se produjo cuando la densidad combinada de la materia de todo tipo era igual a dos veces la densidad de la energía oscura. En comparación con el valor actual del factor de escala, ¿cuál era el factor de escala en ese momento? *c*) En las figuras 44.15b y 44.19 vemos los cúmulos de galaxias que había de hace 300 millones de años a 10,200 millones años atrás. En esos tiempos, ¿la expansión del Universo se ralentizaba o aceleraba? (*Sugerencia:* Véase el título de la figura 44.19).

44.60 ••• PA Un mesón K^0, que tiene 497.7 MeV de energía en reposo, se mueve en la dirección x con 225 MeV de energía cinética cuando decae en un π^+ y en un π^-, los cuales se mueven en ángulos iguales arriba y debajo del eje x. Calcule la energía cinética del π^+ y el ángulo que forma este con el eje x. Utilice expresiones relativistas para la energía y el momento lineal.

44.61 ••• PA Una partícula Σ^-, que se mueve en la dirección $+x$ con 180 MeV de energía cinética, decae en un π^- y en un neutrón. El π^- se mueve en la dirección $+y$. ¿Cuál es la energía cinética del neutrón, y cuál es la dirección de su velocidad? Utilice expresiones relativistas para la energía y el momento lineal.

PROBLEMA DE DESAFÍO

44.62 ••• PA Considere un choque en el que una partícula estacionaria de masa M recibe el impacto de una partícula de masa m, rapidez v_0 y energía total (incluyendo la energía en reposo) E_m. *a*) Use la transformación de Lorentz para expresar las velocidades v_m y v_M de las partículas m y M, en función de la rapidez v_{cm} del centro del momento lineal. *b*) Aproveche que el momento lineal total es cero en el sistema de referencia del centro de momento lineal para obtener una ecuación que permita determinar v_{cm} en función de m, M y v_0. *c*) Combine los resultados de los incisos *a*) y *b*) para obtener la ecuación (44.9), de la energía total en el sistema de referencia del centro de momento lineal.

Respuestas

Pregunta inicial del capítulo



Solo el 4.6% de la masa y la energía del Universo se encuentra en la forma de materia "normal" u "ordinaria". Del resto, el 22.8% es la llamada materia oscura, que se entiende poco, y el 72.6% es la aún más misteriosa energía oscura.

Preguntas de las secciones Evalúe su comprensión

44.1 Respuesta: i, iii, ii, iv. Cuanto más masiva sea la partícula virtual, más breve es su vida media y menor será la distancia que podrá viajar durante esta.

44.2 Respuesta: no En un choque de frente entre un electrón y un positrón de igual energía, el momento lineal neto es cero. Como se conservan tanto el momento lineal como la energía en el choque, el fotón virtual también tiene un momento lineal $p = 0$, pero tiene una energía $E = 90$ GeV + 90 GeV = 180 GeV. En consecuencia, definitivamente la relación $E = pc$ no es cierta para este fotón virtual.

44.3 Respuesta: no Todos los mesones tienen número bariónico $B = 0$, mientras que un protón tiene $B = 1$. El decaimiento de un protón en uno o más mesones necesitaría que el número bariónico no se conservara. No se ha observado nunca una violación de este principio de conservación, por lo que el decaimiento propuesto es imposible.

44.4 Respuesta: no Solo el quark s, con $S = -1$, tiene extrañeza distinta de cero. Para que un barión tenga $S = -2$, debe tener dos quarks s y un quark de diferente sabor. Como cada quark s tiene la carga $-\frac{1}{3}e$, el quark sin extrañeza debe tener carga $+\frac{5}{3}e$ para que la carga neta sea igual a $+e$. Pero ningún quark tiene la carga $+\frac{5}{3}e$, de modo que es imposible el barión propuesto.

44.5 Respuesta: i. Si un quark d en un neutrón (contenido de quarks udd) sufre el proceso $d \rightarrow u + e^- + \bar{\nu}_e$, el barión que queda tiene el contenido de quarks uud, por lo que es un protón (véase la figura 44.11). Un electrón es igual a una partícula β^- y entonces el resultado neto es un decaimiento beta menos: $n \rightarrow p + \beta^- + \bar{\nu}_e$.

44.6 Respuesta: sí . . . y no El material del cual está formado nuestro cuerpo es ordinario para nosotros en la Tierra. Sin embargo, desde la perspectiva más amplia del Universo como un todo, el material del que estamos hechos es bastante *extraordinario*: solo el 4.6% de la masa y la energía en el Universo se encuentra en la forma de átomos.

44.7 Respuesta: no Antes de $t = 380{,}000$ años, la temperatura era tan alta que los átomos no podían formarse, así que los protones y electrones tenían completa libertad. Esas partículas cargadas eran muy efectivas para dispersar los fotones, por lo que la luz no se podía propagar muy lejos, y el Universo era opaco. Los fotones más antiguos que podemos detectar datan del instante $t = 380{,}000$ años; así fue como los átomos se formaron y el Universo se volvió transparente.

Problema práctico

Respuestas: *a*) 5.78 MeV para el neutrón, 35.62 MeV para el pión
b) 0.140 para el neutrón, 0.860 para el pión
c) 24 MeV



EL SISTEMA INTERNACIONAL DE UNIDADES

El *Système International d'Unités*, abreviado SI, es el sistema desarrollado por la Conferencia General de Pesos y Medidas y adoptado por casi todas las naciones industriales del mundo. El siguiente material es una adaptación del National Institute of Standards and Technology (**http://physics.nist.gov/cuu**).

Cantidad	Nombre de la unidad	Símbolo	
	Unidades básicas del SI		
longitud	metro	m	
masa	kilogramo	kg	
tiempo	segundo	s	
corriente eléctrica	ampere	A	
temperatura termodinámica	kelvin	K	
cantidad de sustancia	mol	mol	
intensidad lumínica	candela	cd	
	Unidades derivadas del SI		**Unidades equivalentes**
área	metro cuadrado	m^2	
volumen	metro cúbico	m^3	
frecuencia	hertz	Hz	s^{-1}
densidad de masa (densidad)	kilogramo por metro cúbico	kg/m^3	
rapidez, velocidad	metro por segundo	m/s	
velocidad angular	radián por segundo	rad/s	
aceleración	metro por segundo al cuadrado	m/s^2	
aceleración angular	radián por segundo al cuadrado	rad/s^2	
fuerza	newton	N	$kg \cdot m/s^2$
presión (tensión mecánica)	pascal	Pa	N/m^2
viscosidad cinemática	metro cuadrado por segundo	m^2/s	
viscosidad dinámica	newton-segundo por metro cuadrado	$N \cdot s/m^2$	
trabajo, energía, cantidad de calor	joule	J	$N \cdot m$
potencia	watt	W	J/s
cantidad de electricidad	coulomb	C	$A \cdot s$
diferencia de potencia, fuerza electromotriz	volt	V	J/C, W/A
fuerza de campo eléctrico	volt por metro	V/m	N/C
resistencia eléctrica	ohm	Ω	V/A
capacitancia	farad	F	$A \cdot s/V$
flujo magnético	weber	Wb	$V \cdot s$
inductancia	henry	H	$V \cdot s/A$
densidad de flujo magnético	tesla	T	Wb/m^2
fuerza de campo magnético	ampere por metro	A/m	
fuerza magnetomotriz	ampere	A	
flujo luminoso	lumen	lm	$cd \cdot sr$
luminancia	candela por metro cuadrado	cd/m^2	
iluminancia	lux	lx	lm/m^2
número de onda	1 por metro	m^{-1}	
entropía	joule por kelvin	J/K	
capacidad de calor específico	joule por kilogramo-kelvin	$J/kg \cdot K$	
conductividad térmica	watt por metro-kelvin	$W/m \cdot K$	

Cantidad	Nombre de la unidad	Símbolo	Unidades equivalentes
intensidad radiante	watt por esterradián	W/sr	
actividad (de una fuente radiactiva)	becquerel	Bq	s^{-1}
dosis de radiación	gray	Gy	J/kg
dosis de radiación equivalente	sievert	Sv	J/kg
	Unidades complementarias del SI		
ángulo plano	radián	rad	
ángulo sólido	esterradián	sr	

Definiciones de las unidades del SI

metro (m) El *metro* es la longitud igual a la distancia recorrida por la luz, en el vacío, en un tiempo de 1/299,792,458 segundos.

kilogramo (kg) El *kilogramo* es la unidad de masa; es igual a la masa del prototipo internacional del kilogramo (que es un cilindro particular de una aleación de platino-iridio que la Oficina Internacional de Pesas y Medidas conserva en una bóveda de seguridad en Sèvres, Francia).

segundo (s) El *segundo* es la duración de 9,192,631,770 periodos de la radiación correspondiente a la transición entre los dos niveles hiperfinos del estado fundamental del átomo de cesio 133.

ampere (A) El *ampere* es la corriente constante que, si se mantiene en dos conductores rectos y paralelos de longitud infinita, de sección transversal circular despreciable y separados por una distancia de 1 metro en el vacío, produciría entre ellos una fuerza igual a 2×10^{-7} newtons por metro de longitud.

kelvin (K) El *kelvin*, unidad de temperatura termodinámica, es la fracción 1/273.16 de la temperatura termodinámica del punto triple del agua.

ohm (Ω) El *ohm* es la resistencia eléctrica entre dos puntos de un conductor cuando una diferencia constante de potencial de 1 volt, aplicada entre ellos, produce en el conductor una corriente de 1 ampere, sin que el conductor sea fuente de ninguna fuerza electromotriz.

coulomb (C) El *coulomb* es la cantidad de electricidad transportada en 1 segundo por una corriente de 1 ampere.

candela (cd) La *candela* es la intensidad luminosa, en una dirección dada, de una fuente que emite radiación monocromática de frecuencia 540×10^{12} hertz y que tiene una intensidad radiante en esa dirección de 1/683 watts por esterradián.

mol (mol) El *mol* es la cantidad de sustancia de un sistema que contiene tantas entidades elementales como átomos de carbono hay en 0.012 kg de carbono 12. Las entidades elementales deben estar especificadas y pueden ser átomos, moléculas, iones, electrones, otras partículas o grupos especificados de esas partículas.

newton (N) El *newton* es la fuerza que da a una masa de 1 kilogramo una aceleración de 1 metro por segundo por segundo.

joule (J) El *joule* es el trabajo realizado cuando el punto de aplicación de una fuerza constante de 1 newton se desplaza una distancia de 1 metro en la dirección de esa fuerza.

watt (W) El *watt* es la potencia que da lugar a la generación de energía a razón de 1 joule por segundo.

volt (V) El *volt* es la diferencia de potencial eléctrico entre dos puntos de un alambre conductor que transporta una corriente constante de 1 ampere, cuando la potencia disipada entre tales puntos es igual a 1 watt.

weber (Wb) El *weber* es el flujo magnético que, al cerrar un circuito de una vuelta, produce en este una fuerza electromotriz de 1 volt conforme se reduce a cero a una tasa uniforme de 1 segundo.

lumen (lm) El *lumen* es el flujo luminoso emitido en un ángulo sólido de 1 esterradián por una fuente puntual uniforme que tiene una intensidad de 1 candela.

farad (F) El *farad* es la capacitancia de un capacitor entre cuyas placas hay una diferencia de potencial de 1 volt cuando tiene una carga de electricidad igual a 1 coulomb.

henry (H) El *henry* es la inductancia de un circuito cerrado en el que se produce una fuerza electromotriz de 1 volt cuando la corriente eléctrica en el circuito varía de manera uniforme a razón de 1 ampere por segundo.

radián (rad) El *radián* es el ángulo plano entre dos radios de un círculo que recorre en la circunferencia un arco igual a la longitud del radio.

esterradián (sr) El *esterradián* es el ángulo sólido que, cuando tiene su vértice en el centro de una esfera, recorre una área de la superficie de la esfera igual a la de un cuadrado cuyos lados tienen una longitud igual al radio de la esfera.

prefijos del SI Los nombres de los múltiplos y submúltiplos de unidades del SI se forman con la aplicación de los prefijos listados en el apéndice F.

APÉNDICE B

RELACIONES MATEMÁTICAS ÚTILES

Álgebra

$a^{-x} = \dfrac{1}{a^x} \qquad a^{(x+y)} = a^x a^y \qquad a^{(x-y)} = \dfrac{a^x}{a^y}$

Logaritmos: Si $\log a = x$, entonces $a = 10^x$. $\log a + \log b = \log(ab)$ $\log a - \log b = \log(a/b)$ $\log(a^n) = n \log a$

Si $\ln a = x$, entonces $a = e^x$. $\ln a + \ln b = \ln(ab)$ $\ln a - \ln b = \ln(a/b)$ $\ln(a^n) = n \ln a$

Fórmula cuadrática: Si $ax^2 + bx + c = 0$, $\quad x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

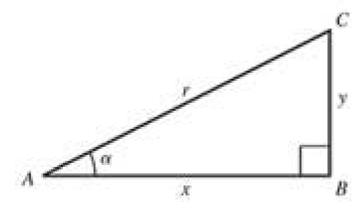
Teorema del binomio

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)a^{n-2}b^2}{2!} + \frac{n(n-1)(n-2)a^{n-3}b^3}{3!} + \cdots$$

Trigonometría

En el triángulo rectángulo ABC, $x^2 + y^2 = r^2$.

Definiciones de las funciones trigonométricas:
$\operatorname{sen} \alpha = y/r \qquad \cos\alpha = x/r \qquad \tan\alpha = y/x$



Identidades: $\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \qquad \tan\alpha = \dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}$

$\operatorname{sen} 2\alpha = 2 \operatorname{sen}\alpha\cos\alpha \qquad \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\operatorname{sen}^2\alpha$

$\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}\alpha = \sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{2}} \qquad \cos\tfrac{1}{2}\alpha = \sqrt{\dfrac{1+\cos\alpha}{2}}$

$\operatorname{sen}(-\alpha) = -\operatorname{sen}\alpha \qquad \operatorname{sen}(\alpha \pm \beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\operatorname{sen}\beta$

$\cos(-\alpha) = \cos\alpha \qquad \cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$

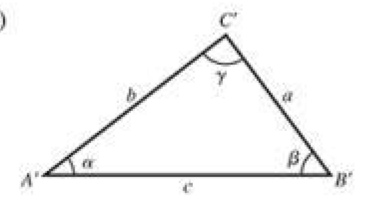
$\operatorname{sen}(\alpha \pm \pi/2) = \pm\cos\alpha \qquad \operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\beta = 2\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)$

$\cos(\alpha \pm \pi/2) = \mp\operatorname{sen}\alpha \qquad \cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)$

Para *cualquier* triángulo $A'B'C'$ (no necesariamente un triángulo rectángulo) de lados a, b y c y ángulos α, β y γ:

Ley de los senos: $\dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{a} = \dfrac{\operatorname{sen}\beta}{b} = \dfrac{\operatorname{sen}\gamma}{c}$

Ley de los cosenos: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$



Geometría

Circunferencia de un círculo de radio r: $C = 2\pi r$
Área de un círculo de radio r: $A = \pi r^2$
Volumen de una esfera de radio r: $V = 4\pi r^3/3$
Área de la superficie de una esfera de radio r: $A = 4\pi r^2$
Volumen de un cilindro de radio r y altura h: $V = \pi r^2 h$

Cálculo

Derivadas:

$$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1} \qquad \frac{d}{dx}\ln ax = \frac{1}{x} \qquad \frac{d}{dx}e^{ax} = ae^{ax}$$

$$\frac{d}{dx}\operatorname{sen} ax = a\cos ax \qquad \frac{d}{dx}\cos ax = -a\operatorname{sen} ax$$

Integrales:

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad (n \neq -1) \qquad \int\frac{dx}{x} = \ln x \qquad \int e^{ax}\,dx = \frac{1}{a}e^{ax}$$

$$\int \operatorname{sen} ax\,dx = -\frac{1}{a}\cos ax \qquad \int \cos ax\,dx = \frac{1}{a}\operatorname{sen} ax \qquad \int\frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \operatorname{arcsen}\frac{x}{a}$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + a^2}\right) \qquad \int\frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} \qquad \int\frac{dx}{(x^2 + a^2)^{3/2}} = \frac{1}{a^2}\frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}}$$

$$\int\frac{x\,dx}{(x^2 + a^2)^{3/2}} = -\frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}}$$

Series de potencias (convergentes para el intervalo de x que se indica):

$$(1 + x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)x^2}{2!} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \cdots \quad (|x| < 1)$$

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots \quad (\text{todas las } x)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots \quad (\text{todas las } x)$$

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \cdots \quad (|x| < \pi/2)$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \quad (\text{todas las } x)$$

$$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots \quad (|x| < 1)$$

APÉNDICE C

EL ALFABETO GRIEGO

Nombre	Mayúscula	Minúscula	Nombre	Mayúscula	Minúscula	Nombre	Mayúscula	Minúscula
Alfa	A	α	Iota	I	ι	Rho	P	ρ
Beta	B	β	Kappa	K	κ	Sigma	Σ	σ
Gamma	Γ	γ	Lambda	Λ	λ	Tau	T	τ
Delta	Δ	δ	Mu	M	μ	Ípsilon	Υ	υ
Épsilon	E	ϵ	Nu	N	ν	Fi	Φ	ϕ
Zeta	Z	ζ	Xi	Ξ	ξ	Chi	X	χ
Eta	H	η	Ómicron	O	o	Psi	Ψ	ψ
Theta	Θ	θ	Pi	Π	π	Omega	Ω	ω



APÉNDICE D

TABLA PERIÓDICA DE LOS ELEMENTOS

Grupo / Periodo	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
1	1 **H** 1.008																	2 **He** 4.003
2	3 **Li** 6.941	4 **Be** 9.012											5 **B** 10.811	6 **C** 12.011	7 **N** 14.007	8 **O** 15.999	9 **F** 18.998	10 **Ne** 20.180
3	11 **Na** 22.990	12 **Mg** 24.305											13 **Al** 26.982	14 **Si** 28.086	15 **P** 30.974	16 **S** 32.065	17 **Cl** 35.453	18 **Ar** 39.948
4	19 **K** 39.098	20 **Ca** 40.078	21 **Sc** 44.956	22 **Ti** 47.867	23 **V** 50.942	24 **Cr** 51.996	25 **Mn** 54.938	26 **Fe** 55.845	27 **Co** 58.933	28 **Ni** 58.693	29 **Cu** 63.546	30 **Zn** 65.409	31 **Ga** 69.723	32 **Ge** 72.64	33 **As** 74.922	34 **Se** 78.96	35 **Br** 79.904	36 **Kr** 83.798
5	37 **Rb** 85.468	38 **Sr** 87.62	39 **Y** 88.906	40 **Zr** 91.224	41 **Nb** 92.906	42 **Mo** 95.94	43 **Tc** (98)	44 **Ru** 101.07	45 **Rh** 102.906	46 **Pd** 106.42	47 **Ag** 107.868	48 **Cd** 112.411	49 **In** 114.818	50 **Sn** 118.710	51 **Sb** 121.760	52 **Te** 127.60	53 **I** 126.904	54 **Xe** 131.293
6	55 **Cs** 132.905	56 **Ba** 137.327	71 **Lu** 174.967	72 **Hf** 178.49	73 **Ta** 180.948	74 **W** 183.84	75 **Re** 186.207	76 **Os** 190.23	77 **Ir** 192.217	78 **Pt** 195.078	79 **Au** 196.967	80 **Hg** 200.59	81 **Tl** 204.383	82 **Pb** 207.2	83 **Bi** 208.980	84 **Po** (209)	85 **At** (210)	86 **Rn** (222)
7	87 **Fr** (223)	88 **Ra** (226)	103 **Lr** (262)	104 **Rf** (261)	105 **Db** (262)	106 **Sg** (266)	107 **Bh** (264)	108 **Hs** (269)	109 **Mt** (268)	110 **Ds** (271)	111 **Rg** (272)	112 **Uub** (285)	113 **Uut** (284)	114 **Uuq** (289)	115 **Uup** (288)	116 **Uuh** (292)	117 **Uus** (294)	118 **Uuo**

Lantánidos	57 **La** 138.905	58 **Ce** 140.116	59 **Pr** 140.908	60 **Nd** 144.24	61 **Pm** (145)	62 **Sm** 150.36	63 **Eu** 151.964	64 **Gd** 157.25	65 **Tb** 158.925	66 **Dy** 162.500	67 **Ho** 164.930	68 **Er** 167.259	69 **Tm** 168.934	70 **Yb** 173.04
Actínidos	89 **Ac** (227)	90 **Th** (232)	91 **Pa** (231)	92 **U** (238)	93 **Np** (237)	94 **Pu** (244)	95 **Am** (243)	96 **Cm** (247)	97 **Bk** (247)	98 **Cf** (251)	99 **Es** (252)	100 **Fm** (257)	101 **Md** (258)	102 **No** (259)

Para cada elemento, se indica la masa atómica media del conjunto de isótopos que existen en la naturaleza. Para los elementos que no tienen un isótopo estable, la masa atómica aproximada del isótopo de vida más larga se indica entre paréntesis. Para los elementos cuya existencia se ha pronosticado pero que aún no se ha detectado, no se da la masa atómica. Todas las masas atómicas están expresadas en unidades de masa atómica ($1\ u = 1.660538782(83) \times 10^{-27}$ kg), equivalente a gramos por mol (g/mol).

APÉNDICE E

FACTORES DE CONVERSIÓN DE UNIDADES

Longitud
1 m = 100 cm = 1000 mm = 10^6 μm = 10^9 nm
1 km = 1000 m = 0.6214 mi
1 m = 3.281 ft = 39.37 in
1 cm = 0.3937 in
1 in = 2.540 cm
1 ft = 30.48 cm
1 yd = 91.44 cm
1 mi = 5280 ft = 1.609 km
1 Å = 10^{-10} m = 10^{-8} cm = 10^{-1} nm
1 milla náutica = 6080 ft
1 año luz = 9.461×10^{15} m

Área
1 cm^2 = 0.155 in^2
1 m^2 = 10^4 cm^2 = 10.76 ft^2
1 in^2 = 6.452 cm^2
1 ft^2 = 144 in^2 = 0.0929 m^2

Volumen
1 litro = 1000 cm^3 = 10^{-3} m^3 = 0.03531 ft^3 = 61.02 in^3
1 ft^3 = 0.02832 m^3 = 28.32 litros = 7.477 galones
1 galón = 3.788 litros

Tiempo
1 min = 60 s
1 h = 3600 s
1 día = 86,400 s
1 año = 365.24 d = 3.156×10^7 s

Ángulo
1 rad = 57.30° = 180°/π
1° = 0.01745 rad = π/180 rad
1 revolución = 360° = 2π rad
1 rev/min (rpm) = 0.1047 rad/s

Rapidez
1 m/s = 3.281 ft/s
1 ft/s = 0.3048 m/s
1 mi/min = 60 mi/h = 88 ft/s
1 km/h = 0.2778 m/s = 0.6214 mi/h
1 mi/h = 1.466 ft/s = 0.4470 m/s = 1.609 km/h
1 furlong/14 días = 1.662×10^{-4} m/s

Aceleración
1 m/s^2 = 100 cm/s^2 = 3.281 ft/s^2
1 cm/s^2 = 0.01 m/s^2 = 0.03281 ft/s^2
1 ft/s^2 = 0.3048 m/s^2 = 30.48 cm/s^2
1 mi/h · s = 1.467 ft/s^2

Masa
1 kg = 10^3 g = 0.0685 slug
1 g = 6.85×10^{-5} slug
1 slug = 14.59 kg
1 u = 1.661×10^{-27} kg
1 kg tiene un peso de 2.205 lb cuando $g = 9.80$ m/s^2

Fuerza
1 N = 10^5 dinas = 0.2248 lb
1 lb = 4.448 N = 4.448×10^5 dinas

Presión
1 Pa = 1 N/m^2 = 1.450×10^{-4} lb/in^2 = 0.209 lb/ft^2
1 bar = 10^5 Pa
1 lb/in^2 = 6895 Pa
1 lb/ft^2 = 47.88 Pa
1 atm = 1.013×10^5 Pa = 1.013 bar
= 14.7 lb/in^2 = 2117 lb/ft^2
1 mm Hg = 1 torr = 133.3 Pa

Energía
1 J = 10^7 ergs = 0.239 cal
1 cal = 4.186 J (basada en caloría de 15°)
1 ft · lb = 1.356 J
1 Btu = 1055 J = 252 cal = 778 ft · lb
1 eV = 1.602×10^{-19} J
1 kWh = 3.600×10^6 J

Equivalencia masa-energía
1 kg ↔ 8.988×10^{16} J
1 u ↔ 931.5 MeV
1 eV ↔ 1.074×10^{-9} u

Potencia
1 W = 1 J/s
1 hp = 746 W = 550 ft · lb/s
1 Btu/h = 0.293 W

APÉNDICE F

CONSTANTES NUMÉRICAS

Constantes físicas fundamentales*

Nombre	Símbolo	Valor
Rapidez de la luz en el vacío	c	2.99792458×10^8 m/s
Magnitud de la carga eléctrica de un electrón	e	$1.602176487(40) \times 10^{-19}$ C
Constante gravitacional	G	$6.67428(67) \times 10^{-11}\ \mathrm{N \cdot m^2/kg^2}$
Constante de Planck	h	$6.62606896(33) \times 10^{-34}\ \mathrm{J \cdot s}$
Constante de Boltzmann	k	$1.3806504(24) \times 10^{-23}$ J/K
Número de Avogadro	N_A	$6.02214179(30) \times 10^{23}$ moléculas/mol
Constante de los gases	R	$8.314472(15)\ \mathrm{J/mol \cdot K}$
Masa del electrón	m_e	$9.10938215(45) \times 10^{-31}$ kg
Masa del protón	m_p	$1.672621637(83) \times 10^{-27}$ kg
Masa del neutrón	m_n	$1.674927211(84) \times 10^{-27}$ kg
Permeabilidad del espacio libre	μ_0	$4\pi \times 10^{-7}\ \mathrm{Wb/A \cdot m}$
Permitividad del espacio libre	$\epsilon_0 = 1/\mu_0 c^2$	$8.854187817\ldots \times 10^{-12}\ \mathrm{C^2/N \cdot m^2}$
	$1/4\pi\epsilon_0$	$8.987551787\ldots \times 10^9\ \mathrm{N \cdot m^2/C^2}$

Otras constantes útiles*

Equivalente mecánico del calor		4.186 J/cal (caloria 15°)
Presión atmosférica estándar	1 atm	1.01325×10^5 Pa
Cero absoluto	0 K	−273.15°C
Electrón volt	1 eV	$1.602176487(40) \times 10^{-19}$ J
Unidad de masa atómica	1 u	$1.660538782(83) \times 10^{-27}$ kg
Energía del electrón en reposo	$m_e c^2$	0.510998910(13) MeV
Volumen del gas ideal (0°C y 1 atm)		22.413996(39) litro/mol
Aceleración debida a la gravedad (estándar)	g	$9.80665\ \mathrm{m/s^2}$

Fuente:* National Institute of Standards and Technology (http://physics.nist.gov/cuu**). Los números entre paréntesis indican la incertidumbre en los dígitos finales del número principal; por ejemplo, el número 1.6454(21) significa 1.6454 ± 0.0021. Los valores sin incertidumbre son exactos.

Datos astronómicos[†]

Cuerpo	Masa (kg)	Radio (m)	Radio de la órbita (m)	Periodo de la órbita
Sol	1.99×10^{30}	6.96×10^{8}	—	—
Luna	7.35×10^{22}	1.74×10^{6}	3.84×10^{8}	27.3 d
Mercurio	3.30×10^{23}	2.44×10^{6}	5.79×10^{10}	88.0 d
Venus	4.87×10^{24}	6.05×10^{6}	1.08×10^{11}	224.7 d
Tierra	5.97×10^{24}	6.38×10^{6}	1.50×10^{11}	365.3 d
Marte	6.42×10^{23}	3.40×10^{6}	2.28×10^{11}	687.0 d
Júpiter	1.90×10^{27}	6.91×10^{7}	7.78×10^{11}	11.86 a
Saturno	5.68×10^{26}	6.03×10^{7}	1.43×10^{12}	29.45 a
Urano	8.68×10^{25}	2.56×10^{7}	2.87×10^{12}	84.02 a
Neptuno	1.02×10^{26}	2.48×10^{7}	4.50×10^{12}	164.8 a
Plutón[‡]	1.31×10^{22}	1.15×10^{6}	5.91×10^{12}	247.9 a

[†]*Fuente:* NASA Jet Propulsion Laboratory Solar System Dynamics Group (**http://ssd.jpl.nasa.gov**) y P. Kenneth Seidelmann, ed., ***Explanatory Supplement to the Astronomical Almanac*** (University Science Books, Mill Valley, CA, 1992), pp. 704-706. Para cada cuerpo, el "radio" es el radio en su ecuador, y el "radio de la órbita" es su distancia promedio desde el Sol o desde la Tierra (para la Luna).

[‡]En agosto de 2006, la Unión Astronómica Internacional reclasificó a Plutón y otros objetos pequeños que giran en órbita alrededor del Sol como "planetas enanos".

Prefijos para potencias de 10

Potencia de 10	Prefijo	Abreviatura
10^{-24}	yocto-	y
10^{-21}	zepto-	z
10^{-18}	atto-	a
10^{-15}	femto-	f
10^{-12}	pico-	p
10^{-9}	nano-	n
10^{-6}	micro-	μ
10^{-3}	mili-	m
10^{-2}	centi-	c
10^{3}	kilo-	k
10^{6}	mega-	M
10^{9}	giga-	G
10^{12}	tera-	T
10^{15}	peta-	P
10^{18}	exa-	E
10^{21}	zetta-	Z
10^{24}	yotta-	Y

Ejemplos:

1 femtómetro = 1 fm = 10^{-15} m

1 picosegundo = 1 ps = 10^{-12} s

1 nanocoulomb = 1 nC = 10^{-9} C

1 microkelvin = 1 μK = 10^{-6} K

1 milivolt = 1 mV = 10^{-3} V

1 kilopascal = 1 kPa = 10^{3} Pa

1 megawatt = 1 MW = 10^{6} W

1 gigahertz = 1 GHz = 10^{9} Hz

RESPUESTAS A LOS PROBLEMAS CON NÚMERO IMPAR

Capítulo 21

21.1 a) 2.00×10^{10} b) 8.59×10^{-13}

21.3 2.1×10^{28}, -3.35×10^{9} C

21.5 1.3 nC

21.7 3.7 km

21.9 a) 0.742 μC en cada una
b) 0.371 μC, 1.48 μC

21.11 1.43×10^{13}, alejándose una de otra

21.13 a) 2.21×10^{4} m/s^2

21.15 0.750 nC

21.17 1.8×10^{-4} N, en la dirección $+x$

21.19 $x = -0.144$ m

21.21 2.58 μN, en la dirección $-y$

21.23 a) 8.80×10^{-9} N, de atracción
b) 8.22×10^{-8} N, aproximadamente 10 veces mayor que la fuerza de enlace

21.25 a) 4.40×10^{-16} N b) 2.63×10^{11} m/s^2
c) 2.63×10^{5} m/s

21.27 a) 3.30×10^{6} N/C, a la izquierda
b) 14.2 ns
c) 1.80×10^{3} N/C, a la derecha

21.29 a) -21.9 μC b) 1.02×10^{-7} N/C

21.31 a) 8740 N/C, a la derecha
b) 6540 N/C, a la derecha
c) 1.40×10^{-15} N, a la derecha

21.33 a) 364 N/C b) no, 2.73 μm, hacia abajo

21.35 1.79×10^{6} m/s

21.37 1.73×10^{-8} N, hacia un punto a la mitad de los dos electrones

21.39 a) $-\hat{j}$ b) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}\hat{i} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\hat{j}$
c) $-0.39\hat{i} + 0.92\hat{j}$

21.41 a) 633 km/s b) 15.9 km/s

21.43 a) 0
b) para $|x| < a$: $E_x = -\dfrac{q}{\pi\epsilon_0}\dfrac{ax}{(x^2 - a^2)^2}$;
para $x > a$: $E_x = \dfrac{q}{2\pi\epsilon_0}\dfrac{x^2 + a^2}{(x^2 - a^2)^2}$;
para $x < -a$: $E_x = -\dfrac{q}{2\pi\epsilon_0}\dfrac{x^2 + a^2}{(x^2 - a^2)^2}$

21.45 a) i. 574 N/C, dirección $+x$ ii. 268 N/C, dirección $-x$ iii. 404 N/C, dirección $-x$
b) i. 9.20×10^{-17} N, dirección $-x$
ii. 4.30×10^{-17} N, dirección $+x$
iii. 6.48×10^{-17} N, dirección $+x$

21.47 1.04×10^{7} N/C, hacia la carga de -2.00 μC

21.49 a) $E_x = E_y = E = 0$ b) $E_x = 2660$ N/C, $E_y = 0$, $E = 2660$ N/C, dirección $+x$
c) $E_x = 129$ N/C, $E_y = 510$ N/C, $E = 526$ N/C, 284° en sentido antihorario a partir del eje $+x$ d) $E_x = 0$, $E_y = 1380$ N/C, $E = 1380$ N/C, dirección $+y$

21.51 a) $E_x = -4790$ N/C, $E_y = 0$, $E = 4790$ N/C, dirección $-x$ b) $E_x = 2130$ N/C, $E_y = 0$, $E = 2130$ N/C, dirección $+x$
c) $E_x = -129$ N/C, $E_y = -164$ N/C, $E = 209$ N/C, 232° en sentido antihorario a partir del eje $+x$ d) $E_x = -1040$ N/C, $E_y = 0$, $E = 1040$ N/C, dirección $-x$

21.53 a) $(7.0\ \text{N/C})\hat{i}$ b) $(1.75 \times 10^{-5}\ \text{N})\hat{i}$

21.55 a) 1.14×10^{5} N/C, hacia el centro del disco
b) 8.92×10^{4} N/C, hacia el centro del disco
c) 1.46×10^{8} N/C, hacia la carga

21.57 a) 1.4×10^{-11} C · m, de q_1 hacia q_2
b) 860 N/C

21.59 a) $\vec{p}$ está alineado ya sea en la misma dirección de $\vec{E}$ o en dirección opuesta. b) $\vec{p}$ está alineado en la misma dirección de $\vec{E}$.

21.61 a) 1680 N, de la carga de $+5.00$ μC hacia la carga de -5.00 μC
b) 22.3 N · m, en sentido horario

21.63 b) $\dfrac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 L^2}(1 + 2\sqrt{2})$, alejándose del centro del cuadrado

21.65 a) 3.17 nC b) dirección $+x$ c) $x = -1.76$ m

21.67 a) $\dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{qQ}{\pi\epsilon_0 m a^3}}$ b) acelera alejándose del origen a lo largo del eje y

21.69 b) 2.80 μC c) 39.5°

21.71 a) 2.09×10^{21} N b) 5.90×10^{23} m/s^2
c) no

21.73 3.41×10^{4} N/C, a la izquierda

21.75 entre las cargas, a 0.24 m de la carga de 0.500 nC

21.77 a) $\dfrac{6q^2}{4\pi\epsilon_0 L^2}$, alejándose del vértice vacío
b) $\dfrac{3q^2}{4\pi\epsilon_0 L^2}\left(\sqrt{2} + \dfrac{1}{2}\right)$, hacia el centro del cuadrado

21.79 a) 6.0×10^{23}
b) 510 kN (eléctrico), 4.1×10^{-31} N (gravitacional)
c) para la fuerza eléctrica sí, para la fuerza gravitacional no

21.81 a) ≈ 480 C b) 8.3×10^{13} N, de repulsión

21.83 2190 km/s

21.85 a) 3.5×10^{20} b) 1.6 C, 2.3×10^{10} N

21.87 a) $\dfrac{m v_0^2 \operatorname{sen}^2\alpha}{2eE}$ b) $\dfrac{m v_0^2 \operatorname{sen} 2\alpha}{eE}$
d) 0.418 m, 2.89 m

21.89 a) $E_x = \dfrac{Q}{4\pi\epsilon_0 a}\left(\dfrac{1}{x - a} - \dfrac{1}{x}\right)$, $E_y = 0$
b) $\dfrac{qQ}{4\pi\epsilon_0 a}\left(\dfrac{1}{r} - \dfrac{1}{r + a}\right)\hat{i}$

21.91 a) $(-6110\ \text{N/C})\hat{i}$ b) menor c) 0.177 m

21.93 a) 1.56 N/C, dirección $+x$ c) menor
d) 4.7%

21.95 a) $-\dfrac{qQ}{2\pi\epsilon_0 a}\left(\dfrac{1}{y} - \dfrac{1}{\sqrt{a^2 + y^2}}\right)\hat{i}$
b) $\dfrac{qQ}{4\pi\epsilon_0 a}\left(\dfrac{1}{x - a} + \dfrac{1}{x + a} - \dfrac{2}{x}\right)\hat{i}$

21.97 $E_x = E_y = \dfrac{Q}{2\pi^2\epsilon_0 a^2}$

21.99 a) 6.25×10^{4} N/C, 225° en sentido antihorario a partir de un eje que apunta hacia la derecha del punto P
b) 1.00×10^{-14} N, opuesto a la dirección del campo eléctrico

21.101 a) 1.19×10^{6} N/C, a la izquierda
b) 1.19×10^{5} N/C, a la izquierda
c) 1.19×10^{5} N/C, a la derecha

21.103 $\dfrac{\sigma}{2\epsilon_0}\left(-\dfrac{x}{|x|}\hat{i} + \dfrac{z}{|z|}\hat{k}\right)$

21.105 b) $q_1 < 0$, $q_2 > 0$ c) 0.843 μC d) 56.2 N

21.107 a) $\dfrac{Q}{2\pi\epsilon_0 L}\left(\dfrac{1}{2x + a} - \dfrac{1}{2L + 2x + a}\right)$

Capítulo 22

22.1 a) 1.8 N · m^2/C b) no c) i. 0° ii. 90°

22.3 a) 3.53×10^{5} N · m^2/C b) 3.13 μC

22.5 $\pi r^2 E$

22.7 0.977 N · m^2/C, hacia adentro

22.9 a) 0 b) 8.74×10^{7} N/C
c) 2.60×10^{7} N/C

22.11 a) 1.17×10^{5} N · m^2/C b) sin cambio

22.13 a) 4.50×10^{4} N/C b) 918 N/C

22.15 0.0810 N

22.17 2.04×10^{10}

22.19 a) 6.47×10^{5} N/C, dirección $+y$
b) 7.2×10^{4} N/C, dirección $-y$

22.21 a) 5.73 μC/m^2 b) 6.47×10^{5} N/C
c) -5.65×10^{4} N · m^2/C

22.23 a) 0.260 μC/m^3 b) 1960 N/C

22.25 1.16 km/s

22.27 23.6 μJ

22.29 0 (afuera de las placas), σ/ϵ_0 (entre las placas)

22.31 a) $2\pi R\sigma$ b) $\sigma R/\epsilon_0 r$ c) $\lambda/2\pi\epsilon_0 r$

22.33 a) sí, $+Q$ b) no c) sí d) no, no
e) no, sí, no

22.35 a) 750 N · m^2/C b) 0
c) 577 N/C, dirección $+x$ d) ambas cargas de adentro y de afuera

22.37 a) -0.598 nC b) ambas cargas de adentro y de afuera

22.39 a) $\lambda/2\pi\epsilon_0 r$, radialmente hacia afuera
b) $\lambda/2\pi\epsilon_0 r$, radialmente hacia afuera
d) $-\lambda$ (superficie interior), $+\lambda$ (superficie exterior)

22.41 a) i. $\dfrac{\alpha}{2\pi\epsilon_0 r}$, radialmente hacia afuera
ii. 0 iii. 0
b) i. $-\alpha$ ii. 0

22.43 10.2°

22.45 a) $0\ (r < R)$; $\dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{Q}{r^2}\ (R < r < 2R)$, radialmente hacia afuera;
$\dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{2Q}{r^2}\ (r > 2R)$, radialmente hacia afuera

22.47 a) i. 0 ii. 0
iii. $\dfrac{q}{2\pi\epsilon_0 r^2}$, radialmente hacia afuera
iv. 0 v. $\dfrac{3q}{2\pi\epsilon_0 r^2}$, radialmente hacia afuera
b) i. 0 ii. $+2q$ iii. $-2q$ iv. $+6q$

22.49 a) i. 0 ii. 0
iii. $\dfrac{q}{2\pi\epsilon_0 r^2}$, radialmente hacia afuera
iv. 0 v. $\dfrac{q}{2\pi\epsilon_0 r^2}$, radialmente hacia adentro
b) i. 0 ii. $+2q$ iii. $-2q$ iv. $-2q$

22.51 a) $\dfrac{qQ}{4\pi\epsilon_0 r^2}$, hacia el centro del cascarón
b) 0

22.53 a) $\dfrac{\alpha}{2\epsilon_0}\left(1 - \dfrac{a^2}{r^2}\right)$
b) $q = 2\pi\alpha a^2$, $E = \dfrac{\alpha}{2\epsilon_0}$

22.55 $R/2$

22.57 $|x| > d$ (afuera de la placa):
$\dfrac{\rho_0 d}{3\epsilon_0}\dfrac{x}{|x|}\hat{i}$; $|x| < d$ (adentro de la placa):
$\dfrac{\rho_0 x^3}{3\epsilon_0 d^2}\hat{i}$

22.61 b) $\rho\vec{b}/3\epsilon_0$

22.63 a) $-\dfrac{Q}{16\pi\epsilon_0 R^2}\hat{\imath}$ b) $\dfrac{Q}{72\pi\epsilon_0 R^2}\hat{\imath}$

c) 0 d) $\dfrac{5Q}{18\pi\epsilon_0 R^2}\hat{\imath}$

22.65 c) $\dfrac{Qr}{4\pi\epsilon_0 R^3}\left(4 - \dfrac{3r}{R}\right)$ e) $2R/3$, $\dfrac{Q}{3\pi\epsilon_0 R^2}$

22.67 a) $\dfrac{480Q}{233\pi R^3}$

b) $r \le R/2$: $E = \dfrac{180Qr^2}{233\pi\epsilon_0 R^4}$; $R/2 \le r \le R$:

$E = \dfrac{480Q}{233\pi\epsilon_0 r^2}\left[\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{r}{R}\right)^3 - \dfrac{1}{5}\left(\dfrac{r}{R}\right)^5 - \dfrac{23}{1920}\right]$;

$r \ge R$: $E = \dfrac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$ c) 0.807

d) $E = \dfrac{180}{233}\dfrac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2}$

Capítulo 23

23.1 -0.356 J
23.3 3.46×10^{-13} J = 2.16 MeV
23.5 a) 12.5 m/s b) 0.323 m
23.7 -1.42×10^{-18} J
23.9 a) 13.6 km/s b) 2.45×10^{17} m/s^2
23.11 $-q/2$
23.13 7.42 m/s, más rápido
23.15 a) 0 b) 0.750 mJ c) -2.06 mJ
23.17 a) 0 b) -175 kV c) -0.875 J
23.19 a) -737 V b) -704 V c) 8.2×10^{-8} J
23.21 b) $V = \dfrac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\dfrac{1}{|x|} - \dfrac{2}{|x-a|}\right)$

c) $x = -a, a/3$

23.23 a) 156 V b) -182 V
23.25 a) punto b b) 800 V/m c) -48.0 μJ
23.27 a) i. 180 V ii. -270 V iii. -450 V
b) 719 V, cascarón interior
23.29 a) oscilatorio b) 1.67×10^7 m/s
23.31 a) 94.9 nC/m b) menos c) cero
23.33 a) 78.2 kV b) cero
23.35 0.474 J
23.37 a) 9.3×10^6 V/m, hacia adentro
b) de la superficie exterior
23.39 a) 8.00 kV/m b) 19.2 μN c) 0.864 μJ
d) -0.864 μJ
23.41 b) -20 nC c) no
23.43 -760 V
23.45 a) $E_x = -Ay + 2Bx$, $E_y = -Ax - C$, $E_z = 0$
b) $x = -C/A$, $y = -2BC/A^2$, cualquier valor de z

23.47 a) i. $V = \dfrac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\dfrac{1}{r_a} - \dfrac{1}{r_b}\right)$

ii. $V = \dfrac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\dfrac{1}{r} - \dfrac{1}{r_b}\right)$ iii. $V = 0$

d) 0 e) $E = \dfrac{q - Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$

23.49 a) cilindros coaxiales con el cilindro dado
b) 2.90 cm, 4.20 cm, 6.08 cm
c) se alejan más
23.51 a) -0.360 μJ b) $x = 0.074$ m
23.53 a) 7.66×10^{-13} J b) 5.17×10^{-14} m
23.55 a) -21.5 μJ b) -2.83 kV c) 35.4 kV/m
23.57 a) 7.85×10^4 V/m$^{4/3}$
b) $E_x = -(1.05 \times 10^5\ \text{V/m}^{4/3})x^{1/3}$
c) 3.13×10^{-15} N, hacia el ánodo positivo

23.59 a) $-\dfrac{1.46q^2}{\pi\epsilon_0 d}$

23.61 a) -8.60×10^{-18} J = -53.7 eV
b) 2.88×10^{-11} m

23.63 a) i. $V = (\lambda/2\pi\epsilon_0)\ln(b/a)$
ii. $V = (\lambda/2\pi\epsilon_0)\ln(b/r)$ iii. $V = 0$
d) $(\lambda/2\pi\epsilon_0)\ln(b/a)$
23.65 a) 1.76×10^{-16} N, hacia abajo
b) 1.93×10^{14} m/s^2, hacia abajo
c) 0.822 cm d) 15.3° e) 3.29 cm
23.67 a) 97.1 kV/m b) 30.3 pC

23.69 a) $r > R$: $V_r = -\dfrac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\ln\left(\dfrac{r}{R}\right)$;

$r < R$: $V_r = \dfrac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\left[1 - \left(\dfrac{r}{R}\right)^2\right]$

23.71 $\dfrac{3}{5}\left(\dfrac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 R}\right)$

23.73 360 kV
23.75 b) sí c) no, no

23.77 $\dfrac{Q}{8\pi\epsilon_0 R}$

23.79 a) $\dfrac{Q}{4\pi\epsilon_0 a}\ln\left(\dfrac{x+a}{x}\right)$

b) $\dfrac{Q}{4\pi\epsilon_0 a}\ln\left(\dfrac{a + \sqrt{a^2 + y^2}}{y}\right)$

c) inciso a): $\dfrac{Q}{4\pi\epsilon_0 x}$, inciso b): $\dfrac{Q}{4\pi\epsilon_0 y}$

23.81 a) 1/3 b) 3

23.83 a) $E = \dfrac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 R_1^2}$, $V = \dfrac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 R_1}$

b) $q_1 = \dfrac{Q_1 R_1}{R_1 + R_2}$, $q_2 = \dfrac{Q_1 R_2}{R_1 + R_2}$

c) $V = \dfrac{Q_1}{4\pi\epsilon_0(R_1 + R_2)}$ para cualquier esfera

d) $E_1 = \dfrac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 R_1(R_1 + R_2)}$,

$E_2 = \dfrac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 R_2(R_1 + R_2)}$

23.85 a) 7580 km/s b) 7260 km/s
c) 2.3×10^9 K (protones), 6.4×10^9 K (helio)
23.87 a) 5.9×10^{-15} m b) 20.7 pJ
c) 1.06×10^{25} J = 253 kilotones de TNT
23.89 1.01×10^{-12} m, 1.11×10^{-13} m, 2.54×10^{-14} m
23.91 c) 3, 0.507 μm

Capítulo 24

24.1 a) 10.0 kV b) 22.6 cm^2 c) 8.00 pF
24.3 a) 604 V b) 90.8 cm^2 c) 1840 kV/m
d) 16.3 μC/m^2
24.5 a) 120 μC b) 60 μC c) 480 μC
24.7 2.8 mm, sí
24.9 a) 1.05 mm b) 84.0 V
24.11 a) 4.35 pF b) 2.30 V
24.13 a) 15.0 pF b) 3.09 cm c) 31.2 kN/C
24.15 a) en serie b) 5000
24.17 a) $Q_1 = Q_2 = 22.4$ μC, $Q_3 = 44.8$ μC, $Q_4 = 67.2$ μC
b) $V_1 = V_2 = 5.6$ V, $V_3 = 11.2$ V, $V_4 = 16.8$ V
c) 11.2 V
24.19 a) $Q_1 = 156$ μC, $Q_2 = 260$ μC
b) $V_1 = V_2 = 52.0$ V
24.21 a) 19.3 nF b) 482 nC c) 162 nC d) 25 V
24.23 57 μF
24.25 0.0283 J/m^3

24.27 a) $\dfrac{xQ^2}{2\epsilon_0 A}$ b) $\left(\dfrac{Q^2}{2\epsilon_0 A}\right)dx$ c) $\dfrac{Q^2}{2\epsilon_0 A}$

24.29 a) $U_p = 4U_s$ b) $Q_p = 2Q_s$ c) $E_p = 2E_s$
24.31 a) 24.2 μC b) $Q_{35} = 7.7$ μC, $Q_{75} = 16.5$ μC
c) 2.66 mJ d) $U_{35} = 0.85$ mJ, $U_{75} = 1.81$ mJ
e) 220 V para cada capacitor

24.33 a) 1.60 nC b) 8.05
24.35 a) 3.60 mJ (antes), 13.5 mJ (después)
b) aumenta 9.9 mJ
24.37 a) 0.620 μC/m^2 b) 1.28
24.39 0.0135 m^2
24.41 a) 2.31×10^{-11} C^2/N · m^2
b) 4.0×10^4 V
c) $\sigma = 4.6 \times 10^{-4}$ C/m^2,
$\sigma_i = 2.8 \times 10^{-4}$ C/m^2
24.43 a) 10.1 V b) 2.25

24.45 a) $\dfrac{Q}{\epsilon_0 AK}$ b) $\dfrac{Qd}{\epsilon_0 AK}$ c) $K\dfrac{\epsilon_0 A}{d} = KC_0$

24.47 a) 421 J b) 0.054 F
24.49 a) 31 pF b) 0.37 nC c) 1.6 kV/m
d) 2.2 nJ
24.51 133 kV/m
24.53 a) 0.0160 C b) 533 V c) 4.26 J d) 2.14 J
24.55 a) 158 μJ b) 72.1 μJ
24.57 a) 2.5 μF
b) $Q_1 = 550$ μC, $Q_2 = 370$ μC, $Q_3 = Q_4 = 180$ μC, $Q_5 = 550$ μC; $V_1 = 65$ V, $V_2 = 87$ V, $V_3 = V_4 = 43$ V, $V_5 = 65$ V
24.59 $C_2 = 6.00$ μF, $C_3 = 4.50$ μF
24.61 a) 76 μC b) 1.4 mJ
c) 11 V a través de cada capacitor d) 1.3 mJ
24.63 a) 2.3 μF b) $Q_1 = 970$ μC, $Q_2 = 640$ μC
c) 47 V
24.65 a) 3.91 b) 22.8 V
24.67 a) $C = 4\pi\epsilon_0 R$ b) 710 μF
24.69 a) 0.065 F b) 23,000 C
c) 4.0×10^9 J
24.71 48.3 μF
24.73 0.185 μJ
24.75 b) 2.38 nF

24.77 a) $\dfrac{\epsilon_0 L}{D}[L + (K-1)x]$

c) $Q = \dfrac{\epsilon_0 LV}{D}[L + (K-1)x]$

Capítulo 25

25.1 1.0 C
25.3 a) 3.12×10^{19} b) 1.51×10^6 A/m^2
c) 0.111 mm/s d) tanto J como v_d disminuirían
25.5 a) 110 min b) 440 min c) $v_d \propto 1/d^2$
25.7 a) 330 C b) 41 A
25.9 9.0 μA
25.11 a) 1.06×10^{-5} Ω · m
b) 0.00105 (C°)$^{-1}$
25.13 a) 0.206 mV b) 0.176 mV
25.15 a) 1.21 V/m b) 0.0145 Ω c) 0.182 V
25.17 0.125 Ω
25.19 15 g
25.21 1.53×10^{-8} Ω
25.23 a) 11 A b) 3.1 V c) 0.28 Ω
25.25 a) 99.54 Ω b) 0.0158 Ω
25.27 a) 4.67×10^{-8} Ω b) 6.72×10^{-4} Ω
25.29 a) 27.4 V b) 12.3 MJ
25.31 a) cero b) 5.0 V c) 5.0 V
25.33 3.08 V, 0.067 Ω, 1.80 Ω
25.35 a) 1.41 A, en sentido horario b) 13.7 V
c) -1.0 V
25.37 b) sí c) 3.88 Ω
25.39 a) 144 Ω b) 240 Ω c) 0.833 A, 0.500 A
25.41 a) 29.8 W b) 0.248 A
25.43 a) EJ b) ρJ^2 c) E^2/ρ
25.45 a) 300 W b) 0.90 J
25.47 a) 2.6 MJ b) 0.063 L c) 1.6 h
25.49 12.3%
25.51 a) 24.0 W b) 4.0 W c) 20.0 W
25.53 a) 26.7 Ω b) 4.50 A c) 453 W d) mayor
25.55 a) 3.65×10^{-8} Ω · m b) 172 A
c) 2.58 mm/s
25.57 0.060 Ω
25.59 a) 2.5 mA b) 2.14×10^{-5} V/m
c) 8.55×10^{-5} V/m d) 0.180 mV
25.61 42.0 s

25.63 a) 80 C° b) no

25.65 a) $\frac{\rho h}{\pi r_1 r_2}$

25.67 a) 0.057 Ω b) 3.34×10^{-8} Ω · m c) 0.86 mm d) 0.00240 Ω e) 0.0011 $(C°)^{-1}$

25.69 a) 0.20 Ω b) 8.7 V

25.71 a) 1.0 kΩ b) 100 V c) 10 W

25.73 1.42 A

25.75 a) $I_A\left(1 + \frac{R_A}{r + R}\right)$ b) 0.0429 Ω

25.77 b) calibre 8 c) 106 W d) $19.25

25.79 a) 0.40 A b) 1.6 W c) 4.8 W, en la batería de 12.0 V d) 3.2 W, en la batería de 8.0 V

25.81 a) 14.4 V b) 2.59 MJ c) 0.432 MJ d) 0.96 Ω e) 1.73 MJ f) 0.432 MJ

25.83 6.67 V

25.85 a) a/E b) aL/V_{bc} c) punto c d) 3.5×10^{8} m/s^2

25.87 a) $R = \frac{\rho_0 L}{A}\left(1 - \frac{1}{e}\right), I = \frac{V_0 A}{\rho_0 L\left(1 - \frac{1}{e}\right)}$

b) $E(x) = \frac{V_0 e^{-x/L}}{L\left(1 - \frac{1}{e}\right)}$,

c) $V(x) = \frac{V_0\left(e^{-x/L} - \frac{1}{e}\right)}{1 - \frac{1}{e}}$

Capítulo 26

26.1 $3R/4$

26.3 22.5 W

26.5 a) 3.50 A b) 4.50 A c) 3.15 A d) 3.25 A

26.7 0.769 A

26.9 a) 8.80 Ω b) 3.18 A c) 3.18 A d) 5.09 V, 7.63 V, 15.3 V e) 16.2 W, 24.3 W, 48.5 W f) resistor con resistencia mayor

26.11 a) 8.00 A, 12.0 A b) 84.0 V

26.13 5.00 Ω; $I_3 = 8.00$ A, $I_4 = 9.00$ A, $I_6 = 4.00$ A, $I_{12} = 3.00$ A

26.15 a) $I_1 = 1.50$ A, $I_2 = I_3 = I_4 = 0.500$ A b) $P_1 = 10.1$ W, $P_2 = P_3 = P_4 = 1.12$ W; R_1 brilla al máximo c) $I_1 = 1.33$ A, $I_2 = I_3 =$ 0.667 A d) $P_1 = 8.00$ W, $P_2 = P_3 = 2.00$ W e) R_1 brilla menos; R_2 y R_3 brillan más

26.17 18.0 V, 3.00 A

26.19 a) 2 resistores en paralelo y la combinación en serie con tres resistores más b) 10 resistores en paralelo c) 3 resistores en paralelo d) 2 resistores en paralelo y la combinación en serie con 4 resistores en paralelo

26.21 a) 0.100 A b) 4.0 W, 8.0 W c) 12.0 W d) 0.300 A, 0.150 A e) 36.0 W, 18.0 W f) 54.0 W g) en serie, la bombilla de 800 Ω es más brillante; en paralelo, la bombilla de 400 Ω es más brillante h) conexión en paralelo

26.23 1010 s

26.25 a) 2.00 A b) 5.00 Ω c) 42.0 V d) 3.50 A

26.27 a) 8.00 A b) $\mathcal{E}_1 = 36.0$ V, $\mathcal{E}_2 = 54.0$ V c) 9.00 Ω

26.29 a) 1.60 A, 1.40 A, 0.20 A b) 10.4 V

26.31 a) 36.4 V b) 0.500 A

26.33 a) 2.14 V, a es mayor b) 0.050 A, hacia abajo; 0

26.35 a) 0.641 Ω b) 975 Ω

26.37 a) 17.9 V b) 22.7 V c) 21.4%

26.39 a) 543 Ω b) 1.88 mA c) 1824 Ω, 608 Ω, 203 Ω

26.41 a) 0.849 μF b) 2.89 s

26.43 a) 4.21 ms b) 0.125 A

26.45 192 μC

26.47 13.6 A

26.49 a) 0.937 A b) 0.606 A

26.51 a) 133 μC b) 8.87 V, 9.13 V c) 8.87 V para ambos d) 67.4 μC

26.53 900 W

26.55 12.1 Ω

26.57 a) 13.6 μΩ b) 2.14×10^{-8} Ω · m

26.59 a) 2.2 A, 4.4 V, 9.7 W b) 16.3 W, más brillante

26.61 a) 18.7 Ω b) 7.5 Ω

26.63 $I_1 = 0.848$ A, $I_2 = 2.14$ A, $I_3 = 0.171$ A

26.65 $I_2 = 5.21$ A, $I_4 = 1.11$ A, $I_5 = 6.32$ A

26.67 a) +0.22 V b) 0.464 A

26.69 0.447 Ω (extremo a extremo), 0.423 Ω (en paralelo)

26.71 a) 186 V, terminal positiva superior b) 3.00 A, hacia arriba c) 20.0 Ω

26.73 a) $P_1 + P_2$ b) $\frac{P_1 P_2}{P_1 + P_2}$

26.75 a) 1.35 W b) 8.31 ms c) 0.337 W

26.77 a) −12.0 V b) 1.71 A c) 4.21 Ω

26.79 a) 114 V b) 263 V c) 266 V

26.81 b) 1897 Ω

26.83 a) 24.8 V, 65.2 V b) 3840 Ω c) 62.6 V d) no

26.85 1.7 MΩ, 3.1 μF

26.87 a) 19.4 s, 31.4 constantes de tiempo b) sí

26.89 a) $P = \frac{Q_0^2}{RC^2}e^{-2t/RC}$

26.93 b) 4 segmentos c) 3.2 MΩ, 4.0×10^{-3} d) 3.4×10^{-4} e) 0.88

Capítulo 27

27.1 a) $(-6.68 \times 10^{-4}\ \text{N})\hat{k}$ b) $(6.68 \times 10^{-4}\ \text{N})\hat{\imath} + (7.27 \times 10^{-4}\ \text{N})\hat{\jmath}$

27.3 a) positivo b) 0.0505 N

27.5 9490 km/s

27.7 a) $B_x = -0.175$ T, $B_z = -0.256$ T b) B_y es indeterminada c) 0, 90°

27.9 a) 1.46 T, en el plano xz a 40° del eje $+x$ hacia el eje $-z$ b) 7.47×10^{-16} N, en el plano xz a 50° del eje $-x$ hacia el eje $-z$

27.11 a) 3.05 mWb b) 1.83 mWb c) 0

27.13 −0.78 mWb

27.15 a) 0.160 mT, hacia la página b) 0.111 μs

27.17 7.93×10^{-10} N, hacia el sur

27.19 a) 4.94×10^{-21} kg · m/s b) 2.31×10^{-23} kg · m^2/s

27.21 a) 835 km/s b) 26.2 ns c) 7.27 kV

27.23 a) 107 T b) no

27.25 0.838 mT

27.27 a) $(1.60 \times 10^{-14}\ \text{N})\hat{\jmath}$ b) sí c) hélice, no d) 1.40 cm

27.29 a) 4.81 kN/C c) sí

27.31 0.0445 T, hacia afuera de la página

27.33 a) 4.92 km/s b) 9.96×10^{-26} kg

27.35 2.0 cm

27.37 a) 13.4 kA, no

27.39 0.724 N, 63.4° debajo de la dirección de la corriente en el segmento superior del alambre

27.41 a) 817 V b) 113 m/s^2

27.43 a) $-ILB\hat{\jmath}$ b) sí

27.45 b) $F_{cd} = 1.20$ N b) 0.420 N · m

27.47 a) A_2 b) 290 rad/s^2

27.49 −2.42 J

27.51 a) 1.13 A b) 3.69 A c) 98.2 V d) 362 W

27.53 a) 4.7 mm/s b) $+4.5 \times 10^{-3}$ V/m, dirección $+z$ c) 53 μV

27.55 a) $-\frac{F_2}{qv_1}\hat{\jmath}$ b) $F_2/\sqrt{2}$

27.57 a) 8.3×10^{6} m/s b) 0.14 T

27.59 3.45 T, perpendicular a la velocidad inicial de la moneda

27.61 a) 8.9×10^{-13} J = 5.5 MeV b) 77 ns c) 1.2 T d) lo mismo del inciso a)

27.63 a) −3.89 μC b) $(7.60 \times 10^{14}\ \text{m/s}^2)\hat{\imath} +$ $(5.70 \times 10^{14}\ \text{m/s}^2)\hat{\jmath}$ c) 2.90 cm d) 2.88×10^{7} Hz e) (0.0290 m, 0, 0.874 m)

27.65 $9r$

27.67 1.6 mm

27.69 $\frac{Mg\tan\theta}{LB}$, de derecha a izquierda

27.71 $B_r(r) = -\beta r/2$

27.73 a) 8.46 mT b) 27.2 cm c) 2.2 cm, sí

27.75 1.80 N, a la izquierda

27.77 0.024 T, en dirección +y

27.79 a) 0.0442 N · m, en sentido horario b) se estira c) 7.98 mJ

27.81 2.39 A

27.83 $-(0.444\ \text{N})\hat{\jmath}$

27.85 b) (0, 0) hacia (0, L): $\frac{1}{2}B_0 LI\hat{\imath}$
(0, L) hacia (L, L): $-IB_0L\hat{\jmath}$
(L, L) hacia (L, 0): $-\frac{1}{2}B_0 LI\hat{\imath}$
(L, 0) hacia (0, 0): 0
c) $-IB_0L\hat{\jmath}$

27.87 a) 2.52 m/s b) 7.58 A c) 0.198 Ω

27.89 a) 5.14 m b) 1.72 μs c) 6.08 mm d) 3.05 cm

Capítulo 28

28.1 a) $-(19.2\ \mu\text{T})\hat{k}$ b) 0 c) $(19.2\ \mu\text{T})\hat{\imath}$ d) $(6.79\ \mu\text{T})\hat{\imath}$

28.3 a) 60.0 nT, hacia afuera de la página, en A y B b) 0.120 μT, hacia afuera de la página c) 0

28.5 a) 0 b) $-(1.31\ \mu\text{T})\hat{k}$ c) $-(0.462\ \mu\text{T})\hat{k}$ d) $(1.31\ \mu\text{T})\hat{\jmath}$

28.7 a) i. $\frac{\mu_0 q v}{8\pi d^2}$, hacia la página ii. 0 iii. $\frac{\mu_0 q v}{4\pi d^2}$, hacia afuera de la página b) $\frac{\mu_0 q^2 v' v}{16\pi d^2}$, de atracción c) 1.00×10^{-6}

28.9 $(97.5\ \text{nT})\hat{k}$

28.11 a) 0.440 μT, hacia afuera de la página b) 16.7 nT, hacia afuera de la página c) 0

28.13 a) $(5.00 \times 10^{-11}\ \text{T})\hat{\jmath}$ b) $-(5.00 \times 10^{-11}\ \text{T})\hat{\imath}$ c) $(-1.77 \times 10^{-11}\ \text{T})(\hat{\imath} - \hat{\jmath})$ d) 0

28.15 17.6 μT, hacia la página

28.17 a) 0.8 mT b) 40 μT, 20 veces más grande

28.19 25 μA

28.21 a) 10.0 A b) en todos los puntos directamente arriba del alambre c) en todos los puntos directamente al este del alambre

28.23 a) $-(0.10\ \mu\text{T})\hat{\imath}$ b) 2.19 μT, en 46.8° del eje x al eje z c) $(7.9\ \mu\text{T})\hat{\imath}$

28.25 a) 0 b) 6.67 μT, hacia la parte superior de la página c) 7.54 μT, hacia la izquierda

28.27 a) 0 b) 0 c) 0.40 mT, hacia la izquierda

28.29 a) en P: 41 μT, hacia la página; en Q: 25 μT, hacia afuera de la página b) en P: 9.0 μT, hacia afuera de la página; en Q: 9.0 μT, hacia la página

28.31 a) 6.00 μN, de repulsión b) 24.0 μN

28.33 46 μN/m, de repulsión, no

28.35 0.38 μA

28.37 $\frac{\mu_0|I_1 - I_2|}{4R}$, 0

28.39 a) 9.42 mT b) 0.134 mT

28.41 18.0 A, en sentido antihorario

28.43 a) 305 A b) -3.83×10^{-4} T · m

28.45 a) $\mu_0 I/2\pi r$ b) 0

28.47 $r = R/2$ y $2R$

28.49 a) 1790 vueltas/m b) 63.0 m

28.51 a) 3.72 MA b) 124 kA c) 237 A

28.53 1.11 mT

28.55 a) 72.5 mA b) 19.5 mA

28.57 a) i. 1.13 mT ii. 4.68 MA/m iii. 5.88 T

28.59 a) 1.00 μT, hacia la página b) $(7.49 \times 10^{-6}\ \text{N})\hat{\jmath}$

28.61 a) en el plano de los alambres, entre ellos, a 0.300 m del alambre de 75.0 A
b) en el plano de los alambres, a 0.200 m del alambre de 25.0 A y a 0.600 m del alambre de 75.0 A
28.63 a) 5.7×10^{12} m/s^2, alejándose del alambre
b) 32.5 N/C, alejándose del alambre c) no
28.65 5.59×10^{-18} N
28.67 a) 2.00 A, afuera de la página
b) 2.13 μT, a la derecha c) 2.06 μT
28.69 a) 11.1 μN/m, dirección $-y$
b) 11.1 μN/m, dirección $+y$
28.71 23.2 A
28.73 2.21×10^{-3} N · m
28.75 a) $\dfrac{\mu_0 N I a^2}{2}\left\{\dfrac{1}{[(x + a/2)^2 + a^2]^{3/2}} + \dfrac{1}{[(x - a/2)^2 + a^2]^{3/2}}\right\}$
c) $\left(\dfrac{4}{5}\right)^{3/2}\dfrac{\mu_0 N I}{a}$ d) 20.2 mT e) 0, 0
28.77 a) $\dfrac{3I}{2\pi R^3}$ b) i. $B = \dfrac{\mu_0 I r^2}{2\pi R^3}$ ii. $B = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}$
28.79 a) 0 b) $B = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}\dfrac{r^2 - a^2}{b^2 - a^2}$ c) $B = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}$
28.81 b) $B = \dfrac{\mu_0 I_0}{2\pi r}$ c) $\dfrac{I_0 r^2}{a^2}\left(2 - \dfrac{r^2}{a^2}\right)$
d) $B = \dfrac{\mu_0 I_0 r}{2\pi a^2}\left(2 - \dfrac{r^2}{a^2}\right)$
28.83 a) $B = \dfrac{1}{2}\mu_0 I n$, dirección $+x$
b) $B = \dfrac{1}{2}\mu_0 I n$, dirección $-x$
28.85 7.73×10^{-25} A · m^2 = $0.0834\mu_B$
28.87 b) $\dfrac{1}{2g}\left(\dfrac{\mu_0 Q_0^2}{4\pi \lambda R C d}\right)^2$

Capítulo 29

29.1 a) 17.1 mV b) 28.5 mA
29.3 a) $Q = NBA/R$ b) no
29.5 a) 34 V b) en sentido antihorario
29.7 a) $\mu_0 i/2\pi r$, hacia la página b) $\dfrac{\mu_0 i}{2\pi r}L\,dr$
c) $\dfrac{\mu_0 i L}{2\pi}\ln(b/a)$ d) $\dfrac{\mu_0 L}{2\pi}\ln(b/a)\dfrac{di}{dt}$
e) 0.506 μV
29.9 a) 5.44 mV b) en sentido horario
29.11 a) bAv b) en sentido horario
c) bAv, en sentido antihorario
29.13 10.4 rad/s
29.15 a) en sentido antihorario b) en sentido horario
c) corriente no inducida
29.17 a) a a b b) b a a c) b a a
29.19 a) en sentido horario b) corriente no inducida c) en sentido antihorario
29.21 13.2 mA, en sentido antihorario
29.23 a) 0.675 V b) punto b c) 2.25 V/m, de b a a d) punto b e) i. 0 ii. 0
29.25 46.2 m/s = 103 mph, no
29.27 a) 3.00 V b) de b a a c) 0.800 N, a la derecha d) 6.00 W para cada uno
29.29 a) en sentido antihorario b) 42.4 mW
29.31 35.0 m/s, a la derecha
29.33 a) 2.55 V, punto a b) 3.38 V, punto a c) 0
d) 4.23 V
29.35 a) $\pi r_1^2\dfrac{dB}{dt}$ b) $\dfrac{r_1}{2}\dfrac{dB}{dt}$ c) $\dfrac{R^2}{2r_2}\dfrac{dB}{dt}$
e) $\dfrac{\pi R^2}{4}\dfrac{dB}{dt}$ f) $\pi R^2\dfrac{dB}{dt}$ g) $\pi R^2\dfrac{dB}{dt}$
29.37 9.21 A/s
29.39 0.950 mV
29.41 2.34
29.43 a) 0.599 nC b) 6.00 mA c) 6.00 mA
29.45 a) 0.15 V/m b) 38 V/m · s
c) 3.4×10^{-10} A/m^2 d) 53.3 μT
29.47 a) $B = 0$, $\vec{M} = -(4.38 \times 10^4\ \text{A/m})\hat{\imath}$
b) $\vec{B} = (15.0\ \text{T})\hat{\imath}$, $M = 0$
29.49 a) 3.7 A b) 1.33 mA
c) en sentido antihorario
29.51 16.2 μV
29.53 a) $\dfrac{\mu_0 I a b v}{2\pi r(r + a)}$ b) en sentido horario
29.55 190 rpm
29.57 a) 17.9 mV b) de a a b
29.59 b) $\dfrac{RF}{B^2L^2}$
29.61 1.2 V
29.63 $\mu_0 I W/4\pi$
29.65 a) $\dfrac{\mu_0 I v}{2\pi}\ln(1 + L/d)$ b) punto a c) 0
29.67 a) 0.165 V b) 0.165 V c) 0, 0.0412 V
29.69 a) B^2a^2v/R
29.71 punto a: $\dfrac{qr}{2}\dfrac{dB}{dt}$, a la izquierda; punto b: $\dfrac{qr}{2}\dfrac{dB}{dt}$, hacia la parte superior de la página;
punto c: 0
29.73 5.0 s
29.75 a) 196 μA/m^2 b) 3.00 nA/m^2 c) 7.82 MHz
d) 90°
29.77 a) de a a b b) $\dfrac{Rmg\tan\phi}{L^2B^2\cos\phi}$ c) $\dfrac{mg\tan\phi}{LB}$
d) $\dfrac{Rm^2g^2\tan^2\phi}{L^2B^2}$ e) $\dfrac{Rm^2g^2\tan^2\phi}{L^2B^2}$

Capítulo 30

30.1 a) 0.270 V, sí b) 0.270 V
30.3 6.32 μH
30.5 a) 1.96 H b) 7.11 mWb
30.7 a) 1940 b) 800 A/s
30.9 a) 0.250 H b) 0.450 mWb
30.11 a) 4.68 mV b) punto a
30.13 a) 1000 b) 2.09 Ω
30.15 b) 0.111 μH
30.17 2850
30.19 a) 0.161 T b) 10.3 kJ/m^3 c) 0.129 J
d) 40.2 μH
30.21 91.7 J
30.23 a) 2.40 A/s b) 0.800 A/s c) 0.413 A
d) 0.750 A
30.25 a) 17.3 μs b) 30.7 μs
30.27 a) 0.250 A b) 0.137 A c) 32.9 V, punto c
d) 0.462 ms
30.29 a) $P = (4.50\ \text{W})(1 - e^{-(3.20\ \text{s}^{-1})t})$
b) $P_R = (4.50\ \text{W})(1 - e^{-(3.20\ \text{s}^{-1})t})^2$
c) $P_L = (4.50\ \text{W})(e^{-(3.20\ \text{s}^{-1})t} - e^{-(6.40\ \text{s}^{-1})t})$
30.33 a) 25.0 mH b) 90.0 nC c) 0.540 μJ
d) 6.58 mA
30.35 a) 105 rad/s, 0.0596 s b) 0.720 mC
c) 4.32 mJ d) −0.542 mC
e) −0.050 A, en sentido antihorario
f) U_C = 2.45 mJ, U_L = 1.87 mJ
30.37 a) 7.50 μC b) 15.9 kHz c) 0.0212 J
30.39 a) 298 rad/s b) 83.8 Ω
30.43 a) 0.288 μH b) 14.2 μV
30.47 20 km/s, aproximadamente 30 veces menor
30.49 a) $\dfrac{\mu_0 i}{2\pi r}$ b) $\dfrac{\mu_0 i^2 l}{4\pi r}dr$ c) $\dfrac{\mu_0 i^2 l}{4\pi}\ln(b/a)$
d) $\dfrac{\mu_0 l}{2\pi}\ln(b/a)$
30.51 a) 5.00 H b) 31.7 m, no
30.53 a) 0.281 J b) 0.517 J c) 0.236 J
30.57 222 μF, 9.31 μH
30.59 13.0 mA, 184 A/s
30.61 a) 0 A, 20.0 V b) 0.267 A, 0 V
c) 0.147 A, 9.0 V
30.63 a) solenoide c) 50 V d) 3.5 A
e) 4.3 Ω, 43 mH
30.65 a) $A_1 = A_4 = 0.800$ A, $A_2 = A_3 = 0$;
$V_1 = 40.0$ V, $V_2 = V_3 = V_4 = V_5 = 0$
b) $A_1 = 0.480$ A, $A_2 = 0.160$ A, $A_3 = 0.320$ A,
$A_4 = 0$; $V_1 = 24.0$ V, $V_2 = 0$, $V_3 = V_4 = V_5 =$ 16.0 V c) 192 μC
30.67 a) $A_1 = A_4 = 0.455$ A, $A_2 = A_3 = 0$
b) $A_1 = 0.585$ A, $A_2 = 0.320$ A,
$A_3 = 0.160$ A, $A_4 = 0.107$ A
30.69 a) 60.0 V b) punto a c) 60.0 V
d) punto c e) −96.0 V f) punto b
g) 156 V h) punto d
30.71 a) 0; $v_{ac} = 0$, $v_{cb} = 36.0$ V
b) 0.180 A; $v_{ac} = 9.0$ V, $v_{cb} = 27.0$ V
c) $i_0 = (0.180\ \text{A})(1 - e^{-t/(0.020\ \text{s})})$,
$v_{ac} = (9.0\ \text{V})(1 - e^{-t/(0.020\ \text{s})})$,
$v_{cb} = (9.0\ \text{V})(3.00 + e^{-t/(0.020\ \text{s})})$
30.75 a) $i_1 = \dfrac{\varepsilon}{R_1}$, $i_2 = \dfrac{\varepsilon}{R_2}(1 - e^{-R_2 t/L})$
b) $i_1 = \dfrac{\varepsilon}{R_1}$, $i_2 = \dfrac{\varepsilon}{R_2}$ c) $i = \dfrac{\varepsilon}{R_2}e^{-(R_1+R_2)t/L}$
d) 21.2 Ω, 12.7 V e) 35.3 mA
30.77 a) $d = D\left(\dfrac{L - L_0}{L_f - L_0}\right)$
b) 0.63024 H, 0.63048 H, 0.63072 H, 0.63096 H
c) 0.63000 H, 0.62999 H, 0.62999 H, 0.62998 H
d) oxígeno
30.79 a) $i_1 = \dfrac{\varepsilon}{R_1}(1 - e^{-R_1 t/L})$, $i_2 = \dfrac{\varepsilon}{R_2}e^{-t/R_2C}$,
$q_2 = \varepsilon C(1 - e^{-t/R_2C})$
b) $i_1 = 0$, $i_2 = 9.60$ mA c) $i_1 = 1.92$ A, $i_2 = 0$ d) 1.6 ms e) 9.4 mA f) 0.22 s

Capítulo 31

31.1 1.06 A
31.3 a) 31.8 V b) 0
31.5 a) 90°, adelante b) 193 Hz
31.7 13.3 μF
31.9 a) 1510 Ω b) 0.239 H c) 497 Ω
d) 16.6 μF
31.11 a) (12.5 V) cos[(480 rad/s)t] b) 7.17 V
31.13 a) i = (0.0253 A) cos[(720 rad/s)t]
b) 180 Ω
c) v_L = −(4.56 V) sen[(720 rad/s)t]
31.15 a) 601 Ω b) 0.0499 A c) −70.6°, se retrasa d) 9.98 V, 4.99 V, 33.3 V
31.17 50.0 V
31.19 a) 40.0 W b) 0.167 A c) 720 Ω
31.21 b) 76.7 V
31.23 a) 45.8°, 0.697 b) 344 Ω c) 155 V
d) 48.6 W e) 48.6 W f) 0 g) 0
31.25 a) 0.302 b) 0.370 W c) 0.370 W, 0, 0
31.27 a) 113 Hz, 15.0 mA b) 7.61 mA, se atrasa
31.29 a) 150 V b) 150 V, 1290 V, 1290 V
c) 37.5 W
31.31 a) 1.00 b) 75.0 W c) 75.0 W
31.33 a) 115 Ω b) 146 Ω c) 146 Ω
31.35 a) 10 b) 2.40 A c) 28.8 W d) 500 Ω
31.37 a) usar un transformador reductor con $N_2/N_1 = 1/2$
b) 6.67 A b) 36.0 Ω
31.39 0.124 H
31.41 3.59×10^7 rad/s
31.43 230 Ω
31.45 a) inductor b) 0.133 H
31.47 a) 0.831 b) 161 V
31.49 a) inductor: 1.15 A, 31.6 V; resistor: 1.15 A, 57.5 V; capacitor: 1.15 A, 14.6 V
b) todo cambia: inductor: 0.860 A, 47.3 V; resistor: 0.860 A, 43.0 V; capacitor: 0.860 A, 5.46 V
31.51 $\dfrac{V_{\text{salida}}}{V_s} = \sqrt{\dfrac{R^2 + \omega^2L^2}{R^2 + \left(\omega L - \dfrac{1}{\omega C}\right)^2}}$
31.55 a) 102 Ω b) 0.882 A c) 270 V
31.57 b) sí c) 0 e) no

31.59 a) $I_R = V/R$, $I_C = V\omega C$, $I_L = V/\omega L$
d) 159 Hz e) 0.50 A
f) 0.50 A, 0.050 A, 0.050 A
31.61 a) L y C b) $^1/_2$ para cada uno
31.63 a) 0.750 A b) 160 Ω c) 341 Ω, 619 Ω
d) 341 Ω
31.65 0, $I_0/\sqrt{3}$
31.67 a) disminuye en $^1/_2$ b) aumenta en 2
c) disminuye en $^1/_2$ d) no
31.69 a) $\dfrac{V}{\sqrt{R^2 + \dfrac{9L}{4C}}}$ b) $\sqrt{\dfrac{L}{C}}\dfrac{2V}{\sqrt{R^2 + \dfrac{9L}{4C}}}$
c) $\sqrt{\dfrac{L}{C}}\dfrac{V/2}{\sqrt{R^2 + \dfrac{9L}{4C}}}$ d) $\dfrac{2LV^2}{R^2 + \dfrac{9L}{4C}}$
e) $\dfrac{1}{2}\dfrac{LV^2}{R^2 + \dfrac{9L}{4C}}$
31.71 a) 75.8 V b) 13.6 Ω
31.73 a) $V_{ef}I/2$ b) 0 c) 0
31.75 a) 0.400 A b) 36.9° c) $(400 - 300i)$ Ω,
500 Ω d) $(0.320 + 0.240i)$ A, 0.400 A
e) 36.9° f) $V_{R\text{-cmp}} = (128 + 96i)$V,
$V_{L\text{-cmp}} = (-120 + 160i)$V,
$V_{C\text{-cmp}} = (192 - 256i)$V

Capítulo 32

32.1 a) 1.28 s b) 8.15×10^{13} km
32.3 13.3 nT, dirección $+y$
32.5 3.0×10^{18} Hz, 3.3×10^{-19} s,
6.3×10^{10} rad/m
32.7 a) 6.94×10^{14} Hz b) 375 V/m c) $E(x, t) =$
$(375\ \text{V/m}) \cos[(1.45 \times 10^7\ \text{rad/m})x -$
$(4.36 \times 10^{15}\ \text{rad/s})t]$, $B(x, t) =$
$(1.25\ \mu\text{T}) \cos[(1.45 \times 10^7\ \text{rad/m})x -$
$(4.36 \times 10^{15}\ \text{rad/s})t]$
32.9 a) i. 60 kHz ii. 6.0×10^{13} Hz
iii. 6.0×10^{16} Hz b) i. 4.62×10^{-14} m =
4.62×10^{-5} nm
ii. 508 m = 5.08×10^{11} nm
32.11 a) dirección $+y$ b) 0.149 mm c) $\vec{B} =$
$(1.03\ \text{mT})\hat{i} \cos[(4.22 \times 10^4\ \text{rad/m})y -$
$(1.265 \times 10^{13}\ \text{rad/s})t]$
32.13 a) 361 m b) 0.0174 rad/m
c) 5.22×10^6 rad/s d) 0.0144 V/m
32.15 a) 0.381 μm b) 0.526 μm c) 1.38
d) 1.90
32.17 a) 330 W/m² b) 500 V/m, 1.7 μT
32.19 a) 11 μW/m² b) 0.30 nT c) 840 W
32.21 2.5×10^{25} W
32.23 12.0 V/m, 40.0 nT
32.25 850 kW
32.27 a) 0.18 mW b) 274 V/m, 0.913 μT
c) 0.18 mJ/s d) 0.010 W/cm²
32.29 a) 637 W/m² b) 693 V/m, 2.31 μT
c) 2.12 μJ/m³
32.31 a) 30.5 cm b) 2.46 GHz c) 2.11 GHz
32.33 a) 7.10 mm b) 3.55 mm
c) 1.56×10^8 m/s
32.35 a) 4.38 mm b) 4.38 mm c) 4.38 mm
32.37 a) 0.375 mJ b) 4.08 mPa
c) 604 nm, 3.70×10^{14} Hz
d) 30.3 kV/m, 101 μT
32.39 a) 71.6 MW/m² b) 232 kV/m, 774 μT
c) 35.8 MW/m² d) 637 W/m²
32.41 a) 0.00602 W/m² b) 2.13 V/m, 7.10 nT
c) 1.20 pN, no
32.43 a) 840 V/m, 2.80 μT
b) 1.56 μJ/m³ para cada uno c) 15.3 pJ
32.45 a) en $r = R$: 64 MW/m², 0.21 Pa; en $r = R/2$:
260 MW/m², 0.85 Pa b) no
32.47 3.89×10^{-13} rad/s²
32.49 a) $\rho I/\pi a^2$, en la dirección de la corriente
b) $\mu_0 I/2\pi a$, en sentido antihorario si la
corriente sale de la página
c) $\dfrac{\rho I^2}{2\pi^2 a^3}$, radialmente hacia adentro
d) $\dfrac{\rho l I^2}{\pi a^2} = I^2 R$
32.51 a) 23.6 h b) tirarla
32.53 a) 9.75×10^{-15} W/m²
b) 2.71 μV/m, 9.03×10^{-15} T, 67.3 ms
c) 3.25×10^{-23} Pa
d) 0.190 m
32.55 a) $\dfrac{4\rho G\pi MR^3}{3r^2}$ b) $\dfrac{LR^2}{4cr^2}$ c) 0.19 μm, no
32.57 b) 1.39×10^{-11} c) 2.54×10^{-8}

Capítulo 33

33.1 39.4°
33.3 a) 2.04×10^8 m/s
b) 442 nm
33.5 a) 1.55 b) 550 nm
33.7 a) 47.5° b) 66.0°
33.9 2.51×10^8 m/s
33.11 a) 2.34 b) 82°
33.13 a) f, $n\lambda$, nv
b) f, $(n/n')\lambda$, $(n/n')v$
33.15 71.8°
33.17 a) 51.3° b) 33.6°
33.19 a) 58.1° b) 22.8°
33.21 1.77
33.23 462 nm
33.25 0.6°
33.27 $0.375I_0$
33.29 a) $I_0/2$, $0.125I_0$, $0.0938I_0$ b) 0
33.31 a) 1.40 b) 35.5°
33.33 $\arccos\left(\dfrac{\cos\theta}{\sqrt{2}}\right)$
33.35 6.38 W/m²
33.37 a) $I_0/2$, $0.250I_0$, $0.125I_0$, linealmente polarizada a lo largo del eje de cada filtro b) $I_0/2$ linealmente polarizada a lo largo del eje del filtro; 0
33.41 a) 46.7° b) 13.4°
33.43 72.1°
33.45 1.28
33.47 1.53
33.49 1.84
33.51 a) 48.6° b) 48.6°
33.53 39.1°
33.55 0.23°, aproximadamente igual
33.59 b) 38.9° c) 5.0°
33.61 a) 35° b) $I_p = 19.9$ W/m², $I_0 = 10.1$ W/m²
33.63 23.3°
33.67 a) $\Delta = 2\theta_a^A - 6 \operatorname{arcsen}\left(\dfrac{\operatorname{sen}\theta_a^A}{n}\right) + 2\pi$
b) $\cos^2\theta_2 = \dfrac{n^2 - 1}{8}$
c) violeta: $\theta_2 = 71.55°$, $\Delta = 233.2°$;
rojo: $\theta_2 = 71.94°$, $\Delta = 230.1°$

Capítulo 34

34.1 39.2 cm a la derecha del espejo, 4.85 cm
34.3 9.0 cm, la punta del frente
34.5 b) 33.0 cm a la izquierda del vértice, 1.20 cm, invertida, real
34.7 0.213 mm
34.9 18.0 cm del vértice, 0.50 cm, derecha, virtual
34.11 b) 28.0 cm, invertida c) 8.00 cm
34.13 a) cóncavo b) 2.50 cm, 5.00 cm
34.15 2.67 cm
34.17 3.30 m
34.19 a) en el centro del tazón, 1.33 b) no
34.21 39.5 cm
34.23 8.35 cm a la izquierda del vértice, 0.326 mm, derecha
34.25 a) 107 cm a la derecha de la lente, 17.8 mm, real, invertida b) lo mismo del inciso a)
34.27 a) 71.2 cm a la derecha de la lente b) −2.97
34.29 3.69 cm, 2.82 cm a la izquierda de la lente
34.31 1.67
34.33 a) 18.6 mm b) a 19 mm de la córnea
c) 0.61 mm, real, invertida
34.35 a) 36.0 cm a la derecha de la lente
b) 180 cm a la izquierda de la lente
c) 7.20 cm a la izquierda de la lente
d) 13.8 cm a la izquierda de la lente
34.37 a 26.3 cm de la lente, 12.4 mm, derecha, del mismo lado
34.39 a) 200 cm a la derecha de la primera lente, 4.80 cm
b) 150 cm a la derecha de la segunda lente, 7.20 cm
34.41 a) 53.0 cm b) real c) 2.50 mm, invertida
34.43 10.2 m
34.45 a) 1.4×10^{-4} b) 5.3×10^{-4}
c) 1.5×10^{-3}
34.47 a) 85 mm b) 135 mm
34.49 a) $f/11$ b) $1/480$ s = 2.1 ms
34.51 a) convexa b) 50 a 56 mm
34.53 a) 80.0 cm b) 76.9 cm
34.55 49.4 cm, 2.02 dioptrías
34.57 −1.37 dioptrías
34.59 a) 6.06 cm b) 4.12 mm
34.61 a) 640 b) 43
34.63 a) 8.37 mm b) 21.4 c) −297
34.65 a) −6.33 b) 1.90 cm c) 0.127 rad
34.67 a) 0.661 m b) 59.1
34.69 7.20 m/s
34.71 $h/2$
34.73 a) 20.0 cm b) 39.0 cm
34.75 a) a 46 cm del espejo, en el lado opuesto del espejo, virtual b) 29 mm, derecha c) no
34.77 51 m/s
34.79 b) 2.4 cm, −0.133
34.81 2.00
34.83 a) −3.3 cm b) virtual
c) 1.9 cm a la derecha del vértice del extremo derecho de la varilla d) real, invertida, 1.06 mm
34.85 a) 58.7 cm, convergente b) 4.48 mm, virtual
34.87 a) 6.48 mm b) no, detrás de la retina
c) a 19.3 mm de la córnea, enfrente de la retina
34.89 50.3 cm
34.91 10.6 cm
34.93 a) 0.24 m b) 0.24 m
34.95 72.1 cm a la derecha del vértice de la superficie
34.97 0.80 cm
34.99 −26.7 cm
34.101 1.24 cm arriba de la página
34.103 a) 46.7 m b) 35.0 m
34.105 134 cm a la izquierda del objeto
34.107 a) 3.5 cm b) 7.0 cm c) 100 cm
d) 57 e) no
34.109 4.17 dioptrías
34.111 a) 30.9 cm b) 29.2 cm
34.113 d) 36.0 cm, 21.6 cm, $d = 1.2$ cm
34.115 a) 552 b) 25.8 cm
34.117 a) $4f$
34.119 b) 1.35 cm

Capítulo 35

35.1 a) 14 cm, 48 cm, 82 cm, 116 cm, 150 cm
b) 31 cm, 65 cm, 99 cm, 133 cm
35.3 b) 427 Hz b) 0.796 m
35.5 0.75 m, 2.00 m, 3.25 m, 4.50 m, 5.75 m, 7.00 m, 8.25 m
35.7 a) 2.0 m b) constructivamente
c) 1.0 m, destructivamente
35.9 1.14 mm
35.11 0.83 mm
35.13 a) 39 b) ±73.3°
35.15 12.6 cm
35.17 1200 nm
35.19 a) $0.750I_0$ b) 80 nm
35.21 1670 rad
35.23 71.4 m
35.25 114 nm
35.27 0.0234°

35.29 a) 55.6 nm b) i. 2180 nm ii. 11.0 longitudes de onda
35.31 a) 514 nm, verde b) 603 nm, naranja
35.33 0.11 μm
35.35 0.570 mm
35.37 1.54 mm
35.39 a) 96.0 nm b) no, no
35.41 a) 1.58 mm (verde), 1.72 mm (naranja) b) 3.45 mm (violeta), 4.74 mm (verde), 5.16 mm (naranja) c) 9.57 μm
35.43 1.730
35.45 0°, 27.3°, 66.5°
35.47 1.57
35.49 arriba de la línea central: 3.14°, 15.9°, 29.5°, 45.4°, 68.6°; debajo de la línea central: 9.45°, 22.5°, 37.0°, 55.2°
35.51 $6.8 \times 10^{-5}\,(\mathrm{C}°)^{-1}$
35.53 $\lambda/2d$, independiente de m
35.55 b) 0.72 m
35.57 1.42
35.59 b) $I = I_0 \cos^2\left\{\dfrac{\pi[d\,\mathrm{sen}\,\theta + L(n-1)]}{\lambda_0}\right\}$ c) $\mathrm{sen}\,\theta = \dfrac{m\lambda_0 - L(n-1)}{d}$
35.61 14.0

Capítulo 36

36.1 506 nm
36.3 a) 226 b) ±83.0°
36.5 9.07 m
36.7 a) 63.8 cm b) ±22.1°, ±34.3°, ±48.8°, ±70.1°
36.9 ±16.0°, ±33.4°, ±55.6°
36.11 0.920 μm
36.13 a) 580 nm b) 0.128
36.15 a) 6.75 mm b) 2.43 μW/m^2
36.17 a) 668 nm b) $9.36 \times 10^{-5} I_0$
36.19 a) ±13.0°, ±26.7°, ±42.4°, ±64.1° b) 2.08 W/m^2
36.21 a) 3 b) 2
36.23 a) 0.0627°, 0.125° b) $0.249 I_0$, $0.0256 I_0$
36.25 a) 1 y 3, 2 y 4 b) 1 y 2, 3 y 4 c) 1 y 3, 2 y 4
36.27 15.0 μm (ancho), 45.0 μm (separación)
36.29 a) 4790 ranuras/cm b) 19.1°, 40.8° c) no
36.31 a) sí b) 13.3 nm
36.33 a) 4830 líneas/cm b) ±37.7°, ±66.5°
36.35 10.5°, 21.3°, 33.1°
36.37 a) 17,500 b) sí c) i. 587.8170 nm ii. 587.7834 nm iii. 587.7834 nm $< \lambda <$ 587.8170 nm
36.39 0.232 nm
36.41 0.559 nm
36.43 1.88 m
36.45 92 cm
36.47 1.45 m
36.49 a) 77 m (Hubble), 1100 km (Arecibo) b) 1500 km
36.51 30.2 μm
36.53 a) 78 b) ±80.8° c) 555 μW/m^2
36.55 1.68
36.57 a) 1.80 mm b) 0.796 mm
36.61 b) para $3\pi/2$: dos ranuras cualesquiera separadas por otra ranura; para los demás casos: dos ranuras cualesquiera separadas por otras tres ranuras
36.63 360 nm
36.65 segundo
36.67 c) ±2.61 rad
36.69 387 km
36.71 1.40

Capítulo 37

37.1 el relámpago A
37.3 $0.867c$, no
37.5 a) $0.998c$ b) 126 m
37.7 1.12 h, en la nave espacial
37.9 92.5 m
37.11 a) 0.66 km b) 49 μs, 15 km c) 0.45 km
37.13 a) 3570 m b) 90.0 μs c) 89.2 μs
37.15 a) $0.806c$ b) $0.974c$ c) $0.997c$
37.17 a) positiva (hacia la nave) b) $0.385c$
37.19 $0.784c$
37.21 $0.611c$
37.23 $0.837c$, alejándose
37.25 a) $0.159c$ b) 172 millones de dólares
37.27 $3.06 p_0$
37.29 a) $0.866c$ b) $0.608c$
37.31 a) 5.49×10^{15} m/s^2 b) 9.26×10^{14} m/s^2
37.33 a) $0.866c$ b) $0.986c$
37.35 a) 0.450 nJ b) 1.94×10^{-18} kg · m/s c) $0.968c$
37.37 a) 3.3×10^{-13}% b) 4.0×10^{-13} g, aumenta, no
37.39 a) 1.11×10^{3} kg b) 52.1 cm
37.41 a) 0.867 nJ b) 0.270 nJ c) 0.452
37.43 a) 5.34 pJ (no relativista), 5.65 pJ (relativista), 1.06 b) 67.8 pJ (no relativista), 331 pJ (relativista), 4.88
37.45 a) 2.06 MV b) 0.330 pJ = 2.06 MeV
37.47 a) 4.2×10^{9} kg = 4.6×10^{6} tons b) 1.5×10^{13} años
37.49 a) $\Delta = 8.42 \times 10^{-6}$ b) 34.0 GeV
37.51 $0.700c$
37.53 a) $0.995c$ b) 1%
37.55 a) $\Delta = 9 \times 10^{-9}$ b) $7000u$
37.57 0.168 MeV
37.59 a) $4c/5$ b) c c) i. 145 MeV ii. 625 MeV d) i. 117 MeV ii. 469 MeV
37.65 b) $\Delta x' = \sqrt{(\Delta x)^2 - c^2(\Delta t)^2}$ c) 14.4 ns
37.67 $0.357c$, se alejan
37.69 a) 1000 años, 866 años, 1.4×10^{19} J, 14% b) 505 años, 71 años, 5.5×10^{20} J, 550% c) 501 años, 7.1 años, 6.3×10^{21} J, 6300%
37.71 2.04×10^{-13} N
37.75 a) hacia nosotros a 13.1 km/s, 39.4 km/s b) 5.96×10^{9} m, aproximadamente 0.040 veces la distancia de la Tierra al Sol; 5.55×10^{29} kg = $0.279\, m_{\mathrm{Sol}}$
37.77 a) 2494 MeV b) 2.526 c) 987.4 MeV

Capítulo 38

38.1 a) $K_2 = 4K_1$ b) $E_2 = 2E_1$
38.3 5.77×10^{14} Hz, 1.28×10^{-27} kg · m/s, 3.84×10^{-19} J = 2.40 eV
38.5 a) 5.00×10^{14} Hz b) 1.13×10^{19} fotones/s c) no
38.7 a) 4.8 eV b) 6.1×10^{-34} J · s d) f_{th}, ϕ y la intersección con el eje horizontal son diferentes, la pendiente es la misma
38.9 249 km/s
38.11 2.14 eV
38.13 a) 264 nm b) 4.70 eV
38.15 0.311 nm, igual
38.17 1.13 keV
38.19 0.0714 nm, 180°
38.21 a) 4.39×10^{-4} nm b) 0.04294 nm c) 300 eV, pérdida d) 300 eV
38.23 51.0°
38.25 a) 1.27×10^{-14} J b) 9.46×10^{-14} J c) 2.10 pm, menos
38.27 1.19×10^{-27} kg · m/s, 1.96×10^{-29} kg · m/s
38.29 a) 1.04 eV b) 1200 nm c) 2.50×10^{14} Hz d) 4.14×10^{-7} eV
38.31 a) 4.56×10^{14} Hz b) 658 nm c) 1.89 eV d) 6.58×10^{-34} J · s
38.33 a) 5.07 mJ b) 11.3 W c) 1.49×10^{16} fotones/s
38.35 a) 6.99×10^{-24} kg · m/s b) 705 eV
38.37 6.28×10^{-24} kg · m/s, 59.4°
38.39 a) 5×10^{-33} m b) 4×10^{-9} grados c) 0.1 mm
38.41 a) 319 eV, 1.06×10^{7} m/s b) 3.89 nm
38.43 a) 4.85 pm b) 0.256 MeV

Capítulo 39

39.1 a) 0.155 nm b) 8.46×10^{-14} m
39.3 a) 2.37×10^{-24} kg · m/s b) 3.08×10^{-18} J = 19.3 eV
39.5 a) 0.332 nm, igual a la circunferencia de la órbita b) 1.33 nm, $^1/_4$ de la circunferencia de la órbita
39.7 a) 8.8×10^{-36} m b) no
39.9 a) 62.0 nm (fotón), 0.274 nm (electrón) b) 4.96 eV (fotón), 2.41×10^{-5} eV (electrón) c) ≈250 nm, electrón
39.11 3.90×10^{-34} m, no
39.13 a) 0.0607 V b) 248 eV c) 20.5 μm
39.15 a) 7.3×10^{6} m/s b) 150 eV c) 12 keV d) electrón
39.17 0.432 eV
39.19 a) 2.07°, 4.14° b) 1.81 cm
39.21 a) 8260 b) electrón
39.23 a) 3.63 MeV b) 3.63 MeV c) 1.32×10^{7} m/s
39.25 3.16×10^{-34} kg · m^2/s
39.27 a) −218 eV, 16 veces b) 218 eV, 16 veces c) 7.60 nm d) $^1/_4$ del radio del hidrógeno
39.29 a) 2.18×10^{6} m/s, 1.09×10^{6} m/s, 7.27×10^{5} m/s b) 1.53×10^{-16} s, 1.22×10^{-15} s, 4.13×10^{-15} s c) 8.2×10^{6}
39.31 a) −17.50 eV, −4.38 eV, −1.95 eV, −1.10 eV, −0.71 eV b) 378 nm
39.33 a) −5.08 eV b) −5.64 eV
39.35 5.32×10^{21} fotones/s
39.37 4.00×10^{17} fotones/s
39.39 a) 1.2×10^{-33} b) 3.5×10^{-17} c) 5.9×10^{-9}
39.41 a) 2060 K b) 1410 nm
39.43 1.06 mm, microondas
39.45 a) $1.7T$ b) 0.58
39.47 a) 97 nm, no b) 8.2×10^{9} m, $12R_{\mathrm{Sol}}$ c) no
39.49 a) 4.40×10^{-32} m/s b) no
39.51 no válida
39.53 6.34×10^{-14} eV
39.55 a) 1.69×10^{-28} kg b) −2.53 keV c) 0.655 nm
39.57 a) 12.1 eV b) 3; 103 nm, 122 nm, 657 nm
39.59 a) 0.90 eV
39.61 a) 5×10^{49} fotones/s b) 30,000
39.63 29,800 K
39.65 a) $h/2mc$ b) 6.61×10^{-16} m, independiente de n
39.67 a) $I(f) = \dfrac{2\pi h f^3}{c^2(e^{hf/kT} - 1)}$ c) $\sigma = 5.67 \times 10^{-8}$ W/m^2 · K^4
39.69 a) 12 eV b) 0.15 mV, 7300 m/s c) 8.2×10^{-8} V, 4.0 m/s
39.71 a) no b) 2.52 V
39.73 a) $E = c\sqrt{2mK}$ b) fotón
39.75 1.66×10^{-17} m, no
39.77 b) $\Delta = \dfrac{m^2c^2\lambda^2}{2h^2}$ c) $\Delta = 8.50 \times 10^{-8}$
39.79 a) $\dfrac{h}{mc\sqrt{15}}$ b) i. 1.53 MeV, 6.26×10^{-13} m ii. 2810 MeV, 3.41×10^{-16} m
39.81 a) 1.1×10^{-20} kg · m/s b) 19 MeV c) $U_{\mathrm{total}} = -0.29$ MeV, no
39.83 7.0×10^{-36} kg, 2.9×10^{-8}
39.85 a) 1.1×10^{-35} m/s b) 2.3×10^{27} años, no
39.87 a) no b) 1.51 V c) 1.51 eV, aproximadamente $^1/_4$ de la energía potencial del cristal de NaCl d) 1240 eV, sí
39.89 a) $2d\,\mathrm{sen}\,\theta = m\lambda$ b) 53.3° c) menor
39.91 a) 248 eV b) 0.0603 eV
39.93 a) $F = -\dfrac{A|x|}{x}$, $x \neq 0$ b) $E = \dfrac{3}{2}\left(\dfrac{\hbar^2 A^2}{m}\right)^{1/3}$

Capítulo 40

40.1 $\Psi(x, t) = Ae^{-(4.27\times10^{10}\ \mathrm{m}^{-1})x}e^{-(1.05\times10^{17}\ \mathrm{s}^{-1})t}$
40.3 a) $8\pi/k$ b) $4\omega/k$, sí
40.5 a) $\lambda/4, 3\lambda/4, 5\lambda/4, \ldots$ b) $0, \lambda/2, \lambda, 3\lambda/2, \ldots$
40.7 no
40.11 a) 1.6×10^{-67} J b) 1.3×10^{-33} m/s, 1.0×10^{33} s c) 4.9×10^{-67} J d) no
40.13 1.66×10^{-10} m
40.15 0.61 nm
40.19 a) $0, L/2, L$ b) $L/4, 3L/4$ c) sí
40.23 a) 6.0×10^{-10} m (dos veces el ancho de la caja), 1.1×10^{-24} kg · m/s
b) 3.0×10^{-10} m (igual que el ancho de la caja), 2.2×10^{-24} kg · m/s
c) 2.0×10^{-10} m (2/3 del ancho de la caja), 3.3×10^{-24} kg · m/s
40.25 b) sí
40.27 3.43×10^{-10} m
40.29 $-A\left(\frac{2mE}{\hbar^2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}x\right) - B\left(\frac{2mE}{\hbar^2}\right)\cos\left(\frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}x\right)$
40.31 22 fm
40.33 a) 4.4×10^{-8} b) 4.2×10^{-4}
40.35 $1/\sqrt{2}$
40.37 a) 0.0013 b) 10^{-143}
40.39 1.11×10^{-33} J = 6.93×10^{-15} eV, 2.22×10^{-33} J = 1.39×10^{-14} eV
40.41 a) 0.21 eV b) 5900 N/m
40.43 $(2n + 1)\frac{\hbar}{2}$, aumenta con n
40.45 a) 5.89×10^{-3} eV b) 106 μm c) 0.0118 eV
40.47 a) $|\Psi(x, t)|^2 = \frac{2}{L}\left[1 - \cos\left(\frac{4\pi^2\hbar t}{mL^2}\right)\right]$
b) $\frac{4\pi^2\hbar}{mL^2}$
40.49 a) $\psi(x) = \frac{\operatorname{sen} k_0x}{k_0x}$
b) $0, \pm\pi/k_0$; $w_x = 2\pi/k_0$, L c) $2L$
d) $\hbar$, que es mayor que $\hbar/2$
40.51 $B = \left(\frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}\right)A$, $C = \left(\frac{2k_2}{k_1 + k_2}\right)A$
40.53 a) 19.2 μm b) 11.5 μm
40.55 a) 0.818 b) 0.500 c) sí
40.57 a) $(2/L)\,dx$ b) 0 c) $(2/L)\,dx$
40.61 a) $A = C$, $B \operatorname{sen} kL + A\cos kL = De^{-\kappa L}$, donde $k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$ b) $kB = \kappa C$, $kB\cos kL - kA\operatorname{sen} kL = -\kappa De^{-\kappa L}$
40.65 6.63×10^{-34} J = 4.14×10^{-15} eV; 1.33×10^{-33} J = 8.30×10^{-15} eV
40.69 b) 134 eV
40.71 a) $E_n = \frac{(2n)^2h^2}{8mL^2}$, $n = 1, 2, \ldots$
b) $E_n = \frac{(2n + 1)^2h^2}{8mL^2}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$
c) igual
d) las del inciso a) son impares y del inciso b) son pares
40.73 a) $x = \pm\sqrt{2E/K'}$
c) los subestima

Capítulo 41

41.1 a) 1 b) 3
41.3 3.51 nm
41.5 (2, 2, 1): $x = L/2$, $y = L/2$; (2, 1, 1): $x = L/2$; (1, 1, 1): en ninguno
41.7 a) 0 b) 3.65×10^{-34} kg · m²/s
c) 3.16×10^{-34} kg · m²/s
d) 5.27×10^{-35} kg · m²/s e) 1/6
41.9 4
41.11 $1.414\hbar$, $19.49\hbar$, $199.5\hbar$; conforme n aumenta, la L máxima se acerca más a $n\hbar$.
41.13 a) 18 b) $m_l = -4$, 153.4°
c) $m_l = +4$, 26.6°
41.17 a) 0.468 T b) 3
41.19 a) 9 b) 3.47×10^{-5} eV
c) 2.78×10^{-4} eV
41.21 a) 2.5×10^{30} rad/s b) 2.5×10^{13} m/s, no es válido porque $v > c$
41.23 1.68×10^{-4} eV, $m_s = +^1/_2$
41.25 g
41.27 $n = 1, l = 0, m_l = 0, m_s = \pm^1/_2$: 2 estados;
$n = 2, l = 0, m_l = 0, m_s = \pm^1/_2$: 2 estados;
$n = 2, l = 1, m_l = \pm1, m_s = \pm^1/_2$: 6 estados
41.29 a) $1s^22s^2$ b) $1s^22s^22p^63s^2$, magnesio
c) $1s^22s^22p^63s^23p^64s^2$, calcio
41.31 4.18 eV
41.33 a) $1s^22s^22p$ b) −30.6 eV c) $1s^22s^22p^63s^23p$
d) −13.6 eV
41.35 a) −13.6 eV b) −3.4 eV
41.37 a) 8.95×10^{17} Hz, 3.71 keV, 3.35×10^{-10} m
b) 1.68×10^{18} Hz, 6.96 keV, 1.79×10^{-10} m
c) 5.48×10^{18} Hz, 22.7 keV, 5.47×10^{-11} m
41.39 $3E_{1,1,1}$
41.41 a) 1/64 = 0.0156 b) 7.50×10^{-4}
c) 2.06×10^{-3}
41.43 a) $4\pi A^2r^2e^{-2\alpha r^2}dr$ b) $1/\sqrt{2\alpha}$, no
41.45 a) $E = \hbar\left[(n_x + n_y + 1)\omega_1^2 + \left(n_z + \frac{1}{2}\right)\omega_2^2\right]$, con n_x, n_y y n_z enteros negativos
b) $\hbar\left(\omega_1^2 + \frac{1}{2}\omega_2^2\right)$, $\hbar\left(\omega_1^2 + \frac{3}{2}\omega_2^2\right)$, c) uno
41.47 b) n = capa 5
41.49 a) $0, \sqrt{2}\hbar, \sqrt{6}\hbar, \sqrt{12}\hbar, \sqrt{20}\hbar$
b) 7470 nm, no
41.51 a) $1.51e$, 9.49 electrones
b) i. 1.8 ii. −2.75 eV
41.53 a) $2a$ b) 0.238
41.55 b) 0.176
41.57 b) $(\theta_L)_{mín} = \arccos(-\sqrt{1 - 1/n})$
41.59 $4a$, igual
41.61 $2 \to 1, 1 \to 0, 0 \to -1, \frac{e\hbar B}{2m}$;
$1 \to 1, 0 \to 0, -1 \to -1, 0$;
$0 \to 1, -1 \to 0, -2 \to -1, -\frac{e\hbar B}{2m}$
41.63 3.00 T
41.65 a) $0.99999978 = 1 - 2.2 \times 10^{-7}$ b) 0.9978
c) 0.978
41.67 a) 4, 20 b) $1s^22s^22p^3$
41.69 a) 122 nm b) 1.52 pm, aumenta
41.71 a) 0.188 nm, 0.250 nm
b) 0.0471 nm, 0.0624 nm
41.75 a) $2a/Z$ b) 0.238, independiente de Z

Capítulo 42

42.1 277 nm, ultravioleta
42.3 a) 6.1 K b) 34,600 K c) He_2 no, H_2 sí
42.5 40.8 μm
42.7 5.65×10^{-13} m
42.9 a) 0.0644 nm (carbono), 0.0484 nm (oxígeno)
b) 1.45×10^{-46} kg · m², sí
42.11 a) 1.03×10^{12} rad/s
b) 66.3 m/s (carbono), 49.8 m/s (oxígeno)
c) 6.10×10^{-12} s
42.13 a) 7.49×10^{-3} eV b) 166 μm
42.15 b) $\frac{lh}{2\pi I}$
42.17 2170 kg/m³
42.19 a) 1.12 eV
42.21 1.20×10^6
42.23 1.5×10^{22} estados/eV
42.25 a) $0.0233R$ b) 0.767%
c) no, movimiento de los iones
42.27 31.2%
42.29 0.20 eV debajo de la parte inferior de la banda de conducción
42.31 a) i. 0.0204 mA ii. −0.0196 mA
iii. 26.8 mA iv. −0.491 mA
b) bueno para V entre ±1.0 mV, de otro modo no
42.33 a) 5.56 mA b) −5.18 mA, −3.77 mA
42.35 a) 977 N/m b) 1.25×10^{14} Hz
42.37 a) 3.8×10^{-29} C · m b) 1.3×10^{-19} C
c) 0.81 d) 0.058
42.39 a) 0.96 nm b) 1.8 nm
42.41 a) 0.129 nm b) 8, 7, 6, 5, 4 c) 485 μm
d) 118 μm, 134 μm, 156 μm, 188 μm, 234 μm
42.43 b) i. 2.95 ii. 4.73 iii. 7.57 iv. 0.838
v. 5.69×10^{-9}
42.45 a) 1.146 cm, 2.291 cm
b) 1.171 cm, 2.341 cm; 0.025 cm ($2 \to 1$), 0.050 cm ($1 \to 0$)
42.47 0.274 eV, mucho menos
42.49 a) 4.24×10^{-47} kg · m² b) i. 4.30 μm
ii. 4.28 μm iii. 4.40 μm
42.51 2.03 eV
42.53 a) 4.66×10^{28} átomos/m³ b) 4.7 eV
42.55 b) 3.81×10^{10} Pa = 3.76×10^5 atm
42.57 a) 1.67×10^{33} m⁻³ b) sí
c) 6.66×10^{35} m⁻³ d) no
42.59 a) $\frac{-2p^2}{4\pi\epsilon_0 r^3}$, de atracción
b) $\frac{+2p^2}{4\pi\epsilon_0 r^3}$, de repulsión

Capítulo 43

43.1 a) 14 protones, 14 neutrones
b) 37 protones, 48 neutrones
c) 81 protones, 124 neutrones
43.3 0.533 T
43.5 a) 76.21 MeV b) 76.68 MeV, 0.6%
43.7 0.5575 pm
43.9 a) 1.32 MeV b) 1.13×10^7 m/s
43.11 $^{84}_{36}$Kr: 8.73 MeV/nucleón, $^{180}_{73}$Ta: 8.08 MeV/nucleón
43.13 a) $^{235}_{92}$U b) $^{24}_{12}$Mg c) $^{15}_{7}$N
43.15 156 keV
43.17 a) 0.836 MeV b) 0.700 MeV
43.19 5.01×10^8 y
43.21 a) 4.92×10^{-18} s⁻¹ b) 2990 kg
c) 1.24×10^5 desintegraciones/s
43.23 a) 159 desintegraciones/min
b) 0.43 desintegraciones/min
43.25 a) 0.421 desintegraciones/s b) 11.4 pCi
43.27 2.80 días
43.29 a) 2.02×10^{15}
b) 1.01×10^{15}, 3.78×10^{11} desintegraciones/s
c) 2.53×10^{14}, 9.45×10^{10} desintegraciones/s
43.31 a) 1.2 mJ b) 10 mrad, 10 mrem, 7.5 mJ
c) 6.2
43.33 500 rad, 2000 rem, 5.0 J/kg
43.35 a) 1.75 kGy, 175 krem, 1.75 kSv, 385 J
b) 1.75 kGy, 2.625 kSv, 262.5 krem, 385 J
43.37 a) 9.32 rad, 9.32 rem
43.39 a) $Z = 3, A = 6$ b) −10.14 MeV
c) 11.59 MeV
43.41 a) $Z = 3, A = 7$ b) 7.152 MeV
c) 1.4 MeV
43.43 a) 173.3 MeV b) 4.42×10^{23} MeV/g
43.45 1.586 MeV
43.47 324 MJ
43.53 a) 4.14 MeV b) 7.75 MeV/nucleón
43.55 a) $^{90}_{39}$Y b) 25% c) 112 años

43.57 a) $^{25}_{13}$Al decaerá en $^{25}_{12}$Mg b) β^+ o captura un electrón c) 3.255 MeV, 4.277 MeV
43.59 a) $^{14}_{6}C \rightarrow e^- + ^{14}_{7}N + \bar{\nu}_e$
b) 0.156 MeV
c) 13.5 kg, 3400 desintegraciones/s
d) 530 MeV/s = 8.5×10^{-11} J/s
e) 36 μGy, 3.6 mrad, 36 μSv, 3.6 mrem
43.61 0.960 MeV
43.63 0.001286 u, sí
43.65 94.3 rad, 1900 rem
43.67 a) 5.0×10^4 b) $10^{-15,000}$
43.69 29.2%
43.71 a) 0.96 μJ/s b) 0.48 mrad/s c) 0.34 mrem
d) 6.9 días
43.73 1.0×10^4 años
43.75 a) 0.48 MeV
b) 3.270 MeV = 5.239×10^{-13} J
c) 3.155×10^{11} J/mol, más de un millón de veces mayor
43.79 a) dos b) 0.400 h, 1.92 h
c) 1.04×10^7 (vida corta), 2.49×10^7 (vida larga)
d) 1800 (vida corta), 4.10×10^6 (vida larga)

Capítulo 44

44.1 69 MeV, 1.7×10^{22} Hz, 18 fm, rayos gamma
44.3 a) 32 MeV
44.5 9.26×10^6 m/s
44.7 7.2×10^{19} J, 70%
44.9 a) 1.18 T b) 3.42 MeV, 1.81×10^7 m/s
44.11 a) 30.6 GeV b) 8.0 GeV
44.13 a) 3200 GeV b) 38.7 GeV
44.15 a) π^0, π^+ b) 219.1 MeV
44.17 1.63×10^{-25} kg, 97.2
44.19 116 MeV
44.21 (b) y (d)
44.23 (c) y (d)
44.27 a) 0, 1, −1, 0 b) 0, 0, 0, 1
c) $-e$, 1, 0, 0 d) $-e$, 0, 0, −1
44.29 $p \rightarrow e^+ + n + \nu_e$
44.31 a) $\bar{u}\,\bar{d}\bar{d}$ b) no c) sí
44.33 a) 3.28×10^7 m/s b) 1510 millones de años luz
44.35 a) 1.1×10^5 km/s b) 1.5
44.37 a) 3.8 átomos/m^3 b) 320 c) 2.0×10^{27}
44.39 a) 5.494 MeV b) 20.58 MeV
44.41 −0.783 MeV, endoenergético
44.43 966 nm
44.45 a) 14.0 TeV b) 1.0×10^5 TeV
44.47 a) $\pi^- \rightarrow \mu^-$ + neutrino $\rightarrow e^-$ + 3 neutrinos, un electrón y neutrinos b) 139 MeV
c) 2.24×10^{10} d) 50 Sv, 5.0 krem
44.49 2.494 GeV
44.51 a) 0, $+e$, 1, todos los números de lepton son 0, K^+
b) 0, $-e$, 0, todos los números de lepton son 0, π^-
c) −1, 0, 0, todos los números de lepton son 0, antineutrón ($\bar{n}$)
d) 0, $+e$, 0, el número de lepton muónico es −1, todos los demás números leptónicos son 0, μ^+
44.53 7.5×10^{-23} s
44.55 a) 0.70 rad b) 0.70 rem, no
44.57 c) $H_0 = \dfrac{dR/dt}{R}$ d) $R(t) = R_0 e^{H_0 t}$ e) no
44.59 b) $R/R_0 = 0.574$
c) acelerando en 300 M años, frenando en 10.2 G años
44.61 230 MeV, 12.5° abajo del eje $+x$

CRÉDITOS DE FOTOGRAFÍAS

Acerca del autor Hugh D. Young; John P. Surey

Capítulo 21 21.8*a*: Richard Megna/Fundamental Photographs; 21.29*a* Reproducida de *PSSC Physics*, 2a. ed. (1965), D.C. Heath & Company con Education Development Center, Inc., Newton, Massachusetts; 21.30*b*: Tony Craddock/Photo Researchers, Inc.

Capítulo 22 Foto inicial: U.S. Department of Energy; 22.10: AKG London Ltd.; 22.27*b* Peter Terren/Tesladownunder.com; 22.28*b*: Russ Kinne/Comstock; Aplicación 22.1*a*: Mark Ebster/Photolibrary; Aplicación 22.2: Dr. David Furnes, Keele University/SPL/Photo Researchers, Inc.

Capítulo 23 23.9: NASA/JPL/Caltech; 23.11: Lester V. Berman/Corbis; 23.22 iStockphoto; 23.2: 3D4Medical.com/Getty Images

Capítulo 24 Foto inicial: Shutterstock; 24.3: Shutterstock; 24.4: Andrew Lambert/Photo Researchers, Inc.; 24.7: Eric Shrader – Pearson Science; 24.11: Sandia National Laboratories; Aplicación 24.2 H. Heller, M Schaefer, & KSchulten, "Molecular dynamics simulation of a bilayer of 200 lipids en the gel and in the liquid-crystal phases", J. Phys. Chem. 97:8343-60, 1993

Capítulo 25 25.4 Eric Shrader – Pearson Science; Aplicación 25.1 Dr. David Furnes, Keele University/Photo Researchers, Inc.; 25.15 Richard Megna/Fundamental Photographs

Capítulo 26 26.5: John P. Surey; 26.13: John P. Surey; Aplicación 26.1: Dorling Kindersley Media Library; 26.18: Richard Megna/Fundamental Photographs; Aplicación 26.2: Mehau Kulyk/Photo Researchers, Inc.; 26.25*a*: Banana Stock/Alamy; 26.25*b*: Wikipedia

Capítulo 27 Foto inicial: Simon Fraser/Photo Researchers, Inc.; 27.14 Richard Megna/Fundamental Photographs; 27.17*b*: Sargent-Welch/VWR International; 27.20*b*: Shutterstock; 27.21: Lawrence Berkeley National Laboratory; 27.40: Jeremy Burgess/Photo Researchers, Inc.

Capítulo 28 Foto inicial: CERN/European Organizaation for Nuclear Research; 28.8: Definitive Stock; 28.11: Jeremy Walker/Photo Researchers, Inc.; Test Your Understanding, página 941: Mark Antman/The Image Works; Aplicación 28.2: Scarberry, K.E., Dickerson, E.B., Zhang, Z.J., Benigno, B.B., &McDonald, J.F., "Selective removal of ovarian cancer cells from human ascites fluid using magnetic nanoparticles," Nanomedicine: Nanotechnology, Biology and Medicine, 6, 399-408 (2010)

Capítulo 29 Aplicación 29.1: Simon Fraser/University of Durham/Photo Researchers, Inc.; 29.9: Maximilian Stock Ltd./Photo Researchers, Inc.; 29.18*b*: Toyota Motor Sales USA; Aplicación 29.2: NASA/JPL/Caltech; 29.25: Ken Gatherum, Boeing Computer Services

Capítulo 30 30.2 Shutterstock; Aplicación 30.1 Ron Chapple/Getty Images; 30.7: Photodisc/Getty Images; Aplicación 30.2 SOHO/NASA

Capítulo 31 Foto inicial: John P. Surey & Caroline J. Robillard; 31.5: Rubberball/ Getty Images; 31.14: Lawrence Migdale/Photo Researchers, In.; Aplicación 31.2: iStockphoto 31.22: Shutterstock; 31.23: Roger A. Freedman

Capítulo 32 Foto inicial: Shutterstock; 32.1: Bettmann/Corbis; Aplicación 32.1 Ted Kinsman/Photo Researchers, Inc.; 32.2: Alexander Tiaras/Photo Researchers, Inc.; 32.20: NASA/JPL-Caltech/E.Churchwell (Universidad de Wisconsin-Madison); 32.23: iStockphoto

Capítulo 33 Foto inicial: Peter Aprahamian/Photo Researchers; 33.9: Roger A. Freedman; 33.10*a*: NASA/John F. Kennedy Space Center; Aplicación 33.1: Peter Herring/imagequestmarine.com; 33.13*b*: Susan Schwartzenberg, The Exploratorium; 33.16: VEM/Photo Researchers, Inc.; 33.22*b*: Pixtal/AGE Fotostock; 33.26: Diane Hirsch/Fundamental Photographs; 33.31 Peter Aprahamian/Sharples Stress Engineers/Photo Researchers, Inc.; 33.33: Roger Freedman; 33.37*a*: K. Nomachi/Photo Researchers, Inc.

Capítulo 34 Foto inicial: Tek Image/Photo Researchers, Inc.; 34.12*a*: NASA; 34.12*b-c*: Oficina Central NASA; 34.27: Richard Megna/Fundamental Photographs; 34.41*a-c*: Marshall Henrichs; Aplicación 34.1: Shutterstock; 34.43*c*: THK Photo Products, Inc.; 34.44*b*: Omikron/Photo Researchers, Inc.; Aplicación 34.2: Shutterstock; 34.52*c*: Jan Hinsch/Photo Researchers, Inc.; 34.54*d*: National Optical Astronomy Observatories

Capítulo 35 35.4: Roger Freedman; 35.6: Pearsson Education; 35.11*b*: Shutterstock; 35.16*b*: Bausch & Lomb Incorporated; 35.17: Bausch & Lomb Incorporated; Aplicación 35.1: superior: iStockphoto; Aplicación 35.1, derecha e inferior: Peter Vukusic; Aplicación 35.2: J. Reed y J.K. Gimzewski, UCLA Californa Nanosystems Institute, 2007

Capítulo 36 Foto inicial: Eric Shrader – Pearson Science; 36.2*a-b*: Pearson Education; 36.6: Pearson Education; 36.9*b*: Richard Megna/Fundamental Photographs; 36.11: Dane Hornsleth; 36.12*d*: Pearson Education; 36.18*a*: NSO/AURA/NSF; 36.18*b*: Physics Dept., Imperial College/Photo Researchers, Inc.; Aplicación 36.1: Tek Image/Photo Researchers, Inc.; 36.20*b*: Estate of Bertram Eugene Warren; 36.24: Science Photo Library/ Photo Researchers, Inc.; 36.26: Pearson Education; 36.27*a-c*: Pearson Education; 36.27*a-c*: Pearson Education; Aplicación 36.2: National Radio Astronomy Observatory/Associated Universities, Inc./National Science Foundation; 36.30: Paul Silverman/Fundamental Photographs; P36.66: NASA

Capítulo 37 Foto inicial: Brookhaven National Laboratory/Corbis; 37.4: Shutterstock; 37.7: NASA/John F. Kennedy Space Center; 37.11: Jack Fields/Photo Researchers, Inc.; 37.18: Adam Hart-Davis/Photo Researchers, Inc.; 37.19: NASA y el equipo del proyecto Hubble Heritage (STSCI/AURA); Aplicación 37.2: Imaginechina/AP Images

Capítulo 38 Foto inicial: Kim Steele/Photolibrary; 38.2*a*: U.S. Airforce-photo/Master Sgt. Lance Cheung; 38.2*b*: Bill Corwin; Aplicación 38.1: Linda Bartlett/National Cancer Institute; 38.14*a*: Ernest Orlando, Lawrence Berkeley National Laboratory; 38.16: From Huggins, *Physics 1*, ©1968, por W.A. Benjamin, Inc. Pearson Addison Wesley

Capítulo 39 Foto inicial: Lee D. Simon/Photo Researchers, Inc.; 39.1: AIP Meggers Gallery of Nobel Laureates; 39.4: Reproducida de *PSSC Physics*, 2a ed. (1965), D.C. Heath & Company with Educational Development Center, Inc., Newton Massachusetts; 39.6: Scimat/Photo Researchers, Inc.; 39.8: Ted Kinsman/Photo Researchers, Inc.; Aplicación 39.1: NASA; 39.9:N.A. Sharp, NOAO/NSO/Kitt PeakFTS/AURA/NSF; 39.10: American Institute of Physics/Emilio Segrè Visual Archives; 39.15: Roger Viollet/Getty Images; 39.19*b*: Andrew Lambert/Photo Researches, Inc.; Aplicación 39.2: Louise Murray/Photo Researchers, Inc.; 39.31: Royal Swedish Academy of Sciences; 39.34: Tomada de Huggins, *Physics 1*, © 1968, W.A. Benjamin, Inc. Pearson Addison Wesley; 39.36 NASA

Capítulo 40 Foto inicial: Dmitry Talapin, University of Hamburg; 40.1: JGI/Agefotostock; 40.2: UPI/Corbis; 40.4: Churchill Archives Centre, Born Papers, BORN Acc 1498 Box 12; 40.17: Almaden Research Center/Research Division; 40.21: Hewlett-Packard Lab/Photo Researchers, Inc.; Aplicación 40.1: SPL/Photo Reasearchers, Inc.

Capítulo 41 Foto inicial izquierda: SPL/Photo Reasearchers, Inc.; Foto inicial derecha: Shutterstock; 41.7: NASA; 41.11*a-b*: National Optical Astronomy Observatories; 41.19 National Radio Astronomy Observatory/ Associated Universities, Inc./National Science Foundation; 41.20 American Institute of Physics/Emilio Segré Visual Archives; Aplicación 41.1: SPL/ Photo Researchers Inc.; Aplicación 41.2*a*: Thinkstock/Getty Images; Aplicación 41.2*b*: SPL/Photo Researchers, Inc.

Capítulo 42 Foto inicial: NASA; Aplicación 42.1: Alfred Pasieka/Photo Researchers, Inc.; 42.9: Roger A. Freedman; 42.17: Stanford University, AIP Emilio Segrè Visual Archives; Aplicación 42.2: Andy Crump/Photo Researchers, Inc.; 42.36: PhotoDisc/Getty Images; P42.44: NASA

Capítulo 43 Foto inicial: Juraj Liptak/Deutsche Presse-Agentur/Newscom; 43.1b: Science Photo Library/Photo Researchers; Aplicación 43.1: Steve Gschmeissner & Carol Upton/Photo Researchers, Inc.; 43.6: Lloyd Cluff/Corbis; 43.10: Department of Nuclear Medicine, Charing Cross Hospital/Photo Researchers, Inc.; Aplicación 43.2: Argonne National Laboratory; 43.17: David Malin, Royal Observatory Edinburgh & Anglo-Australian Observatory; 43.18: LLNL/Photo Researchers; Summary: Department of Nuclear Medicine, Charing Cross Hospital/Photo Researchers, Inc.

Capítulo 44 Foto inicial: NASA/JPL-Caltech/ESA/CXC/STScI; 44.1: Lawrence Berkeley National Laboratory; 44.3: Ernest Orlando, Lawrence Berkeley National Laboratory; Aplicación 44.1: Susan Landau; 44.7*a-b*: CERN/European Organization for Nuclear Research; 44.8: CERN/European Organization for Nuclear Research; 44.9: Mark R. Lowenstine; 44.14: Instituto para la Investigación de Rayos Cósmicos, Universidad de Tokio; 44.15*a-b*: NASA; 44.19: NASA/CXC/INAf/S. Andre *et al.*; Aplicación 44.2: Shutterstock; 44.21: N.A. Sharp, REU program/NOAO/AURA/NSF; 44.22: NASA/WMAP/Science Team; Resumen (colisiones de partículas): Brookhaven National Laboratory; Resumen (nebulosa): N.A. Sharp, programa REU NOAO/AURA/NSF

ÍNDICE ANALÍTICO

Nota: Una f después del número de página indica que se hace referencia a una figura; una t significa que se hace referencia a una tabla.

A

Abajo (quark), 1496
Abdus, Salam, 1500
Abejas, visión de, 1101
Aberración esférica, 1119, 1134
Aberturas circulares, difracción y, 1208-1211
Accidente(s)
de Chernobyl, 1468
de Three Mile Island, 1468
nucleares, 1468
Aceleración debida a la gravedad, 700
Aceleradores de partículas, 1485-1488
ciclotrones, 893, 918, 1486-1487
lineales, 1485-1486
sincrotrones, 1487
Aceptores, 1425
Acoplamiento espín-órbita, 1386
Actividad, en el decaimiento radiactivo, 1456
ADN
difracción de rayos x, 1207
medición del, 1204
pares de bases en el, 717
Afinidad electrónica, 1406
Aire
ionización del, 768-771
resistencia dieléctrica del, 768, 805
Airy, George, 1209
Aislantes, 691
bandas de energía en, 1416-1417
Alambre(s)
a tierra, 869, 870
campo magnético de, 928-931, 935-937, 938
fuerza de interacción entre, 931-932
ley de Ampere para, 935-937, 938
Alas de mariposa, interferencia y, 1179
Almacenamiento de energía, en capacitores, 788, 796-800
Altavoces, 1029
fuerzas magnéticas en, 899, 900
Alternadores, 963-964, 1021-1022
Ampere, 695, 820, 931-932
Ampère, André, 885
Amperímetros, 831, 860-861
voltímetros y, 862-863, 1024
Ampliación
angular, 1147-1148
lateral, 1117, 1120-1121, 1147, 1148-1149
contra amplificación angular, 1147
de cámara, 1140
de microscopio, 1148-1149
Amplitud
de corriente, 1022
de ondas electromagnéticas, 1061
Análisis de la razón del isótopo estable (ARIE), 919
Analizadores, 1095-1096
Anchura de resonancia, 1049
Anderson, Carl D., 1482, 1485
Ángulo(s)
crítico, 1089
de desviación, 1111
de fase, 1026, 1031-1032
de incidencia, crítico, 1089
de polarización, 1097
de reflexión, 1084
Anillos de Newton, 1178
Aniquilación de un par, 1483-1484
electrón-positrón, 1272
Anteojos
correctivos, 1143-1146
para el sol, polarizados, 1094, 1096f, 1098
Antimateria, 1516
Antineutrinos, 1492
Antineutrones, 1491
Antipartículas, 1483
Antiprotones, 1491-1492
Antiquarks, 1496, 1499
Años luz, 1503
Apantallamiento, 1391-1392
Aparatos de radio
sintonización, 1038, 1039
transmisores y receptores, 1054
Aproximación
de campo central, 1388
paraxial, 1119
WKB, 1361-1362
Arcoíris, 1092-1093
Arriba (quark), 1496
Astigmatismo, 1144
Aston, Francis, 897
Atardeceres, 1100-1101
Átomo(s)
con muchos electrones, 1387-1393
de helio, modelo de Bohr del, 1306
de hidrógeno, 1372-1379
átomos hidrogénicos y, 1378-1379
distribuciones de probabilidad electrónica del, 1376-1378
ecuación de Schrödinger del, 1372-1373
en un campo magnético, 1379-1382
energía de ionización del, 1304-1305
estados cuánticos del, 1373-1374, 1375t
masa reducida del, 1305-1306
modelo de Bohr, 1300-1305
momento angular orbital del, 1373-1374
movimiento nuclear en, 1305-1306
niveles de energía en, 1302-1305, 1379-1382
de Rydberg, 1306, 1402
en un campo magnético, 1379-1382
excitados, 1298
hidrogénicos
análisis de Schrödinger de los, 1378-1379
modelo de Bohr de, 1306
modelo de Thomson del, 751-752
muónico, 1379
núcleo de, 689, 1295
Aumento angular, contra aumento lateral, 1147
de un microscopio, 1147, 1148-1149
Autoinductancia, 991, 994-998
Automóviles, sistemas
de distribución de potencia en, 868, 870-871
de ignición, 1000
Autorradiografía, 1461
Axones, 716, 781, 881-882

B

Balastro magnético, 997
Bandas
de conducción, 1416-1417
de energía, 1416-1417
de valencia, 1416-1417
en aislantes, 1416-1417
Bardeen, John, 1430
Bariones, 1492, 1493-1494, 1496
Barreras de potencial, 1347-1350
Batería(s)
carga de, 835-836
como fuente de corriente, 831
energía en, 834
Becker, Herbert, 1481
Becquerel, 1457
Bednorz, Johannes, 824
Berilio, 1390
Big Crunch, 1505
Binoculares, 1150
Binoculares de prismas, 1150
Birrefringencia, 1100
Blackett, Patrick, 1271
Blindaje electrostático, 743-744
Bloch, Felix, 1416f
Bobina(s)
campos magnéticos de, 932-935
de búsqueda, 983
de Helmotz, 954
de rastreo, 983
de Tesla, 993-994
torca magnética en, 904-905
Bohr, Niels, 1273, 1389f
Born, Max, 1333f
Bosones, 1492, 1500, 1501
Botellas magnéticas, 893
Bothe, Walther, 1481
Brillouin, Léon, 1361
Bronceados, 1262
Bujías, 1000

C

Cadena(s)
atenuadoras, 881-882
protón-protón, 1469
Calcita, birrefringencia en, 1100
Cámara(s), 1139-1142
de alambre, 1489
de niebla, 1482
enfoque, 1137
gamma, 1461
poder de resolución y, 1210
unidad de flash de, 797
Camino óctuple, 1497-1498
Campo(s)
críticos, 979
eléctrico(s), 699-700
almacenamiento de energía en, 788
cálculo de, 703-708, 775
campos magnéticos y, 975-979
carga de prueba para, 699, 700
como cantidad vectorial, 775
corriente y, 819-820
de carga lineal uniforme, 738
de distribuciones simétricas de carga, 746t
de la Tierra, 745
de lámina plana cargada, 739
de ondas electromagnéticas, 1053, 1061, 1069-1070
de placas conductoras paralelas, 739-740, 790
de un capacitor, 790
de una esfera con carga uniforme, 740
de una esfera conductora cargada, 737-738
de una esfera hueca, 741
definición de, 699
dipolo eléctrico y, 709-713
dirección de, 701, 708
distribución de carga y, 725-728, 734-735, 746t
en conductores, 701, 744-745
en el vacío, 798
flujo de, 725-732, 729
fuerzas eléctricas y, 698-703
imposible, 773f
inducido, 971-974
integral de línea de, 937
ley de Gauss para, 732-746, 935, 1052, 1056
magnitud de, 701, 708
no electrostáticos, 959, 972-973
orientación molecular en, 805-807
planos nodales/antinodales de, 1070
potencial eléctrico y, 761, 763-764, 774
resistividad y, 823
superposición de, 703-704
tiburones y, 699
trabajo realizado por, 755-761
unidades para, 699, 764
uniformes, 709

gravitacional, 700
magnético(s), 884, 885-889
átomo de hidrógeno en, 1379-1382
cálculo de, 927
cargas de prueba para, 887-889
críticos, 979
de elementos de corriente, 926-927
de espiras circulares de corriente, 932-935
de la Tierra, 884, 887
de motores, 898
de ondas electromagnéticas, 1055-1057, 1061-1062, 1069-1070
de un conductor largo cilíndrico, 939, 948t
de un conductor largo recto, 935-937, 938, 948t
de un conductor recto que transporta corriente, 928-931
de un solenoide, 939-941, 948t
de una carga en movimiento, 886, 923-926
definición de, 885
del cuerpo humano, 887
dirección de, 887-888
efecto Hall y, 909
efecto Zeeman y, 1379-1382
en el eje de una bobina, 933-934
fuentes de, 923-946, 975-979, 1444
integral de línea del, 937
ley de Gauss para, 891, 935, 1052, 1056
magnitud de, 887-888, 892
medición de, 887-889
movimiento en, 892-898
notación para, 886
planos nodales/antinodales de, 1070
superposición de, 926, 931
vector de, 886, 924
no electrostáticos, 959, 972-973
Cáncer
de huesos, generación de imágenes con radioisótopos para, 1391
efectos de la radiación en, 1269
métodos de obtención de imágenes en, 1180, 1391
nanopartículas magnéticas para, 946
Capacitancia
cálculo de, 789-793
contra coulombs, 789
definición de, 788, 789
equivalente, 794
unidades de, 789
Capacitor(es), 788-800
almacenamiento
de carga en, 797
de energía en, 788, 796-800
aplicaciones de, 788, 797-798, 802-803
capacitancia de, 789
carga en, 864-866, 975-976
cilíndricos, 792-793
de placas paralelas, 790, 791, 800-805
dieléctricos en, 800-805
definición de, 788
descarga, 867-868
dieléctricos en, 800-805
electrolíticos con doble recubrimiento, 802
en circuitos, 796
de ca, 1027-1028, 1029-1030, 1029t, 1035-1036
en el vacío, 789-791, 798
en marcapasos, 866
en pantallas táctiles, 794
en paralelo, 794-796, 852-853
en serie, 793-794, 795-796, 852
energía de campo eléctrico y, 798, 799
esféricos, 792, 808
reactancia capacitiva de, 1028-1029
símbolos de, 789
Capas de electrones, 1375, 1389, 1390-1391, 1394-1395
huecos en, 1394-1395
Captura de electrón, 1453
Carga(s)
de enlace, 806
de prueba, 699, 700
para campos magnéticos, 887-889
eléctrica(s), 688-691
atracción y repulsión y, 688
campo eléctrico y, 725-728, 734-736. *Véase también* Ley de Gauss
conservación de, 690, 856
contra polos magnéticos, 885
cuantizada, 691
definición de, 688
densidad de, 704
dipolo eléctrico y, 709-713
distribución de. *Véase* Distribución de carga
en capacitores, 788. *Véase también* Capacitores
en células nerviosas, 741
en conductores, 736, 741-745
en una superficie cerrada, 726
estructura de la materia y, 689-690
flujo y, 725-732. *Véase también* Flujo eléctrico
fuerza magnética sobre, 886-887
inducida, 692, 693, 805-807
libre, 806
límite, 806
magnitud de, 694
negativa, 688
notación para, 865
positiva, 688
puntual. *Véase* Cargas puntuales
superposición de fuerzas y, 696
valores típicos de, 696
variable con el tiempo, 865
inducidas, 692
modelo molecular de, 805-807
polarización y, 693, 801-803
libres, 806
por inducción, 692
polarización y, 693
puntuales, 693-694
campos eléctricos de, 725-726. *Véase también* Carga eléctrica
dentro de una superficie cerrada, 725-726
dentro de una superficie esférica, 732
dentro de una superficie no esférica, 732
dipolo eléctrico y, 709-713
energía potencial eléctrica de, 757-760
fuerza entre, 697
líneas de campo magnético de, 924-925
ondas electromagnéticas de, 1053
potencial eléctrico de, 765
superposición de, 696
Catástrofe ultravioleta, 1311
Celdas solares, 1428
Células nerviosas, carga eléctrica en, 741
Centelleo, 1294
Centro de curvatura, 1118
Chadwick, James, 1481
Ciclotrones, 893, 918, 1486-1487
Cierre molecular, 1408
Cinturones de radiación de Van Allen, 893
Circuito(s)
abiertos, 870
completos, 822, 828-831
con amortiguamiento crítico, 1010
con histéresis, 945-946
de corriente
campos magnéticos de, 932-935
en magnetización, 941-942
fuerza y torca en, 901-907
momento magnético de, 903, 934
de corriente alterna
ángulo de fase y, 1026, 1031-1032
capacitores en, 1027-1028, 1029-1030, 1029t
diseño de, 1038-1039
fasores y, 1022
impedancia de, 1031-1033
inductores en, 1025-1027, 1029, 1029t
L-R-C en serie, 1030-1034
números complejos en, 1049-1050
potencia en, 1034-1037
resistencia y reactancia en, 1024-1030
resistores en, 1025, 1029, 1029t
resonancia en, 1037-1039
transformadores y, 1040-1042
de corriente directa, 822, 850-873
definición de, 850
en automóviles, 868
en sistemas de distribución de potencia, 868-872
instrumentos de medición de, 860-864
R-C, 864-868
reglas de Kirchoff para, 855-860
eléctricos
abiertos, 870
amortiguado críticamente, 1010
autoinductancia y, 995-998
cambios de potencial alrededor, 833-834
completo, 822, 828
constantes de tiempo de, 866-867, 1003
corriente alterna, 822, 850
corriente directa, 822, 850
cortos, 869-870, 870
diagramas de, 831-833
emisor común, 1429
energía en, 834-836
fuerza electromotriz y, 828-831
incompletos, 828
inductores en, 994-998
integrados, 1429-1430
L-C, 1005-1009
L-R-C en serie, 1009-1011, 1030-1034
mallas en, 855
nodos en, 855
oscilantes, 1005-1009
potencia en, 834-838
puente, 855-860, 880-881
R-C, 864-868
reglas de Kirchoff para, 855-860
R-L, 1001-1005
sobreamortiguados, 1010
sobrecargados, 869-870
subamortiguados, 1010-1011
tiempos de relajación de, 866-867
emisores comunes, 1429
integrados, 1429-1430
L-C, 1005-1009
L-R-C en paralelo, resonancia en, 1039, 1048
L-R-C en serie, 1009-1011
ángulo de fase y, 1031-1032
con una fuente de ca, 1030-1034
impedancia en, 1031-1032, 1038
potencia en, 1034-1037
resonancia en, 1037-1039
puente, 855-860, 880-881
R-C, 864-868
R-L, 1001-1005
decaimiento de corriente en, 1004-1005
sobreamortiguados, 1010
sobrecargados, 869-870
subamortiguados, 1010-1011
Cirugía del ojo con láser, 1076, 1309
Coeficiente
de resistividad, 824-825
de temperatura, 824-825
Colisiones
de partículas
en aceleradores, 1485-1488
en experimentos con haces que colisionan, 1489
energía disponible y, 1487-1488
niveles de energía atómica y, 1297-1298
Concentración de partículas, en una corriente, 820
Condensación de materia, 1412
Condición(es)
de Bragg, 1207
de frontera de un oscilador armónico, 1351
de normalización, 1342, 1365
de polarización, 1426, 1427-1428
Conducción
de huecos, 909, 1423-1424
metálica, 838-840
nerviosa, resistividad en, 824

Conductividad
eléctrica, 823
intrínseca, 1424
modelo microscópico de, 838-840
térmica, 823
Conductores, 691-692
agujeros en, 909
bandas de energía en, 1417
campos
eléctricos en, 701, 744-745
magnéticos de, 928-932
carga eléctrica en, 736, 741-745
concentración de partículas en, 820-821
conductividad de, 823
densidad de corriente en, 821-822
diodos de, 827
en capacitores, 789
flujo de corriente en, 820-822
fuerza
de interacción entre, 931-932
magnética de, 931-932
fuerzas magnéticas sobre, 898-901
lineales, 823
metálicos, 838-839
movimiento de los electrones en, 819
no lineales, 823
no óhmicos (no lineales), 823
óhmicos (lineales), 823
resistencia de, 825-828, 830, 833
resistividad de, 822-825
semiconductores, 823, 827, 909
superconductores, 824, 968
superficies equipotenciales y, 772-773
transportador de corriente, fuerzas magnéticas en, 898-901
Conexiones
en paralelo, 794-796
en serie, 793-794, 795-796
Confinamiento
inercial, 1470
magnético, 1470
Conmutadores, 907-908, 964
Conservación
de la carga eléctrica, 690
regla de los nodos de Kirchoff y, 856
de la energía
con fuerza eléctrica, 758-759
mecánica, 755
de la fuerza electrostática, 856
de la masa y energía, 1247-1248
del momento lineal, 1243
del número
bariónico, 1494
leptónico, 1492
Constante(s)
de acoplamiento, 1491
de Curie, 944
de decaimiento, 1456
de Hubble, 1503
de Planck, 942, 1263
de Rydberg, 1303
de Stefan-Boltzmann, 1310
de tiempo, para un circuito, 866-867, 1003
dieléctrica, 800-801
eléctricas, fundamentales, 695-696
Contadores Geiger, 783
Contracción de la longitud, 1235, 1236
Coordenadas
de espacio-tiempo, 1238
esféricas, 1366
Córnea, 1142, 1156, 1157, 1159
Corriente(s)
alterna, 822, 850, 1021
aplicaciones de, 868
media rectificada, 1023
medición de, 1022-1024
rectificada, 1022-1023
retrasada, 1036
riesgos de, 1040
valores cuadráticos medios, 1023-1024
campo eléctrico y, 819-820
capacitor, 1027-1028, 1029, 1029t
carga eléctrica en, 819, 820
concentración de partículas en, 820
conducción de, 975
consumo de, 830
contra densidad de corriente, 821-822
convencional, 820
cuadrática media, 1023-1024
de conducción, 975
de desplazamiento, 975-977
de generación, 1427
de recombinación, 1427
de saturación, 1426
definición de, 818, 819
desplazamiento de la, 975-977
dirección de, 819-820, 825
directa, 822, 850
en circuitos, 828-831
fuerza electromotriz y, 991
generación de, 1427
inducida, 958, 967-968
dirección de, 967-968, 970
magnitud de, 968
inductancia y, 991
inductora, 1025-1026, 1029, 1029t
ley de Ohm y, 822, 825-826
media rectificada, 1023
medición de, 860-861
movimiento de electrones en, 819
notación de, 865
parásita, 974-975, 1042
en transformadores, 1042
peligros de la, 1040
recombinación de, 1427
rectificadora de onda completa, 1023
reglas de Kirchoff para, 855-860
resistencia y, 825-828
resistor, 1025, 1029, 1029t
retrasada, 1036
saturación, 1426
sinusoidal, 1022-1024
unidades de, 695, 820
variable con el tiempo, 865
velocidad de arrastre y, 819-820
voltaje y, 825-828
Corrimiento(s)
al rojo, 1502, 1507
cosmológicos, 1505
gravitacional, 1250
de fase, interferencia y, 1174-1175
Doppler contra corrimiento al rojo, 1502
Cortocircuitos, 869-870, 870
Coulomb, 695-696
contra capacitancia, 789
Crecimiento de plantas, deuterio y, 1445
Cremallera molecular, 1408
Cristal(es)
covalentes, 1414-1415
estructura de, 1412-1415
imperfectos, 1415
individuales ideales, 1413
iónicos, 1414-1415
líquidos, 1412, 1422
metálicos, 1415
monocristales ideales, 1413
perfectos, 1413-1415
tipos de, 1414-1415
Criterio de Rayleigh, 1209, 1210
Cuantos, 1081
Cuásares, 1220
Cubo, flujo eléctrico a través de, 731
Cuerpo humano
campos magnéticos del, 887
medición de la grasa del, 1032
Curie, 1457
Curie, Marie, 1454
Curie, Pierre, 944, 1454
Curva(s)
antinodales, 1166
de magnetización, 945
de resonancia, 1038-1039
de respuesta, 1038-1039
nodales, 1166

D

Dalton, John, 1480-1481
Davisson, Clinton, 1287-1288
De Broglie, Louis, 1286-1287
Decaimiento
alfa, 1450-1452
beta, 1452-1453
del protón, 1500
gamma, 1454
radiactivo, 1450-1458
actividad en, 1456-1457
alfa, 1450-1452
beta, 1452-1453
gamma, 1454
radiactividad natural y, 1454-1455
tasa de, 1456-1457
vida media y, 1456-1457
Declinación magnética, 884
Degeneración, 1370-1371, 1374-1375
Densidad
crítica, 1505-1507
de carga
lineal, 704
superficial, 704
volumétrica, 704
de corriente, 821-822
contra corriente, 821-822
definición de, 821
resistividad y, 823
vector, 821
de energía, 798, 1064-1065
magnética, 999-1000
de estados, 1418-1419
de flujo magnético, 892
de probabilidad, 1333
nuclear, 1440
probabilidad de, 1333
superficial de carga, 704
Descarga de corona, 768-769
Desplazamiento de frecuencia Doppler, 1242
Desviación estándar, 1275
Detector(es), 1489-1490
de neutrinos, 1489-1490
de partículas, 1489
neutrinos, 1489-1490
super-Kamiokande, 1489, 1501, 1501f
Deuterio, 1445
Deuterones, 1305-1306, 1445, 1511
Diagrama(s)
de circuito, 831-833
de fasores, 1022
de Segrè, 1449-1450, 1454
Diamantes, 1090, 1092
Dicromismo, 1094
Dieléctricos, 800-805
ley de Gauss y, 807-808
ondas electromagnéticas en, 1063-1064
permitividad de, 802
polarización de, 801-803, 805-807
Diferencia de potencial, 763-764
capacitancia y, 789
medición de, 861-862
notación de, 865
resistencia y, 852
variable con el tiempo, 865
Difracción, 1190-1214
con aberturas circulares, 1208-1211
contra interferencia, 1192, 1200
de Fraunhofer, 1192, 1193
de Fresnel, 1192, 1193
de ranuras múltiples, 1199-1201
de rayos x, 1205-1208
de un electrón, 1287-1288
de una ranura, 1192-1199
definición de, 1191

  - del electrón, 1287-1288
  - del sonido, 1189
  - formación de imágenes y, 1209-1210
  - fotones y, 1273, 1274
  - franjas
    - brillantes en, 1194-1195
    - oscuras en, 1193-1195, 1194
  - holografía y, 1211-1213
  - intensidad en, 1195-1199
  - poder de resolución de, 1209-1211
  - principio
    - de complementariedad y, 1273-1274
    - de Huygens y, 1191-1192
  - rayos x, 1205-1208
- Dilatación del tiempo, 1229-1230, 1231-1232
- Dimagnetismo, 943t, 944, 980
- Dínamo de disco de Faraday, 971
- Diodo(s), 827
  - emisores de luz, 1428
  - túnel, 1349
  - unión *p-n*, 1426
  - Zener, 1428
- Dioptrías, 1144-1145
- Dipolo(s)
  - eléctrico(s), 709-713, 805
    - campo de, 712-713
    - definición de, 710
    - energía potencial de, 711
    - fuerza sobre, 710-711
    - potencial eléctrico de, 765
    - torca sobre, 710-711, 904
  - magnéticos, 903-904, 906-907
    - de imanes, 905-907
    - definición de, 903
    - en campos magnéticos no uniformes, 905-907
    - energía potencial de, 903-904
    - fuerza y torca sobre, 901-903
- Dirac, Paul, 1385, 1482-1483
- Disco(s)
  - con tecnología Blue-Ray, 1210, 1309
  - de Airy, 1209
  - flujo eléctrico a través de, 730-731
- Dislocación de borde, 1415
- Dispersión, 1085, 1091-1093
  - de Compton, 1269-1271
  - de la luz, 1100-1101
- Dispositivos semiconductores, 1425-1430
  - celdas solares, 1428
  - circuitos integrados, 1429-1430
  - diodos emisores de luz, 1428
  - fotoceldas, 1425
  - transistores, 1429
  - uniones *p-n* en, 1425-1428
- Distancia(s)
  - astronómica, 1503
    - unidades de, 1503
  - de imagen, 1116
  - de objeto, 1116
  - relatividad de, 1233-1237
- Distribución
  - de Bose-Einstein, 1492
  - de carga, 703, 1390
    - campos eléctricos y, 725-728, 734-735, 746t
    - estática, 759-760
  - de Dirac, 1419
  - de Fermi-Dirac, 1419-1492
  - de Maxwell-Boltzmann, 1307, 1419-1420
  - de probabilidad, 1376
- Doblete del sodio, 1204
- Dominios magnéticos, 944-945
- Donador, 1424
- Dopaje, 1424-1425
- Dosimetría, radiación, 1459
- Dosis
  - biológicamente equivalente, 1460
  - de radiación, 1459-1460
- Dualidad onda-partícula, 1073, 1081, 1261, 1286
  - espectros atómicos y, 1292-1296
  - índice de refracción y, 1086-1088
  - luz y, 1261-1263, 1273
  - ondas de electrones y, 1286-1292
  - principio de complementariedad y, 1273-1274
  - probabilidad e incertidumbre y, 1274-1278, 1314-1317
  - teoría ondulatoria de Maxwell y, 1052-1057, 1262-1263, 1267

E

- Ecuación(es)
  - de Dirac, 1482-1483
  - de Maxwell, 885, 957, 977-979
    - en óptica, 1085
    - ondas electromagnéticas y, 1052-1057
    - principio de Huygens y, 1102-1104
  - de onda(s)
    - electromagnéticas, 1058-1060
    - enunciado de, 1329
    - mecánicas, 1329-1330
    - para partículas, 1330-1333
    - pozos de potencial y, 1343-1347
  - de Schrödinger, 1332-1333
    - con energía potencial, 1336-1337
    - espectros de rayos x y, 1393-1396
    - independiente del tiempo, 1338, 1366
    - para átomos hidrogénicos, 1378-1379
    - para el átomo de hidrógeno, 1372-1373
    - tridimensional, 1365-1371
    - unidimensional, 1332-1333, 1336-1337
  - del fabricante de lentes, 1133-1135
- Edison, Thomas, 1021
- Efectividad biológica relativa, 1459-1460
- Efecto
  - de campo en transistores, 1429
  - Doppler
    - de ondas de sonido, 1242
    - ondas electromagnéticas del, 1241-1243
  - fotoeléctrico, 1081, 1021
  - fotovoltaico, 1428
  - Hall, 909-910
  - Meissner, 979-980
  - Zeeman, 1379-1382
- Einstein, Albert, 1223, 1263-1264, 1481
- Eje
  - de polarización, 1094-1095
  - óptico, 1118
- Electricidad, conductores de, 691-692
- Electrocardiografía, 762
- Electrodinámica cuántica, 1081
- Electrodomésticos, sistemas de distribución de potencia en, 868-872
- Electroforesis, 722
- Electromagnetismo, 687, 885
- Electrómetros, 800
- Electromiografía, 861
- Electrón(es)
  - acoplamiento espín-órbita y, 1386
  - apantallamiento por, 1391-1392
  - carga de, 689-690, 695
  - concentración de, 1420-1421
  - configuraciones de estado base (o fundamental), 1388-1390, 1391t
  - creación y destrucción de, 1483
  - de valencia, 1390, 1416
  - descubrimiento de, 897, 1481
  - distribuciones de probabilidad de, 1376-1378
  - efecto
    - fotoeléctrico y, 1261-1266
    - Zeeman y, 1379-1382
  - en campos magnéticos, 894
  - enlaces y, 1405-1408
  - espín de, 942
  - estado(s)
    - cuánticos de, 1389t
    - excitado, 1411
  - masa de, 689, 897, 1440
  - momento angular, 942
    - de espín de, 1384-1385, 1387
    - orbital de, 1373-1374, 1384, 1387
  - momento magnético de, 1379-1382
  - movimiento orbital de, 819, 1386
  - principio de exclusión y, 1388-1389
  - razón carga: masa de, 896-897
  - volt, 764
- Electrostática, 688
- Elemento(s)
  - alcalinotérreos, 1390
  - estado base, 1388-1390, 1391t
  - isótopos de, 1441
  - propiedades de, 1389
  - tabla periódica, 1389, 1390-1391
- Elevación (de quark), 1499
- Embobinados (devanados), 1040, 1042f
  - primarios, 1040, 1042f
  - secundario, 1040, 1042f
- Emisión(es)
  - espectral, 1310-1314
    - contra intensidad, 1310-1311
    - definición de, 1310
    - hipótesis cuántica y, 1311-1313
  - estimulada, 1307-1309
  - termiónica, 1267
- Empacamiento compacto, 1415
- Encanto, 1499
- Endoscopios, 1090
- Energía
  - cinética
    - contra momento lineal, 2420
    - de fotones, 1263-1264
    - potencial de frenado y 1262-1263
    - relativista, 1246-1247
  - cuantizada, 1261
  - de campo eléctrico, 798, 799
  - de electrones libres, media, 1421
  - de enlace, 1406, 1445-1446
  - de Fermi, 1419-1421
    - concentración de electrones y, 1420-1421
  - de ionización, 1406
    - del átomo de hidrógeno, 1304-1305
  - de reacción, 1462-1464
  - de reposo, 1247-1249
  - de umbral, 1463
  - disponible, 1487-1488
  - en circuitos eléctricos, 834-836
  - en circuitos *L-C*, 1005-1009
  - en ondas electromagnéticas, 1064-1067
  - en reposo, 1247-1249
  - en un campo magnético, 998-1001
  - incertidumbre en, 1278
  - ionización, 1304-1305, 1406
  - mecánica, conservación de la, 755
  - oscura, 1508
  - potencia y, 871
  - potencial, 755
    - alrededor de circuitos, 833-834
    - barreras de potencial y, 1347-1350
    - de dipolos magnéticos, 903-904
    - de un capacitor, 796-800
    - de un dipolo eléctrico, 711
    - de una partícula en una caja, 1339
    - eléctrica, 754-761
    - pozos de potencial y, 1343-1347
    - trabajo y, 755
  - potencial eléctrica, 754-761
    - conceptos alternativos de, 760
    - contra fuerza eléctrica, 758
    - de dos cargas puntuales, 757-758
    - de varias cargas puntuales, 759-760
    - definiciones de, 760
    - en capacitores, 788
    - en un campo uniforme, 755
    - energía de un campo eléctrico y, 798
    - potencial eléctrico y, 763, 766
  - total, 1247
  - unidades de, 764
- Enlace(s), 1405-1408
  - covalentes, 1406-1407
  - de hidrógeno, 1407-1408
  - de un par neutrón-protón, 1446-1447
  - de Van der Waals, 1407

débiles, 1407
del hidrógeno, 1407-1408
del par protón-neutrón, 1446-1447
en sólidos, 1414-1415
fuertes, 1407
iónico, 1406, 1407
metálico, 1408
nucleares, 1444-1449
Envejecimiento, relatividad y, 1233
Enzimas, tunelamiento del electrón en, 1349
Esfera(s)
campo eléctrico de, 737-738, 740-741
carga puntual en el interior de una, 732-733
flujo eléctrico a través de, 731-732
Espacio
curvatura del, 1250f
dimensiones del, 1504-1505
expansión del, 1503-1508
-tiempo, 1238
Espectro(s), 1091
atómicos, 1292, 1297-1300
en la serie de Balmer, 1304
en la serie de Brackett, 1304
en la serie de Lyman, 1304
en la serie de Pfund, 1304
continuos, 1310-1314
de absorción
línea, 1293, 1297-1300, 1310-1314
rayos x, 1396
de bandas, 1411
de emisión de líneas, 1292-1293, 1297-1300
continuos, 1310-1314
de líneas, 1292, 1297-1300, 1304
continuos, 1310
efecto Zeeman y, 1379
moleculares, 1300
de rayos x, 1393-1396
absorción, 1396
electromagnético, 1054-1055
línea de absorción, 1293
línea de emisión, 1292-1293
moleculares, 1300, 1408-1412
Espectrógrafo
de masas, 918
de rejillas, 1203-1204
Espectrómetros de masa, 897
de masas de Bainbridge, 897
Espejismos, 1103
Espejo(s)
cóncavos, 1118-1122
convergentes, 1119
convexos, 1122-1124
esféricos, 1118-1126
cóncavos, 1118-1122
convexos, 1122-1124
formación de imágenes por, 1118-1126
métodos gráficos para, 1124-1126
objetos extensos en, 1120-1122
punto/longitud focal de, 1119-1120
formación de imágenes en, 1115-1126
métodos gráficos para, 1124-1126
parabólicos, 1120
planos, 1115-1118
formación de imágenes por, 1115-1118
métodos gráficos para, 1124-1126
Espín
del electrón, 942, 1383-1387
nuclear, 1442-1443
Espiras (mallas), en circuitos, 855
Estabilidad nuclear, 1449-1456
Estado(s)
base (o fundamental)
atómico, 1388-1390, 1391t
nuclear, 1454
contra niveles de energía, 1307-1308
de enlace, 1343-1344
de partícula libre, 1346
degenerados, 1370-1371, 1374-1375
densidad de, 1418-1419
estacionario, 1337-1338, 1366-1369
unidimensional, 1337-1338
tridimensional, 1366-1369
excitados, 1454
ligados, 1343-1344
metaestable, 1308
partícula libre, 1346
Estimulación magnética transcraneal, 961
Estrellas
binarias, 1259
de segunda generación, 1514
enanas blancas, 1437
fusión del helio en, 1514
masa de, 1259
supernovas, 1230f, 1514
Estructura
atómica, 689, 1364-1398
aproximación de campo central y, 1388
de átomos con muchos electrones, 1387-1393
de átomos hidrogénicos, 1378-1379
del átomo de hidrógeno, 1372-1378
ecuación de Schrödinger y, 1365-1366
efecto Zeeman y, 1379-1382
espectros de rayos x y, 1393-1396
espín del electrón y, 1383-1387
ley de Moseley y, 1394-1396
partícula en una caja tridimensional y, 1366-1371
principio de exclusión y, 1388-1393
tabla periódica y, 1389, 1390-1393
diamante, 1413-1414
fina, 1387
hiperfina, 1387-1444
Estudios por imágenes. *Véase* Imágenes médicas
Éter, viaje de la luz a través del, 1224, 1881
Experimento(s)
con choques de haces, 1489
con rayos cósmicos, 1489-1490
de Davisson-Germer, 1287-1288
de dispersión de Rutherford, 1294-1296
de Franck-Hertz, 1300
de interferencia de Young, 1167-1169, 1179
de la cubeta de hielo de Faraday, 742-744
de Michelson-Morley, 1180-1181, 1224
de Millikan de la gota de aceite, 786
de Stern-Gerlach, 1383-1384
de Tolman-Stewart, 849
e/m de Thomson, 896-897
mentales, 1227
Exposición a la radiación
fuentes de, 1458-1459, 1461
límites de, 1459-1460
riesgos de, 1460-1461, 1476
Extrañeza, 1495, 1499t
Extraño (quark), 1496

F

Factor
de calidad, 1459
de escala, 1504, 1505
de potencia, 1036
Farad, 789, 790
Faraday, Michael, 708, 789, 885
Fasores, 1022
Fechado
con carbono, 1458
radiactivo, 1458
Fem
alterna sinusoidal, 1021
autoinducida, reactancia inductiva y, 1026-1027
contraelectromotriz, 908
inducida, 908, 958-959
aplicaciones de, 959, 961
dirección de, 961
flujo magnético y, 959, 962
Fermiones, 1492, 1494, 1501
Ferromagnetismo, 943t, 944-946
Feynmann, Richard, 1483
Fibras ópticas, 1090
Fibrosis quística, prueba del cloruro en el sudor para, 695
Filtros
de paso
alto, 1028
bajo, 1027
polarización, 1093, 1094-1097, 1098
polaroid, 1094-1095
Física
cuántica, 1328-1356
de partículas, 1480-1485
nuclear, 1439-1471
Fisión nuclear, 785, 1247, 1464-1468
dinámica de reacción en, 1465
en reactores, 1466, 1468
modelo de gota líquida de, 1465-1466
reacciones en cadena, 1466
Flujo
de corriente, dirección de, 819-820
de energía, electromagnética, 1065-1067
de momento electromagnético, 1068-1069
eléctrico
analogía del flujo de un fluido para, 728-729
cálculo de, 728-732
carga encerrada y, 726-728
carga y, 725-732
de campo eléctrico no uniforme, 730-732
de campo eléctrico uniforme, 729-730
ley de Gauss y, 732-741
magnético, 890-892
cálculo de, 959-960
campos eléctricos inducidos y, 972-974
como cantidad escalar, 891
definición de, 890-891
efecto Meissner y, 980
en transformadores, 1040
fem inducida y, 958-959
ley de Faraday y, 959-967
ley de Gauss del magnetismo y, 891
ley de Lenz y, 967-969
superconductividad y, 980
unidades de, 891
Flúor, 1390
Fluorescencia, 1300
Forenses, rayos x en estudios, 1395
Formación de la imagen
por cámaras, 1139-1142
por difracción, 1209-1210
por lentes, 1131-1133
por reflexión, 1115-1126
por refracción, 1126-1130
Fórmula
de Euler, 1340
semiempírica de masa, 1448
Fósiles, 1508
Fotinos, 1501
Fotoceldas, 1425
Fotoelasticidad, 1100
Fotoelectrones, 1262
Fotomultiplicadores, 1273
Fotones, 1081, 1248, 1261-1280
absorción de, 1261-1266, 1484
como mediadores de fuerza, 1484
como partículas, 1263
de rayos x, 1266-1269
definición de, 1261
descubrimiento de, 1481
difracción y, 1273-1274
dispersión de Compton y, 1269-1271
dualidad onda-partícula y, 1273-1279
efecto fotoeléctrico y, 1261-1266
emisión (de), 1266-1269, 1484
espontánea de, 1307
estimulada de, 1307-1309
en el modelo
atómico de Bohr, 1297-1306
estándar, 1500
en interacciones de partículas cargadas, 1484
explicación de Einstein para, 1263-1264
frecuencia de umbral y, 1263
incertidumbre y, 1274-1278
interacciones electrodébiles y, 1500

interferencia y, 1273-1274
luz emitida como, 1266-1269, 1484
momento lineal de, 1264-1265, 1274-1275, 1277
posición de, 1274-1275, 1277
potencial de frenado y, 1262-1263
probabilidad y, 1274-1275
producción de pares y, 1271-1272
rayos gamma, 1454
virtuales, 1484
Franck, James, 1300
Franjas
brillantes, 1194, 1195
de interferencia, 1168, 1174, 1178
de Newton, 1178
oscuras, 1193-1195
Franklin, Benjamin, 688
Franklin, Rosalind, 1207f
Frecuencia
angular
de ondas, 1061, 1331
de resonancia, 1038
de umbral, 1263
de un ciclotrón, 893
Frente(s)
de CA, 1022
de fem, 828
potencia de entrada a, 835-836
potencia de salida de, 835-836
resistencia interna de, 830-831
de onda, 1081-1082
puntual, 700, 924
Fuerza(s)
conservativas
trabajo realizado por, 755
de interacción, 931-932
eléctrica
campo eléctrico y, 698-703
conservación de la energía con, 758-759
contra energía potencial eléctrica, 758
contra fuerza gravitacional, 695
dirección de, 694
en partículas sin carga, 693
ley de Coulomb y, 693-698
potencial eléctrico y, 764-765
suma vectorial de, 697-698
trabajo realizado por, 757-758, 761
unidades de, 695
electromotriz (fem), 828-831
autoinducida, 995, 998, 1026-1027
contraelectromotriz, 908
corriente y, 991
de movimiento, 969-971
de un motor eléctrico, 908
en transformadores, 1040-1041
fuente de, 828, 830-831, 835-836
Hall, 909-910
inducida, 908, 958-959
medición de, 863-864
sinusoidal alterna, 1021
teoría de la relatividad y, 1224
electrostática, 856
conservación de, 856
integral de línea de, 755, 937
fundamental(es), 1490-1492
gravitacional(es)
contra fuerza eléctrica, 695
por unidad de masa, 700
interacciones fuertes, 1446, 1490-1491
magnética(s), 886-887
dirección de, 886-887
efecto Hall y, 909
en altavoces, 899-900
en conductores que transportan corriente, 898-901
en mallas de corriente, 901-907
en motores eléctricos, 898
entre conductores paralelos, 931-932
magnitud de, 887
unidades de, 887
nuclear, 1446-1449, 1484, 1491
fuerte, 689
función de energía potencial para, 1448-1449, 1491
mesones y, 1484-1485
Función(es)
de distribución de probabilidad, 1333
de un oscilador armónico, 1353
radial, 1376, 1392
tridimensional, 1365-1366
unidimensional, 1333
de energía potencial
de la fuerza nuclear, 1448-1449, 1491
de una partícula en una caja, 1339
para un oscilador armónico, 1350, 1352, 1353-1354
de Hermite, 1350-1354
de onda
de estado estacionario, 1337-1338, 1366-1369
de una partícula en una caja, 1339-1343
dependencia del tiempo de, 1337-1338, 1343
ecuación tridimensional de Schrödinger y, 1365-1371
ecuación unidimensional de Schrödinger y, 1332-1333, 1336-1337
Hermite, 1352
híbrida, 1407
interpretación de la probabilidad de, 1333-1334
normalizada, 1342, 1365
notación de, 1329
paquetes de ondas y, 1335-1336
para ondas de partículas, 1328-1335
para ondas electromagnéticas, 1061
para un oscilador armónico, 1350-1354
dieléctrica, 1064
híbrida de onda, 1407
Fusibles, 870
Fusión
del helio, 1514
en frío, 1471
nuclear, 785, 1284, 1469-1471
helio, 1514
solar, 1501
tunelamiento en, 1349-1350
por muón catalizado, 1471

G

Galaxias, rapidez de recesión de, 1502-1503
Galileo, Galilei, 1080
Galvanómetro de D'Arsonval, 860, 863, 904, 1022
Gases nobles, 1390
Gauss, 887
Gauss, Carl Friedrich, 732
Geiger, Hans, 1294
Gell-Mann, Murray, 1496, 1498
Generador(es)
conversión de energía en, 966-967
de conductor
deslizante, 965-966, 967, 970
de corriente
alterna, 1021
directa, 964-965
electrostático de Van de Graaf, 743-744, 768
homopolares, 971
Gerlach, Walter, 1383
Germer, Lester, 1287-1288
Glashow, Sheldon, 1500
Gluones, 1490, 1491, 1498-1499, 1500
Gradiente
de potencial, 774-776
definición de, 774
Gran Colisionador de Hadrones, 1257, 1487, 1489, 1501
Gran explosión (Big Bang), 1503-1504
Gravedad específica, 374
Gravitación
aceleración debida a, 700
expansión del universo y, 1501-1502, 1505-1507
ley de Gauss para, 725, 934
rapidez de escape y, 1505-1506
teoría general de la relatividad y, 1250
Gravitón de espín 2, 1490
Gravitones, 1490, 1500
Gray, 1459

H

h contra *ħ* barra, 1276
Haces, 1083
Hadrones, 1492, 1493-1494, 1496, 1497
Hahn, Otto, 1464
Halógenos, 1390
Helio, 1390
Henry, 993
Henry, Joseph, 885
Hertz, 1053
Hertz, Gustav, 1300
Hertz, Heinrich, 1053, 1081
Hidrógeno
en reacciones de fusión, 1469-1471
estado fundamental del, 1390
pesado, 1305-1306
Hipermetropía, 1143-1146
Hiperones, 1494-1495
Hipótesis cuántica, 1310-1314
Histéresis, 945-946
Holografía, 1211-1213
Hornos de microondas, 1071f
Hubble, Edwin, 1502
Huecos, 820, 1423-1424
Humason, Milton, 1502

I

Imagen(es)
de una célula, 1180
derecha, 1117
en medicina
IRM, 904-905, 934, 1444
isótopos radiactivos en, 1391, 1461, 1466
rayos x en, 1268-1269
en óptica, 1115
invertida, 1117, 1141
en lentes de cámaras, 1141
por resonancia magnética (IRM), 904-905, 934, 1444
real, 1115
virtual, 1115, 1137
Imán(es)
atracción de objetos no magnetizados, 906-907
de barra, 883, 905-907
dipolos magnéticos, 906, 907
momento magnético de, 906
permanentes, 883, 941
Impedancia, 1031-1033
Impresoras
de inyección de tinta, 722
láser, 689, 769, 1309
Impurezas por sustitución, 1415, 1424-1425
Incertidumbre, 1274-1279
dualidad onda-partícula y, 1274-1278, 1314-1317
Inclinación magnética, 884
Índice de refracción, 1063, 1083-1088
aspectos ondulatorios de la luz y, 1086-1088
birrefringencia y, 1100
de las piedras preciosas, 1090
de lentes, 1133-1134
de recubrimientos reflectantes/no reflectantes, 1178-1179
definición de, 1083
del ojo, 1143
dispersión y, 1091-1093
leyes de reflexión y refracción y, 1085
reflexión total interna y, 1088-1090
transparencia y, 1085
Inducción electromagnética, 957-981
cambio del flujo magnético y, 958-959
campos eléctricos inducidos y, 971-974
corrientes parásitas y, 974-975
ecuación de Maxwell y, 957, 977-979
experimentos en, 958-959
fuerza electromotriz de movimiento, 969-971
ley
de Faraday y, 957, 959-967
de Lenz y, 967-969
superconductores y, 968, 979-980

Inductancia, 991-1012
autoinductancia, 994-998
circuitos *R-L* y, 1001-1005
definición de, 995
energía del campo magnético y, 998-1001
mutua, 991-994
Inductores, 994-998
contra resistores, 999
en circuitos de ca, 1025-1027, 1029, 1029t, 1035
energía almacenada en, 998-1000
reactancia inductiva de, 1026
Inflación cósmica, 1511
Integral
de fuerza electrostática, 755, 937
de línea, 755
de campos eléctricos, 937
de campos magnéticos, 937
de superficie, 730
Intensidad
contra emisión espectral, 1310-1311
de radiación electromagnética, 1066
en la difracción de una sola ranura, 1195-1199
Interacción(es)
de partículas, 1490-1495
débiles, 1491
electromagnéticas, 1490
extrañeza en, 1494-1495
fuertes, 1490-1491
gravitacionales, 1490
isoespín y, 1495
leyes de conservación para, 1495
paridad en, 1495
ruptura de simetría, 1495
tipos fundamentales de, 1490-1492
de ruptura de simetría, 1495
débiles, 1491
electrodébil, 1500
electromagnética, 1490
fuertes, 1446, 1490-1491
gravitacional, 1490
Interferencia, 1163-1183
alas de mariposa y, 1179
amplitud en, 1170-1171
anillos de Newton y, 1178
constructiva, 1164-1166, 1168-1170, 1206-1207
en holografía, 1211-1213
en la difracción de rayos x, 1206-1207
contra difracción, 1192, 1200
corrimientos de fase y, 1174-1175
curvas nodales/antinodales y, 1166
definición de, 1164
destructiva, 1164-1166, 1168-1170
diferencia
de fase y, 1171-1173
de trayectorias y, 1171-1173
dos ranuras fuente, 1166-1173, 1315-1316
en dos dimensiones, 1164
en holografía, 1211-1213
en ondas de agua, 1166-1167
en películas
delgadas, 1173-1179
gruesas, 1176
en tres dimensiones, 1164
experimento
de Michelson-Morley y, 1180-1181
de Young de, 1167-1169, 1179
fotones y, 1273-1274
fuentes coherentes y, 1164-1166
interferómetro de Michelson y, 1179-1181
ondas
de agua y, 1166-1167
estacionarias y, 1164, 1166
sinusoidales y, 1164
principio de complementariedad y, 1273-1274
recubrimientos reflectantes/no reflectantes y, 1178-1179
reflexión durante, 1174-1175
superposición y, 1164
Interferómetro, 1179-1181
de Michelson, 1179-1181
Interruptores
con falla a tierra, 870
de circuito (disyuntores), 870
Intervalos de tiempo
medición de, 1230
relatividad de, 1228-1233
Inversa, 1117
Inversiones de población, 1308-1309
Iones, 690
negativos, 690
positivos, 690
Ionización, 690
descarga de corona y, 768-771
IRM (obtención de imágenes por resonancia magnética), 904-905, 934, 1444
Isoespín, 1495
Isótopos, 897, 1441
radiactivos, en medicina, 1391, 1461, 1466

J

Jaula de Faraday, 743-744
Joule por Coulomb, 761

K

Kaones, 1259, 1493
Kilohm, 826
Kilowatt/hora, 871
Kramers, Hendrik, 1361

L

Land, Edwin, 1094
Langostas, compases magnéticos en, 886
Láser(es), 1307-1309
continuos, 1309
definición de, 1307
emisión espontánea y, 1307
emisión estimulada y, 1307-1309
estados metaestables y, 1308
intermitentes, 1309
inversiones de población y, 1308-1309
producción de, 1308-1309
pulsado, 1309
semiconductor, 1309
Lawrence, E. Q., 1486
Lente(s)
convergentes, 1131-1133
correctivas, 1143-1146
cristalinas, 1142-1143
de amplificación, 1146-1147
de cámara, 1139-1142
de contacto, 1143-1145
de gran angular, 1140
de microscopios, 1147-1149
de telefoto, 1140
de telescopios, 1149-1151
definición de, 1131
delgadas, 1131-1139
convergentes, 1131-1133
divergentes, 1133
formación de imágenes por, 1135-1139
índice de refracción de, 1133-1134
longitud focal de, 1131, 1133-1135
métodos gráficos para, 1135-1137
positivas, 1131
propiedades de, 1131
punto focal de, 1131
radio de curvatura de, 1133-1134
divergentes, 1133
para los ojos, 1142-1143
parabólicas, 1151
propiedades de las, 1131
recubrimientos
con reflexión para, 1178, 1179
sin reflexión para, 1178
zoom, 1141
Leptones, 1492-1493, 1496, 1499, 1500
Ley(es)
de Ampère, 935-941
aplicaciones de, 938-941
corriente de desplazamiento y, 975-977
enunciado general de, 937-938
generalización de, 975-976
ondas electromagnéticas y, 1052, 1057, 1063
de Biot y Savart, 927
de Brewster, 1097-1098
de conservación
absoluta, 1495
condicional, 1495
energía-masa, 1247-1248
universal, 690
de Coulomb, 693-698
constante de proporcionalidad en, 695
enunciado de, 694
ley de Gauss y, 732
superposición de fuerzas y, 696
de Curie, 944
de Gauss, 732-746
aplicaciones de, 736-741
carga puntual dentro de una superficie esférica y, 732-733
carga puntual dentro de una superficie no esférica y, 733-734
carga y flujo eléctrico y, 725-732
conductores con cavidades y, 741-742, 773
conductores sólidos y, 736-741
dieléctricos y, 807-808
enunciado cualitativo de la, 728
forma general de, 734-736
para campos eléctricos, 732-746, 935, 1052, 1056
para campos magnéticos, 891, 935, 1052, 1056
para la gravitación, 752, 935
prueba experimental de, 742-744
repaso de, 732-736
de Hubble, 1503
de inducción de Faraday, 957, 959-967
de Lenz, 967-969
de Malus, 1096
de Moseley, 1394-1396
de Newton del movimiento
incertidumbre y, 1274-1275
modelo de partícula y, 1274
relatividad y, 1244-1245, 1249-1251
de Ohm, 822, 825-826
de radiación de Planck, 1311-1314
de reflexión, 1084-1086
de refracción, 1084-1086
de Snell, 1084
de Stefan-Boltzmann, 1310, 1313
del desplazamiento de Wien, 1311
universal de conservación, 690
Límite de resolución, 1209
Linacs, 1485-1486
Línea(s)
con corriente, 869, 870
de absorción, 1203
de campo eléctrico, 708-709
cargas puntuales y, 734, 1053
ondas electromagnéticas y, 1053
superficies equipotenciales y, 771-772
de campo magnético, 884-885, 889-890
contra líneas de fuerza magnética, 889
de un elemento de corriente, 927
de una carga en movimiento, 924-925
dirección de, 924
extremos de, 891
flujo magnético y, 890-891
de corriente, 708
eléctricas
con corriente, 869-870
domésticas, 868-872
lado neutro, 868-869, 870
espectrales, 1292, 1297
efecto Zeeman y, 1379-1382
magnéticas de fuerza, 889-892
neutra, 868-869, 870
Líquido(s)
como materia condensada, 1412
propiedades de los, 1412
Litio, 1390
modelo de Bohr, 1306

Livingstone, M. Stanley, 1486
Lluvia radiactiva, 1476-1477
Localizador(es)
de clavos, 802-803
eléctricos (de clavos), 802-803
Longitud(es)
apropiada, 1235
de onda
de De Broglie, 1287-1290
de la luz, 1054-1055
en la serie de Balmer, 1304
en la serie de Brackett, 1304
en la serie de Lyman, 1304
en la serie de Pfund, 1304
frecuencia y, 1060
medición de, 1179-1181
de Planck, 1509
focal
de espejos, 1119-1120
de lentes de cámara, 1140
de lentes de microscopios, 1148-1149
de lentes de telescopios, 1149-1150
de lentes delgadas, 1131, 1133-1135
relatividad de, 1233-1237
Lupas, 1146-1147
Luz(ces), 1080-1105
absorción de la, 1261-1266
coherente, 1165
como fotones, 1261-1280
como onda y partícula
difracción de, 1190-1214
dispersión de, 1085, 1091-1093, 1100-1101, 1269-1273
efecto
Doppler para, 1241-1243
fotoeléctrico y, 1261-1266
fluorescentes, 996-997, 1081, 1300
frentes de onda de, 1081-1082
haces de, 1083
intensidades de, 1085
interferencia y, 1166-1170
láser, 1055, 1081, 1164, 1166
longitudes de onda de, 1054-1055
monocromática, 1054-1055, 1164
natural, 1094
no polarizada, 1094
polarizada, 1093-1100
primeros estudios de, 1080-1081
principio de Huygens y, 1102-1104
rapidez de, 1054, 1063f, 1081, 1224-1226
rayos de, 1082
reflexión (de), 1082-1091
interna total de, 1088-1091
refracción de, 1082-1088
solar, presión de radiación de, 1068-1069
visible, 1054

M

Magnetismo, 883-885
ley de Gauss para, 891, 935
movimiento de un electrón y, 885
Magnetización, 906-907, 927, 941-946
de saturación, 945
Magnetón(es)
de Bohr, 941-942, 1380, 1442-1443
nucleares, 1443
Magnetrones, 893
Máquina(s)
fotocopiadoras, 769
Z, 797-798
Marcapasos, 866
Marco de referencia
inercial, 1223-1227
simultaneidad y, 1227-1228
teoría de la relatividad y, 1223
simultaneidad y, 1227-1228
suceso en, 1227
Marsden, Ernest, 1294
Masa
atómica, 690, 1305-1306
medición de, 897, 1441
de prueba, 700
de un electrón, 689, 896-897, 1440
de un neutrino, 1500-1501
de un neutrón, 689, 1440
de un núcleo, 1440
de un protón, 689, 1440
de una estrella, 1259
de una molécula, 897
del átomo, 690, 897, 1305-1306, 1441
en reposo, 1243-1246
molecular medición de, 897
reducida, 1305-1306, 1408-1409
Materia
antimateria y, 1516
condensada, 1412
luminosa, 1507
oscura, 1507
Materiales magnéticos, 907, 941-946
diamagnéticos, 943t, 944
ferromagnéticos, 943t, 944-946
magnetón de Bohr, 941-942
paramagnético, 943-944, 943t
permeabilidad relativa de, 943
Máximos
de intensidad, 1197
de interferencia, 1199
principales, 1201
Maxwell, James Clerk, 976, 1052f, 1081
Mecánica cuántica, 1328-1356
barreras de potencial y, 1347-1350
definición de, 1329
ecuación de Schrödinger y, 1332-1333, 1336-1337, 1365-1366
estados
estacionarios y, 1337-1338, 1366
ligados y, 1343-1345
estructura atómica y, 1364-1398
función(es)
de distribución de probabilidad y, 1333, 1353, 1365-1366
de onda y, 1328-1335
ondas unidimensionales en, 1329-1333
oscilador armónico en, 1350-1354
paquetes de onda y, 1335-1336
partícula en una caja y, 1338-1343, 1366-1371
pozos de potencial y, 1343-1347
tunelamiento y, 1347-1350
Mediadores de fuerza, 1484-1485
Medicina
nuclear, 1391, 1461, 1466
aniquilación de pares en, 1484
Megohm, 826
Meitner, Lise, 1464
Membrana (de la célula) celular, 805
dieléctrica, 805
gradiente de potencial a través de, 774
Mesones, 1484-1485, 1492, 1493-1495, 1499
colores de, 1489
K, 1493
quarks en, 1496
Metales
alcalinos, 1306-1390
modelo atómico de Bohr para, 1306
alcalinotérreos, 1390
configuraciones electrónicas de, 1390-1391
de tierras raras, 1390
energía promedio de un electrón libre en, 1421
modelo de electrón libre en, 1415, 1418-1422
modelo de electrones como gas, 1415
tierras raras, 1390
Metano, estructura del, 1407
Método gráfico, para ubicación de imágenes, 1124-1126
Michelson, Albert, 1180-1181
Microcoulomb, 696
Microfarad, 790-791
Micrófono
de condensador, 790
Microfotografías, 1149
Micrógrafos, 1149
Microscopio(s), 1147-1149
compuesto, 1147-1149
de barrido electrónico, 1291-1292
de tunelamiento (STM), 1349
electrónico, 1290-1292
de transmisión, 1291
poder de resolución de, 1210
Miliampere, 820
Millikan, Robert, 897, 1264, 1293
Miopía, 1143-1146
Modelo(s)
de capas, 1448-1449
de gota líquida
de la fisión nuclear, 1465-1466
del núcleo, 1447-1448
del electrón libre, 1415, 1418-1422
electrón-gas, 1415
estándar, 1499-1500, 1510-1511
Modelo atómico
de Bohr, 1297-1306
del hidrógeno, 1300-1305, 1372
emisión y absorción de un fotón y, 1297
frente al análisis de Schrödinger, 1373
limitaciones del, 1372
niveles de energía y, 1297-1300
principio de incertidumbre y, 1317
de Rutherford, 1294-1296
de Thomson, 751-752, 1293, 1294-1295
Moléculas, 1405-1431
polares, 805-806, 1407
Momento
angular
de electrones, 942
de espín, 1384-1385, 1387, 1442
nuclear, 1442
orbital, 1373-1374, 1384, 1387
total, 1387, 1442
dipolar eléctrico, 710-711
lineal
conservación de, 1243
de fotones, 1277
electromagnético, 1068-1069
relativista, 1243-1246
magnético, 903, 906, 1379
alineación de, 941-945
anómalo, 1443
de espín, 1443
de un electrón en órbita, 1379-1382
de un protón, 1442-1443
de una espira de corriente, 903, 934
definición de, 903
del neutrón, 1442-1443, 1447
dirección de, 903
efecto Zeeman y, 1379-1382
magnitud de, 942-945
nuclear, 1442-1443
vector, 903
Monopolos magnéticos, 885, 1500
Morley, Edward, 1180-1181
MOSFET de enriquecimiento, 1429
Motores
de corriente directa, 907-908
de derivación, 908
eléctricos, 898, 907-908
de corriente directa, 907-908
fuerza magnética en, 898
en serie, 908
Movimiento
armónico
amortiguado, 1009
simple contra oscilación eléctrica, 1008
de rotación molecular, 1410-1412
Muller, Karl, 824
Multímetros digitales, 863
Multipletes, 1383
Muones, 1254, 1485, 1491

N

Nanopartículas magnéticas, para el cáncer, 946
Ne'man, Yu'val, 1498

Neddermeyer, Seth, 1485
Neón, 1390
Neuronas, 716
carga eléctrica en, 741
Neutrinos, 1452, 1492
masa de, 1500-1501
solares, 1501
Neutrón(es)
absorción de, 1464
descubrimiento de, 1481-1482
masa de, 689, 1440
momento
angular de espín del, 1442
magnético del, 1442-1443, 1497
Newton, Isaac, 1080
Nivel(es)
aceptor, 1425
base (o fundamental), 1297
de donador, 1424
de energía, 1297-1305
contra estados, 1307-1308
cuantización de, 1311-1312
de rotación, 1408-1412
de un oscilador armónico, 1351-1352
de una partícula en una caja, 1340-1341
degeneración y, 1370-1371
del átomo de hidrógeno, 1302-1305, 1379-1382
ecuación de Schrödinger y, 1379-1382
efecto Zeeman y, 1379-1383
ley de Moseley y, 1394-1396
reglas de selección y, 1382
vibratoria, 1410
excitados, 1298
Nodo(s)
de Ranvier, 882
en circuitos, 855
Notación espectroscópica, 1375
Nubes
de gas interestelar, 1293
moleculares, 1435-1436
Nucleidos, 1441
decaimiento de, 1450-1458
estables, 1449-1450
impar-impar, 1449
radiactivos, 1450-1454
decaimiento de, 1450-1454
síntesis de, 1511-1515
Núcleo, 1439-1471
atómico, 689, 1295
densidad del, 1440
derivado, 1554
en estado(s)
excitados, 1454
fundamental, 1454
estructura del, 1444
formación de, 1511-1514
masa del, 1440
modelo
de capas, 1448-1449
de gota líquida de, 1447-1448
precursor, 1454
propiedades del, 1439-1444
radio del, 1440
tiempo de vida, 1457
vida media de, 1456-1457
Nucleones, 1439-1440
Nucleosíntesis, 1511-1515
Número(s)
atómico, 690, 1306, 1379, 1387-1388, 1441
cuántico
de espín, 1385
magnético, 1374
magnético de espín, 1385
magnético orbital, 1374
notación para, 1374-1375
orbital, 1373
principal, 1301, 1373
de masa, 1440
de neutrones, 1441
de nucleones, 1440
de onda, 1061, 1330
f, 1140-1141
mágicos, 1449

O

Objetivo, microscopio, 1147-1148
Objeto(s)
en óptica, 1114
extensos
definición de, 1115
formación de imágenes por espejos y, 1120-1122
formación de imágenes por lentes y, 1131-1133
puntuales
definición de, 1115
formación de imágenes de, 1118-1119, 1127-1130, 1209-1210
resolución de, 1209-1210
virtual, 1137
Obtención de imágenes con radioisótopos, 1391
Occhialini, Giuseppe, 1271
Ocular(es), 1148
microscopio, 1147-1148
Oersted, Hans Christian, 885
Ohm, 826
Óhmetros, 863
Ojo, 1142-1146
cirugía láser del, 1076, 1309
estructura del, 1142-1143
índice de refracción de, 1143
resolución del, 1220
Onda(s)
coherentes, 1165
de De Broglie, 1290
de partículas
contra ondas mecánicas, 1329
ecuación de onda para, 1330-1333
frecuencia angular de, 1331
número de onda para, 1331
unidimensionales, 1329-1333
de sonido
difracción de, 1198
efecto Doppler y, 1242
de una partícula, 1328-1338. *Véase también* Partículas como ondas
del electrón, 1286-1296, 1300
electromagnética(s), 1051-1073
amplitud de, 1061
aplicaciones de, 1054
campos eléctricos de, 1053, 1061, 1069-1070
campos magnéticos de, 1061, 1069-1070
definición de, 1052
dirección de, 1058
ecuaciones de Maxwell y, 1052-1057
efecto Doppler para, 1241-1243
en dieléctricos, 1063-1064
en la materia, 1063-1064
energía en, 1064-1067
estacionarias, 1053, 1069-1072
frecuencia angular de, 1061
frecuencia de, 1060
funciones de onda de, 1061
generación de, 1053
intensidad de, 1066
magnitud de, 1058
momento lineal de, 1068-1069
número de onda de, 1061
planas, 1055-1057
polarización de, 1058
presión de radiación y, 1068-1069
propiedades de, 1058
rapidez de, 1058, 1060, 1071
reflejadas, 1069-1071
regla de la mano derecha para, 1058f
sinusoidales, 1060-1063
superposición de, 1069-1070
transversales, 1056, 1060
unidades para, 1053
vector de Poynting y, 1065-1066
electrónicas, 1286-1292
estructura atómica y, 1292-1296
modelo de Bohr para el hidrógeno y, 1300
estacionarias
electromagnéticas, 1053, 1069-1072
interferencia y, 1164, 1166
incertidumbre y, 1276-1277
planas, electromagnéticas, 1055-1057, 1060
transversales, 1056, 1060
electromagnéticas, 1056, 1060
sinusoidales
electromagnéticas, 1022-1024
interferencia y, 1164
Onnes, Heike Kamerlingh, 824
Óptica, 1080
física, 1082, 1163
geométrica, 1082, 1114-1153
cámaras y, 1139-1142
lentes delgadas y, 1131-1139
lupas y, 1146-1147
microscopios y, 1147-1149
ojos y, 1142-1146
reflexión en una superficie esférica y, 1118-1126
reflexión en una superficie plana y, 1115-1118
refracción en una superficie esférica y, 1126-1130
refracción en una superficie plana y, 1115-1118
reglas de signos en, 1116
telescopios y, 1149-1151
imagen en, 1115
objeto en, 1114
Oscilación(es)
de neutrinos, 1500-1501
eléctrica, 1005-1009
en circuitos *L-C*, 1005-1009
momentáneas, 1032
Osciladores armónicos
anisotrópicos, 1401
cuánticos, 1350-1354
funciones de Hermite para, 1350-1354
isotrópicos, 1401-1402
newtonianos, 1352-1354

P

Pantallas táctiles, 794
Paquetes de ondas, 1335-1336
Paradoja de los gemelos, 1232-1233
Paralelo, resistores en, 851, 852-855
Paramagnetismo, 942-944, 943t
Pararrayos, 769
Pares
de Cooper, 1430
protón-antiprotón, 1491-1492
Paridad, 1495
Parsec, 1503
Partícula(s)
alfa, 1294-1295, 1349-1350
emisión de, 1450-1451
tunelamiento y, 1349-1350
antipartículas y, 1483
atómicas, 689-690
beta
más, 1453
menos, 1452-1453
cargadas, movimiento en campos magnéticos, 892-898
como mediadores de fuerza, 1484
distinguibles, 1419
en el modelo estándar, 1499-1500
en estado ligado, 1343-1344
en mecánica newtoniana, 1274
en una caja
en una dimensión, 1338-1343, 1371
en tres dimensiones, 1366-1371
extrañas, 1494-1495
fotones como, 1263
función de onda para, 1328-1335
fundamentales, 1480-1501
perspectiva histórica de, 1480-1485
libre, 1330
ondas de luz como, 1261-1280

Patrón(es)
de interferencia, 1166
intensidad en, 1170-1173
de Laue, 1205f
Pauli, Wolfgang, 1389
Penzias, Arno, 1515
Perihelio, precesión del, 1250
Permeabilidad, 943
relativa, 943
Permitividad de un dieléctrico, 802
Pez fluorescente, 1300f
Picoampere, 820
Picofarad, 791
Piedras preciosas, 1090, 1092
Piones, 1485, 1489, 1491, 1493-1494
Pistolas de radar, 1242f
Placa de cuarto de onda, 1100
Planck, Max, 1311-1312
Planet Imager (Formador de imágenes de planetas), 1221
Plano(s)
antinodales, 1070
de incidencia, 1084
nodales, 1070
Plantas de energía nuclear, 1247, 1466-1468
Poder de resolución, 1209-1211
criterio de Rayleigh y, 1209, 1210
cromática, 1203-1204, 1210
de espectrógrafos de rejilla, 1203-1205
de un microscopio, 1290-1291
en la difracción, 1209-1210
límite de, 1209
Polarización, 693, 805-806, 1093-1100
cargas inducidas y, 693, 807
circular, 1099-1100
cuerpos cargados y, 693, 807
de dieléctricos, 801-803, 805-807
de ondas
de luz, 1093-1100
electromagnéticas, 1058, 1093, 1095
definición de, 788, 1093
directa, 1426, 1427-1428
elíptica, 1099-1100
fotoelasticidad y, 1100
inversa, 1426
lineal, 1058, 1093, 1095
de ondas electromagnéticas, 1058
líneas de campo eléctrico y, 709
parcial, 1097
por reflexión, 1097-1098
visión de las abejas y, 1101
Polarizadores, 1093
Polo(s)
magnéticos, 884
contra carga eléctrica, 885
Norte (N), 884
Sur (S), 884
Positrones, 1453, 1482-1483
en la aniquilación de un par, 1483
en la producción de un par, 1271-1272, 1482-1483
movimiento en campos magnéticos, 894
Positronio, 1379
Potencia
de lentes correctivas, 1114
en circuitos
de ca, 1034-1037
eléctricos, 834-838
energía y, 871
medición de, 862-863
para motores eléctricos, 907
Potencial
de frenado, 1262-1263
eléctrico, 761-771
cálculo de, 762-771
campo eléctrico y, 761, 762-764, 774
circuitos eléctricos y, 834-836
como cantidad escalar, 761, 775
de *a* con respecto a *b*, 762
de dipolos eléctricos, 765
de dos cargas puntuales, 765
definición de, 761, 763
energía potencial eléctrica y, 763, 766
fuerza eléctrica y, 764-765
líneas de campo y, 771-772
máximo, 768-769
superficies equipotenciales y, 771-773
trabajo realizado por, 762
unidades de, 761, 764
Potenciómetros, 863-864
Pozo
cuadrado de potencial, 1343-1347
estados ligados, 1343-1345
finitos contra infinitos, 1345-1347
de potencial, 1343-1347
finitos, 1343
Precesión del perihelio, 1250
Precipitadores electrostáticos, 784
Presbicia, 1143
Presión de radiación, 1068-1069
Principio
cosmológico, 1503
de complementariedad, 1273
de correspondencia, 1249
de exclusión, 1388-1393
colores de quarks y, 1498-1499
enlaces y, 1406, 1407
tabla periódica y, 1389, 1390-1393
de Fermat del tiempo mínimo, 1111
de Huygens, 1102-1104
difracción y, 1191-1192
de incertidumbre, 1275-1277, 1314-1317
de Heisenberg, 1276-1277, 1314-1317
energía-tiempo, 1274-1275, 1278, 1315-1316
modelo de Bohr y, 1317
momento lineal-posición, 1274-1275, 1278, 1315-1316
oscilador armónico y, 1353-1354
para la materia, 1315-1316
posición-momento lineal, 1274-1275, 1278, 1315-1316
tiempo-energía, 1274-1275, 1278, 1315-1316
de la relatividad, 1224
Prisma
dispersión por, 1091
de Porro, 1089-1090
Probabilidad
de tunelamiento, 1348
dualidad onda-partícula y, 1274-1278
Problemas de electrostática, 696
Proceso triple alfa, 1514
Producción de un par, 1482-1483
electrón-positrón, 1271-1272, 1482-1483
fotones en, 1271-1272
positrones en, 1271-1272, 1482-1483
Profundidad (número cuántico), 1499
Propiedades de simetría, de sistemas, 725
Protón(es)
apantallamiento electrónico de, 1391-1392
carga de, 695
masa de, 689, 1440
momento
angular de espín del, 1442
magnético de, 1442-1443
tiempo de vida de, 1500
Proyectores, 1141
Prueba de cloruro del sudor, 695
Puente de Wheatstone, 880-881
Punto(s)
cercano, del ojo, 1143
cuánticos, 1363
de campo, 700, 924
de fusión, de sólidos, 1412
de imagen, 1114-1115
de retorno clásico, 1361-1362
focal
de espejos, 1119-1120
de lentes de microscopios, 1149
de lentes delgadas, 1131
virtual, 1123
lejano, del ojo, 1143
objeto, 1115
Purcell, Edward, 1416f

Q

Quarks, 689, 920, 1443, 1496-1499
abajo, 1496
antiquarks y, 1496-1499
arriba, 1496
camino óctuple y, 1497-1498
colores de, 1498-1499
en el modelo estándar, 1500
extraño, 1496
sabores de, 1496
tipos de, 1496

R

Rad, 1459
Radar de configuración sincronizada, 1220
Radiación
cáncer y, 1260
cósmica de fondo, 1515
de Cerenkov, 1257
de cuerpo negro, 1310-1314
de fondo, 1515
de frenado, 1267, 1268
de sincrotón, 1487
efectos biológicos de la, 1459-1462
electromagnética, 1053-1054
factor de calidad para, 1459
solar, 1264
térmica, 1081
usos benéficos de la, 1461-1462
Radiactividad
definición de, 1449
natural, 1454-1455
unidades de, 1457
Radio
de curvatura
de lentes, 1133-1134
de superficies esféricas, 1116, 1128-1129
decaimiento alfa del, 1451-1452
del núcleo, 1440
Radiología, 1268-1269
Radón, 1458-1459
Rapidez
de ondas electromagnéticas, 1058, 1071
de escape, 1505-1506
de la luz, 1054, 1063f, 1081, 1224-1226
relatividad y, 1224
de recesión, 1502-1503, 1504, 1505
Rayleigh, Lord, 1209, 1311
Rayo(s), 1082, 1135
eléctricos, 830
gamma, 1454, 1462
producción de pares y, 1271-1272
paraxiales, 1119
principal(es), 1124-1125, 1135-1136
de espejos, 1124-1125
de lentes, 1135-1136
x, 1266-1269
aplicaciones de, 1268-1269, 1395
Reacción(es)
en cadena, 1466
endoérgicas, 1463
endotérmicas, 1463
exoérgica, 1463
exotérmicas, 1463
nucleares, 1462-1471
absorción de neutrones en, 1464
en cadena, 1466
endoérgicas, 1463
endotérmicas, 1463
energía de reacción en, 1462-1464
energía de umbral de, 1463
exoérgicas, 1463
exotérmicas, 1463
fisión, 785, 1247, 1464-1468
fusión, 1469-1471
termonuclear, 1469-1471, 1470
termonucleares, 1470
Reactancia
capacitiva, 1028, 1029
inductiva, 1026-1027

Reactores nucleares, 1247, 1466-1468
Rectificador
  de corriente de onda completa, 1023
  de diodo, 1426
Recubrimientos
  no reflectantes, 1178-1179
  reflectantes, 1178, 1179
    interferencia y, 1178-1179
Red cristalina, 1413-1414
Reflexión, 1082-1091
  corrimientos de fase durante, 1174-1175
  de Bragg, 1207
  de ondas
    de luz, 1082-1088
    electromagnéticas, 1071
  definición de, 1082
  difusas, 1083, 1115
  durante interferencia, 1174-1175
  en la difracción de rayos x, 1206
  en una superficie
    esférica, 1118-1126
    plana, 1115-1118
  especular, 1083, 1115
  formación de imágenes y, 1115-1118
  interna total, 1088-1091
  ley de, 1084-1086
  polarización por, 1097-1098
  principio de Huygens y, 1102
Refracción, 1082-1088
  definición de, 1082
  en el ojo, 1143
  en una superficie
    esférica, 1126-1130
    plana, 1115, 1118
  ley de, 1084-1086
  principio de Huygens y, 1102-1104
Refractores, 1154
Regla(s)
  de Kirchoff, 855-860, 976-977
  de selección, 1382
Rejillas
  de difracción, 1201-1205
  de transmisión, 1201
Relámpagos, inductores y, 995
Relatividad, 1223-1252
  de intervalos de tiempo, 1228-1233
  de la longitud, 1233-1237
  de la simultaneidad, 1226, 1227-1228
  efecto Doppler y, 1241-1243
  envejecimiento y, 1233
  invariabilidad de las leyes físicas y, 1223-1226
  marco inercial de referencia y, 1223, 1224, 1226
  mecánica newtoniana y, 1244-1245, 1249
  paradoja de los gemelos y, 1232, 1233
  postulados de Einstein de la, 1224-1225
  principio de, 1224
  rapidez de la luz y, 1224-1225
  teoría
    especial de la, 1223-1249
    general de, 1249-1251, 1504
  transformaciones
    de Lorentz y, 1237-1241
    galileanas de coordenadas y, 1225-1226
Rem, 1460
Reproductores de DVD, 1202, 1210, 1309
Resistencia, 825-828
  dieléctrica, 805
    del aire, 768, 805
  equivalente, 851, 852
  interna, 830, 833
  medición de, 860-861, 862-864
Resistividad, 822-825
  de un metal, 838-839
  en la conducción nerviosa, 824
  temperatura y, 824-825
Resistores, 826-827
  contra inductores, 999
  de derivación, 861
  disipación de energía en, 835
  en circuitos de ca, 1025, 1029, 1034-1035
  en circuitos de cd, 850-855
  en paralelo, 851, 852-855
  en serie, 851-852, 853-855
  potencia de entrada a, 834-835
  potencia en, 1034-1035
  resistencia equivalente y, 851-855
  tasa de potencia de, 835
Resonancia
  definición de, 1038
  en un circuito de ca, 1037-1039
  magnética nuclear, 1444
Röntgen, Wilhelm, 1205, 1267, 1454
Rotación molecular, vibración y, 1410-1412
Rotores, 907-908
Rubbia, Carlo, 1491
Ruptura
  de Zener, 1428
  del dieléctrico, 800, 804-805, 1417
  por avalancha, 1428
Rutherford, Ernest, 1294-1296, 1297, 1349-1350, 1439-1440, 1454, 1462, 1481

S

Saturación, 1447
Schrieffer, Robert, 1430
Schrödinger, Erwin, 1332
Scintigrama o escintilograma, 1461
Segrè, Emilio, 1449
Segunda ley de Newton del movimiento
  relatividad y, 1244-1245, 1249-1251
Selectores de velocidad, 896
Selectrones, 1501
Semiconductor(es), 909, 1422-1425
  bandas de energía en, 1417
  cargas en movimiento en, 819-820
  compensados, 1425
  condiciones de polarización y, 1426, 1427-1428
  conducción en, 819-820
  de germanio, 1422-1425
  de silicio, 1422-1425
  diodos de, 827
  dopaje y, 1424-1425
  huecos en, 909, 1423-1424
  impurezas en, 1415, 1424-1425
  intrínsecos, 1423, 1424
  puros, 1423-1424
  resistividad de, 823
  tipo *n*, 1424
  tipo *p*, 1425
Sensores de semáforos, 997
Separación de variables, 1367
Serie(s)
  de Balmer, 1304
  de Brackett, 1304
  de decaimiento radiactivo, 1454-1455
  de Lyman, 1304
  de Pfund, 1304
  resistores en, 851-852, 853-855
Sievert, 1460
Simetría
  en teoría de partículas, 1497-1498
  esférica, 1366, 1372, 1388
  leyes de conservación y, 1495
  supersimetría, 1501
Simultaneidad, relatividad de, 1226, 1227-1228
Sincrociclotrones, 1487
Sincrotrones, 1487
Sistema(s)
  de alambrado
    de automóviles, 868, 870-871
    domésticos, 868-872, 1040-1041
  de distribución de potencia, 868-872
  de estrellas binarias, 1259
  de posicionamiento global, 1078, 1187, 1250-1251
  de transmisión de potencia, caída de rayos en, 995
  del centro de momento, 1272, 1487
  GPS, 1078, 1187, 1250-1251
  propiedades de simetría de, 725
Slipher, Vesto, 1502
Sol, erupción magnética en el, 1000
Solenoide(s), 904, 906, 939-941, 948t
  toroidal, campo magnético de, 940-941, 948t
Sólidos
  amorfos, 1412
  bandas de energía en, 1416-1417
  como materia condensada, 1412
  cristalinos, 1412-1415
  enlaces en, 1414-1415
  estructura de, 1412-1415
  puntos de fusión de, 1412
Strassman, Fritz, 1464
Suceso, en un marco de referencia, 1227
Sudbury Neutrino Observatory, 1501
Superconductividad, 1430
Superconductores, 824, 968, 979-980
Superficie(s)
  cerrada, flujo eléctrico a través de, 725
  equipotenciales, 771-773
    conductores y, 772-773
    contra superficie gaussiana, 773
    definición de, 771
  esférica
    radio de curvatura, 1116, 1128-1129
    reflexión en, 1118-1126
    refracción en, 1126-1130
  gaussiana, 734
    contra superficie equipotencial, 773
  plana
    reflexión en, 1115-1118
    refracción en, 1129
Supernovas, 1230f, 1514
Superposición
  de campos
    eléctricos, 703-704
    magnéticos, 926, 931
  de fuerzas, 696
  principio de, 696, 1164
Susceptibilidad magnética, 943-944

T

Tabla periódica, 1389, 1390-1391
Tamaño angular, 1146
Tau, 1492
Tecnecio, 1461
Telescopio(s), 1119, 1149-1151, 1161
  astronómico(s), 1119, 1149-1151
  de Arecibo, 1218
  de reflexión, 1150-1151
  de refracción, 1149
  Espacial Hubble, 1119, 1218, 1375f, 1503
  galileano, 1161
  Hale, 1219
  infrarrojos, 1221
  Keck, 1151
  poder de resolución de, 1210
Temperatura
  crítica, 979
  del universo primitivo, 1508
  resistividad y, 824-825
Teorema trabajo-energía, 755
Teoría(s)
  de la gran unificación (GTU), 1500-1501, 1509, 1516
  de todo (TOE), 1501
  electrodébil, 1500
  especial de la relatividad, 1223-1249
  general de la relatividad, 1249-1251, 1504
  ondulatoria de Maxwell, 1052-1057, 1262-1263, 1267
  supersimétricas, 1501
TEP (tomografía por emisión de positrones), 1484
Termistores, 824
Tesla, 887
Thomson, G.P., 1288-1289
Thomson, J.J., 751, 896, 1289, 1293
Tiburón(es)
  detección de un campo eléctrico por, 699f
  flujo a través de la boca de un, 729f
Tiempo
  apropiado, 1230-1231, 1232
  de Planck, 1509

de relajación, 866-867
espacio-tiempo y, 1238
historia del, 1508-1516
libre promedio, 838
Planck, 1509
Tierra, campos magnéticos de la, 884, 887
Tomografía
computarizada, 1268-1269
por emisión de positrones (TEP), 1484
Torca(s)
en dipolos eléctricos, 904
en espiras de corriente, 901-905
magnéticas, 901-905
Trabajo
energía
cinética relativista y, 1246-1247
potencial y, 755
realizado
para cargar un capacitor, 796-797
por campos eléctricos, 755, 761
por un potencial eléctrico, 762
por una fuerza conservativa, 755
por una fuerza eléctrica, 757-758, 761
por una fuerza electromotriz, 829
Transformación galileana
de coordenadas, 1225-1226
de velocidades, 1226
Transformaciones de Lorentz, 1237-1241
coordenadas, 1237-1238
velocidad, 1238-1239
Transformadores, 1040-1042
Transistores, 1429
Transparencia, índice de refracción y, 1085
Trazadores radiactivos, 1461-1462
Trilobites fósiles, 1508
Tritio, 1462
Tritones, 1471
Tsunamis, 1216
Tubos
de luz, 1090
de rayos catódicos, para medición de campos magnéticos, 887-888
Tunelamiento, 1347-1350
Tweeters, 2039

U

1 newton por coulomb, 699
Unidad(es)
de medida
para campo eléctrico, 699, 764
para capacitancia, 789
para corriente eléctrica, 695, 820
para distancias astronómicas, 1503
para dosis de radiación, 1460
para flujo magnético, 891
para fuerza eléctrica, 695
para fuerza magnética, 887
para inductancia mutua, 993
para ondas electromagnéticas, 1053
para potencial eléctrico, 761, 764
para radiactividad, 1457
para resistencia, 826
del flash, de una cámara, 797
Unificación electrodébil, 1500
Unión(es)
bipolar de transistores, 1429
de Josephson, 1349
p-n, 1425-1428
Universo. *Véase también* Espacio
densidad crítica del, 1505-1507
desacoplamiento de interacciones y, 1509-1510
expansión del, 1501-1508
factor de escala para, 1504, 1505
historia del, 1508-1516
línea de tiempo para, 1512-1513
modelo estándar del, 1510-1511
tamaño del, 1504-1505
temperatura de, 1508
Uranio
serie de desintegración del, 1454-1455
en la fisión nuclear, 1464-1468

V

Vacantes, 820
Vacío
campos eléctricos en, 798
capacitores en, 789-791, 798
energía de un campo eléctrico en, 798
permitividad de, 802
Valores cuadráticos medios, 1023-1024
Van der Mer, Simon, 1491
Variables separación de, 1367
Variación magnética, 884
Vector(es)
de campo, 701
magnético para un elemento de corriente, 926
magnético para una carga en movimiento, 924
de densidad de corriente, 821
de Poynting, 1065-1067
momento magnético, 903
Velocidad
de arrastre, 819-820
corriente y, 820
efecto Hall y, 909
transformación de Lorentz para, 1238-1239
Vértice, de un espejo, 1118
Viaje espacial, envejecimiento y, 1233
Vibración molecular, 1410-1412
rotación y, 1410-1412
Vida media, 1456-1457
Vidrio, como sólido amorfo, 1412
Visión
de las aves, 1144
ultravioleta, 1055
Vista
cirugía láser para la, 1076, 1309
defectos en la, 1143-1145
en animales, 1144
normal, 1143
ultravioleta, 1055
Volcanes, en Io, 975
Volt, 761
electrón, 764
por metro, 764
Voltaje
amplitud de, 1022, 1025
capacitor, 1027-1028, 1029-1030
corriente y, 826-828
definición de, 762
doméstico, 869
Hall, 909-910
inductor, 1025-1026
medición de, 861-862
medio cuadrático, 869
resistores, 1025, 1029
sinusoidal, 1022
terminal, 830-831
transformadores y, 1040-1042
Voltímetros, 762, 831, 861-863
amperímetros y, 862-863, 1024
digital, 863
Volumen equipotencial, 773

W

W^+, 1491, 1500
W^-, 1491, 1500
Weber, 891
Weinberg, Steven, 1500
Wentzel, Gregor, 1361
Westinghouse, George, 1021
Wilson, Robert, 1515
Woofers, 1029

Y

Yodo, 1461
Yukawa, Hideki, 1484

Z

Z^0, 1491, 1500

Física universitaria es un texto con más de seis décadas de liderazgo e innovación en la enseñanza de la física. Está dirigido a estudiantes de carreras de ciencias e ingeniería que cursan la materia de física y tienen algunas bases de cálculo.

Al preparar esta décimo tercera edición, mejoramos y desarrollamos aún más el contenido para asimilar las mejores ideas de la investigación educativa, entre las que destacan las siguientes:

- La enseñanza basada en la solución de problemas, con estrategias de solución que muestran cómo resolver problemas a partir de la reflexión, y no solo aplicando las matemáticas de manera directa.

- La pedagogía visual y conceptual con base en figuras de estilo gráfico simplificado, enfocadas en la situación física y con notas explicativas. Se cuenta, además, con videos de las soluciones de todos los ejemplos del libro y con videos tutoriales, disponibles mediante la lectura de códigos QR.

Física universitaria utiliza **MasteringPhysics**, el sistema de tareas y de enseñanza en línea probado pedagógicamente y de mayor uso en el mundo. Las actividades de MasteringPhysics permiten visualizar demostraciones de principios físicos, trabajar con simulaciones por computadora y recurrir a videos que son un asistente de enseñanza virtual accesible las 24 horas del día.

Consulte los recursos adicionales en el sitio Web:
www.pearsonenespañol.com/sears

Visite MasteringPhysics en:
www.masteringphysics.com





ISBN 978-607-32-2190-0
90000
9 786073 221900